

# Modelado, análisis y resolución numérica de un problema de obstáculo en Glaciología.

Ana Isabel Muñoz Montalvo

Junio de 2003

Directores: Emanuele Schiavi y Ultano Kindelán



Emanuele Schiavi, profesor titular de la Universidad Rey Juan Carlos y Ultano Kindelán, profesor titular de la Universidad Politécnica de Madrid certifican:

que la presente memoria de tesis, titulada *Modelado, análisis y resolución numérica de un problema de obstáculo en Glaciología*, ha sido realizada bajo nuestra dirección por D<sup>a</sup>. Ana Muñoz Montalvo en el Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza, para optar al grado de doctor por la Universidad Rey Juan Carlos. Hacemos constar que la citada Tesis reúne todos los requisitos necesarios para su defensa y aprobación.

Móstoles, a 2 de junio de 2003.

Fdo: Emanuele Schiavi

Fdo. Ultano Kindelán



*A mis padres.*



# Resumen

En esta tesis se proponen, analizan y resuelven diversos modelos físicos que simulan el comportamiento de las corrientes de hielo, que fluyen a lo largo de una base blanda y deformable, observadas en la Siple Coast (Antártida Occidental).

Se comienza describiendo las leyes básicas que gobiernan la dinámica de los casquetes polares así como las principales propiedades y características de las corrientes de hielo de la Siple Coast. A continuación se describe y resuelve numéricamente un primer modelo (Fowler y Johnson, 1996, [53]).

Con el objeto de superar las limitaciones detectadas en el modelo anterior, se propone una reformulación del mismo en términos de operadores multívocos e inecuaciones variacionales, y se deduce el problema de obstáculo asociado. La nueva formulación del modelo generaliza la formulación fuerte de Fowler y Johnson en el sentido de que puede ser aplicada a una base con régimen térmico polar. Después de analizar matemáticamente el sistema acoplado de ecuaciones en derivadas parciales que constituye el modelo reformulado (modelo multívoco), se obtiene el resultado de existencia de soluciones. El estudio de la existencia de soluciones se lleva a cabo mediante un esquema de desacoplamiento iterativo de las ecuaciones (acopladas) del modelo multívoco. Posteriormente se prueba la convergencia de las soluciones obtenidas en las distintas etapas del desacoplamiento a una solución débil acotada y físicamente admisible del modelo.

El modelo multívoco se resuelve numéricamente mediante un método de elementos finitos y varias técnicas numéricas tales como el método de Gauss-Seidel con proyección y el método de dualidad de Bermúdez-Moreno con distintas variantes y distintos valores paramétricos.

Por último, se plantea un nuevo modelo, *totalmente bidimensional*, con el que se pretenden superar las limitaciones del modelo original de Fowler y Johnson no resueltas por el modelo multívoco. En el nuevo modelo se tendrán en cuenta las variaciones laterales del espesor de hielo, deduciéndose un sistema fuertemente acoplado de ecuaciones elípticas para el espesor y la presión efectiva. Para finalizar, se presentan algunos resultados preliminares obtenidos con el modelo en cuestión y se proponen nuevas líneas de investigación.





# Abstract

In this thesis we propose, analyze and solve some physically based models simulating the streaming of ice sheets flowing along soft and deformable beds in the Siple Coast (West Antarctica).

The study begins with a description of the basic laws that govern the ice-sheet dynamics and the characteristics and main properties of the ice streams of the Siple Coast. Afterwards a first model (Fowler and Johnson 1996, [53]) is explained and numerically solved.

In order to overcome the drawbacks detected in the Fowler and Johnson model, a reformulation of the model in terms of multivalued operators and variational inequalities is proposed and the associated obstacle problem is deduced. The model formulation generalizes the Fowler and Johnson model in the sense that it can be applied to a cold base. Existence results are obtained after mathematically analyzing the coupled system of partial differential equations which the model consists of (multivalued model in the sequel). In this framework, the study of the well posedness of the model is developed by means of an iterative decoupling scheme for the (coupled) equations of the (previous) multivalued formulation. The convergence of the scheme to a weak bounded and physically admissible solution is then proved.

The multivalued model is numerically solved with a classical finite elements method together with several numerical tools, such as the Gauss-Seidel with projection and the Bermúdez-Moreno duality method with different options and parameter choices.

Finally a *fully 2D* new model is proposed to by-pass the limitations of the original Fowler and Johnson model not solved with the multivalued formulation. The lateral variations of the ice thickness are then included and an elliptic strongly coupled system for the ice thickness and the effective pressure in the drainage system is deduced. Some preliminary results are obtained and new lines of research are proposed.



# Agradecimientos

Son numerosas las personas a las cuales me gustaría expresar mi gratitud, pero quisiera mencionar expresamente a las siguientes:

a mis directores de tesis doctoral, los profesores Emanuele Schiavi y Ultano Kindelán, por haberme ofrecido la posibilidad de hacer este trabajo y compartir con ellos tan gratos momentos, por su apoyo y paciencia, por sus consejos y explicaciones, por tantas cosas,...

a los profesores Carlos Vázquez, José Durany y Natividad Calvo, por su cariño, sus atenciones, por su ayuda y dedicación, por su orientación y enseñanzas en problemas de análisis numérico,

al profesor J. Ildefonso Díaz, por su apoyo, por sus ideas, por su ayuda y explicaciones en temas relacionados con el análisis funcional,

a los profesores Andrew Fowler y Félix Ng, de la universidad de Oxford, por su hospitalidad, por su disponibilidad, por el interés mostrado en mis investigaciones y por sus enseñanzas acerca del modelado de distintos fenómenos geofísicos,

al profesor Carlos Conde, por su confianza, por sus atenciones, sus consejos, su apoyo, y sobre todo, por habernos animado a mis directores de tesis y a mí, a realizar este trabajo, gracias,

a mis compañeros de departamento y en especial, a mis compañeros de despacho, Luis y Ariel, a todos, por su cariño, por su amistad, por animarme y ayudarme, por estar ahí, siempre que lo he necesitado,...

a mis compañeros y profesores de la *complu*, por su amistad y el interés mostrado hacia mi persona,

y por último, a mis padres, a mi familia y a mis amigos, por sus mimos, sus atenciones, su apoyo, por aguantarme,...., por todo.



# Índice

---

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Motivación y objetivos.</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>9</b>  |
| 1.1. El flujo del hielo. . . . .  | 9         |
| 1.1.1. Ecuaciones de conservación. . . . .  | 11        |
| 1.1.2. Leyes constitutivas. . . . .   | 13        |
| 1.2. Teorías sobre el flujo del hielo. . . . .  | 14        |
| 1.3. Las corrientes de hielo rápidas de la Siple Coast. . . . .   | 23        |
| 1.3.1. ¿Qué es una corriente de hielo rápida? . . . . .   | 25        |
| 1.3.2. Morfología y dinámica de las corrientes de la Siple Coast. . . . .                                       | 26        |
| 1.3.3. Características de la base y mecanismos del flujo de hielo en las corrientes de la Siple Coast. . . . .  | 29        |
| 1.3.4. El papel que desempeñan las corrientes de hielo rápidas dentro de la dinámica global terrestre . . . . . | 33        |
| <b>2. El modelo de Fowler y Johnson.</b>  | <b>39</b> |
| 2.1. Deducción de las ecuaciones dimensionales del modelo de Fowler y Johnson. . . . .                          | 42        |
| 2.2. Las ecuaciones adimensionales . . . . .  | 54        |
| 2.2.1. Las escalas del problema. . . . .  | 55        |
| 2.2.2. Ecuaciones adimensionales. . . . .   | 56        |
| 2.3. Resolución numérica del modelo de Fowler y Johnson. . . . .  | 57        |
| 2.3.1. Descripción del dominio considerado. Ecuaciones. . . . .   | 58        |
| 2.3.2. Esquema de resolución. . . . .   | 62        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 2.3.3.    | Simulación numérica. . . . .  | 64         |
| 2.3.4.    | Resultados. . . . .   | 67         |
| 2.3.5.    | Conclusiones. Limitaciones del modelo. . . . .                            | 69         |
| <b>3.</b> | <b>Modelo multívoco. Análisis matemático.</b>                             | <b>73</b>  |
| 3.1.      | Formulación multívoca. . . . .  | 74         |
| 3.2.      | Planteamiento matemático. . . . .   | 81         |
| 3.2.1.    | Esquema de desacoplamiento iterativo. . . . .                             | 82         |
| 3.2.2.    | Problema para el espesor de hielo. . . . .                                | 89         |
| 3.2.3.    | Problema para la velocidad acumulada. . . . .                             | 93         |
| 3.2.4.    | Problema relativo al flujo de agua. . . . .                               | 94         |
| 3.3.      | Convergencia del esquema iterativo. . . . .                               | 127        |
| 3.3.1.    | Existencia de soluciones débiles acotadas. . . . .                        | 133        |
| 3.3.2.    | Regularidad de las magnitudes físicas. . . . .                            | 134        |
| <b>4.</b> | <b>Análisis numérico del modelo multívoco.</b>                            | <b>135</b> |
| 4.1.      | Resolución numérica del sistema. . . . .                                  | 137        |
| 4.2.      | Método de Gauss-Seidel con proyección. . . . .                            | 140        |
| 4.2.1.    | Formulación débil del problema asociado al flujo de agua. . . . .         | 140        |
| 4.2.2.    | Esquema de resolución. . . . .  | 141        |
| 4.3.      | Algoritmo de dualidad con un multiplicador. . . . .                       | 143        |
| 4.3.1.    | Cálculo de la aproximación Yosida de la subdiferencial. . . . .           | 146        |
| 4.4.      | Algoritmo de dualidad con un multiplicador y el método de Newton. . . . . | 147        |
| 4.5.      | Algoritmo de dualidad con dos multiplicadores. . . . .                    | 149        |
| 4.5.1.    | Cálculo de las aproximaciones Yosida. . . . .                             | 152        |
| 4.6.      | Simulación numérica. . . . .  | 154        |
| 4.6.1.    | Interpretación física de los resultados. . . . .                          | 159        |

---

|  |            |
|--|------------|
| 4.6.2. Comparación de los resultados obtenidos por los diferentes métodos. . . . . | 168        |
| 4.7. Conclusiones . . . . .  | 176        |
| <b>5. El Sistema elíptico.</b>   | <b>179</b> |
| 5.1. Deducción del modelo. . . . .   | 180        |
| 5.1.1. La formulación físico-matemática. . . . .                                   | 181        |
| 5.1.2. Las ecuaciones básicas del modelo. . . . .                                  | 185        |
| 5.2. El sistema elíptico para el espesor y la presión efectiva. . . . .            | 189        |
| 5.2.1. Ecuación de conservación de la masa. . . . .                                | 190        |
| 5.2.2. Ecuación de conservación para la presión efectiva. . . . .                  | 193        |
| 5.2.3. Condiciones de contorno . . . . .   | 193        |
| 5.3. Mantos de hielo ( <i>Ice sheets</i> ). . . . .                                | 194        |
| <b>6. Conclusiones</b>   | <b>209</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>219</b> |





# Índice de Figuras

---

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 1.1. | Lengua de glaciación adentrándose en el mar . . . . .   | 10  |
| 1.2. | Mapa del continente antártico . . . . .   | 24  |
| 1.3. | Esquema de las cinco corrientes de hielo de la Siple Coast . . . . .  | 27  |
| 1.4. | Esquema de la geomorfología del manto de hielo de la Antártida Occidental . . . . .   | 30  |
| 2.1. | Flujo de agua inicial ( $Q_0$ ) para el modelo de Fowler y Johnson. . . . .   | 66  |
| 2.2. | Resultados obtenidos con el modelo de Fowler y Johnson: flujo de agua, velocidad, espesor, cizalla y velocidad acumulada. . . . .             | 68  |
| 2.3. | Resultados obtenidos con el modelo de Fowler y Johnson: balance de calor y enfriamiento. . . . .  | 69  |
| 2.4. | Flujo de agua con $\gamma = 0$ y $\gamma = 0,6$ , respectivamente. . . . .  | 70  |
| 2.5. | Flujo de agua con $\delta = 1$ y $\delta = 0,1$ , respectivamente. . . . .  | 71  |
| 3.1. | Grafo maximal monótono. . . . .   | 77  |
| 3.2. | Funciones auxiliares. . . . .   | 84  |
| 4.1. | Flujo de agua inicial ( $Q_0$ ) para el modelo multívoco. . . . .   | 157 |
| 4.2. | Modelo multívoco resuelto mediante el método de Gauss-Seidel con proyección: flujo de agua y velocidad, respectivamente. . . . .              | 159 |
| 4.3. | Modelo multívoco resuelto mediante el método de Gauss-Seidel con proyección: espesor de hielo y cizalla, respectivamente. . . . .             | 160 |
| 4.4. | Modelo multívoco resuelto mediante el método de Gauss-Seidel con proyección: presión efectiva y velocidad acumulada, respectivamente. . . . . | 161 |
| 4.5. | Modelo multívoco resuelto mediante el método de Gauss-Seidel con proyección: balance de calor y enfriamiento, respectivamente. . . . .        | 163 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.6. En la figura de la izquierda, aparecen representadas las zonas en las que la base presenta un régimen térmico temperado ( $Q > 0$ ) y aquellas en las cuales presenta un régimen térmico polar ( $Q = 0$ ). En la de la derecha aparecen representadas las zonas en las que el balance de calor es positivo (calentamiento) y aquellas en las que es negativo (enfriamiento). . . . . | 163 |
| 4.7. Flujo de agua y velocidad en las secciones A (localizada en la zona en la que surge la corriente) y B (localizada en una zona de flujo lento). . . . .  | 164 |
| 4.8. Enfriamiento y balance de calor en las secciones A (localizada en la zona en la que surge la corriente) y B (localizada en una zona de flujo lento). . . . .  | 165 |
| 4.9. Presión efectiva y velocidad acumulada en las secciones A (localizada en la zona en la que surge la corriente) y B (localizada en una zona de flujo lento). . . . .   | 166 |
| 4.10. Secciones del espesor y de la cizalla. . . . .   | 167 |
| 4.11. Relaciones de multivocidad entre las variables: $\tau$ y $u$ , $\tau$ y $Q$ , y $Q$ y $u$ . . . . .  | 167 |
| 4.12. Resultados obtenidos para el flujo de agua. . . . .  | 170 |
| 4.13. Resultados obtenidos para la velocidad del hielo. . . . .  | 171 |
| 4.14. Resultados obtenidos para el espesor de hielo. . . . .   | 172 |
| 4.15. Resultados obtenidos para la cizalla. . . . .  | 173 |
| 4.16. Resultados obtenidos para el balance de calor. . . . .   | 174 |
| 4.17. Resultados obtenidos para el enfriamiento. . . . .   | 175 |
| 4.18. Resultados obtenidos para la velocidad acumulada. . . . .  | 176 |
| 4.19. Resultados obtenidos para la presión efectiva. . . . .   | 177 |
| 5.1. Presión efectiva para $C = 0,9525 \cdot 10^{12} > 0$ y $Z_m = 10^4$ . Nótese la capa límite en el margen derecho (grounding line) donde $N_m = Z_m^{1/m} = Z_m^{-2} = 10^{-8}$ . . . . .  | 201 |

- 5.2. Para la obtención de la figura de la izquierda se ha utilizado  $N_m \approx 10^{-16}$ , es decir,  $Z_m \approx 10^8$ . Puesto que  $C \approx -0,318 \cdot 10^{14}$  y  $Z_C = [(p-1)/p](-C)^{1/(p-1)} \approx 0,376 \cdot 10^7$ , al ser  $Z_m \approx 10^8 > 0,376 \cdot 10^7$ , no se da singularidad. Para la obtención de la figura de la derecha se ha utilizado  $N_m \approx 10^{-12}$ , es decir,  $Z_m \approx 10^6$ . En este caso, como  $10^6 \approx Z_m < Z_C \approx 0,376 \cdot 10^7$ ,  $N(x)$  presenta una singularidad en el intervalo  $(0, 1)$ . . . . . 205



# Motivación y objetivos.

Era a principios del siglo XIX, cuando Joseph Fourier en uno de sus trabajos ([43], 1824) hacía la siguiente reflexión:

*“El establecimiento y el progreso de las sociedades humanas, así como la acción de las fuerzas naturales, pueden cambiar notablemente y en regiones extensas, el estado de la superficie del suelo, la distribución de las aguas y los grandes movimientos de aire. Estos efectos son capaces de hacer variar, en el transcurso de muchos siglos, el grado de calor medio...”*

Los estudios teóricos y las observaciones realizadas, hasta ese momento, del sistema dinámico terrestre eran sectoriales, es decir, analizaban y estudiaban los distintos aspectos de la dinámica terrestre como si se tratase de parcelas inconexas entre sí. Además, los efectos antropogénicos nunca habían sido considerados a la hora de enfocar y afrontar el estudio, conocimiento y comprensión del Sistema Global del planeta Tierra. De este modo, las revolucionarias ideas de Fourier suponen un cambio en la forma de entender como debe abordarse el estudio del sistema dinámico terrestre y servirán de base para la elaboración de un nuevo proyecto de investigación. Ahora bien, este ambicioso proyecto no será posible llevarlo a la práctica hasta un siglo más tarde, ya que en el siglo XIX, los datos experimentales de carácter global y las herramientas matemáticas eran insuficientes, haciendo imposible proceder de otra manera que no fuera enfrentándose al problema global mediante estudios parciales. Los progresos acontecidos en el marco del análisis matemático y en el cálculo científico basado en ordenadores a finales del siglo XX permitirán que el *estudio de lo Global*, empiece a dejar de ser un proyecto utópico. En el libro de Lions, [75], se ofrece una exposición detallada del papel de las matemáticas y de los ordenadores en el estudio del planeta Tierra.

La carencia de medios que sufrían los científicos de finales del siglo XIX, no fue motivo de desaliento, sino todo lo contrario. En 1885, la Academia de Ciencias de París propuso un problema para concurso sobre el tema: la *Distribución del calor en la superficie de Globo* y concedió el premio, cincuenta y seis años más tarde (en 1941)

a Milankovitch, por su teoría sobre los periodos de glaciación. El planteamiento de tal problema, supuso que una gran parte de la Comunidad Científica dirigiera sus esfuerzos a la búsqueda de una *explicación matemática del clima*. Entre las respuestas que fueron presentadas, ninguna de ellas tenía en cuenta los efectos antropogénicos en la dinámica del clima.

El equilibrio dinámico en torno de la Tierra es posible gracias a la atmósfera que lo rodea y que por el efecto *invernadero* de la misma, mantiene temperaturas y condiciones compatibles con el desarrollo de las actividades humanas. A finales del siglo XIX, ya se observa una preocupación cada vez mayor por parte de algunos científicos importantes, entre ellos Arrhenius, en el aumento de la proporción de dióxido de carbono (el dióxido de carbono ( $CO_2$ ) y el metano ( $CH_4$ ) son considerados dos de los principales gases con efecto invernadero) en la atmósfera y sus consecuencias climáticas. Los trabajos de Finsterwalder y Marchi, a principios del siglo XX, dejan patente el creciente interés de la Comunidad Científica por el estudio de los mecanismos de autorregulación de la Tierra (*feedbacks*) frente a los cambios climáticos del Planeta. A mediados del siglo XX ya se empiezan a tener las primeras evidencias (mediciones realizadas entre otros por Keeling, Suess,...) de que se estaba produciendo un aumento de  $CO_2$  atmosférico ligado a las actividades humanas.

En 1986, el Consejo Internacional de Uniones Científicas decidió el IGBP (Programa Internacional Geosfera-Biosfera), llamado comúnmente *Global Change*. El propósito de dicho programa es describir y comprender los procesos interactivos de origen físico, químico y biológico que regulan el sistema de la Tierra, los cambios que se producen en el sistema y la forma en que los factores humanos influyen sobre estos cambios. Así pues, el conocimiento y comprensión de la dinámica global terrestre se ha convertido en una de las líneas de investigación prioritarias llevada a cabo por numerosas instituciones europeas e internacionales, por ejemplo la NASA, la ESF (European Science Foundation), la USGS (Geological Survey Global Change Research Program), el PRBNRC (Polar Research Board of the National Research Council), el SCAR (Scientific Committee on Antarctic Research), etc.

La preocupación que despiertan los posibles efectos (deterioro de la capa de Ozono, efecto invernadero, etc.) que puedan tener las actividades humanas en el medio ambiente y por tanto, en la dinámica global de nuestro planeta, no queda reducida al Círculo Científico, sino que trasciende al conjunto de la Sociedad, como se deduce de su mención cada vez más frecuente en los Medios de Comunicación. Queda pues en manos de la Comunidad Científica la responsabilidad de sugerir, como resultado de sus investigaciones, pautas de comportamiento que el conjunto de la Sociedad debiera seguir para contribuir a que la contaminación y deterioro del planeta sea

menor.

Las investigaciones llevadas a cabo por la Comunidad Científica han de basarse, fundamentalmente, en dos líneas, complementarias una de la otra: una de ellas es plantear modelos que permitan entender los mecanismos que intervienen en la dinámica terrestre global, y la otra (trabajo de campo) obtener datos y mediciones de fenómenos, análisis de estructuras, etc, necesarias para poder contrastar dichos modelos. El entendimiento y comprensión de dichos mecanismos y el conocimiento de los factores que en ellos intervienen es un paso previo a cualquier tipo de predicción acerca de los efectos de posibles variaciones en determinados factores que intervienen en ellos, así como al planteamiento de posibles soluciones o formas de paliar supuestos daños medioambientales.

Con el propósito de llevar a cabo un estudio de la dinámica global de la Tierra, aparecen en la bibliografía tres tipos de modelos generales fundamentales: los EBMs (Energy Balance Models, modelos de diagnóstico que intentan mostrar aspectos cualitativos del clima y comprender su evolución temporal frente a cambios de parámetros), los GCM (Global Circulation Models, modelos de pronóstico, que tienen como objetivo predecir la evolución temporal de la dinámica de la atmósfera) y los RCMs (Radiative Convective Models). Fueron autores como Budyko ([21]), Sellers ([101]), Pfeffer ([95]), por citar algunos, los pioneros en la elaboración de modelos relativos a la dinámica del clima, ofreciendo así una base sobre la cual avanzar y progresar. Los avances tecnológicos, en lo que a la obtención y análisis de mediciones y datos se refiere, junto con los relativos a técnicas de tratamiento matemático (analíticas y numéricas) han permitido plantear modelos cada vez más realistas y completos. En las últimas décadas destacan los trabajos realizados por Ghil ([58], [59]), McWilliams ([85]), Robertson ([96]), Barnett ([6]), Díaz ([34]), Tello ([106]), Mechoso, Latif, Grahan, Chang, etc.

Es bien conocido que la dinámica de las grandes masas de hielo es una de las numerosas componentes del complejo sistema global de la Tierra (Heinrich, [63]), ya que por ejemplo influye en la variación del valor de la función del *albedo terrestre*, en la composición salina de los océanos, etc... Por otra parte, la dinámica de las masas de hielo es influenciada por los cambios climáticos pues se piensa que muchos de los fenómenos que se están produciendo en la actualidad en el gran continente Antártico (por ejemplo el reciente desprendimiento de la plataforma de hielo Larsen B, 7 de Marzo de 2002) están asociados a un, todavía hipotético, progresivo recalentamiento de la atmósfera terrestre debido al vertido humano a la misma de los llamados gases invernadero.

Parece existir un consenso entre los climatólogos, aunque no puedan todavía con-

firmarse con seguridad las mediciones metereológicas, de que la temperatura en la segunda mitad del siglo XXI será de dos a cuatro grados superior a la de la época preindustrial. Una de las mayores amenazas que representaría un aumento de la temperatura global de la Tierra es, sin duda, el derretimiento de la gran masa de hielo del continente Antártico, pues éste originaría un incremento de al menos cinco metros en el nivel del mar, quedando en consecuencia anegadas por el agua del mar muchas de las actuales zonas costeras con gran actividad humana. El continente Antártico es considerado potencialmente inestable, es decir, sus mantos de hielo presentan una gran propensión a desintegrarse y por tanto, a desaparecer. Esta consideración se fundamenta en dos hechos: uno es que gran parte del hielo de la Antártida Occidental yace sobre un lecho que se encuentra varios metros (unos cuatrocientos) por debajo de nivel del mar. Un manto de hielo con la propiedad anterior es denominado en la bibliografía *marine ice sheet*. El otro hecho es que aunque parte del manto de hielo de la Antártida Occidental se sustenta sobre lecho continental, otra gran parte flota sobre el mar adentrándose en él cientos de metros. A un manto de hielo con esta característica se le denomina *ice shelf*. Esto explica, en parte, los continuos desprendimientos de bloques de hielo (*icebergs*) en los bordes.

De las consideraciones realizadas anteriormente se deduce la importancia de proponer modelos sobre la dinámica de los casquetes polares, ISMs (Ice Sheet Models) con los cuales analizar y entender los mecanismos que operan en el flujo del hielo, para comprender, elaborar y validar modelos más generales, como por ejemplo, los EBMs y los GCMs. Como respuesta a esta necesidad, son numerosos los programas multidisciplinarios que han dirigido sus investigaciones hacia el estudio del continente Antártico, pues representa junto con Groenlandia, el 90 % de toda la masa de hielo que existe en el planeta. Dentro de los programas que se ocupan de estudiar la Antártida destacamos tres de ellos: el programa WAIS (West Antarctic Ice Sheet) que estudia el manto polar que fluye hacia el mar de Ross, en el cual se ha detectado la existencia de corrientes de hielo rápidas, *fast ice streams* (Bindschadler), fenómeno en cuyo estudio se basa esta memoria; el FRISP (Filscher-Ronne Ice Shelf Program), que estudia el manto de hielo que fluye hacia la plataforma del mar de Ronne; y el tercero es el ASEP (Amudnsen Sea Embayment Proyect) centrado en el estudio del manto que fluye hacia el mar de Amudnsen. Programas como los anteriores permiten obtener y analizar datos experimentales<sup>1</sup> cada vez más numerosos y fiables gracias al avance de las nuevas tecnologías e interpretar la información que encierra el hielo (archivo de la historia paleoclimática del planeta). Esto posibilita

---

<sup>1</sup>Algunos de los métodos empleados para su obtención son, por ejemplo: observaciones interferométricas por radar, fotografías aéreas y por satélite, métodos GPS, análisis químicos del hielo del interior de las masas polares, etc.



un creciente conocimiento del comportamiento de la dinámica de las grandes masas de hielo y su respuesta ante posibles cambios en las condiciones medioambientales.

La complejidad de los procesos que intervienen en la dinámica de los casquetes polares y su interrelación con una gran variedad de elementos (atmósfera, litosfera, océanos, etc.) hace que para abordar su estudio sea necesario un acercamiento y tratamiento multidisciplinar. De hecho, la *glaciología* es normalmente considerada como una rama de la mecánica de fluidos que reúne a disciplinas, tales como la oceanografía, la paleoclimatología, la geofísica, la geología, las ciencias de los materiales, etc. Entre dichas disciplinas también se encuentra la *matemática aplicada*, pues con sus técnicas de modelado basadas en ecuaciones en derivadas parciales, sus técnicas para el análisis matemático de los modelos y su amplia gama de métodos para la simulación numérica de fenómenos termomecánicos, resulta una herramienta fundamental para el desarrollo de la glaciología teórica.

La formulación matemática de modelos globales (que traten de incluir todas las componentes y factores) para describir la dinámica del hielo es, además de complicada, en parte por la controversia existente acerca de la naturaleza de algunos aspectos del flujo del hielo, inviable, desde el punto de vista de las aplicaciones. Este hecho se pone de manifiesto sin más que observar las distintas simplificaciones y desacoplamientos de los fenómenos físicos que se han utilizado desde la aparición de los primeros modelos matemáticos globales de finales de los años cincuenta. Para más detalles, se pueden consultar por ejemplo los textos de Lliboutry, Hutter o Paterson, [78], [66], [94]. Es usual, por tanto encontrar en la bibliografía modelos termodinámicos, modelos isotermos, modelos termomecánicos, modelos específicos para fenómenos concretos, etc. Las simplificaciones realizadas (consistentes en ignorar cierto tipo de fenómenos locales, suponer ciertos valores paramétricos...) para que la obtención de soluciones sea posible, no impiden sin embargo, que las soluciones matemáticas sean físicamente relevantes. Es aquí donde la técnica de adimensionalización de las ecuaciones de las que consta el modelo matemático, muestra todo su potencial. Esta técnica permite desprestigiar algunos términos del modelo en base al establecimiento de relaciones entre los órdenes de magnitud de algunas incógnitas y de este modo obtener modelos que pueden ser tratados con técnicas analíticas y numéricas conocidas. Sin embargo, a pesar de las restricciones impuestas y simplificaciones realizadas en el problema, el grado de complejidad sigue siendo, en la mayoría de los casos, muy elevado desde el punto de vista del tratamiento analítico. En ocasiones, como consecuencia de la naturaleza de determinados fenómenos, se obtienen problemas que hacen necesario el uso de sofisticadas técnicas matemáticas. Por ejemplo, es corriente que aparezcan interfases que requieren la utilización de ecuaciones multívocas (como consecuencia de la inclusión en las mismas de grafos maximales monótonos

multívocos) para el tratamiento matemáticamente correcto de las fronteras libres asociadas. Trabajos realizados por Rodrigues [98], Díaz y Schiavi [36], Calvo, Durany y Vázquez [25], por citar algunos, resuelven el tipo de dificultad que se acaba de mencionar.

La aportación de los resultados presentados en esta memoria en el marco del estudio y comprensión de las dinámicas no lineales de las grandes masas de hielo, se sitúa en el ámbito de la Matemática Aplicada. En concreto, la labor de investigación realizada se centra en fenómenos recientemente observados por los glaciólogos, relativos a variaciones en el régimen del hielo, denominados en la bibliografía *ice surging* (rápido avance de las masas de hielo en la dirección principal del flujo) e *ice streaming* (oscilaciones laterales en el régimen del flujo que pasa de lento a rápido, es decir, existencia de corrientes rápidas de hielo), que abogan por una explicación en términos de mecánica de fluidos geofísicos no newtonianos. Estos fenómenos no lineales son debidos a la presencia de una base blanda constituida por una capa de sedimentos porosos deformables cuando se saturan con agua y están relacionados con mecanismos de inestabilidad en el flujo del hielo de los casquetes polares, según describieron Fowler y Johnson en [53]. Para describir la interacción y posibles mecanismos de realimentación (*feedbacks*) entre la dinámica del hielo, el mecanismo de deslizamiento basal del hielo y el sistema de drenaje en la base, Fowler y Johnson propusieron un modelo descriptivo para el fenómeno de las corrientes de hielo. Dicho modelo es aplicable a las corrientes de hielo detectadas en la Siple Coast (Antártida Occidental) pues se ha demostrado la existencia de una capa de sedimentos deformable (*till*) en su base.

El modelo de Fowler y Johnson constituye el punto de partida del trabajo de investigación presentado en esta memoria, que sigue el procedimiento típico de las investigaciones llevadas a cabo en el ámbito de la Matemática Aplicada. Con los resultados presentados en esta memoria se pretende contribuir, en la medida de lo posible, a la investigación llevada a cabo por la Comunidad Científica para desvelar los misterios que encierra la dinámica de las grandes masas de hielo y así, a través de su gradual conocimiento, poder predecir futuros comportamientos y diagnosticar oportunas pautas de comportamiento para evitar cambios con efectos nocivos, incluso catastróficos en la dinámica global de la Tierra.

En concreto, los objetivos que pretende alcanzar esta tesis doctoral pueden resumirse en los siguientes:

- Revisar el modelo propuesto por Fowler y Johnson en [53].
- Resolver dicho modelo mediante un método de diferencias finitas. Interpretar

físicamente los resultados numéricos obtenidos y presentar las limitaciones detectadas en el modelo. Proponer posibles modos de superar algunas de las limitaciones observadas.

- Reformular el modelo de Fowler y Johnson en términos de operadores multívocos, para que así, la frontera libre asociada a la naturaleza del fenómeno (problema de obstáculo unilateral) quede descrita de manera matemáticamente correcta.
- Analizar matemáticamente y resolver numéricamente el modelo reformulado (modelo multívoco) mediante distintas técnicas del análisis numérico apropiadas para la resolución de problemas de obstáculo.
- Plantear un modelo elíptico totalmente bidimensional, que generaliza el modelo de Fowler y Johnson, en un sentido a precisar.

Para alcanzar los objetivos citados, la tesis doctoral ha sido estructurada como sigue:

El primer capítulo consiste en una introducción, dividida en tres secciones. En la primera sección, se presentan las leyes básicas que rigen el flujo de hielo de los casquetes polares, en la segunda, se presenta un breve resumen acerca de la evolución y perfeccionamiento de las principales teorías sobre el flujo del hielo y en una tercera, se comentan algunas de las principales propiedades y características de las corrientes de hielo de la Siple Coast, así como sus posibles interrelaciones con otros sistemas dinámicos, en particular, su papel a distintos niveles: a nivel de la dinámica del casquete polar, a nivel de la dinámica del continente antártico y por último, a nivel de la dinámica global del planeta Tierra.

En el segundo capítulo se presenta, deduce y resuelve numéricamente el modelo que propusieron Fowler y Johnson ([53]) para describir las corrientes de hielo rápidas de la Siple Coast. Se interpretan y comentan los resultados obtenidos en la resolución numérica y se plantean algunas de las limitaciones detectadas en el modelo.

En el capítulo tercero se propone una reformulación del modelo de Fowler y Johnson en términos de operadores multívocos. Esto permite describir la interfase polar-temperada asociada a la generación espontánea de las corrientes de hielo rápidas de la Antártida Occidental, generalizando así el marco geofísico considerado hasta ahora en la bibliografía y hacer un tratamiento matemáticamente correcto del problema de obstáculo asociado a la naturaleza del fenómeno. En este capítulo, también se realizará el análisis matemático del sistema de ecuaciones acoplado del modelo reformulado, al cual, de ahora en adelante, haremos referencia como modelo multívoco. En particular, se presentará el resultado de existencia de soluciones para dicho

sistema, cuya demostración hará necesario, dada la complejidad de las e.d.p.'s que constituyen el sistema, el empleo de diferentes técnicas de análisis funcional.

En el capítulo cuarto se presentará la resolución del modelo multívoco mediante técnicas numéricas apropiadas para el tipo de problema que se trata de resolver. En concreto, se utilizarán el método de Gauss-Seidel con proyección y el método de dualidad de Bermúdez Moreno con distintas variantes, para resolver el problema de obstáculo asociado a la determinación del flujo basal de agua. Para finalizar este capítulo, se hará una comparación de los resultados obtenidos por los diferentes métodos numéricos empleados y una interpretación física de dichos resultados.

En el capítulo quinto, se propondrá un modelo totalmente bidimensional, con el que se pretende superar una de las limitaciones del modelo de Fowler y Johnson. En este modelo se tendrá en cuenta la posible influencia de la variación respecto de la dirección transversal (perpendicular a la dirección principal del flujo de hielo) de los valores de las distintas variables.

Y para finalizar, en el último capítulo, se recogen las conclusiones obtenidas tras la realización del trabajo de investigación presentado en esta memoria y se proponen posibles, algunas ya comenzadas, líneas de trabajo futuras, según las cuales continuar nuestra labor investigadora en el marco del modelado de la dinámica no lineal del flujo de hielo. De este modo, utilizando los métodos típicos de la matemática aplicada, intentaremos seguir contribuyendo a un mayor conocimiento y entendimiento del sistema dinámico de las grandes masas de hielo, problema de gran interés para la comunidad científica, dado su potencial impacto medioambiental.

# Capítulo 1

## Introducción

En las tres secciones en las cuales aparece dividido este capítulo, se pretende ofrecer una breve introducción al problema del estudio del flujo del hielo de los casquetes polares y al fenómeno concreto de la generación de corrientes de hielo rápidas. En la primera sección se hace una breve descripción de las ecuaciones que rigen el flujo del hielo. En la segunda sección se presentan los factores que pueden intervenir en el mecanismo que regula el flujo de hielo, ofreciendo para ello, de forma resumida, un recorrido histórico de cómo estos factores fueron introducidos en las principales teorías acerca del flujo del hielo. Y en la tercera sección se comienza explicando en qué consiste el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas, para luego estudiar el caso concreto de las corrientes de hielo rápidas de la Siple Coast. Se hablará de su morfología, de su dinámica y del papel de dichas corrientes en el sistema dinámico global terrestre.

### 1.1. El flujo del hielo.

Hoy en día, los casquetes polares y glaciares cubren alrededor del 10 % de la superficie terrestre y representan alrededor del 75 % de todo el agua dulce de la Tierra. De ese 10 %, salvo el 1 %, que se encuentra en zonas cercanas al normal desarrollo de la actividad humana, el resto se encuentra localizado en Groenlandia (hemisferio norte) y en el continente glaciar Antártico (hemisferio sur).

Para llevar a cabo el estudio del flujo del hielo es preciso distinguir entre el flujo de hielo de los glaciares y el de los casquetes polares, pues tanto los glaciares como los casquetes, presentan particularidades, sobre todo referentes a las dimensiones, que obligan a un tratamiento diferenciado. Los glaciares tienen longitudes del orden de

10 a 50 km, su anchura es del orden de metros y su espesor de decenas de metros. Estos se mueven principalmente en una dirección a velocidades típicas del orden de 100 m/año, debido a la fuerza gravitatoria y a la inclinación del lecho sobre el que yacen. Los casquetes polares pueden llegar a alcanzar dimensiones del orden de 1000 km tanto en su longitud como en su amplitud, y espesores de hielo superiores a 2000 m. Estos descansan sobre lechos horizontales y su flujo se produce en todas direcciones, partiendo de lo que se denomina *ice divide*, que es la zona de mayor espesor. El flujo del hielo de los casquetes polares, está justificado, en parte, por la deformación del hielo como consecuencia de la gravedad, debido a un desequilibrio entre los procesos de acumulación y de ablación (pérdida de masa de hielo). La fuerza que origina este flujo, denominada en la bibliografía *driving stress*, depende del espesor de la capa de hielo y es la responsable del perfil parabólico que presentan la mayoría de los casquetes polares.

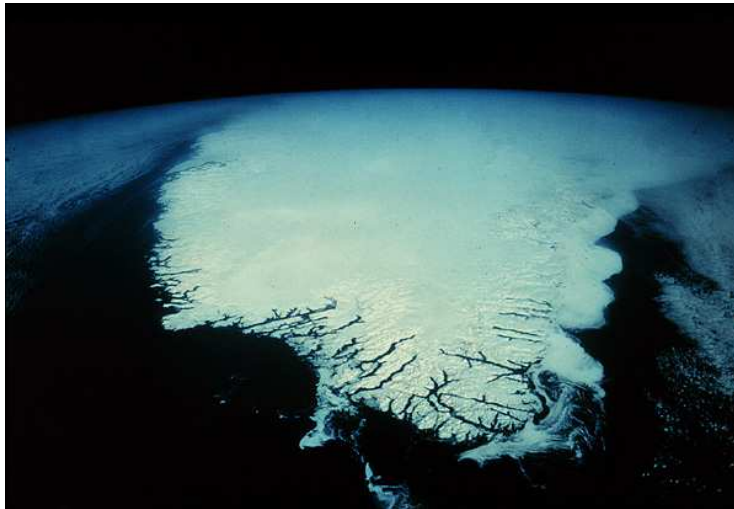


Figura 1.1: Lengua de glaciar adentrándose en el mar

Tanto los glaciares, como los casquetes, son grandes masas de hielo que se originan sobre el terreno por densificación y cristalización de la nieve en zonas con condiciones climáticas extremadamente frías. La nieve, en estas zonas, se va depositando en estratos. Con el paso del tiempo y debido al peso del hielo de capas superiores, en las capas más profundas, la nieve se va haciendo cada vez más compacta y dura, convirtiéndose en hielo. Este hielo glaciar, pese a tener la apariencia de un sólido, en realidad se deforma al estar sometido a presiones, es decir, se comporta como un material viscoso (su viscosidad es elevada, aproximadamente  $10^{15}$  veces la del agua). Como consecuencia de la dimensión de los casquetes polares, el hielo cercano a la base está sometido a presiones y temperaturas muy altas que pueden originar su deformación y por tanto, el movimiento del hielo. El alto valor de su viscosidad

hace que las velocidades típicas del flujo del hielo sean muy pequeñas, del orden de 5 a 50 metros al año (régimen de flujo lento), pero en ocasiones especiales, pueden alcanzarse velocidades del orden de 500 a 1000 metros al año (régimen rápido).

En el marco del régimen rápido del flujo del hielo pueden mencionarse tres fenómenos de destacado interés científico: el *ice surging*, que básicamente consiste en un aumento repentino en la velocidad del flujo del hielo que puede originar el desalojo de grandes masas de hielo; el *ice streaming*, del cual nos ocuparemos en esta memoria, y que consiste en la existencia de zonas de flujo rápido alternadas lateralmente con zonas de flujo típicamente lento; y los *jokulhlaups*, consistentes en la rápida expulsión de agua subglacial como consecuencia de una alteración en el sistema de drenaje basal, producido por terremotos, variaciones en la presión del agua subglacial, etc.

A continuación se comentan de forma breve las ecuaciones generales que rigen la dinámica del flujo del hielo. Para un estudio más detallado pueden consultarse el libro de Hutter [66] o el de Lliboutry [78], ambos sobre glaciología teórica.

El hielo es considerado por las Ciencias de los Materiales como un fluido incompresible, isótropo, viscoso, conductor débil de calor y con un flujo típicamente lento. El sistema dinámico se modela a través de balances locales de conservación de la masa, de conservación de la cantidad de movimiento y de conservación de la energía interna, expresados por las correspondientes ecuaciones de continuidad, equilibrio y conservación de la energía. Las ecuaciones de conservación son complementadas con leyes constitutivas que caracterizan al hielo y su respuesta a los procesos geofísicos de carga y deformación.

En las siguientes secciones serán comentadas las ecuaciones de conservación y leyes constitutivas fundamentales que se consideran en el modelado del flujo del hielo.

### 1.1.1. Ecuaciones de conservación.

El pequeño valor del número de Reynolds (del orden de  $10^{-13}$ ) asociado al flujo del hielo de los casquetes, hace que en glaciología se considere un régimen de flujo casi-estático para el hielo. Esta consideración hace que los efectos inerciales en la ecuación de Navier-Stokes puedan ser despreciados y que por tanto, el sistema de ecuaciones que describen el flujo del hielo, considerado como fluido incompresible, viscoso, con flujo típicamente lento y conducido por la gravedad, constituya un problema de Stokes dado por:

$$-\nabla \cdot \sigma = \rho g, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

ecuaciones de equilibrio y continuidad, respectivamente. El vector  $\mathbf{g}$  representa la gravedad y las fuerzas externas, representadas por el término  $\rho\mathbf{g}$ , vienen dadas esencialmente por el peso del hielo. En el caso de los casquetes, debido a sus perfiles típicos se tiene que  $\rho\mathbf{g} = (0, 0, -\rho g)$ , es decir, sólo actúa la componente vertical de la gravedad. El tensor  $\sigma$  que aparece en la ecuación de continuidad, representa los esfuerzos (presiones y fuerzas viscosas) que se generan en el interior del casquete y se compone de dos partes isotropas, una es la dada por la presión y la otra  $[\tau_{ij}]$ , que representa las fuerzas viscosas:

$$[\sigma_{ij}] = -p[\delta_{ij}] + [\tau_{ij}],$$

donde la presión  $p$  ha sido escalada con un factor  $1/Re$  para equilibrar los términos viscosos (dominantes).

El sistema de Stokes se acopla en el caso no isotérmico con un balance local de conservación de la energía interna  $E$ . En el caso de los casquetes, otras energías internas distintas a la térmica son despreciadas. La distribución de la temperatura está gobernada por un balance de los mecanismos de reacción, conducción y convección, que obedece la siguiente ecuación:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = k \Delta T + \tau_{ij} e_{ij},$$

donde las variables dimensionales  $T$  y  $\mathbf{u}$  representan los campos de temperatura (escalar) y velocidad (vectorial),  $c_p$  es el calor específico,  $\rho$  es la densidad del hielo y  $k$  es la conductividad térmica (que suele considerarse constante, aunque en realidad es función de la posición y de la temperatura, a través de la densidad).

El proceso de producción de calor y transporte en el interior del casquete podría ser explicado a grandes rasgos como sigue: el calor generado en la base del casquete es consecuencia de la disipación viscosa de energía mecánica, debida a la carga de presiones (peso) y al movimiento de masas. La viscosidad crea fuerzas tangenciales entre los estratos del fluido que se encuentran solapados uno sobre otro, y esto origina la liberación de energía mecánica en forma de energía térmica. El hielo, material viscoso, absorbe esta energía a una tasa de  $e_{ij}\tau_{ij}$ , que representa el término de reacción. El calor producido, se difunde por procesos de conducción debido a la difusión ( $k\Delta T$ ) y a la convección (transporte de calor en la dirección del campo de velocidades, y representado por  $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ ). La energía térmica aumenta la temperatura del hielo basal hasta alcanzar un estado de equilibrio térmico entre el calor generado y el difundido.



### 1.1.2. Leyes constitutivas.

La tasa de deformación del material, representada por el tensor  $[e_{ij}]$ , se define en mecánica de fluidos a través de la parte simétrica del gradiente de velocidades:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

El tensor  $[\tau_{ij}]$  representa el tensor de esfuerzos debido a la componente viscosa. En el caso de un material isótropo y viscoso, la tasa de deformación en el fluido debida a los esfuerzos, según la modelización clásica, se representa a través de los invariantes segundos de los tensores de carga ( $[\tau_{ij}]$ ) y deformación ( $[e_{ij}]$ ). Estas direcciones principales se definen, a través del convenio de suma de índices repetidos, por

$$2\mathbf{e}^2 = e_{ij} \cdot e_{ij} \quad \text{y} \quad 2\boldsymbol{\tau}^2 = \tau_{ij} \cdot \tau_{ij},$$

asumiendo por la hipótesis de isotropía que  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  y  $e_{ij} = e_{ji}$  y por la hipótesis de incompresibilidad que  $\sum \tau_{ii} = 0$  y  $\sum e_{ii} = 0$ . Los invariantes segundos  $\mathbf{e}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  de los tensores  $[e_{ij}]$  y  $[\tau_{ij}]$  están relacionados por la ley reológica de flujo no lineal de Glen del modo siguiente:

$$\mathbf{e} = A(T)G(\boldsymbol{\tau}), \quad (1.1)$$

donde  $e_{ij} = A(T)G(\boldsymbol{\tau})\tau_{ij}/\boldsymbol{\tau}$ ,  $\forall i, j = 1, 2, 3$ . La función  $G$ , en general, es una ley de potencias del tipo  $G(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}^n$ , que se conoce con el nombre de función de Glen. Cuando se toma  $n = 1$  se habla de flujo Newtoniano, en otro caso se habla de no-Newtoniano. El valor del exponente que se suele considerar y que tomaremos en esta memoria es  $n = 3$ . La función de la temperatura  $A(T)$  se asume del tipo Arrhenius,

$$A(T) = A_0 \exp(-E_a/RT),$$

donde  $A_0$  es una constante característica del material que no depende de la temperatura y cuyo valor se determina empíricamente,  $E_a$  representa la energía de activación y  $R = 8,3 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$  es la constante universal de los gases. Para expresar la ley constitutiva que define y caracteriza la viscosidad efectiva del hielo,  $\mu$ , a través de las hipótesis de incompresibilidad e isotropía, se considera la comúnmente aceptada relación lineal dada por el criterio generalizado de von Mises,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{e},$$

donde  $\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}$ ,  $\forall i, j = 1, 2, 3$ . Este criterio se conoce con el nombre de viscosidad tensorialmente lineal. Por el criterio de von Mises, la viscosidad  $\mu$  depende sólo del segundo invariante del tensor de esfuerzos  $[\tau_{ij}]$  y de la temperatura (a través del término de Arrhenius). Al sustituir la expresión del término de Arrhenius en la ley

de Glen, la viscosidad admite la expresión,  $\mu(\boldsymbol{\tau}, T) = [A(T)\boldsymbol{\tau}^{n-1}]^{-1}$ , que pone de manifiesto la relación entre la viscosidad y la temperatura (la viscosidad decrece cuando la temperatura crece).

Existen otras teorías, a las cuales no nos dedicaremos en esta memoria, que consideran un flujo plástico para el hielo, es decir, asumen que el hielo no comienza a deformarse hasta que la tensión alcanza un valor crítico a partir del cual, se produce una gran deformación que aumenta la velocidad del flujo del hielo. El flujo plástico puede ser estudiado como el límite de  $e_{ij} = A(T)G(\boldsymbol{\tau})\tau_{ij}/\boldsymbol{\tau}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $G(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}^n$ .

La temperatura, como puede apreciarse, va a ser uno de los principales factores en el control de los mecanismos que van a regir el flujo de hielo. La temperatura en la base está determinada por el calor generado en la base del glaciar o manto de hielo y también por el gradiente de temperatura en la capa de hielo situada inmediatamente por encima al hielo basal (véase por ejemplo, [49]), el cual determina la tasa de conducción de calor. El calor generado en la base puede ser geotérmico, de fricción por el deslizamiento sobre la base y también de fricción debida a la deformación interna del hielo glaciar. El gradiente de temperatura va a depender de la temperatura del hielo basal, de la temperatura superficial, del espesor del hielo y de la conductividad térmica. El aumento de la temperatura del hielo basal con el aumento del espesor, es decir, la relación de proporcionalidad directa entre el espesor de hielo y la temperatura basal, se debe a que a mayor espesor, mayor aislamiento del hielo basal del exterior y mayores presiones ejercidas por la masa de hielo. Los glaciares y masas de hielo que presentan una base temperada (la temperatura en la base alcanza el valor de la temperatura de fusión del hielo a presión local) suelen ser de gran espesor y de movimiento rápido. En general, los glaciares alternan tanto espacial como temporalmente los estados temperado y polar (temperatura basal por debajo del valor de la temperatura de fusión del hielo a presión local).

Una vez vistas las ecuaciones básicas que rigen el flujo del hielo, en la siguiente sección, presentaremos algunas de las teorías sobre el flujo del hielo, comentando su evolución y su progresivo perfeccionamiento.

## 1.2. Teorías sobre el flujo del hielo.

A continuación se describen brevemente las principales teorías acerca del flujo del hielo que han ido surgiendo en los últimos cincuenta años. Se hablará de cuatro factores, estrechamente relacionados entre sí, que determinan el modo de fluir del

hielo glaciar. En concreto, se tratarán por este orden, el deslizamiento basal, el agua presente en la base del glaciar, el sistema de drenaje subglaciar y la existencia de una capa de sedimentos deformable en la base. Este orden se corresponde con el orden cronológico en el que éstos fueron incluidos en las diferentes teorías como factores a tener en cuenta en el estudio de la dinámica del flujo del hielo.

### **Deslizamiento basal.**

El primero en tratar el deslizamiento basal del hielo fue Weertman en 1957 ([112]). En sus modelos, suponía que la base era rígida, no deformable, con cierta rugosidad (es decir, considera una base con ondulaciones, no lisa) y que el hielo basal y el lecho estaban separados por una fina película de agua. Weertman sugirió que debían existir fundamentalmente dos tipos de mecanismos que dan lugar a diferentes modos de deslizamiento del hielo, uno es el mecanismo de re-congelamiento y el otro es el mecanismo por el cual se favorece un flujo de tipo plástico.

Según Weertman, el mecanismo de re-congelamiento es el dominante cuando los abultamientos u ondulaciones de la base son de tamaño pequeño (pequeña longitud de onda) y consiste en el siguiente proceso: en la parte ascendente de las ondulaciones de la base se ofrece una mayor resistencia al flujo del hielo debido a un exceso de presión. Esto produce un aumento de la temperatura basal que puede dar lugar a la fusión del hielo y en consecuencia, aparecer agua en la base, cuyo efecto lubricante favorecería el deslizamiento basal del hielo. Este agua, a su paso por la ladera descendente, en la cual las presiones son menores, si el tamaño de la ondulación es suficientemente pequeño, puede ceder su calor y volver a congelarse. El calor liberado por el agua, se transmitirá a través del abultamiento a la ladera ascendente, contribuyendo así al derretimiento del hielo en esta zona. Si el tamaño del abultamiento es grande, este mecanismo deja de ser eficiente, y entonces el mecanismo dominante pasaría a ser el mecanismo por el cual se favorece un flujo de tipo plástico. Según este mecanismo, el deslizamiento del hielo se justifica mediante un aumento del calor de fricción debido a un mayor valor de la cizalla en la protuberancia u ondulación. Puesto que la disipación viscosa, es decir, el calor de fricción será mayor cuanto mayor sea la longitud de la ondulación, también lo será la deformación del hielo y por tanto, mayor el flujo asociado a tal deformación.

Weertmann llegó a la conclusión de que ninguno de los dos mecanismos se produce de forma aislada, sino que siempre existe una combinación de ambos. Y el hecho de que predomine uno u otro se debe fundamentalmente al tamaño (longitud de onda) de las oscilaciones de la base.

Esta teoría fue mejorada por Nye ([91], [92]) y Kamb ([69]), pues propusieron teorías de deslizamiento más realistas. En su estudio acerca del flujo y la conducción de calor, consideraron una morfología basal expresada en desarrollos de Fourier, una ley de deformación newtoniana y el mecanismo de re-congelamiento como único mecanismo determinante del tipo de deslizamiento. Bajo estas consideraciones, llegaron a conclusiones similares a las obtenidas por Weertman, es decir, la existencia de una longitud de onda crítica, por debajo de la cual, domina el mecanismo de re-congelamiento y por encima de la cual, se favorece el deslizamiento asociado a un flujo de tipo plástico.

Kamb y Lliboutry en [69] y en [80], realizaron unos estudios en los cuales consideraron una ley de flujo no lineal y obtuvieron la conclusión de que debía existir una longitud de onda de transición, cuyo valor dependía de la presión y de la rugosidad de la base (definida como el cociente entre la amplitud y la longitud de onda de las ondulaciones, es decir  $a/\lambda$ ).

En [44] y [45], Fowler analizó el flujo del hielo sobre una base con amplia escala de rugosidad, ignoraba el mecanismo de re-congelamiento y en su análisis suponía que el hielo se movía solo por deformación. Utilizó una relación de flujo no lineal y obtuvo la siguiente ley de deslizamiento,

$$u = c\lambda(a/\lambda)^{-(n+1)}A\tau^n,$$

en la que la componente en la dirección principal de flujo de la velocidad basal, denotada por  $u$ , es función de la rugosidad de la base, de la cizalla  $\tau$ , del exponente  $n$ , del coeficiente  $A$  que aparecen en la ley de flujo no lineal considerada y del coeficiente  $c$  (que depende de  $n$  y del cociente  $\lambda/h$ , donde  $h$  es del espesor del hielo).

En las teorías mencionadas anteriormente, en las que la base se supone rígida y está en íntimo contacto con el hielo, o como mucho, separados por una fina película de agua, se obtienen leyes de deslizamiento, en las cuales, la velocidad es función de la rugosidad de la base y de la cizalla (esfuerzos viscosos). Sin embargo, estas teorías no son del todo realistas, ya que según datos experimentales, es bastante probable que existan cavidades con agua en la parte descendente de las protuberancias en vez de una película de agua y además, se debería tener en cuenta la posibilidad de que la base del glaciar se deforme (abrasión) debido a la fricción.

### **El agua subglaciar.**

Lliboutry fue el primero en estudiar el deslizamiento basal del hielo, en el caso en el que éste ya no está en todo punto en contacto con la base. Según Lliboutry, en una

base rugosa e inclinada, la presión normal,  $p_0$ , ejercida por el hielo varía de un punto a otro. El valor medio de los valores de  $p_0$  constituye la denominada presión de la carga de hielo, que se denotará por  $p_i$ . En un estado de equilibrio, los altos valores de  $p_0$  en zonas ascendentes se compensan con los valores bajos que se dan en las zonas de descenso, obteniéndose un valor medio,  $p_i$ , para el cual el sistema permanece estable. Si en las zonas de descenso el valor de la presión es suficientemente pequeño, el hielo puede separarse de la roca, favoreciendo la aparición de cavidades con agua procedente de la fusión del hielo en la zona ascendente de la ondulación. El agua presente en la base se abrirá camino hacia el interior de la masa de hielo en cualquier lugar donde  $p_0$  sea menor que la presión del agua subglaciar  $p_w$  y las cavidades tenderán a formarse en aquellas zonas en las cuales el hielo presente menor espesor y la presión del agua sea elevada. El valor mínimo de  $p_0$  al cual se produce la separación del hielo y la base, denotado por  $p_s$ , según Iken ([67]), vendría dado por la expresión,  $p_s = p_i - (\lambda\tau/a\pi)$ . La separación se producirá a partir del momento en el cual la presión del agua  $p_w$  iguale el valor de  $p_s$ . Si  $p_w > p_s$ , la separación aumentará y se formarán las cavidades. El agua puede incluso llegar a cubrir tales abultamientos y originar un deslizamiento inestable. Según Iken, el valor crítico de la presión, denotado por  $p_c$ , para el cual el deslizamiento comienza a ser inestable, vendría dado por la identidad,  $p_c = p_i - (\lambda\tau/2a\pi)$ . Si se denota la presión efectiva crítica por  $N_c = p_i - p_c$ , se tiene que entre la cizalla  $\tau$  y  $N_c$  se da la siguiente relación,  $\tau = N_c(2a\pi/\lambda)$ . Desde el punto de vista formal, esta relación ofrece un criterio para el deslizamiento, análogo al criterio de fricción de Coulomb. Así, para valores de la cizalla tales que  $\tau < N_c(2a\pi/\lambda)$ , no habría movimiento. Esta conclusión no es del todo realista, puesto que es conocido que para algunos glaciares existe deslizamiento para valores de presiones verificando la relación  $p_w < p_c$ .

Iken (véase [67]), estudió el problema del deslizamiento del hielo sobre una base perfectamente lubricada, considerando el efecto que en él tenía la presión del agua subglaciar. En sus estudios, analizó el efecto de las variaciones de la presión del agua en el deslizamiento basal. Para ello consideró una ley de flujo lineal, la existencia de ondulaciones periódicas en la base e ignoró el mecanismo de re-congelamiento. Los resultados permitieron concluir que para una presión dada, los valores mayores de la velocidad se corresponden con un crecimiento de las cavidades y que los menores se corresponden con una reducción del tamaño de las mismas.

De todas las relaciones empíricas entre la velocidad de deslizamiento  $u$ , la cizalla  $\tau$  y la presión efectiva,  $N = p_i - p_w$ , que han sido propuestas en las últimas décadas, la que cuenta con más aceptación es la del tipo,  $u = k\tau^p N^{-q}$ .

Fowler ([46]), utilizando una ley de flujo lineal y considerando la presencia de cavi-

dades con agua en la base, obtuvo que la fricción entre el hielo y la base alcanza un único valor máximo para un valor finito de la velocidad. Una vez alcanzado este máximo, los valores de la fricción decrecen a medida que la velocidad sigue creciendo. Al aumentar la velocidad y la fricción (antes de alcanzar el valor máximo), crece el tamaño de las cavidades, hasta un punto para el cual, el abultamiento queda cubierto de agua, la fricción, y por tanto, la resistencia se hacen muy pequeñas y la velocidad, en principio, crece sin límite. De los resultados que obtuvo, quizá, el de mayor importancia desde el punto de vista del fenómeno de las corrientes de hielo rápidas es que la ley de deslizamiento podía resultar multivalorada, es decir, que a un mismo valor de la cizalla pueden corresponderle distintos valores de la velocidad (asociados a diferentes valores de  $N$ ). Esta multivocidad permitiría explicar la existencia de oscilaciones en el régimen de flujo. En el caso de las corrientes de hielo rápidas, las oscilaciones en el régimen del flujo del hielo se producen en la dirección perpendicular a la dirección principal del flujo, ya que zonas con flujo rápido (las corrientes) se alternan con zonas de flujo lento.

Hasta al momento, todas las teorías y estudios comentados consideraban la base del glaciar o casquete polar, rígida y no deformable. Sin embargo, puede suceder que la base sea blanda y esté constituida por sedimentos porosos (como se ha observado en la Siple Coast, Bentley [10]), hecho que afectaría indiscutiblemente a la velocidad de deslizamiento. Por tanto, resulta obvia la necesidad de prescribir una ley de deslizamiento que se aplique al caso de base deformable.

Fowler y Walder ([56]) obtuvieron una ley de deslizamiento, aplicable a bases blandas y porosas, en términos de la viscosidad y del espesor de su capa de material deformable y permeable. La viscosidad de este material depende de la presión del agua a través de la presión efectiva  $N$ . Este hecho pone de manifiesto la necesidad de obtener una teoría de drenaje que describa la relación entre el flujo del agua en el sistema de drenaje y la presión efectiva y así, poder conjeturar sobre el comportamiento del flujo de hielo.

### **Sistema de drenaje subglaciar.**

El agua presente en la base puede proceder del hielo derretido en la base debido al calor de fricción y geotérmico, o también puede proceder del agua transportada englaciar o supraglaciarmente (agua obtenida por deshielo, precipitaciones, etc.). Este agua puede ser evacuada hacia los márgenes, hacia el interior de la masa de hielo o si la base es blanda y consta de una capa permeable de sedimentos, el agua puede ser drenada a través de ella. El drenaje del agua en la base puede realizarse

a través de un sistema hidráulico, el cual, puede estar constituido por canales que inciden en el hielo (llamados R-canales o canales de Röthlisberger), por canales que inciden en la base (llamados Nye-canales), por cavidades en la base, conectadas entre sí, o bien por una película de agua de espesor variable. En la actualidad sigue existiendo controversia acerca de si el drenaje se produce de una forma u otra. En esta memoria, se considerarán teorías que suponen la existencia de cavidades, pues el modelo que se estudia considera una ley de drenaje basada en esta suposición.

Walder desarrolló un modelo teórico para describir el comportamiento de las cavidades conectadas entre sí. En sus estudios, se obtiene que, como consecuencia de la disipación viscosa, debida a la fricción del agua con las paredes de los canales, se produce un calor de fricción que podría causar un derretimiento de las paredes de la cavidad. Por otro lado, la cavidad se cerraría en la medida en que la presión del agua sea menor que la ejercida por el hielo. En un estado de equilibrio ambos procesos se compensan. Según Walder, las cavidades que se forman en la ladera descendente de las ondulaciones de la base serían estrechas lateralmente (en la dirección transversal a la dirección principal del flujo) y alargadas longitudinalmente (en la dirección principal del flujo).

Walder consiguió obtener una expresión para el flujo volumétrico de agua a través de una cavidad. De sus estudios dedujo que para una presión efectiva fija, a una mayor descarga o flujo de agua se dan mayores valores del gradiente de presiones. Además, obtuvo que el tipo de configuración que resulta ser estable en el caso de un sistema de cavidades conectadas, consistía en un gran número de canales relativamente pequeños distribuidos uniformemente por la base (y no en canales distribuidos de forma arborescente para el cual los canales de mayor tamaño toman agua de otro de menor tamaño, comportamiento característico de los R-canales). De sus resultados se deduce que cuando los valores de la presión efectiva,  $N$ , son pequeños, el tipo de drenaje más probable sería el que tiene lugar a través de un sistema de cavidades conectadas, mientras que para el caso de valores de  $N$  elevados, sería el que se produce a través de R-canales.

Kamb ([70]), desarrolló un modelo para describir el fenómeno del avance rápido de las masas de hielo en la dirección principal de flujo (*ice surging*), en términos de la transición de un sistema de drenaje constituido por cavidades conectadas a otro de túneles arborescentes incisos en el hielo. La cuestión esencial en el modelado de los flujos rápidos, es conocer que causa las altas presiones de agua. Kamb supuso que las cavidades debían estar conectadas por orificios muy pequeños por los cuales, a mayor presión de agua y por tanto, a menor presión efectiva, se da un mayor flujo de agua, contrariamente a lo que ocurre en el caso de un flujo de agua a través de

R-canales. En concreto, Kamb se concentró en el estudio de cómo el deslizamiento, la presión de agua y el flujo del hielo, influían en las dimensiones de los orificios que conectaban entre sí las cavidades. Y obtuvo que el final de un régimen de flujo rápido era consecuencia del crecimiento inestable de los orificios. Crecimiento que originaría la formación de un sistema de túneles, con el consiguiente decrecimiento de los valores de la presión de agua.

Clarke, en [29], tras la realización de un estudio en una población de glaciares en la zona de Yukon, concluyó que las masas de hielo en las cuales la base presenta muy poca inclinación tienden a experimentar un flujo rápido por diversos motivos: un mayor espesor de hielo sobre bases de poca inclinación hace que los valores de las tensiones en la base sean mayores, y en consecuencia, sea mayor la deformación que sufre el hielo, lo que se traduce según la ley de flujo de Glen, en una mayor velocidad de flujo; por otro lado, un mayor espesor de hielo implica un mayor aislamiento del hielo basal respecto de las bajas temperaturas superficiales, y por tanto, mayores temperaturas en la base. A mayor temperatura, mayor deformación del hielo basal, pudiendo llegar incluso a producirse la fusión del hielo basal. Si el hielo basal se funde y en consecuencia aparece agua en la base, ésta tendría un efecto lubricante favoreciendo el deslizamiento basal y un flujo rápido del hielo. Los factores anteriores operarían dentro sistemas de realimentación (*feedback systems*), en los cuales el flujo rápido favorece la fusión de hielo basal, la lubricación de la base, que se traduce a su vez en mayores velocidades, y así sucesivamente. Los glaciares que experimentan un flujo de hielo rápido, suelen tener una base prácticamente lisa y ser más largos y de mayor amplitud que el resto. Además, se piensa que el inicio del régimen de flujo rápido suele tener lugar en épocas donde la tasa de acumulación es mayor.

### Capas de sedimento subglaciar

A partir de los años setenta, empezaron a presentarse resultados en los cuales se suponía que la base del glaciar era blanda y deformable. El interés por el estudio del papel que desempeña la deformación de la base en la dinámica del flujo del hielo estaba y está, en parte, motivado porque en las corrientes de hielo de la Siple Coast, su flujo rápido parece estar íntimamente relacionado con la viscosidad de la capa de sedimentos subglaciares que existe en su base. La viscosidad de esta capa depende de la presión del agua, concretamente, la viscosidad disminuye al aumentar la presión del agua, ya que el agua permite una mayor movilidad de los constituyentes de la capa de sedimentos. Queda pues patente la necesidad de obtener un modelo de drenaje subglacial aplicable al caso en el que en la base haya una capa de sedimentos, en el cual se estudie la relación existente entre la presión de agua y la presión efectiva



$N$ . Una vez prescrita una relación entre  $N$  y la presión de agua en los canales (ley de drenaje), se conseguiría relacionar la velocidad de deslizamiento basal con el valor de la presión de agua (ya que la ley de deslizamiento relaciona  $N$  con la velocidad). Para obtener una ley de drenaje habrá que tener en cuenta que esta capa de sedimentos puede deslizarse lentamente bajo la influencia de las tensiones ejercidas por el hielo y además, puede ser erosionada y transportada por el flujo de agua.

Boulton y Jones en [16] realizaron un análisis de la dinámica de la capa de sedimentos basales suponiendo que la base presentaba un régimen térmico temperado (temperatura basal igual a la temperatura de fusión del hielo a presión local) y que tales sedimentos eran permeables, de espesor uniforme y se encontraban no compactificados. Además suponían que el agua procedente de la fusión podía fluir a través de los sedimentos. De sus estudios se dedujo lo siguiente: cuando el drenaje por los sedimentos se realiza de un modo lento, la presión en los poros aumenta y la fuerza de cohesión entre los sedimentos disminuye. Si la permeabilidad de la base es alta, el agua producida puede ser drenada subglacialmente, el sistema permanece estable y la masa de hielo glaciar presenta el perfil parabólico normal, (flujo gobernado por las propiedades reológicas del hielo). Pero si la permeabilidad es baja, la presión del agua aumenta, la base comienza a deformarse y el sistema puede dejar de ser estable, apareciendo una lámina de agua en la base que favorece el deslizamiento del hielo y por tanto, el flujo rápido, pudiendo llegar producirse la desintegración del casquete debido a la expulsión masiva de hielo.

Boulton y Jones probaron que para permeabilidades y espesores razonables de la capa de sedimentos, el flujo a través de sus poros era insuficiente para evacuar el agua necesaria, así pues, el agua retenida debía de ser evacuada de otro modo. Boulton e Hindmarsh ([15]), con el fin de establecer cuales eran las condiciones bajo la cuales en un estado de equilibrio se produciría una deformación de los sedimentos, formularon un modelo relativo a la hidrología subglaciar en el cual consideraban una ley de flujo viscoso no-lineal. Y obtuvieron que para que un glaciar se mantuviese en equilibrio, debían existir canales subglaciares capaces de drenar el exceso de agua presente en la base y que permitiesen una deformación estable de los sedimentos. Una deformación inestable se traducía en la aparición de un sistema de tuberías y canales entre el hielo y los sedimentos.

En un estado de equilibrio, el desplazamiento de sedimentos en la propia capa de sedimentos y el arrastre de dicha capa debido al deslizamiento del hielo, deben compensarse. A una menor presión efectiva, el deslizamiento de los sedimentos dentro del glaciar sería mayor y se produciría el cierre de túneles. Si la presión de agua en un túnel es alta, se favorece el desplazamiento de sedimentos y disminuye el del

hielo. Los sedimentos serían arrastrados por el agua que fluye por los túneles. Al ser mayor el deslizamiento de la capa de sedimentos que la del hielo, se originaría un mayor deterioro de la base de estos túneles, formada de sedimentos y aparecerían lo que se llama túneles valle.

Alley ([2]), mostró que la erosión de los sedimentos en los canales alimentados por el agua procedente de la fusión del hielo basal era un proceso poco eficaz y que el deslizamiento de sedimentos cerraría los túneles en cuanto disminuyera el agua que fluye por ellos. Por tanto, en el caso de que la presión del agua sea aproximadamente la del hielo sería más probable que en lugar de darse conductos tipo tuberías se diera una fina película de agua entre la base de hielo y la capa de sedimentos. Esta fina película de agua tendería a expandirse en aquellas zonas donde la presión local del hielo fuera inferior a la media, y su extensión variaría de forma inversamente proporcional a la presión efectiva.

Es de esperar, que la viscosidad de la capa de sedimentos varíe con el tamaño, forma, distribución y composición de los sedimentos que la constituyen, así como de la presión efectiva en los poros. Los cambios en el espesor de la capa de sedimentos, tienden a moderar las perturbaciones en el espesor del hielo, ayudando a estabilizar el sistema. En cualquier caso, resulta evidente la necesidad de tener mayor información acerca de la ley de flujo de la capa de sedimentos y del acoplamiento entre el hielo y dicha capa de sedimentos.

En 1994, Walder y Fowler ([111]) desarrollaron una teoría de drenaje para el caso en el cual la base presenta una capa de sedimentos deformables. Walder y Fowler supusieron que el canal tenía su pared superior (techo) en contacto con el hielo basal y la pared inferior (suelo) en contacto con la capa de sedimentos. Obtuvieron que el cierre de los canales, se producirá cuando la presión del hielo superara a la presión del agua en los poros. De tales estudios se concluye que en los canales, de escaso espesor y gran amplitud, hay una relación de proporcionalidad directa entre la presión del agua y el flujo, y por tanto, se deduce que es más posible la existencia de un sistema de cavidades conectadas que uno de tipo arborescente.

En resumen, según Walder y Fowler, se puede decir que la hidrología basal de los glaciares con base blanda depende de la reología del sedimento subglaciar (que determina si los conductos inciden hacia el hielo o hacia los sedimentos), y de la forma de los conductos (la cual diferirá según éstos incidan en el sedimento o en el hielo).

Análisis recientes demuestran que los canales sólo se dan en el caso de masas de hielo glaciar con escasas inclinaciones basales y superficiales, algo típico de los mantos de hielo donde se manifiesta el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas. Para

inclinaciones típicas de los valles glaciares, en principio, parecen ser posibles tanto el sistema de drenaje por cavidades como el sistema de R-canales (túneles), si bien, se consideran más propios los R-canales, incluso en el caso de base deformable.

En el segundo capítulo será comentado de nuevo el trabajo de Fowler y Walder ([111]) cuando se haga referencia a la ley de drenaje utilizada en el modelo de Fowler y Johnson [53]. Fowler y Walder obtuvieron una expresión unidimensional y estacionaria que relaciona la presión efectiva en el sistema de canales,  $N$ , con el flujo de agua basal,  $Q$ . Fowler y Johnson, en el modelo que estudiamos, generalizan la teoría de drenaje unidimensional de Fowler y Walder al caso estacionario bidimensional.

En el último capítulo, donde se recogen las conclusiones del trabajo de investigación presentado en esta memoria, se comentarán de forma breve, posibles alternativas a la ley de drenaje de Fowler y Walder y a la ley de deslizamiento basada en la reología de flujo viscoso no lineal de Boulton e Hindmarsh, empleadas en los modelos presentados en este trabajo. Dichas alternativas se fundamentan en el hecho de considerar que la capa de sedimentos presenta un comportamiento de tipo plástico y en la consideración de una reología distinta a la Boulton e Hindmarsh para formular la ley de deslizamiento basal.

El modelo propuesto por Fowler y Johnson en [53] para describir el fenómeno de las corrientes rápidas de hielo se aplica a las corrientes detectadas en la Siple Coast (Antártida Occidental). Por este motivo, la siguiente sección está dedicada a un análisis general de dichas corrientes. Se tratarán diversos aspectos, entre otros, se hablará de sus características morfológicas y dinámicas, y de cómo afectan y son afectadas por otros sistemas dinámicos.

### **1.3. Las corrientes de hielo rápidas de la Siple Coast.**

A principios del Cenozoico, a raíz de la desintegración de la gran masa continental llamada Gondwana, se produjo una gran reorganización de los fragmentos de dicha masa continental. Como consecuencia de tal redistribución, una de las masas continentales, denominada Antártida o continente Antártico, quedó aislada de las influencias oceánicas de las latitudes medias y se estableció la poderosa corriente Antártica. Este hecho fue el responsable del desarrollo de los grandes mantos polares de la Antártida Oriental y de la Antártida Occidental, los cuales representan

el 98 % del continente. Desde entonces, este continente, rodeado por los Mares del Sur, ha formado un sistema relativamente estable. No obstante, las investigaciones llevadas a cabo por geólogos glaciares y marinos, señalan la existencia de importantes cambios en la configuración de este continente durante los ciclos glaciares del Pleistoceno. También sugieren que en la era glacial actual se está produciendo una rápida y, relativamente, gran variación de espesor en la Antártida Occidental, mientras que por el contrario, la Antártida Oriental está sufriendo un lento emerger de su manto de hielo.

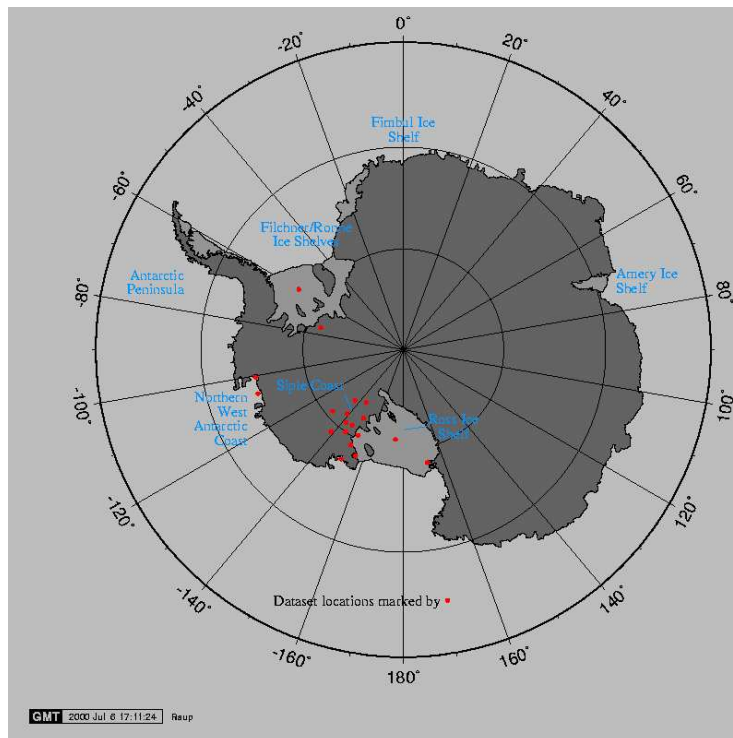


Figura 1.2: Mapa del continente antártico

El estudio y el análisis de las fluctuaciones que se puedan producir en la configuración de este gran continente helado, se ha convertido en una de las líneas de investigación principales para numerosas instituciones, sobre todo por el impacto que pueda tener en ellas el anticipado calentamiento de la atmósfera terrestre. Uno de los efectos de tal calentamiento sería la posible fusión de los hielos de la Antártida Occidental y el consiguiente aumento del nivel del mar. Se sabe que la Antártida Occidental posee una cantidad de hielo suficiente para hacer que el nivel del mar aumentara en cinco metros si llegara a fundirse completamente. Además, la expulsión de las grandes masas de hielo de la Antártida Occidental como consecuencia del deshielo, se vería acelerada por la existencia de corrientes de hielo rápidas capaces de desalojar grandes cantidades de hielo en periodos de tiempo muy cortos geológicamente hablando.

Desde la década de los años ochenta, gran parte de las investigaciones llevadas a cabo en la Antártida Occidental, se han concentrado en el estudio de las corrientes de hielo rápidas de la Siple Coast que fluyen hacia el mar de Ross. El empeño en conocer su dinámica se debe, en parte, a su potencial inestabilidad ya que aquí, el manto de hielo yace sobre una base que se encuentra a unos 450 metros por debajo del nivel del mar y además, gran parte de su masa de hielo no descansa sobre un lecho continental sino sobre agua marina. Resulta pues evidente, que pequeñas fluctuaciones en su dinámica podrían conducir a un colapso del casquete polar, lo cual podría tener importantes consecuencias en la dinámica global de la Tierra. Por este motivo, en esta sección, nos centraremos en los siguientes aspectos: las características morfológicas y dinámicas de las corrientes de hielo rápidas de las Siple Coast (Antártida Occidental), su distribución espacial y temporal, la mecánica del flujo rápido en dichas corrientes, y por último, se comentará la influencia que pueden tener las corrientes de hielo en la interrelación existente entre los grandes mantos de hielo, los océanos y el clima.

Las ideas que aparecen en esta sección pueden encontrarse con mayor detalle en un reciente trabajo realizado por Bennett (véase [9]), así como en las referencias que aparecen en el mismo.

### 1.3.1. ¿Qué es una corriente de hielo rápida?

Era el año 1954, cuando Swithinbank, en [103], ofrecía una definición, en un sentido más amplio que el considerado actualmente, para el, por entonces, poco conocido, fenómeno de las corrientes de hielo rápidas (*fast ice streams*). Según Swithinbank, una corriente de hielo es una parte de un manto de hielo en la cual el flujo de hielo presenta mayor velocidad y la misma dirección o no, que el flujo de hielo de zonas adyacentes. Fue en 1987, cuando Bentley, en [10], restringió el marco de aplicación del concepto de corriente de hielo rápida, pues añadió a la definición dada por Swithinbank, el requisito de que una corriente rápida de hielo debía estar limitada lateralmente por hielo y no por roca y que el hielo debía yacer sobre un lecho continental y no sobre agua marina. Bentley hacía una clara distinción entre las corrientes de hielo que carecen de un control topográfico significativo, denominadas en la bibliografía *pure fast ice streams*, y aquellos glaciares que puedan presentar un flujo rápido atípico debido a la topografía del terreno, denominadas *topographic ice streams*. A las primeras nos referiremos como corrientes de hielo puras y a las segundas, como corrientes de hielo asociadas a la topografía.

Las corrientes de hielo puras, en las cuales no hay una trayectoria o camino topográfi-

camemente determinado por el cual avanzar, fluyen por zonas en las cuales el hielo presenta *propiedades reológicas más débiles* (es decir, se deforma con mayor facilidad) que el hielo adyacente, o bien, por zonas en las que la base está de algún modo lubricada.

Las corrientes de hielo de la Siple Coast son las únicas corrientes puras existentes en la actualidad, con la excepción de una corriente detectada en el norte de Groenlandia (Fahnestock (1993) y Joughin (1999)). Sin embargo, existen bastantes corrientes de hielo asociadas a la topografía: glaciares como el Amundsen, el Shackleton o el Bird, que drenan las *Transantarctic Mountains*; la corriente de Rutford, que presenta la peculiaridad de estar limitada a un lado por hielo, pero al otro por las *Ellsworth Mountains*; el glaciar Slessor, que se encuentra ligado a la presencia de un valle en la base bien definido y el glaciar Lambert, que comienza siendo una corriente de hielo pura pero luego pasa a ser una corriente de hielo asociada a la topografía.

El flujo glaciar, como ya se dijo con anterioridad, se debe en el caso de casquetes polares, en los cuales la inclinación de la base es prácticamente nula, fundamentalmente, a la deformación del hielo por efecto de su peso. En el caso de un régimen de flujo lento, las tensiones (cizalla) originadas en la base dirigen el flujo y alcanzan un máximo justo después de la línea de equilibrio (lugar en el que la acumulación (en la parte alta o comienzo del glaciar) equilibra la ablación (en la parte baja)). En el caso de flujo rápido se tiene que: para las corrientes de hielo asociadas a la topografía de la Antártida, el máximo valor de la cizalla se alcanza entre los 50 y 100 kms de distancia del margen (*grounding line*) y para las corrientes puras, las tensiones debidas a la gravedad alcanzan su máximo en la parte alta de la corriente y van disminuyendo en la dirección y sentido del flujo hasta alcanzar valores muy pequeños. Otro aspecto que distingue las corrientes de hielo asociadas a la topografía de las corrientes puras es el lugar en el cual la velocidad alcanza su valor máximo, pues, mientras que en las corrientes de hielo asociadas a la topografía este lugar coincide con aquel en el que las tensiones alcanzan su máximo, en las puras no.

### 1.3.2. Morfología y dinámica de las corrientes de la Siple Coast.

Las cinco corrientes de hielo rápidas de la Siple Coast, fluyen hacia la plataforma del mar de Ross (*Ross ice shelf*). Estas corrientes se denominan A, B o de Whillans, C, D y E. Presentan una anchura de aproximadamente 50 kms, una longitud de entre 300 y 500 kms, y un espesor medio de al menos 1 km. Las velocidades del flujo de hielo en estas corrientes superan los 100 m/año y pueden llegar a los 800 m/año.

Las fronteras laterales de estas corrientes, puesto que son zonas donde el hielo sufre gran deformación como consecuencia de los altos valores de la cizalla, aparecen marcadas por grandes grietas y pliegues. Estas marcas superficiales son indicativas de la transición del flujo rápido de la corriente al lento (aproximadamente 5 m/año) del hielo adyacente. Entre corrientes, en las zonas de flujo lento, se dan corredores en los cuales el hielo basal está congelado (*cold-based*), en contraste con el de las corrientes, en las cuales el hielo basal se encuentra a la temperatura de fusión del hielo a presión local (*temperate-based*).



Figura 1.3: Esquema de las cinco corrientes de hielo de la Siple Coast

Cada una de las corrientes forma parte de un sistema de drenaje de tipo dentrítico, en el cual, el tronco o canal principal se alimenta de un entramado de pequeños canales. Aunque el tronco carece de fuertes restricciones de tipo topográfico, los canalillos, donde las velocidades no sobrepasan los 100 m/año, sí que parecen estar asociados a zonas donde la base presenta hondonadas o pequeños valles.

La corriente de Whillans es una de las más estudiadas. En ella se ha observado una variación espacial en la velocidad del flujo. En algunos lugares el flujo de hielo puede alcanzar los 827 m/año, siendo el valor medio en toda la corriente de unos 400 m/año. Estos valores contrastan con los valores del hielo adyacente, que son del orden de 5 m/año. Esto es indicativo de la complejidad del sistema de drenaje existente y de la ausencia de una topografía subglaciar claramente definida.

En las corrientes, la velocidad del flujo de hielo disminuye de forma acusada al acercarse al margen, y la tasa de variación puede variar de unas corrientes a otras. El patrón espacial de la velocidad está relacionado con las tasas de deformación, y por tanto, originan distintos patrones o estructuras topográficas superficiales. En las corrientes no se ha detectado una clara relación entre la topografía basal (base prácticamente lisa) y la topografía superficial.

En general, los glaciares sufren variaciones en la velocidad del flujo de hielo, que pueden considerarse a distintas escalas temporales: variaciones a lo largo de un día, de una semana, de una estación, de años,... Estos cambios están relacionadas con las variaciones de la cantidad de agua basal, de las precipitaciones, de las temperaturas, etc.

En las últimas décadas, se ha observado que la corriente de Whillans ha experimentado una progresiva ralentización del flujo en la zona próxima a la plataforma del mar de Ross y que en consecuencia, se ha producido un ensanchamiento y un aumento de espesor en la misma.

Las corrientes de hielo no sólo sufren variaciones en su amplitud y en su espesor, sino que también experimentan variaciones en su longitud. Según estudios realizados entre otros por Bindshadler ([13], 1997), parece ser, que el punto de inicio de la corriente de hielo varía con el tiempo, desplazándose hacia el interior del manto de hielo. Cuando se consideran escalas temporales del orden de 100 años, se tiene que las variaciones en el régimen del flujo de hielo pueden ser tan extremas, que incluso pueden representar el cambio de un régimen de flujo rápido a uno típicamente lento, es decir, cesar su actividad. Este tipo de variación es ilustrada por la corriente C de la Siple Coast. La corriente C en la actualidad presenta velocidades del orden de 4 a 5 m/año. Sin embargo, se sabe que hace unos 150 años era activa y presentaba velocidades del orden de 400 m/año. Existen estudios que constatan que a cierta profundidad, en su espesor hay estructuras típicas observadas en corrientes actualmente activas, lo que sugiere que en otro tiempo debió experimentar un régimen de flujo rápido. La disminución en la velocidad de su flujo, se traduce en un aumento de su espesor, y es la medición de este aumento de espesor lo que permite estimar el momento en el que empezó a dejar de ser activa. Se piensa que la onda de desactivación se propaga en la misma dirección pero sentido opuesto al del flujo principal. A pesar de que la corriente C en la actualidad es inactiva, su base presenta características similares a la corriente de Whillans, una de las más rápidas. Las características a las que se hace referencia son el hecho de poseer una base en régimen térmico temperado y formada por sedimentos deformables, así como la existencia de una determinada estructura de drenaje, de la que se hablará más



tarde.

De varios estudios, se deduce que las corrientes de la Siple Coast están sufriendo una reorganización en lo que se refiere a su localización y trayectorias.

Según recientes investigaciones realizadas por Whillans ([113]), en el manto de hielo de la Antártida Occidental, el balance de masa de hielo (dado por la diferencia entre la tasa de acumulación y la de ablación) tiene un valor positivo, próximo a cero. Si se considera el balance de masa restringido a la Siple Coast, resulta que la tasa de ablación excede a la tasa de acumulación en un 25 %. Se piensa que este déficit de masa de hielo se deba a la gran actividad que presenta la corriente de Whillans. Puesto que en la actualidad, la corriente de Whillans está sufriendo una ralentización de su flujo, es posible que pueda llegarse a un equilibrio entre la acumulación y la pérdida de hielo o ablación. Lo que se desconoce es si esta ralentización es parte de los ciclos anuales de variación del régimen del flujo de hielo, o si se trata de un paulatino cese de actividad que conduce a una inactividad definitiva.

### **1.3.3. Características de la base y mecanismos del flujo de hielo en las corrientes de la Siple Coast.**

Una de las preguntas que uno podría plantearse es cómo se puede justificar el régimen de flujo rápido en las corrientes a pesar de las escasas pendientes superficiales típicas de la Siple Coast. Cuando a mediados de la década de los ochenta se descubrió la presencia de una capa de sedimentos blandos y deformables de un espesor medio de 6 m en la base de la corriente de Whillans, se comenzó a pensar en la deformación subglaciar como posible justificación del flujo rápido. Hasta ese momento, se pensaba que la explicación al fenómeno de las corrientes radicaba en el mecanismo de realimentación controlado por la presión del agua presente en la base. El agua presente en la base facilita un deslizamiento del hielo, permitiendo un aumento de la velocidad. Al aumentar la velocidad crece el calor de fricción (disipación viscosa) lo que se traduce en una mayor producción de agua en la base y una mayor lubricación, volviéndose a repetir el ciclo. Sin embargo, se mostró que este mecanismo era insuficiente por sí sólo (existen corrientes con base en régimen temperado, por ejemplo la C, que no presentan un flujo rápido), lo que motivó el estudio del papel de la capa de sedimentos basales en la dinámica del flujo del hielo.

El hecho de que los sedimentos saturados con agua requieran esfuerzos de menor magnitud que el hielo para deformarse, hace pensar que es la deformación de estos sedimentos, la responsable, en más de un 90 %, del movimiento rápido de la corri-

ente (Boulton e Hindmarsh, 1987). Esta capa de sedimentos altamente porosos de origen marino y que datan de la era Terciaria, reciben la denominación en la bibliografía inglesa de *till*. Se cree que aunque esta capa de sedimentos presenta cierta continuidad, puede presentar variaciones en sus propiedades y espesor.

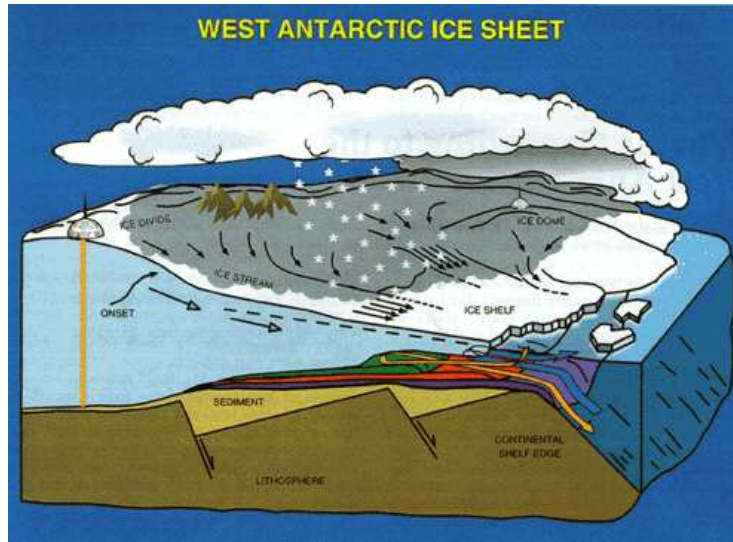


Figura 1.4: Esquema de la geomorfología del manto de hielo de la Antártida Occidental

Estudios y análisis realizados por Engelhart y Kamb [40], acerca del sistema hidrológico subglaciar de las corrientes de Whillans, la C y la D, sugieren que el sistema de drenaje suministraría suficiente cantidad de agua para que la presión ejercida por ésta, equilibrara la presión ejercida por la carga de hielo, reduciendo así la fricción. En el caso de las corrientes de Whillans, C y D, las grandes variaciones en la presión de agua no se corresponden con grandes variaciones en la velocidad, como sucede en otros glaciares. Este hecho sugiere que el flujo de hielo es insensible a las altas frecuencias, tanto temporales como espaciales, de las variaciones de la presión del agua en el sistema hidráulico de drenaje. Queda pues patente el alto grado de complejidad de su sistema de drenaje, pues anula el posible efecto de las rápidas variaciones locales de presión de agua. Este sistema consiste, posiblemente, en láminas de agua continuas o discontinuas, localizadas entre el hielo y la capa de sedimentos (Kamb, 2001). No se tiene certeza de si este sistema de drenaje está asociado a un sistema de canales, típicamente anchos y de poco espesor, como señalan algunas hipótesis acerca del flujo de hielo sobre bases blandas y deformables. De lo que sí se tiene certeza, es de que el tipo de sistema de drenaje es prácticamente el mismo para las corrientes activas (la B (de Whillans) y la D) y la inactiva (la corriente C).

Es importante conocer si es el deslizamiento basal o por el contrario, la deformación

del sedimento subglaciar, el factor determinante en la generación de corrientes de hielo rápidas y también saber cómo puede variar en función del tiempo y del espacio la supremacía de un factor sobre otro a la hora de causar la aparición de las corrientes. Se necesita, por tanto, proponer modelos para describir el movimiento del hielo basal originado por variaciones rápidas de la presión de agua (espaciales y temporales) en los cuales se tengan en cuenta el deslizamiento basal y la deformación subglaciar.

El sistema hidráulico de drenaje no sólo influye en la cohesión de los componentes de la capa de sedimentos y reduce la fricción, sino que también influye en el grado de acoplamiento entre el hielo y la base. En la bibliografía, para el caso de mantos de hielo con bases blandas y deformables, se distinguen, fundamentalmente, dos ciclos para el flujo del hielo, el ciclo asociado a la deformación interna del hielo, denominado *stick*, y el ciclo asociado al deslizamiento basal. Que predomine un tipo u otro depende de los valores que alcance la presión del agua basal. Cuando la presión de agua es elevada, el hielo puede flotar sobre el agua basal y con poca deformación de la capa de sedimentos es posible un deslizamiento rápido. Si la presión de agua disminuye, la base del glaciar puede comenzar a tomar contacto directo con el hielo, es decir, pueden quedar acoplados, y el deslizamiento quedar reducido a la parte superior de la capa de sedimentos, que es donde suele darse mayor presión en los poros y por tanto, menor cohesión entre sus constituyentes. Si la presión disminuye suficientemente, como para que los sedimentos queden consolidados y la base quede acoplada con el hielo entonces, el flujo de hielo sólo puede ser debido a la deformación interna del hielo. Esto conduciría a un aumento progresivo de la cizalla, creciendo el valor de la temperatura basal y en consecuencia, la cantidad de agua producida en la base. Al aumentar la cantidad de agua, aumentaría la presión ejercida por ésta y por tanto existiría la posibilidad de que existiera un deslizamiento rápido.

Cuando el rango de valores que puede tomar la presión de agua es amplio, pueden darse los dos tipos de ciclos en una misma corriente, el asociado al deslizamiento y el asociado a la deformación interna del hielo. La variación estructural del sistema de drenaje respecto del espacio, hace posible que en unas zonas se dé el modo asociado a la deformación interna del hielo y en otra adyacente, el modo asociado al deslizamiento. El número de áreas de una corriente en las que se dé cada tipo es lo que controla la tasa del flujo medio en dicha corriente, por ejemplo, si predominan las zonas con un modo asociado a la deformación interna del hielo, como es el caso de la corriente C, entonces el flujo puede ser prácticamente despreciable.

El modelado del fenómeno de las corrientes de hielo, requiere la prescripción de una ley de flujo adecuada que describa el proceso de deformación subglaciar. En la actu-

alidad existe gran controversia acerca de la naturaleza y mecanismos de deformación subglaciar. La controversia se basa principalmente en si considerar el comportamiento de los sedimentos de tipo plástico o considerarlo del tipo de un fluido altamente viscoso. Este debate ha dado lugar a dos escuelas de pensamiento: la que considera que los sedimentos tienen un comportamiento de tipo plástico (Tulaczyk, [108]) y la que aunque mantiene que la capa de sedimentos presenta para escalas pequeñas un comportamiento de tipo plástico, sostiene que a gran escala tiene un comportamiento similar al de un fluido altamente viscoso (Hindmarsh, [64]). Así pues, el tipo de ley de flujo a considerar, dado que no hay consenso acerca de cual es la que mejor aproxima el flujo del sedimento subglaciar, dependerá de la escuela que se siga. En los modelos que serán presentados en esta memoria, se ha considerado que los sedimentos subglaciares se comportan como un fluido viscoso (no lineal), pues en el proceso de modelado se emplea la ley de drenaje de Fowler y Walder, basada en esta hipótesis. Remitimos al último capítulo, donde se ofrecen unos comentarios acerca de este tema y se propone como futura línea de trabajo, la búsqueda de nuevos modelos que se basen en la hipótesis de considerar a la capa de sedimentos subglaciares como un material plástico.

### **Posibles causas del cambio de régimen de flujo en las corrientes.**

Puesto que tanto la corriente C como la de Whillans presentan valores de las tensiones basales similares y sus bases están, en ambos casos, constituidas por sedimentos blandos, deformables, no congelados, y sin embargo una es activa y la otra no, se piensa que debe haber entre ellos alguna diferencia de tipo mecánico en sus bases.

Los modelos propuestos para reproducir el fenómeno de *parada* por el cual una corriente que era activa deja de serlo, denominado en la bibliografía inglesa *shutdown*, pueden clasificarse en dos grandes categorías: aquellos que lo interpretan como resultado de la rápida expulsión de masa por parte de la corriente y por tanto, la parada sería un estado más dentro del ciclo de existencia de una corriente; y aquellos que lo consideran una consecuencia de la interacción entre dos corrientes adyacentes.

A continuación se comentarán brevemente algunas de las hipotéticas causas sugeridas para explicar la parada:

1. La naturaleza cíclica del comportamiento de las corrientes rápidas de hielo. Esta hipótesis se basa en la consideración de un mecanismo de realimentación del agua basal que consiste en el siguiente proceso: al aumentar la presión de agua basal en el sistema normal de drenaje, aumenta el flujo de hielo. Pero,

la presión de agua puede alcanzar un nivel crítico para el cual, el sistema de drenaje se vuelve inestable, pasando a un sistema constituido por canales, que reduce rápidamente la presión de agua y en consecuencia, finaliza el flujo rápido.

2. La disminución del efecto lubricante de la capa de sedimentos por la erosión de la misma.
3. Los esfuerzos o fuerzas de resistencia al flujo debidos al depósito de sedimentos (procedentes de la erosión de la base) en la parte baja de la corriente.
4. La captura de agua subglaciar (denominado en la bibliografía *water piracy*) que lubrica la base de una corriente considerada, por corrientes adyacentes.
5. Los procesos térmicos: el flujo rápido dentro de una corriente origina un calor de fricción (disipación viscosa) que aumenta la temperatura basal, y por tanto, la velocidad del flujo. Por otro lado, al aumentar el flujo, disminuye el espesor, el cual puede alcanzar un valor para el cual la base vuelva a congelarse y el flujo deje de ser rápido.

De las anteriores hipótesis, la más probable según Anandakrishnanet ([5]), es la cuarta, es decir, la que sustenta que el agua que antes lubricaba la corriente C, es desviada o atraída por corrientes adyacentes. Y de todas ellas, se deducen dos ideas fundamentales, una es que la eficiencia de una corriente puede conducir a su propia extinción, y la otra es que la falta de control topográfico en las corrientes de la Siple Coast, puede originar inestabilidad.

#### **1.3.4. El papel que desempeñan las corrientes de hielo rápidas dentro de la dinámica global terrestre**

Las corrientes de hielo tienen un papel similar, en lo que al transporte de sedimentos se refiere, al desempeñado por un sistema fluvial. Las corrientes de hielo, también influyen en la determinación de la geometría de los mantos de hielo en los que se encuentran. Pero quizás, lo más importante es su capacidad de influir en la estabilidad del manto en el que se localizan y en la dinámica global de la Tierra.

Las corrientes de hielo, no sólo descargan grandes masas de hielo, sino que muestran una gran tendencia a la inestabilidad, deducida de la existencia de variaciones en la velocidad de su flujo, de los cambios de sus trayectorias y de las modificaciones (tanto espaciales como temporales) de los patrones de drenaje. El grado de las variaciones

y modificaciones puede incluso llegar a representar el fin de la existencia de una corriente.

La influencia que puedan tener las corrientes de hielo en la dinámica global de la Tierra, ha sido estudiada fundamentalmente a través del análisis e interpretación del fenómeno de las capas de Heinrich (Heinrich, [63]) en los sedimentos marinos del Atlántico Norte y de la potencial de inestabilidad del manto de hielo de la Antártida Occidental.

### **Los sucesos o acontecimientos de Heinrich.**

Las capas de Heinrich, son unas capas de sedimentos de origen subglaciar localizadas en los registros sedimentarios del Atlántico Norte que fueron depositados durante periodos de 100 años a intervalos irregulares de tiempo, hace unos 60,000 años. Cada capa de Heinrich fue depositada durante uno de los periodos anteriormente mencionados, en los que las aguas del Atlántico Norte eran excepcionalmente frías (Bond, [14]) y se produjeron grandes descargas de icebergs. La producción de tales cantidades de icebergs, pudo haber ocasionado el colapso parcial del manto de hielo del que procedían. Según estudios realizados por Andrews y Tedesco ([4], 1992), gran parte de los restos glaciares procedían de la bahía de Hudson.

Los valores de la temperatura están controlados fundamentalmente por dos ciclos oscilatorios: uno de baja frecuencia, llamado ciclo de Bond, y otro de alta frecuencia, denominado ciclo de Dansgaard-Oeschger.

En los ciclos de Dansgaard-Oeschger se dan grandes variaciones en los valores de la temperatura y están asociados a unas condiciones atmosféricas muy frías, secas y ventosas en la región del Atlántico Norte. El enfriamiento progresivo, como consecuencia de la existencia de varios ciclos de Dansgaard-Oeschger, define un ciclo de Bond. Los ciclos de Bond aparecen asociados a periodos de expansión y crecimiento de los mantos de hielo, y concluyen con la existencia de un suceso de Heinrich, en el cual hay una expulsión masiva de hielo al mar. También es posible que se produzcan pequeños sucesos de Heinrich al final de algunos ciclos de Dansgaard-Oeschger. Cada ciclo de Bond finaliza con un rápido aumento de las temperaturas y el retroceso del manto de hielo.

Los ciclos de Dansgaard-Oeschger están relacionados con la formación de las corrientes frías del Atlántico Norte. Las aguas frías y saladas del Atlántico Norte, son suficientemente densas para penetrar en las profundidades del mar Nórdico, desde donde fluyen hacia el sur. Este flujo de aguas frías de norte a sur es equilibrado

por un flujo superficial de aguas templadas procedentes de los trópicos, denominado corriente del Golfo (en la bibliografía inglesa *North Atlantic Drift*). Esta circulación termohalina forma parte de un sistema mayor de circulación y transporte, que conduce agua y calor por los océanos Atlántico y Pacífico. En el Atlántico Norte, la generación de las corrientes profundas de agua fría es sensible a la salinidad del agua superficial y por tanto, la entrada de agua fría poco salina (por ejemplo, procedente de los icebergs) puede impedir o frenar su formación, originando así, una ralentización o incluso la detención de la circulación termohalina, y por lo tanto de la corriente del Golfo, lo que enfriaría la región del Atlántico Norte. Los ciclos de Dansgaard-Oeschger han sido explicados en términos de oscilaciones o variciones en la efectividad de la corriente del Golfo originadas por la variación en la tasa de expulsión de masas de hielo.

Los ciclos de Bond en las masas de hielo de Groenlandia, han sido explicados en términos de corrientes de viento muy frío (gélido) causadas por la expansión del casquete polar Laurentiano en las proximidades de la bahía de Hudson. Cada una de las expansiones del casquete polar Laurentiano durante un ciclo de Bond concluía en la expulsión de grandes cantidades de icebergs al Atlántico Norte. Al derretirse estos icebergs, los restos subglaciares quedaron depositados en el fondo del Atlántico Norte y formaron las sucesivas capas de Heinrich. Como consecuencia del menor grado de salinidad de las aguas del Atlántico Norte se desactivó la circulación termohalina y la corriente del Golfo. Esto a su vez originó el inicio de periodos de glaciación.

Una vez que el casquete ha sufrido el colapso, éste se ve reducido en espesor y amplitud, disminuyendo, de manera considerable, la cantidad de agua procedente del deshielo y de icebergs expulsados. Este hecho origina un aumento de la salinidad en las aguas del Atlántico Norte. Al crecer la salinidad del Atlántico Norte, se activan la circulación termohalina y la corriente del Golfo.

La expansión y colapso del casquete polar Laurentiano en las proximidades de la bahía de Hudson pudo deberse, bien a fuerzas climatológicas externas o bien a la inestabilidad interna del casquete. En presencia de fuerzas externas, el casquete crece de forma gradual, expandiéndose sobre la plataforma continental. Al aumentar la porción de hielo que flota sobre aguas marinas, crece la posibilidad de que se desprendan grandes cantidades de hielo (*calving*) al mar en forma de icebergs y se produzca el colapso. En este caso, el comportamiento oscilatorio (expansión-colapso-expulsión-retroceso-acumulación-expansión), está controlado por la expansión del casquete en un espacio de dimensiones finitas, limitado por las profundas aguas marinas al borde de la plataforma continental.

La otra alternativa, es que el comportamiento oscilatorio se deba a causas internas,

identificadas con variaciones en la actividad de las corrientes (pasar de ser activas a inactivas, y viceversa).

Las características de la base del casquete polar Laurentiano (bahía de Hudson), debieron ser similares a las de la Siple Coast. El mecanismo que propone MacAyeal ([83], 1993), para explicar los sucesivos colapsos del casquete polar Laurentiano es el siguiente: en una primera fase, el espesor del casquete polar se reduciría a una fina capa de hielo. Como consecuencia del proceso de acumulación, el espesor va aumentando. Este aumento origina un aumento de la temperatura basal. El calor generado, puede llegar a hacer que la base pase a ser temperada y que por tanto los sedimentos marinos de los que consta la base se deformen, pudiendo dar lugar a la generación de las corrientes de hielo rápidas. El flujo rápido, ocasionaría la expulsión de grandes masas de hielo, que pueden conducir al colapso del casquete. Tras el colapso, su espesor se reduciría a una fina capa de hielo, permitiendo que la base de sedimentos se congele (recuérdese que se considera que los sedimentos que constituyen la capa se suponen saturados con agua) y se vuelva a iniciar el proceso.

Según la teoría anterior, la inestabilidad interna del casquete polar es el factor que controla las oscilaciones climáticas (ciclos de Bond), asociadas a los acontecimientos de Heinrich.

Algunas de las objeciones que se le han planteado a la teoría de MacAyeal son las siguientes:

- La aparición de restos glaciares en los registros sedimentarios de algunas capas de Heinrich que no proceden de la bahía de Hudson, lo que sugiere que en los acontecimientos de Heinrich, pudieran haber estado involucrados otros casquetes además del Laurentiano.
- Existen indicios de que las fluctuaciones en el volumen de hielo durante y tras un acontecimiento de Heinrich no fueron exclusivas del Atlántico Norte, sino que en el Hemisferio Sur también debieron darse. De esto se deduce que, o bien lo acontecido en el Atlántico Norte, fue suficiente para provocar un cambio global de todo el sistema glaciar, o bien fue una respuesta global de todos los casquetes polares a algún tipo de fuerza externa.

Marshall y Clark ([84], 1997), presentaron un modelo en el que se consideraba que el inicio de las corrientes se debía a mecanismos térmicos; sin embargo, de este trabajo, se desprende que las tasas de descarga de hielo obtenidas por efecto de un mecanismo térmico, serían insuficientes para originar la cantidad de sedimentos registrados en las capas de Heinrich y que los efectos en el nivel del mar, serían inferiores a los



observados.

Andrews ([4], 1998), demostró como el colapso de un casquete puede hacer que otros casquetes también se desintegren. Aunque no se sabe con certeza si los acontecimientos de Heinrich fueron resultado de la inestabilidad interna (activación y desactivación de la corrientes) o bien se debieron a fuerzas externas, de lo que sí se tiene certeza es del potencial de dicha inestabilidad interna para afectar al sistema dinámico global de la Tierra.

La Siple Coast, como se ha dicho en varias ocasiones, es considerada potencialmente inestable. La mayoría de su base, se encuentra por debajo del nivel del mar, de modo que, un retroceso del margen (*grounding line*, línea que señala la región en la cual el manto deja de yacer sobre un lecho continental y pasa a flotar en el agua del mar) podría acelerar el flujo y originar el colapso. Salvo fuertes variaciones locales, en la Antártida Occidental, globalmente, el valor del balance de masa (acumulación menos ablación) es próximo a cero. Estimaciones recientes sugieren que el balance se ha vuelto positivo. El flujo debería aumentar en varios órdenes, para que así, la tasa de desalojo de hielo fuera mayor que la tasa de acumulación y pudiera producirse el colapso del sistema. Por tanto, a pesar del gran nivel de inestabilidad interna (debida a la presencia de sedimentos marinos deformables en la base), el sistema global de la Antártida Occidental parecer ser estable.

El retroceso del margen en la Siple Coast podría detenerse como consecuencia del aparente cambio hacia positivo del balance de masa. La posible razón por la cual el balance de masa se ha vuelto positivo, es el cese de actividad de la corriente C y la progresiva ralentización de la corriente de Whillans.

Aunque en la actualidad, no hay evidencia de que en un futuro próximo, el nivel de inestabilidad en el comportamiento de las corrientes de la Siple Coast pueda llegar a causar el colapso de la Antartida Occidental, esto no significa que el casquete no pueda llegar a desaparecer o al menos, ver reducido su tamaño.



# Capítulo 2

## El modelo de Fowler y Johnson.

Para entender los mecanismos geofísicos que intervienen en el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas (*ice-streaming*) se parte de ideas, análisis y modelos relativos al fenómeno del rápido avance de las masas de hielo en la dirección principal de flujo (*ice-surging*), puesto que este fenómeno también aparece asociado a oscilaciones en el régimen del flujo del hielo y existen ya trabajos, como por ejemplo [83], [51], [52], [55], en los cuales se hace un estudio detallado del mismo.

En el fenómeno consistente en un rápido avance de las masas de hielo en la dirección principal de flujo, las oscilaciones en el régimen de flujo del hielo son consideradas temporalmente, es decir, la masa de hielo sufre variaciones temporales en el régimen de flujo, alternándose el régimen lento y el rápido. Sin embargo, en el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas, las oscilaciones son consideradas espacialmente, es decir, en una masa de hielo se dan de forma contemporánea zonas con flujo rápido y zonas con flujo lento, alternándose unas y otras en la dirección perpendicular a la dirección principal de flujo.

El avance rápido de las masas de hielo ha sido recientemente estudiado en [55] (donde se da un enfoque físico al estudio) y en [36] (donde el enfoque es de carácter matemático), en el contexto de los sucesos de Heinrich acontecidos en la bahía de Hudson durante el Pleistoceno (véase en el capítulo primero, la sección relativa a los sucesos de Heinrich). En [36] puede encontrarse un ejemplo de cómo aplicar la teoría de operadores multívocos a la formulación de problemas de obstáculo (asociados a la existencia de fronteras libres) que surgen al modelar fenómenos relativos a la glaciología.

Fowler y Johnson, en [53], proponen un modelo para describir el fenómeno de las corrientes de hielo aplicado al marco geofísico de la Siple Coast. Para obtener este

modelo se basan en una idea que ya habían considerado en [51], donde se estudiaba el fenómeno del avance rápido de las masas de hielo. En [51], describen el movimiento de un manto de hielo (*ice sheet*) bajo las hipótesis siguientes: la base presenta una capa de sedimentos porosos que se deforman al saturarse con agua y el flujo es debido, fundamentalmente, al deslizamiento sobre la base, en lugar de a la deformación interna del hielo, como es lo habitual. La idea fundamental a la que antes se hacía referencia, se basa en la aplicación de la teoría de MacAyeal (véase [83]), que explica los acontecimientos de Heinrich (véase [63]). La idea de MacAyeal consiste en que la interrelación entre la dinámica del hielo, el deslizamiento basal y el sistema de drenaje en la base puede originar inestabilidad. Fowler y Johnson pensaron que esta idea era compatible con la hipótesis de base blanda y deformable considerada en [51], y así, dicha interrelación podría dar lugar a oscilaciones temporales en el régimen de flujo (*ice surging*). El agua presente en la base debida al derretimiento del hielo basal (como consecuencia del calor de fricción) podría originar que la relación entre el espesor de hielo y el flujo de agua en el sistema de drenaje fuera multívoca (es decir, para un mismo valor del espesor de hielo pueden darse distintos valores del flujo de agua) o lo que es equivalente, entre el espesor de hielo y la velocidad del flujo de hielo (la equivalencia se deduce de la ley de deslizamiento, pues relaciona el flujo de agua y la velocidad del hielo). La existencia de esta relación multívoca, ofrece la posibilidad de que el flujo del manto de hielo presente un comportamiento de tipo oscilatorio (al cual denominaron disparo hidráulico (*hydraulic runaway*), denominación debida a su analogía con el concepto de disparo térmico (*thermal runaway*), introducido por Clarke (véase [29])), es decir, que se produzca una alternancia entre el régimen de flujo lento y el de rápido. El colapso del sistema de drenaje es un factor fundamental para que la relación multívoca entre las variables espesor y velocidad del hielo sea efectiva y se produzca el comportamiento oscilatorio.

En [51], Fowler y Johnson tratan de validar la conjetura anterior aplicada al caso de las corrientes de hielo de la Siple Coast, puesto que aquí, se siguen considerando bases blandas formadas por sedimentos deformables al saturarse por agua y se trata de modelar, igualmente, un comportamiento oscilatorio, aunque ahora las oscilaciones sean consideradas espacialmente (en la dirección perpendicular a la dirección principal de flujo), en vez de temporalmente.

A continuación, se presentará el modelo que propusieron Fowler y Johnson (véase [53]) para describir el fenómeno de la generación de corrientes de hielo. Se comenzará describiendo las principales características del modelo y comentando las modificaciones y avances que supone respecto a teorías y trabajos anteriores a este, relativos al flujo del hielo sobre bases blandas y deformables.

## Características fundamentales del modelo de Fowler y Johnson.

En su formulación física, se trata de un modelo estacionario y bidimensional, que emplea la variable  $x$  para denotar la coordenada longitudinal e  $y$  para la transversal. Considera una teoría de drenaje basal estacionaria bidimensional, aplicada a una base blanda y deformable, que generaliza la teoría unidimensional de Fowler y Walder ([111]). Incorpora una ley de deslizamiento obtenida teóricamente por Fowler ([46]), a partir de trabajos anteriores realizados entre otros, por Lliboutry ([79], [81]), Iken, Bindshadler ([12]), y Boulton e Hindmarsh ([15]). Las variables se consideran independientes de la altura, lo cual se justifica mediante la aplicación de la aproximación de hielos poco profundos (*shallow ice approximation*) y se tienen en cuenta las posibles variaciones de la presión de agua,  $p_w$ , en la dirección principal de flujo (longitudinal) y en la perpendicular a la misma (transversal). Esta última consideración resulta imprescindible si lo que se pretende obtener es algún tipo de inestabilidad lateral en el mecanismo del flujo de hielo, que pueda originar las oscilaciones en el régimen del mismo, es decir, las corrientes de hielo.

Las variables utilizadas son las siguientes:

- $Q$ , magnitud escalar flujo de agua en el sistema de drenaje (es el flujo de agua asociado al deslizamiento del hielo en la dirección principal de flujo),
- $h$ , el espesor de hielo,
- $u$ , la velocidad basal del flujo de hielo en la dirección principal de flujo,
- $\tau$ , los esfuerzos viscosos en la dirección principal de flujo (cizalla),
- $N$ , la presión efectiva en los canales del sistema de drenaje. Se recuerda que este concepto (véase en el capítulo primero, la sección segunda) fue introducido por Lliboutry y que se define como la diferencia entre la presión de la carga de hielo y la presión de agua en el sistema de drenaje, es decir,  $N = p_i - p_w$ ,
- $q$ , el término de enfriamiento (conductivo y convectivo) y
- $\xi$ , la velocidad acumulada.

Fowler y Johnson, consideran al hielo como un fluido viscoso, no-newtoniano, isótropo, incompresible, conductor de calor, aunque débil, y con un flujo típicamente lento. A partir de las ecuaciones básicas de conservación y bajo las suposiciones e hipótesis

mencionadas anteriormente, obtienen un sistema termodinámico acoplado de ecuaciones dimensionales, constituido por las leyes básicas de conservación, complementadas con leyes constitutivas que caracterizan al hielo y su respuesta a los mecanismos geofísicos de carga y deformación.

## 2.1. Deducción de las ecuaciones dimensionales del modelo de Fowler y Johnson.

En esta sección se deducirán las ecuaciones de las que consta el modelo propuesto por Fowler y Johnson. Se comenzará deduciendo la ley de drenaje, que relaciona la presión efectiva  $N$ , con el flujo de agua en el sistema de drenaje. Posteriormente, se deducirán las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento (balance de fuerzas) y la parametrización del término de balance de calor basal. Una vez conocida la expresión del balance de calor, podrá ser deducida la ecuación de conservación del flujo de agua en el sistema de drenaje, ya que el balance térmico regula la producción de agua en la base. A continuación, se considerará la ley de deslizamiento, en la cual se expresa la relación existente entre la velocidad basal del hielo, la cizalla y la presión efectiva. Nótese, que puesto que mediante la ley de drenaje se prescribe el tipo de relación considerada entre la presión efectiva y el flujo de agua, éste último, está presente (a través de  $N$ ) en la ley de deslizamiento, poniendo de manifiesto que el agua basal contribuye al deslizamiento del hielo (debido a su efecto lubricante). Por último, se deducirá la ecuación de conservación de la masa de hielo.

**Observación 2.1.** *En este capítulo y en los sucesivos, se utilizarán indistintamente las notaciones*

$$\partial_z f = \partial f / \partial z = f_z,$$

*para designar la derivada parcial de una función  $f$  respecto de una variable,  $z$ . Cuando la función considerada dependa únicamente de una variable se utilizará la notación  $f'$ , para denotar la derivada ordinaria  $df/dz$ .*

### Ley de drenaje.

Esta ley establece el tipo de relación que se va a asumir entre las variables flujo de agua en el sistema de drenaje,  $Q$ , y la variable presión efectiva,  $N$ . La deducción aquí presentada se basa fundamentalmente en los trabajos de Fowler y Walder ([111]) y de Fowler y Johnson ([53]).

La presencia de distintos regímenes de flujo de hielo en la dirección lateral, es decir, la existencia corrientes rápidas de hielo alternadas con zonas de flujo típicamente lento, hace que en el modelo a proponer, se deban tener en cuenta las variaciones de la presión de agua,  $p_w$ , tanto en la dirección longitudinal, como en la transversal. Por este motivo, se considerará un vector flujo de agua,  $\vec{Q}_w$ , que varíe respecto de ambas coordenadas, la longitudinal y la transversal.

En la zona de flujo rápido, la presión de agua en la base es mayor que en el hielo lento circundante y por otro lado, el flujo de calor desde la base al *plug-flow* (la masa de hielo adyacente al hielo basal) también es mayor. Por tanto, se tiene que a una misma altura, el hielo de la zona que presenta un régimen de flujo lento, se encuentra a mayor temperatura que el hielo de la zona que presenta un régimen de flujo rápido. Parece pues, que el modelo buscado deberá reflejar algún tipo de compensación entre la variación lateral de la presión de agua y la temperatura del hielo.

Para conseguir los requisitos mencionados anteriormente, se generalizará al caso bidimensional la teoría del drenaje unidimensional de Walder y Fowler [111]. Por este motivo, a continuación se describirá brevemente dicha teoría.

Walder y Fowler desarrollaron una descripción del posible mecanismo de drenaje basal para glaciares y mantos de hielo (*ice-sheets*) que fluyen sobre una capa de sedimentos (*till*) deformable y saturada con agua. Walder y Fowler, consideraron un sistema de drenaje constituido por canales situados entre el hielo y la capa de sedimentos, extendiéndose hacia arriba en el hielo y hacia abajo en la capa de sedimentos. Para un régimen estacionario, la cinemática del cierre de canales es descrita por las siguientes expresiones

$$\dot{m}_i = \rho_i K_i l_i^2 A_i (N_c/n)^n, \quad \dot{m}_s = \rho_s K_s l_s^2 A_s (N_c/a)^{a-b}$$

donde  $\dot{m}_i$  es la tasa de deformación de hielo por unidad de medida longitudinal,  $\dot{m}_s$  es la tasa de erosión del sedimento en la base del conducto,  $\rho_i$  y  $\rho_s$  son las densidades del hielo y del sedimento, respectivamente,  $l_i$  y  $l_s$  son partes del perímetro del conducto rodeado por el hielo y los sedimentos, respectivamente,  $K_i$ ,  $K_s$  son factores de forma adimensionales,  $A_i$  y  $n$  son las constantes que aparecen en la ley de flujo de Glen para el hielo,  $A_s$ ,  $a$ ,  $b$  son constantes positivas, y por último,  $N_c = p_i - p_c$ , es la presión efectiva en los canales, siendo  $p_c$ , la presión del agua en el túnel subglaciar y  $p_i$ , la presión del hielo. Despreciando efectos inerciales, el balance entre las fuerzas de presión y las fuerzas de arrastre en las paredes del canal, viene dado por la identidad siguiente,

$$S \left( \rho_w g \sin \beta - \frac{\partial p_c}{\partial s} \right) = \tau l,$$

donde  $\beta$  es el ángulo que forma la base del glaciar con la horizontal,  $S$  es el área de la sección transversal a la dirección del flujo y  $s$  es la variable que representa la coordenada en la dirección del flujo a través del canal. Suponiendo un flujo turbulento, el valor medio de la cizalla en las paredes del canal viene dado por la expresión,  $\tau = f_r \rho_w u^2 / 8$ , donde  $f_r$  es un factor adimensional de fricción.

Walder y Fowler, denotando por  $Q_w$ , al flujo de agua que pasa por el conducto y considerando que el volumen de sedimentos suspendidos es despreciable, escriben la ecuación de conservación de la energía interna de la forma siguiente

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ Q_w \left( \frac{\dot{m}_i \rho_w c_p}{l_i h_T} - \frac{\gamma p_c}{L} \right) \right] = -\dot{m}_i + \frac{\tau u l}{L}.$$

El coeficiente  $h_T$  es el coeficiente de transferencia de calor,  $c_p$  es el calor específico,  $L$  es el calor latente,  $u$  es la velocidad media del flujo de agua en el conducto,  $\gamma = \rho_w c_p c_t \approx 0,32$  y

$$\frac{l_i h_T}{\rho_w c_p} = \frac{l_i h_T}{K} \frac{K}{\rho_w p_c} = k \text{Nu},$$

donde Nu, es el número de Nusselt (medida adimensional de la transferencia de calor en la interfase hielo-agua) y  $k = K / \rho_w p_c$ , la conductividad térmica.

Dados  $l_i$ ,  $l_s$ , y añadiendo la relación  $Su = Q$ , a las ecuaciones anteriores, es posible determinar las cinco incógnitas  $S$ ,  $u$ ,  $\tau$ ,  $p_c$  y  $\dot{m}_i$ . Walder y Fowler, simplifican el sistema de ecuaciones obtenido, utilizando dos aproximaciones, la primera consiste en considerar que,  $\dot{m}_i = \tau u l / L$ , y la segunda, es una aproximación relativa a la expresión del gradiente hidráulico. Walder y Fowler argumentan del modo siguiente: si  $N_c = p_i - p_c$  y  $p_i = \rho_i g d$ , donde  $d$  representa la normal a la altura de hielo, se tiene que el gradiente hidráulico admite la siguiente expresión,

$$\rho_w g \text{sen} \beta - \frac{\partial p_c}{\partial s} = \rho_w g \text{sen} \beta + \frac{\partial N_c}{\partial s} - \rho_i g \frac{\partial d}{\partial s},$$

y por tanto,

$$\rho_w g \text{sen} \beta - \frac{\partial p_c}{\partial s} = (\rho_w - \rho_i) g \text{sen} \beta + \rho_i g \cos \beta \tan \alpha + \frac{\partial N_c}{\partial s},$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que forma la superficie con la horizontal y  $\beta$ , el ángulo que forma la base del glaciar con la horizontal. Suponiendo que  $\alpha$  y  $\beta$  son muy pequeños, es lícito considerar las aproximaciones,  $\tan \alpha \sim \text{sen} \alpha$ ,  $\cos \beta \sim 1$ ,  $\text{sen} \beta \sim 0$  y denotando por  $N$  a  $N_c$ , se puede escribir el gradiente hidráulico como

$$\rho_w g \text{sen} \beta - \frac{\partial p_c}{\partial s} = \rho_i g \text{sen} \alpha + \frac{\partial N}{\partial s}. \quad (2.1)$$

Entonces, las ecuaciones algebraicas que se tienen son:

$$\dot{m}_i = \frac{\tau l}{L}, \quad S \left( \rho_w g \text{sen} \alpha + \frac{\partial N}{\partial s} \right) = \tau l, \quad \tau = \frac{1}{8} f_r \rho_w u^2, \quad (2.2)$$



$$\dot{m}_i = \rho_i K_i l_i^2 A_i (N/n)^n, \quad Q_w = Su. \quad (2.3)$$

Walder y Fowler suponen que para una base cuya pendiente sea prácticamente nula, es decir,  $\beta \approx 0$ , el término  $\partial_s N$  resulta despreciable frente al resto de términos que aparecen en la expresión del gradiente hidráulico dada por (2.1). Bajo la consideración anterior, el gradiente hidráulico podría ser aproximado del modo siguiente

$$\rho_w g \text{sen} \beta - \frac{\partial p_c}{\partial s} \approx \rho_i g \text{sen} \alpha.$$

En nuestro caso, donde se trata de generar una corriente de hielo sobre una zona similar a la del Siple Coast, se deben considerar las posibles variaciones longitudinales y laterales de la presión efectiva, para así, hacer posible la existencia de zonas en las cuales la presión efectiva tome valores elevados (asociadas a un régimen de flujo lento) y zonas en las cuales tome valores bajos (asociadas a un régimen un flujo rápido). Por tanto, no se debe ignorar, como hicieron ellos, el término  $\partial_s N$ .

A continuación, se realizarán los cálculos necesarios para obtener una expresión del flujo de agua en función de la presión efectiva. Suponiendo que  $l_i \approx l$ , pueden igualarse la ecuaciones (2.2)<sub>1</sub> y (2.3)<sub>1</sub> y así eliminar la variable  $\dot{m}_i$ . De este modo, se obtiene que

$$l^2 N^n = b_2 Q_w, \quad \tau = b_1 S/l, \quad u = b_3 S^{1/2} l^{-1/2}, \quad S^3 l^{-5} = N^{2n} b_2^{-2} b_3,$$

$$b_1 = \rho_i g \text{sen} \alpha + \partial N / \partial s, \quad b_2 = N^n b_1 / (\rho_i L K_i A_i), \quad b_3 = 8 b_1 / (f_R \rho_w).$$

En el estudio, se considerará el caso en el cual,  $N < \bar{p}$  (presión efectiva crítica) y el drenaje se produce a través de un canal inciso en el sedimento. Los canales se supondrán anchos y de muy poca profundidad, por tanto, se podrá considerar que  $S \approx hl$ , donde  $h$  es la profundidad del canal. Definiendo  $\bar{b}_2$  y  $\bar{b}_3$  por,  $b_2 = \bar{b}_2 b_1$  y  $b_3 = \bar{b}_3 b_1$ , para  $n = 3$  (se recuerda que  $n$  es el exponente de la ley de flujo de Glen), se tiene que:

$$Q_w = \frac{\bar{b}_2 \bar{b}_3 b_1^2 h^3}{N^3}.$$

Puesto que  $b_1$  (que representa el gradiente hidráulico) viene dado por

$$b_1 = \rho_i g \text{sen} \alpha + \frac{\partial N}{\partial s} = \rho_i g \text{sen} \alpha \left[ 1 + \frac{1}{\rho_i g \text{sen} \alpha} \frac{\partial N}{\partial s} \right],$$

definiendo  $\psi = 1/(\rho_i g \text{sen} \alpha)$ , se llega a la siguiente expresión para el flujo de agua en el caso unidimensional, es decir, sólo considerando la dirección principal de flujo,

$$Q_w = \bar{b}_2 \bar{b}_3 \psi^{-2} \frac{h^3}{N^3} \left[ 1 + \psi \frac{\partial N}{\partial s} \right]^2,$$

donde se observa que el flujo de agua es proporcional al cuadrado del gradiente hidráulico. Nótese que si  $\beta \approx 0$  y sólo se considera el flujo longitudinal (caso unidimensional), entonces  $s = x$ , donde  $x$  denota la coordenada longitudinal. La identidad anterior se generaliza al caso bidimensional de manera natural, para así, obtener la siguiente expresión del vector de flujo de agua:

$$\vec{Q}_w = \frac{\tilde{c}}{N^3} |\vec{x} + \psi \nabla N| [\vec{x} + \psi \nabla N]$$

donde  $\tilde{c} = \bar{b}_2 \bar{b}_3 \psi^{-2} h^3$  y  $\vec{x}$  es el vector unitario en la dirección principal de flujo. Nótese que la expresión anterior es del tipo ley de Darcy no lineal.

Walder y Fowler suponían que  $\partial_s N \ll 1$  y por tanto  $\psi \nabla N \approx 0$ . Sin embargo, aunque  $|\vec{x} + \psi \nabla N| \approx 1$ , si se quiere generar un flujo lateral debido al gradiente de presión, se debe conservar el término  $\psi \nabla N$ . Estas observaciones conducen a las siguientes relaciones (que describen el comportamiento del sistema de drenaje) entre las componentes longitudinal,  $Q_{\parallel}$ , y transversal,  $Q_{\perp}$ , del vector flujo de agua y la presión efectiva  $N$ ,

$$Q_{\parallel} = \frac{\tilde{c}}{N^3}, \quad Q_{\perp} = \frac{\tilde{c}}{N^3} \psi \frac{\partial N}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Nótese que la relación entre  $Q_{\parallel}$  y  $N$  es de proporcionalidad inversa. Se piensa que esto es lo más adecuado cuando se considera un sistema de drenaje constituido por canales incisos en el sedimento (aunque con su techo constituido por hielo) y de distribución y tamaño relativamente uniforme (es decir, no se da una distribución de tipo arborescente, en la cual los conductos de menor tamaño desembocan en otros de mayor tamaño). Parece ser, que cuando se considera un sistema de drenaje constituido por túneles o canales de Röthlisberger (dirigidos hacia el hielo), la relación de proporcionalidad directa (ver [99]), es el tipo de relación más probable entre el flujo de agua y la presión efectiva.

### **Balance de fuerzas (conservación de la cantidad de movimiento) y balance de calor en la base.**

Para la obtención de expresiones adecuadas para los balances de fuerzas y de calor basal, se seguirá la teoría de capa límite de Fowler ([49]), basada en las hipótesis de escasa difusividad térmica del hielo, fuerte dependencia de la viscosidad del hielo respecto de la temperatura, y en la que se utilizan técnicas propias de la teoría de lubricación aplicadas al caso de los casquetes polares. Según esta teoría, las dinámicas no lineales de las grandes masas de hielo pueden ser descritas a través de capas límite térmicas muy próximas a la base, que contienen en su interior a una fina capa de cizalla, ya que se supone que los casquetes se deforman principalmente

en la base, lugar en el que las presiones y las temperaturas alcanzan valores más altos que en el resto.

El flujo de los mantos de hielo se considera generado por las fuerzas de cizalla producidas cerca de la base (debidas a la pendiente del hielo). Estas fuerzas de cizalla originan una deformación del hielo que es considerado un fluido altamente viscoso. Se considera que el flujo del hielo se activa térmicamente, ya que la deformación interna del hielo es uno de los factores que dan lugar al flujo del hielo, dicha deformación es función de la viscosidad y ésta a su vez, de la temperatura. Cuando se realiza un estudio unidimensional del flujo del hielo, es decir, sólo se considera la dirección principal de flujo (longitudinal), la cizalla basal (esfuerzos viscosos en la dirección principal de flujo), denotada por  $\tau$ , viene dada por  $\tau = \rho_i g h \text{sen} \alpha$  (véase por ejemplo [49]), donde  $\rho_i$  es la densidad del hielo,  $g$  es la gravedad,  $h$  es el espesor de hielo y  $\alpha$  es el ángulo que forma la superficie con la horizontal. Puesto que en el caso de mantos de hielo, la pendiente superficial es prácticamente nula, es decir,  $\alpha \approx 0$ , es lícito considerar la aproximación  $\text{sen} \alpha \approx -h_x$ , donde  $x$  es la variable empleada para denotar la coordenada en la dirección principal de flujo. De todo lo anteriormente dicho, se deduce que la cizalla, en el caso en el que sólo se tiene en cuenta la dirección principal de flujo, viene dada por la expresión

$$\tau = -\rho_i g h h_x. \quad (2.5)$$

La identidad (2.5) es la comúnmente aceptada como ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento y básicamente, es un balance entre las fuerzas de cizallamiento y la fuerza ejercida por la masa de hielo (su peso). La generalización natural de (2.5) al caso que nos ocupa, es decir, aquel en el cual también se tiene en cuenta la dirección transversal, sería la siguiente

$$\vec{\tau} = (\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}) = -\rho_i g h (h_x, h_y) = -\rho_i g h \nabla h. \quad (2.6)$$

Puesto que en el modelo de Fowler y Johnson se asume que  $h = h(x)$  ( $h$  no depende de la coordenada transversal  $y$ ), se tiene la expresión adecuada para las fuerzas de cizallamiento vuelve a ser la relación escalar (2.5), donde  $\tau = \tau_{\parallel}$ . Téngase en cuenta que  $h_y = 0$  y que por tanto,  $\tau_{\perp} = 0$ .

En el proceso de modelado, un punto especialmente delicado por su importancia, es la determinación del flujo de calor desde la base hacia el *plug-flow*, que es la denominación empleada en la bibliografía para referirse a la masa de hielo que se encuentra por encima de la capa de cizalla y que se mueve con velocidad independiente del espesor local (coordenada vertical). Denotaremos por  $u$  a la componente horizontal de la velocidad del hielo y por  $z$  a la coordenada espacial vertical. Si  $u$  es muy pequeña, el flujo de calor que predomina es de tipo conductivo, pero si  $u$

es grande, es de esperar la existencia de una fina capa de frontera térmica cerca de la base, en la cual, el calor convectivo se equilibre con el conductivo y la disipación viscosa sea despreciable. Por tanto,  $\rho_i c_p u T_x \approx k T_{zz}$ , donde  $c_p$  es el calor específico del agua y  $k$  es la conductividad térmica. Para la parte convectiva, se tiene que

$$u T_x - z u' T_z = k T_{zz}, \quad w = -z u' = -z \frac{\partial u}{\partial x},$$

donde  $u$  representa la componente horizontal de la velocidad y  $w$  la componente vertical. Esta ecuación se resuelve con las condiciones de contorno siguientes

$$\begin{cases} T = T_m, & z = 0, \quad \text{donde } T_m \text{ es la temperatura de derretimiento en la base,} \\ T \rightarrow T_a, & z \rightarrow \infty, \quad \text{donde } T_a \text{ es la temperatura superficial.} \end{cases}$$

Tras realizar los cálculos oportunos (véase [49]), el flujo de calor hacia el *plug-flow*, considerando la conducción y convección, puede expresarse como

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \left( \frac{\rho c_p k}{\pi} \right)^{1/2} \frac{u \Delta T}{\xi^{1/2}} + \frac{k \Delta T}{h} \quad (2.7)$$

donde  $\Delta T = T_m - T_a$  (nótese que  $\Delta T \approx |T_a|$ ) y  $\xi = \int_0^x u dx$ , es la variable velocidad acumulada. El segundo cociente refleja la importancia de la conducción cuando  $h$  es pequeña.

La expresión (2.7) permite expresar el término de balance térmico en la base, es decir, la diferencia entre los términos de calentamiento y el enfriamiento del modo siguiente,

$$G + \tau u - q,$$

donde los términos  $G$ , flujo de calor geotérmico y  $\tau u$ , calor de fricción (disipación viscosa), constituyen los términos de calentamiento. La variable  $q$  representa el enfriamiento y engloba el término de enfriamiento conductivo, dado por  $kh^{-1}\Delta T$ , que es el dominante cuando se dan velocidades y espesores pequeños, y el término de enfriamiento convectivo, dado por  $(\rho c_p k / \pi)^{1/2} u \xi^{-1/2} \Delta T$ , de mayor importancia para velocidades altas. El balance térmico asociado al movimiento está representado por,  $\tau u - (\rho c_p k / \pi)^{1/2} u \xi^{-1/2} \Delta T$ , mientras que la parte del balance térmico que no depende del movimiento estaría compuesta por la diferencia,  $G - kh^{-1}\Delta T$ . Las variaciones en el valor del balance total de calor, permiten el cambio de régimen térmico de la base, el cual puede ser polar (la base está congelada y no se produce deslizamiento) o temperado (la temperatura basal alcanza la temperatura de fusión del hielo a la presión local, aparece agua en la base, y por tanto, puede producirse deslizamiento).

### Ecuación de conservación del flujo de agua.

El exceso de calor producido en la base viene dado por la expresión,  $G + \tau u - q$ . Este calor origina una velocidad de derretimiento en la dirección de descenso, dada por,  $(G + \tau u - q)/\rho_w L$ , donde  $L$  es el calor latente y  $\rho_w$  es la densidad del agua. Si denotamos la distancia media entre dos canales del sistema de drenaje por  $w_d$ , entonces el flujo de agua por canal se ve incrementado en la cantidad dada por,

$$\nabla \vec{Q}_w = \frac{(G + \tau u - q)w_d}{\rho_w L}.$$

El vector flujo de agua  $\vec{Q}_w$  que se considera en este modelo, como ya se mencionó anteriormente, tiene por componentes longitudinal y transversal, respectivamente, a los siguientes cocientes (véase (2.4))

$$Q_{\parallel} = \frac{\tilde{c}}{N^3}, \quad Q_{\perp} = \frac{\tilde{c}}{N^3} \psi \frac{\partial N}{\partial y}.$$

En lugar de considerar  $Q_{\parallel}$  y  $Q_{\perp}$  como variables destinadas a aparecer en el sistema de ecuaciones que describirá el modelo, se considerará la variable escalar flujo de agua,  $Q = Q(x, y)$ , definida por la relación,

$$Q_{\parallel}(x, y) = \bar{Q} + Q(x, y). \quad (2.8)$$

El término  $\bar{Q} \ll 1$ , que aparece en (2.8), es un flujo residual de valor constante, que representa la pequeña cantidad de agua siempre presente en la base, debida a las fuerzas de cizalla. La expresión de la presión efectiva,  $N$ , dada en (2.4), resulta ser en términos de  $Q$ ,

$$N = \tilde{c}^{1/3}(Q + \bar{Q})^{-1/3}. \quad (2.9)$$

La identidad anterior se conoce en la bibliografía (véase [111]), con el nombre de ley de drenaje <sup>1</sup>. Así, la ecuación de conservación del flujo de agua, expresada en términos de las componentes longitudinal y transversal del vector flujo de agua, es decir,

$$\nabla \vec{Q}_w = \frac{\partial Q_{\parallel}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\perp}}{\partial y} = \frac{(G + \tau u - q)w_d}{\rho_w L}, \quad (2.10)$$

podrá ser expresada en función de una única variable,  $Q$ , que haga referencia al flujo de agua. Para ello basta tener en cuenta que,  $\partial_x Q_{\parallel} = \partial_x Q$ , ( $\bar{Q}$  es una constante) y

---

<sup>1</sup>Nótese que en este caso la relación entre la presión efectiva  $N$  y el flujo de agua  $Q$  es de proporcionalidad inversa. Como ya se ha comentado antes existen otras teorías de drenaje basal en las que esta relación es de proporcionalidad directa (véase [99]).

sustituir la expresión de  $N$  en términos de  $Q$ , dada por (2.9) en el término  $Q_{\perp}$  (en (2.4)<sub>2</sub>). De este modo, se obtiene que

$$Q_{\perp} = \psi(Q + \bar{Q})\partial_y [\tilde{c}^{1/3}(Q + \bar{Q})^{-1/3}].$$

Posteriormente, se realiza el cálculo de  $\partial_y [\tilde{c}^{1/3}(Q + \bar{Q})^{-1/3}]$ , resultando que

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tilde{c}^{1/3}(Q + \bar{Q})^{-1/3}) = -\frac{\tilde{c}^{1/3}}{3}(Q + \bar{Q})^{-4/3}\frac{\partial Q}{\partial y},$$

y por último, se sustituye en la ecuación (2.10) las expresiones obtenidas anteriormente para  $\partial_x Q_{\parallel}$  y  $\partial_y Q_{\perp}$ . Según los cálculos anteriores, se tiene que la ecuación de conservación del flujo de agua en términos de la variable  $Q$  es:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\psi\tilde{c}^{1/3}}{3}\frac{\partial}{\partial y} \left[ (Q + \bar{Q})^{-1/3}\frac{\partial Q}{\partial y} \right] + \frac{(G + \tau u - q)w_d}{\rho_w L}. \quad (2.11)$$

### Ley de deslizamiento.

Como ya se dijo en la introducción, la ley de deslizamiento que se considerará es del tipo

$$\tau = cu^r N^s, \quad (2.12)$$

donde  $r$  y  $s$  son los exponentes de la reología de flujo viscoso no lineal de Boulton e Hindmarsh y toman valores en el intervalo  $(0, 1)$ . En este modelo, se asumirán los valores  $r = s = 1/2$ . El coeficiente  $c$  se toma de valor constante, hace referencia a la dureza de la base (rugosidad) y vendría a representar en cierto modo, la consideración de algún tipo de fricción. La velocidad basal longitudinal,  $u = u_b$ , aunque de forma paramétrica contiene la pequeña velocidad de cizalla,  $u_c \ll 1$  (asociada a la cizalla que siempre existe en la base), es esencialmente una velocidad de deslizamiento basal,  $u_d$ . En otras palabras, la velocidad basal en la dirección principal de flujo viene dada por la suma,  $u = u_d + u_c$ , pero se asume que  $u \approx u_d$  puesto que la velocidad de cizalla es  $u_c \ll 1$ . Esta ley será utilizada también en la forma

$$\tau = cu^r (Q + \bar{Q})^{-s/3}, \quad (2.13)$$

expresión que se deduce sin más que sustituir  $N$  por su expresión en términos del flujo de agua (véase (2.9)) en (2.12). El valor constante del flujo residual denotado por  $\bar{Q}$ , debe ser elegido de tal modo que en el límite  $Q \rightarrow 0$ , se tenga que la velocidad basal,  $u = u_b$ , tome aproximadamente, al considerar,  $Q + \bar{Q} = \bar{Q}$ , en la ley de deslizamiento (2.13), el valor de la pequeña velocidad de cizalla  $u_c$ , asociada a la deformación interna del hielo.

### Ecuación de conservación de la masa de hielo.

A partir de la ecuación de conservación de la masa para régimen evolutivo y en forma de divergencia,  $h_t + \text{div}(h\vec{u}) = a$ , considerando que  $h_t = 0$ , puesto que el modelo es estacionario, que  $a$ , término de acumulación/ablación es nulo<sup>2</sup>, es decir,  $a \approx 0$  y que el espesor sólo depende de la coordenada longitudinal<sup>3</sup>, o sea,  $h = h(x)$ , se propone la siguiente ecuación en forma integral como ecuación de conservación de la masa del hielo,

$$h \int_0^L u \, dy = M, \quad (2.14)$$

donde  $M$ , es el flujo inicial de hielo prescrito en el *ice-divide* (zona donde el espesor de hielo,  $h$ , es máximo),  $L$  es la anchura del dominio considerado y  $u = u_{\parallel}$ , es la componente de la velocidad del hielo en la dirección principal de flujo.

Antes de deducir la ecuación (2.14), se justificará la razón por la cual se puede asumir que  $h = h(x)$ .

La justificación para considerar que  $h = h(x)$ , es decir,  $\partial_y h = 0$ , se basa en el siguiente razonamiento: si se considerara algún tipo de variación lateral, la ecuación de conservación de la masa que habría que considerar sería la siguiente,

$$\nabla(h\vec{u}) = \partial_x(hu_{\parallel}) + \partial_y(hu_{\perp}) = 0, \quad (2.15)$$

donde  $u_{\parallel}$  es la componente de la velocidad de hielo en la dirección principal de flujo y  $u_{\perp}$  es la componente en la dirección transversal (perpendicular a la dirección principal de flujo). Puesto que  $u_{\perp} \ll u_{\parallel}$ , trataremos de expresar todo en función de  $u_{\parallel}$ , asumiendo que

$$\|\vec{u}\| = \|(u_{\parallel}, u_{\perp})\| \approx |u_{\parallel}|.$$

Para determinar  $u_{\perp}$ , se consideran, por un lado, la generalización al caso vectorial de la ley de deslizamiento (2.13) en su versión adimensional,

$$\vec{\tau} = \|\vec{u}\|^{r-1} (Q + \bar{Q})^{s/n} \vec{u}, \quad (2.16)$$

donde  $n$  es el exponente de la ley de flujo viscoso de Glen ( $n \approx 3$ ) y por otro, la generalización de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (2.5),

---

<sup>2</sup>Esto se corresponde con el hecho de que el modelo es estacionario, por tanto no quedan reflejadas las oscilaciones en los valores del espesor asociadas a la alternancia de periodos en los que predomina el deshielo y aquellos en los que predominan las precipitaciones.

<sup>3</sup>El hecho de considerar que  $h = h(x)$ , es decir, que  $h_y = 0$ , será justificado un poco más adelante. En cualquier caso, se verá que esta hipótesis supone una de las limitaciones detectadas en el modelo.

en su versión adimensional, es decir,

$$\vec{\tau} = h\nabla h. \quad (2.17)$$

A partir de (2.16) y de (2.17), se tiene que las componentes longitudinales y transversales del vector de cizalla vienen dadas por

$$\tau_{\parallel} = \frac{u_{\parallel}^r}{Q_{\parallel}^{s/3}} = -hh_x, \quad \tau_{\perp} = \frac{u_{\parallel}^{r-1}u_{\perp}}{Q_{\parallel}^{s/3}} = -hh_y.$$

Sustituyendo  $u_{\perp}$  en la ecuación de conservación de la masa, tenemos que

$$\partial_x(hu_{\parallel}) = \Lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^2(Q_{\parallel})^{s/3}}{u_{\parallel}^{r-1}} h_y \right), \quad \text{donde} \quad \Lambda = \frac{[u_{\perp}]l}{[u_{\parallel}]d}, \quad (2.18)$$

siendo  $[u_{\parallel}]$ ,  $[u_{\perp}]$  las escalas correspondientes a las componentes de la velocidad,  $d$  la escala considerada en la dirección transversal y  $l$  en la longitudinal. Para valores típicos de dichas escalas, relativos a la Siple Coast, resulta que  $\Lambda \approx 64,04$ .

Para hacer más sencilla la notación se considerará que  $u_{\parallel} := u$ ,  $\tau_{\parallel} := \tau$  y  $Q_{\parallel} := Q + \bar{Q}$ . A continuación se demostrará que en el término  $\partial_x(hu)$ , aparece el término elíptico  $h_{xx}$ . En efecto, puesto que  $\partial_x(hu) = uh_x + hu_x$ , despejando  $uh_x$  en (2.18), resulta que

$$uh_x = -hu_x + \Lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{h^2(Q + \bar{Q})^{s/3}}{u^{r-1}} h_y \right]. \quad (2.19)$$

Como  $u = \tau^{1/r}(Q + \bar{Q})^{s/3r}$ , se tiene que

$$\frac{\tau u_x}{u} = \frac{\tau_x}{\tau} + \frac{s}{3} \frac{\partial_x[Q + \bar{Q}]}{Q + \bar{Q}},$$

donde  $\tau = -hh_x$ . Teniendo en cuenta que  $h_x < 0$ , se llega a la siguiente identidad

$$\frac{\tau_x}{\tau} = \frac{h}{h_x} - \frac{h_{xx}}{|h_x|}.$$

Por tanto, resulta que

$$\partial_x(hu) = uh_x + hu_x = \left(1 + \frac{1}{r}\right) uh_x + \frac{s}{3} \frac{hu}{r} \frac{\partial_x[Q + \bar{Q}]}{Q + \bar{Q}} - \frac{hu}{r} \frac{h_{xx}}{|h_x|}.$$

Entonces (2.18), se traduce a la expresión,

$$\left(1 + \frac{1}{r}\right) uh_x + \frac{s}{3} \frac{hu}{r} \frac{\partial_x[Q + \bar{Q}]}{Q + \bar{Q}} = \frac{hu}{r} \frac{h_{xx}}{|h_x|} + \Lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{h^2(Q + \bar{Q})^{s/3}}{u^{r-1}} h_y \right]. \quad (2.20)$$



De (2.20) se deduce que la ecuación de conservación de la masa en la forma (2.15), es una ecuación elíptica en  $h$ . La resolución numérica de esta ecuación elíptica representaría abordar un problema muy complicado desde el punto de vista computacional, razón por la cual, se estudia si es admisible suponer que  $\partial_y h \approx 0$  y así evitar resolver un problema elíptico. La respuesta es afirmativa, es decir, el hecho de suponer  $\partial_y h \approx 0$  no altera, en esencia, la naturaleza del problema. En efecto, si se escribe la ecuación (2.19) de la forma siguiente

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x}(hu) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{h^2(Q + \bar{Q})^{s/3}}{u^{r-1}} h_y \right],$$

donde  $\Lambda^{-1} = 0,016 \approx 0$ , se puede considerar que  $\partial_y h \approx 0$ . Este hecho hace que sea admisible la hipótesis de suponer que  $h$  no varía respecto de  $y$ .

Como  $u_{\perp} \ll u_{\parallel}$ , y  $h := h(x)$ , en este caso la ecuación de conservación de la masa (2.15) puede aproximarse por

$$\partial_x(hu) = 0, \quad (2.21)$$

donde se recuerda que  $u(x, y) = u_{\parallel}(x, y)$ . De (2.21), se deduce que  $h(x)u(x, y) = k(y)$ , siendo  $k$  una función que sólo depende de la coordenada transversal,  $y$ . Integrando respecto de la variable transversal,  $y$ , a lo largo de la anchura del dominio considerado, que se denota por  $(0, L)$ , se tiene que

$$\int_0^L h(x)u(x, y)dy = \int_0^L k(y)dy = M,$$

donde  $M$  representa un flujo inicial de hielo de valor constante prescrito en el *ice divide*. De la igualdad anterior, se obtiene la ecuación en forma integral

$$\int_0^L h(x)u(x, y)dy = h(x) \int_0^L u(x, y)dy = M,$$

considerada como ecuación de conservación de la masa en forma integral en el sistema de ecuaciones dimensionales que constituyen el modelo de Fowler y Johnson.

Más adelante, cuando se analicen las limitaciones detectadas en el modelo, se volverá a hablar sobre las implicaciones de considerar que el espesor sólo dependa de la coordenada longitudinal.

El sistema de ecuaciones dimensionales que constituyen el modelo de Fowler y Johnson es el siguiente:

### Ecuaciones dimensionales

E. de Conservación de la masa:

$$h \int_0^L u dy = M.$$

E. de Conservación de la cantidad de movimiento (balance de fuerzas):

$$\tau = -\rho_i g h h'.$$

E. de Conservación de la energía interna:

$$q = -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=0} = \left( \frac{\rho_i c_p k}{\pi} \right)^{1/2} \frac{u \Delta T}{\xi^{1/2}} + \frac{k \Delta T}{h}.$$

E. de Conservación del flujo de agua en el sistema de drenaje:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\psi \tilde{c}^{1/3}}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (Q + \bar{Q})^{-1/3} \frac{\partial Q}{\partial y} \right] + \frac{(G + \tau u - q) w_d}{\rho_w L}.$$

Ley de drenaje:

$$Q_w = (Q_{\parallel}, Q_{\perp}), \quad Q_{\parallel} = \frac{\tilde{c}}{N^3}, \quad Q_{\perp} = \frac{\tilde{c}}{N^3} \psi \frac{\partial N}{\partial y}, \quad \psi = \frac{1}{\rho_i g h \sin \alpha}.$$

Ley de deslizamiento:

$$\tau = c u^r N^s$$

Definición de la variable  $\xi$ , velocidad acumulada:

$$\xi = \int_0^x u dx.$$

Una vez que se tiene el sistema de ecuaciones dimensionales, se procede a la obtención de las ecuaciones adimensionales, ya que sólo así, pueden compararse propiamente los términos que aparecen en las ecuaciones para saber cuales son los de mayor importancia en el fenómeno.

## 2.2. Las ecuaciones adimensionales

Para la obtención de las ecuaciones básicas del modelo que consideraremos en esta memoria, adimensionalizaremos las ecuaciones anteriores (véase [49]).

### 2.2.1. Las escalas del problema.

La adimensionalización básicamente consiste en expresar las variables dimensionales como producto de una escala (que encierra la dimensión) por la variable adimensional:

$$\begin{aligned} x &= lx^* \quad , \quad y = dy^* \quad , \quad u = [u] u^* , \\ \tau &= [\tau] \tau^* \quad , \quad h = [h] h^* \quad , \quad Q_{\parallel} = [Q_{\parallel}] Q_{\parallel}^* , \quad Q_{\perp} = [Q_{\perp}] Q_{\perp}^* , \\ N &= [N] N^* , \quad |T_a - T_m| \sim \Delta T \quad , \quad q = [q] q^* . \end{aligned}$$

Las escalas deben tomarse de modo autoconsistente, mediante la elección de balances adecuados entre los términos de las ecuaciones. En este caso, eligiendo balances como sigue

$$\begin{aligned} d &= (l\psi [N])^{1/2} , \quad [N] = \tilde{c}^{1/3} [Q_{\parallel}]^{-1/3} , \quad [q] = (\rho_i c_p k / \pi)^{1/2} ([u] / l)^{1/2} \Delta T = [\tau] [u] , \\ [Q_{\parallel}] &= lw_d [\tau] [u] / (\rho_w L) , \quad [Q_{\perp}] = \psi [N] [Q_{\parallel}] / d , \quad [\tau] = \rho_i g [h]^2 / l = c [u]^r [N]^s , \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} [u] &= \left( \left( \frac{\rho_i c_p k}{\pi} \right)^{1/2+s/6} \frac{\Delta T^{1+s/3}}{l^{1/2-s/6}} \left( \frac{w_d}{\tilde{c} \rho_w L} \right)^{s/3} \frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}+r-\frac{s}{6}}} \\ [\tau] &= c [u]^{r-s/6} \left( \frac{\tilde{c} \rho_w L}{w_d \Delta T} \right)^{s/3} \left( \frac{\pi}{\rho_i c_p k l} \right)^{s/6} , \\ [N] &= \tilde{c}^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{lw_d}{\rho_w L} \right)^{-1/3} \left( \frac{\rho_i c_p k}{\pi l} \right)^{-1/6} \Delta T^{-1/3} [u]^{-1/6} , \\ [Q_{\parallel}] &= \frac{lw_d [\tau] [u]}{\rho_w L} , \quad [q] = [\tau] [u] , \quad [h] = \left( \frac{l [\tau]}{\rho_i g} \right)^{1/2} , \end{aligned}$$

y para valores típicos

$$\begin{aligned} k &= 2,1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} , \quad \rho_i = 917 \text{ kg m}^{-3} , \quad g = 9,8 \text{ ms}^{-2} , \\ l &= 400 \text{ km} , \quad c_p = 2009 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1} , \quad \tilde{c}^{1/3} = \frac{1}{3} \text{ bar m s}^{-\frac{1}{3}} , \\ G &= 0,05 \text{ Wm}^{-2} , \quad \Delta T = 30 \text{ K} , \quad \rho_w = 10^3 \text{ kgm}^{-3} , \\ w_d &= 3350 \text{ m} , \quad L = 335 \text{ kJ kg}^{-1} , \quad r = s = \frac{1}{2} , \end{aligned}$$

resultan las siguientes escalas

$$\begin{aligned} [h] &\sim 775 \text{ m} , \quad d \sim 50 \text{ km} , \quad [u] \sim 500 \text{ ma}^{-1} , \quad [\tau] \sim 0,15 \text{ bares} , \\ [N] &\sim 0,4 \text{ bares} , \quad [Q_{\parallel}] \sim 1 \text{ m}^3\text{s}^{-1} , \quad [q] \sim 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ bares ms}^{-1} , \end{aligned}$$

el valor de  $c$ ,

$$c = \frac{[\tau]}{[u]^r [N]^s} = \frac{0,15 \text{ bar}}{(500 \text{ ma}^{-1})^r (0,4 \text{ bar})^s}$$

y los valores paramétricos

$$\delta = \left( \frac{\pi k l}{\rho_i c_p [u] [h]^2} \right)^{1/2} \approx 0,36, \quad \gamma = \frac{G}{[u] [\tau]} \approx 0,2.$$

Los valores de estas escalas son representativos del régimen de flujo rápido de las corrientes y adecuados para una base en régimen térmico temperado.

### 2.2.2. Ecuaciones adimensionales.

Una vez establecidos los balances entre las escalas, se sustituyen las variables dimensionales por su expresión en función de las escalas y las variables adimensionales en las ecuaciones, se realizan las simplificaciones oportunas teniendo en cuenta los balances elegidos y se obtienen las correspondientes ecuaciones en términos de las variables adimensionales y de los parámetros definidos. En este caso se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones adimensionales, donde se ha eliminado el asterisco de las variables adimensionales para simplificar la notación.

#### Sistema de ecuaciones adimensionales

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (Q + \bar{Q})^{-1/3} \frac{\partial Q}{\partial y} \right] + (\gamma + \tau u - q), \quad (2.22)$$

$$h \int_0^L u dy = M, \quad (2.23)$$

$$\tau = -hh', \quad (2.24)$$

$$\tau = u^r N^s, \quad (2.25)$$

$$Q + \bar{Q} = \frac{1}{N^3}, \quad (2.26)$$

$$q = \frac{u}{\xi^{1/2}} + \frac{\delta}{h}, \quad (2.27)$$

$$\xi(x, y) = \int_0^x u(r, y) dr. \quad (2.28)$$

## 2.3. Resolución numérica del modelo de Fowler y Johnson.

En esta sección se presentará el método numérico que propusieron Fowler y Johnson para resolver su modelo. El esquema numérico que se empleará para comprobar que, efectivamente, el modelo descriptivo de Fowler y Johnson reproduce el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas es esencialmente el propuesto en [53]. Este método consiste, básicamente, en un esquema de desacoplamiento iterativo de las ecuaciones del sistema y un método de diferencias finitas. Se elige un método de diferencias finitas y no otro de mayor precisión y complejidad, pues lo que se pretende a este nivel es comprobar si el sistema de ecuaciones modela o no, el fenómeno que nos ocupa, más que encontrar la forma de resolución más eficiente y adecuada al modelo.

La aportación original en esta sección, reside en un análisis preliminar de las ecuaciones adimensionales del sistema, en la introducción de algunas modificaciones en el método numérico propuesto en [53], en la realización de un análisis paramétrico del modelo, en la interpretación física de los resultados obtenidos y en la detección de algunas limitaciones del modelo que se tratarán de superar mediante reformulaciones del mismo, planteadas en capítulos posteriores.

Los resultados presentados al final del capítulo son los obtenidos con un programa informático escrito por la autora que contempla algunas modificaciones no esenciales respecto al método numérico empleado por Fowler y Johnson. Estas modificaciones, que serán comentadas posteriormente, se limitan a los métodos numéricos de integración (consideraremos métodos de mayor precisión) y a los métodos numéricos de resolución de sistemas lineales (se utilizan unas subrutinas especiales, adecuadas a la naturaleza particular del sistema de ecuaciones que se obtiene para las aproximaciones de los valores nodales en cada etapa del descoplamiento iterativo).

Para contrastar el modelo, se utilizarán datos experimentales medidos en las corrientes de hielo de la Siple Coast, lo cual, no implica que el modelo sea sólo aplicable a las corrientes de la Siple Coast. El modelo de Fowler y Johnson es aplicable a cualquier escenario geofísico donde se satisfagan las hipótesis supuestas en el mismo, que esencialmente se reducen a la consideración de un manto de hielo (con una base prácticamente plana y con escasas pendientes superficiales) cuya base presente

una capa de sedimentos blandos y deformables cuando se saturan con agua.

Se comenzará presentando el sistema de ecuaciones que se resuelve y el esquema de resolución utilizado. Tras presentar los datos y valores paramétricos empleados para la simulación numérica, se mostrarán y comentarán algunos de los resultados obtenidos y se plantearán las principales limitaciones detectadas en el modelo. Los temas tratados en los capítulos posteriores, responden a un intento de superar algunas de dichas limitaciones.

### 2.3.1. Descripción del dominio considerado. Ecuaciones.

Sea  $\Omega_T = (0, T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , donde  $\Omega = (0, L)$  y  $T, L \in \mathbb{R}^+$ .

El sistema que se resuelve para las variables:

$$Q = Q(x, y), \quad h = h(x), \quad u = u(x, y),$$

$$\tau = \tau(x), \quad q = q(x, y) \text{ y } \xi = \xi(x, y),$$

en el dominio rectangular  $\Omega_T$ , viene dado por

$$(S_F) := \left\{ \begin{array}{ll} \partial_x Q = (\gamma + \tau u - q) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (Q + \bar{Q})^{-1/3} \frac{\partial Q}{\partial y} \right], & \text{en } \Omega_T, \quad (1) \\ h' = -M^{1/R} h^{-(R+1)/R} \left( \int_0^L (Q + \bar{Q})^S dy \right)^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \quad (2) \\ \tau = -hh', & \text{en } \Omega_T, \quad (3) \\ \tau = u^r N^s, & \text{en } \Omega_T, \quad (4) \\ Q + \bar{Q} = \frac{1}{N^3}, & \text{en } \Omega_T, \quad (5) \\ q = \frac{u}{\xi^{1/2}} + \frac{\delta}{h}, & \text{en } \Omega_T, \quad (6) \\ \partial_x \xi = u, & \text{en } \Omega_T, \quad (7) \\ \partial_y Q(x, 0) = \partial_y Q(x, L) = 0, & \text{en } x \in (0, T), \quad (8) \\ Q(0, y) = Q_0(y), & \text{en } y \in \Omega, \quad (9) \\ h(0, y) = h_0, & \text{en } y \in \Omega, \quad (10) \\ \xi(0, y) = \xi_0, & \text{en } y \in \Omega. \quad (11) \end{array} \right.$$

El dominio  $\Omega_T$ , en el que se realiza la integración y que trata de reflejar la geometría de la Siple Coast, es rectangular, de dimensión  $T \cdot L$ . La anchura del dominio, denotada por  $L$ , toma el valor adimensional  $L = 20$ , lo que equivale a 1000 kms, pues la escala de longitud en la dirección transversal es  $d = 50$  kms. El valor de  $d$ , se corresponde con la anchura media de la corriente de Whillans. El *ice-divide*, zona de mayor espesor y a partir de la cual se produce el flujo, queda representada por  $x = 0$ , y el valor  $x = T$ , representa la sección de control que localiza el margen (*grounding line*<sup>4</sup>) situado entre la Siple Coast y la plataforma del mar de Ross. Esta sección de control se impone para finalizar la computación al llegar al margen, ya que si éste se sobrepasa, el hielo dejaría de deslizar sobre la base de sedimentos y pasaría a flotar sobre el agua del mar, la física del problema sería otra y por tanto, las ecuaciones del sistema  $(S_F)$  dejarían de ser aplicables. El criterio de parada

<sup>4</sup>Se recuerda que la *grounding line* es la frontera de separación entre la parte del manto de hielo que yace sobre el lecho continental y la parte que flota en el agua del mar.

considerado para detener la computación se establece sobre la variable espesor de hielo. Cuando  $h$  toma un valor adimensional inferior a 0,6, valor que se corresponde con un espesor de hielo de 465 m (valor medido en la *grounding line*), la computación se detiene. El valor adimensional de  $T$ , para el cual  $h$  alcanza este valor depende de los valores paramétricos y datos iniciales (valores de las variables en el *ice-divide*). Para el rango de valores que se consideran en las simulaciones numéricas realizadas, se tiene que  $T \simeq 2,5$ . Puesto que la escala de longitud considerada en la dirección longitudinal es de  $l = 400$  kms, resulta que la longitud del dominio considerado será aproximadamente de 1000 kms.

### Estudio de las ecuaciones y condiciones de contorno.

La ecuación de conservación del flujo de agua en el sistema de drenaje,  $(S_F)_1$ , es una ecuación en derivadas parciales parabólica, donde la coordenada  $x$  hace las veces del tiempo en los problemas de evolución, y es del tipo de las que aparecen en el modelado de medios porosos, ya que el término de difusión puede expresarse del modo siguiente

$$\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (Q + \bar{Q})^{-1/3} \frac{\partial Q}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} [(Q + \bar{Q})^m]_{yy}.$$

Como el valor de  $m$  es  $m = 2/3$ , la ecuación modela un proceso de difusión rápida. El término de balance de calor,  $f := \gamma + \tau u - q$  (término fuente), admite la siguiente expresión como función de las variables  $q$ ,  $h$ ,  $h_x$  y  $\xi$ ,

$$\gamma + \tau u - q = f(\xi, h, h', Q) = (h|h'|)^R \left( h|h'| - \xi^{-1/2} \right) (Q + \bar{Q})^p + \gamma - \delta h^{-1}. \quad (2.29)$$

Según criterios de clasificación de ecuaciones en derivadas parciales (ver por ejemplo [17]), al tomar  $p$  el valor  $p = 1/3 \in (0, 1)$ , el proceso modelado por  $(S_F)_1$  es de fuerte absorción-reacción. Existen trabajos en la bibliografía (por ejemplo [93], [72], [57]) donde aparecen tratados problemas de este tipo, pero en ellos se considera que el término fuente tiene un signo predefinido, es decir, se estudian procesos de sólo reacción (término fuente no negativo) o de sólo absorción (término fuente no positivo). El problema que nos ocupa presenta la peculiaridad, como veremos más adelante, de que el término de balance, sí que puede cambiar de signo para ciertos valores paramétricos e iniciales. El cambio de signo del término de balance de calor es uno de los factores que permiten la manifestación del fenómeno. Y el lugar donde se produce dicho cambio se corresponde con el de inicio de las corrientes.

Puesto que la ecuación de conservación del flujo de agua,  $(S_F)_1$ , es una ecuación de tipo parabólico donde la coordenada  $x$  representaría el tiempo y la coordenada  $y$ , el espacio, para que el problema esté bien planteado se necesita:



- prescribir una condición inicial, es decir, dar un valor para  $Q(x, y)$  en  $x = 0$  (*ice divide*), que será  $(S_F)_9$ ,
- y dar una condición de contorno. En este caso, se consideran condiciones de contorno tipo Neumann homogéneas,  $(S_F)_8$ . El significado físico de esta condición es que las fronteras laterales  $y = 0$  e  $y = L$  se consideran impermeables, es decir, no hay flujo de agua a través de ellas.

Respecto a la ecuación para el espesor de hielo  $h$ , en la sección anterior se presentó la siguiente ecuación de conservación de la masa de hielo en forma integral

$$h \int_0^L u dy = M. \quad (2.30)$$

Sin embargo, para la resolución numérica del sistema se emplea  $(S_F)_2$ ,

$$h' = -M^{1/R} h^{-(R+1)/R} \left( \int_0^L (Q + \bar{Q})^S dy \right)^{-1/R},$$

donde se recuerda que  $R = 1/r$  y  $S = s/3r$ . Esta expresión es equivalente a (2.30), como se demuestra a continuación.

La forma de obtener  $(S_F)_2$  a partir de (2.30) es la siguiente: teniendo en cuenta la ley de deslizamiento,  $u = \tau^R (Q + \bar{Q})^S$  y la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento,  $\tau = -hh'$ , resulta que  $u = (-hh')^R (Q + \bar{Q})^S$ . Sustituyendo la expresión de  $u$  en función de  $h$ ,  $h'$  y  $Q$ , en la ecuación integral (2.30) y considerando que  $h$  y  $h'$  no dependen de la coordenada lateral  $y$ , se tiene que

$$h \int_0^L u dy = h^{R+1} (-h')^R \int_0^L (Q + \bar{Q})^S dy = M.$$

Despejando  $h'$  en la expresión anterior se obtiene  $(S_F)_2$ . La ecuación  $(S_F)_2$  es una ecuación diferencial ordinaria donde destaca la presencia del término integral no local  $\int_0^L (Q + \bar{Q})^S dy$ .

Como  $(S_F)_2$  es una ecuación diferencial ordinaria para  $h(x)$ , se prescribe la condición inicial  $(S_F)_{10}$  (valor del espesor en el *ice divide*).

La ecuación  $(S_F)_3$  para  $\xi$ , velocidad acumulada, puede considerarse otra ecuación diferencial ordinaria pero con coeficientes en espacios de Banach. Esta ecuación se deduce de la definición de la variable  $\xi$ ,  $\xi(x, y) = \int_0^x u(x, y) dx$ , ya que si es derivada parcialmente respecto de  $x$ , se obtiene que

$$\partial_x \xi = u = (-hh')^R (Q + \bar{Q})^S.$$

La condición inicial considerada para  $(S_F)_3$  es la dada por  $(S_F)_{11}$ .

El sistema  $(S_F)$  puede ser reducido a otro equivalente, de sólo tres ecuaciones, que denotaremos por  $(SR)$ , para las variables  $Q$ ,  $h$  y  $\xi$ , sin más que realizar sencillas operaciones de sustitución y simplificación. El sistema  $(SR)$  al que se hace referencia es

$$(SR) := \begin{cases} \partial_x Q - \frac{1}{3} \partial_y [(Q + \bar{Q})^{-1/3} \partial_y Q] = f(\xi, h, h', Q), & \text{en } \Omega_T, \\ h' = -M^{1/R} h^{-(R+1)/R} \left( \int_0^L (Q + \bar{Q})^S dy \right)^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_x \xi = (h|h'|)^R (Q + \bar{Q})^S, & \text{en } \Omega_T. \end{cases}$$

donde  $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Omega = (0, L)$  y  $f$  viene dado por (2.29). Dicho sistema se complementa con las siguientes condiciones de contorno e iniciales

$$\begin{cases} \partial_y Q(x, 0) = \partial_y Q(x, L) = 0, & x \in (0, T), \\ Q(0, y) = Q_0(y), & y \in \Omega, \\ h(0, y) = h_0, & y \in \Omega, \\ \xi(0, y) = \xi_0, & y \in \Omega. \end{cases}$$

**Observación 2.2.** *La resolución del sistema  $(S_F)$  resulta ser equivalente a la resolución de  $(SR)$ , puesto que al conocer los valores de  $Q$ ,  $h$  y  $\xi$ , se obtienen los del resto de variables. Para ello sólo es necesario considerar las relaciones algebraicas que existen entre ellas.*

### 2.3.2. Esquema de resolución.

La resolución numérica de  $(S_F)$  se lleva a cabo esencialmente mediante el método propuesto por Fowler y Johnson en ([53]). Este método consiste en un esquema de desacoplamiento iterativo del sistema de ecuaciones de  $(S_F)$  y un método de diferencias finitas.

Se considera una malla de diferencias finitas de longitudes de paso  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente. Se parte de los datos iniciales  $Q_0$ ,  $h_0$ ,  $\xi_0$ , prescritos en el *ice-divide* para el flujo de agua, el espesor y la velocidad acumulada y se calcula el valor inicial del término de balance de calor total

en la base (término fuente). Luego, se pasa a obtener los valores de las variables para el primer nivel en  $x$ , es decir, para  $x = \Delta x$ , para ello, se realiza un desacoplamiento de las ecuaciones del sistema  $(S_F)$  como se detallará a continuación. Conocidos los valores en el nivel  $x = \Delta x$  se calcula el valor del término fuente de  $(S_F)_1$  y se pasa a calcular los del siguiente nivel,  $x = 2\Delta x$ , aplicando de nuevo el esquema de desacoplamiento de las ecuaciones, y así sucesivamente, hasta alcanzar  $x = T$ .

A continuación se detalla en qué consiste el esquema de desacoplamiento iterativo. Sea  $x = (j + 1)\Delta x$ , un nivel arbitrario. Partiendo del valor del término de balance de calor obtenido para  $x = j\Delta x$ , es decir,

$$\gamma + \tau_{j,i}u_{j,i} - q_{j,i},$$

donde el subíndice  $_{j,i}$  designa el valor de la variable considerada en el nodo  $(j\Delta x, i\Delta y)$ , se pasa a resolver la ecuación de conservación del flujo de agua en el sistema de drenaje,  $(S_F)_1$ , mediante el siguiente esquema en diferencias finitas,

$$\frac{Q_{j+1,i} - Q_{j,i}}{\Delta x} = (\gamma + \tau_{j,i}u_{j,i} - q_{j,i}) + \frac{g_{j+1,i+1} - g_{j+1,i-1}}{2\Delta y}, \quad (2.31)$$

$$g_{j+1,i+1} = \frac{1}{3}(Q_{j,i+1} + \bar{Q})^{-1/3} \left( \frac{Q_{j+1,i+1} - Q_{j+1,i}}{\Delta y} \right), \quad (2.32)$$

$$g_{j+1,i-1} = \frac{1}{3}(Q_{j,i-1} + \bar{Q})^{-1/3} \left( \frac{Q_{j+1,i} - Q_{j+1,i-1}}{\Delta y} \right). \quad (2.33)$$

Sustituyendo (2.32) y (2.33) en (2.31), resulta que:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{6(\Delta y)^2}{\Delta x} + (Q_{j,i+1} + \bar{Q})^{-\frac{1}{3}} + (Q_{j,i-1} + \bar{Q})^{-1/3} \right] Q_{j+1,i} \\ & - \left[ (Q_{j,i+1} + \bar{Q})^{-\frac{1}{3}} \right] Q_{j+1,i+1} - \left[ (Q_{j,i-1} + \bar{Q})^{-1/3} \right] Q_{j+1,i-1} \\ & = \frac{6(\Delta y)^2}{\Delta x} Q_{j,i} + 6(\Delta y)^2 (\gamma + \tau_{j,i}u_{j,i} - q_{j,i}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Al imponer la condición de contorno dada por  $(S_F)_8$  (flujo nulo a través de las fronteras laterales), resulta que:

$$Q_{j,0} = Q_{j,2} \quad \text{y} \quad Q_{j,N-2} = Q_{j,N}, \quad (2.35)$$

donde  $L = N\Delta y$ . El esquema en diferencias (2.34), junto con la condición (2.35), conducen a la obtención de un sistema lineal en la variable  $Q$ . Este esquema presenta la ventaja de no tener que recurrir a la utilización de esquemas iterativos (empleados para la resolución de sistemas no lineales), viéndose, por tanto, reducido el coste computacional. El sistema que se obtiene para la variable  $Q$  es tridiagonal y presenta la limitación de que como los valores del flujo,  $Q$ , son próximos a cero, debido a

efectos del redondeo, los valores numéricos de  $Q$  pueden ser, aunque muy pequeños, negativos, lo que hace que la matriz quede mal condicionada. Para evitar que el mal condicionamiento de la matriz pueda hacer que los resultados queden modificados sensiblemente, el sistema se resuelve con la subrutina DLSARB de la biblioteca IMSL que almacena el sistema en banda y lo resuelve mediante una factorización LU y un refinamiento iterativo.

Una vez integrada la ecuación para el flujo de agua, se pasa a resolver la ecuación para el espesor de hielo,  $h$ , utilizando el método de Euler explícito, es decir:

$$h_{j+1,i} = h_{j,i} - \Delta x M^{1/R} h_{j,i}^{-(R+1)/R} \left[ \int_0^L (Q_j(y) + \bar{Q})^S dy \right]^{1/R}.$$

donde el término integral no local  $\int_0^L (Q_j(y) + \bar{Q})^S dy$  se aproxima mediante la fórmula de integración Gaussiana (soporte 5 puntos). El método de aproximación propuesto por Fowler y Johnson, es el método de Simpson, sin embargo, se utiliza el de integración Gaussiana por ser más preciso.

Las variables  $\tau$ , esfuerzos viscosos y  $u$ , velocidad, se actualizan como sigue:

$$\tau_{j+1,i} = -h_{j+1,i} \left[ \frac{h_{j+1,i} - h_{j,i}}{\Delta x} \right]$$

$$u_{j+1,i} = (\tau_{j+1,i})^R (\bar{Q} + Q_{j+1,i})^S.$$

Para la ecuación de la variable  $\xi$ , velocidad acumulada, se considera un esquema explícito, concretamente, se utiliza el siguiente esquema:

$$\xi_{j+1,i} = \xi_{j,i} + u_{j,i} \Delta x.$$

Por último, se obtienen los valores del término de enfriamiento  $q$ ,

$$q_{j+1,i} = \frac{u_{j+1,i}}{\xi_{j+1,i}^{1/2}} + \frac{\delta}{h_{j+1,i}}.$$

Una vez calculados los valores correspondientes al nivel  $j + 1$ , se pasaría a calcular los del siguiente nivel, repitiendo el esquema de desacoplamiento.

### 2.3.3. Simulación numérica.

En esta sección se presentan los valores paramétricos y los datos considerados por Fowler y Johnson en [53] para la realización de su simulación numérica. En este momento, puesto que nos limitamos a tratar de reproducir los resultados numéricos

obtenidos por Fowler y Johnson en [53]<sup>5</sup>, con los cuales validar su modelo, no serán justificadas las elecciones de tales valores paramétricos y datos. Dejamos este tema pendiente (con el objeto de no repetir argumentos e ideas de forma innecesaria), para el momento en el cual se proceda a la resolución numérica del modelo multívoco (capítulo cuarto).

Las longitudes de paso consideradas son:  $\Delta x = 0,0001$ ,  $\Delta y = 0,01$ . Los valores paramétricos elegidos son:  $\delta = 0,36$  y  $\gamma = 0,2$ . Las constantes que denotan la anchura del dominio considerado, el flujo residual y el flujo inicial de hielo toman, respectivamente, los valores siguientes:

$$L = 20, \quad \bar{Q} = 7,2 \cdot 10^{-5} \quad \text{y} \quad M = 1,0.$$

Las condiciones adimensionales iniciales (prescritas en el *ice divide*) para el espesor y la velocidad acumulada son:

$$h = \frac{1500}{775} = 1,935 \simeq 2, \quad \xi = 0,1.$$

La condición inicial adimensional considerada por Fowler y Johnson para el flujo de agua  $Q$ , viene dada por

$$Q(0, n\Delta y) = 0,05 + A, \tag{2.36}$$

donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = 0, \dots, 2000$ ,  $\Delta y = 0,01$ ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} A = a_1 \cdot \text{sen}(n\pi\Delta y), & \text{para } n = 250, \dots, 350, \\ A = a_2 \cdot \text{sen}(n\pi\Delta y), & \text{para } n = 600, \dots, 700, \\ A = a_2 \cdot \text{sen}(n\pi\Delta y), & \text{para } n = 950, \dots, 1050, \\ A = a_2 \cdot \text{sen}(n\pi\Delta y), & \text{para } n = 1300, \dots, 1400, \\ A = a_1 \cdot \text{sen}(n\pi\Delta y), & \text{para } n = 1650, \dots, 1750, \\ A = 0, & \text{en el resto,} \end{array} \right.$$

con  $a_1 = 0,1000039$  y  $a_2 = 0,1$ .

Esta condición inicial para  $Q$ , se corresponde con la prescripción de cinco zonas de mayor flujo, espaciadas lateralmente 125 kms. Los valores del flujo inicial oscilan

---

<sup>5</sup>En la tesis de Johnson aparece únicamente una solución preliminar del problema, por ello se ha preferido reconstruir la simulación numérica totalmente (escribiendo un nuevo programa) para poder disponer de resultados completos.

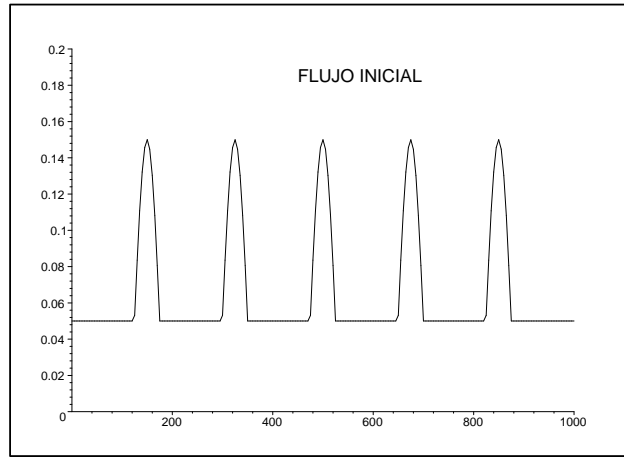


Figura 2.1: Flujo de agua inicial ( $Q_0$ ) para el modelo de Fowler y Johnson.

entre  $0.05$  y  $0.1500039 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ . Los valores iniciales del resto de las variables, necesarios para calcular el valor del término de balance de calor inicial, se fijan del modo siguiente:

- la cizalla inicial viene dada por  $\tau_0 = M^{1/R} h_0^{-1/2} I_0^{-1/R}$ , donde  $I_0$  corresponde al valor aproximado mediante la fórmula de integración gaussiana con soporte cinco puntos, de la integral

$$I_0 = \int_0^L (Q(0, y) + \bar{Q})^S dy,$$

siendo  $Q(0, y) = Q_0(y)$ ,

- la velocidad inicial es  $u_0 = \tau_0^2 (Q_0 + \bar{Q})^{1/3}$ ,
- y por último, el valor inicial del término de enfriamiento es  $q_0 = \frac{u_0}{\xi_0^{1/2}} + \frac{\delta}{h_0}$ .

Puesto que el objetivo fundamental, como se mencionó anteriormente, es reproducir el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas con el modelo de Fowler y Johnson, empleando para la simulación numérica, básicamente, el esquema numérico propuesto por ellos, se utilizarán fielmente los valores paramétricos e iniciales sugeridos en [53]. Posteriormente, en la resolución del modelo multívoco consideraremos otra condición inicial para el flujo de agua, análoga a la dada por (2.36), en la cual se tendrá en cuenta la actividad de las corrientes según su localización, es decir, se prescribirá una perturbación mayor para el valor del flujo de agua (dentro de unos órdenes coherentes con los valores medidos experimentalmente) en el rango de valores de  $y$ , correspondientes a una segunda corriente que trataría de simular la

corriente de Whillans, para resaltar el contraste de velocidades entre unas zonas y otras. Si se trata de obtener cierta inestabilidad lateral y que surjan variaciones del flujo es preciso que la condición inicial impuesta no sea constante. Si las condiciones iniciales son todas constantes, entonces la solución que se obtiene es homogénea en  $y$ , es decir, las variables no varían respecto de la coordenada transversal, sólo respecto de la longitudinal.

#### 2.3.4. Resultados.

En esta sección nos limitaremos a presentar los resultados obtenidos y a hacer una breve interpretación de los mismos. En secciones posteriores, en las cuales se estudiará una modificación del modelo de Fowler y Johnson (modelo multívoco), será cuando, a partir de la interpretación de los resultados numéricos, se presente un estudio más detallado y profundo de la física del problema .

En la figura 2.2 aparecen los resultados obtenidos para las variables  $Q$ ,  $u$ ,  $h$ ,  $\tau$  y  $\xi$ .

En el gráfico relativo a la velocidad del hielo,  $u$ , se observa que alrededor del kilómetro 450, aparecen zonas donde la velocidad es de orden considerablemente mayor al de las zonas adyacentes. La zona de inicio de las corrientes rápidas coincide con el lugar donde se produce el colapso del sistema de drenaje, como se aprecia en la figura relativa a  $Q$ , flujo basal de agua. Al producirse el colapso, surgen:

- zonas en las cuales  $Q$  toma valores muy bajos, es decir, la presión de agua en los canales es muy pequeña y por tanto se cierran. Estas zonas se corresponden con las de valores más bajos y negativos del término de balance de calor (no se funde más hielo en la base, luego no aumenta la cantidad de agua basal),
- y zonas donde los valores de  $Q$  son altos, indicativo de que la presión ejercida por el agua basal es considerable. En éstas, los canales aumentan de tamaño, puesto que el flujo de agua a través de ellos es mayor. Estas zonas coinciden con aquellas donde el término de balance de calor basal toma valores positivos. Estos resultados son coherentes con la física, puesto que al crecer el valor del término de balance de calor y pasar a ser positivo, la temperatura basal aumenta, pudiendo alcanzar la temperatura de fusión del hielo a presión local. Si esto ocurre, se funde hielo en la base, aumenta la cantidad de agua en la misma y crece la cantidad de flujo de agua,  $Q$ .

La correspondencia que existe entre las zonas de mayor flujo y las zonas con velocidades mayores y la que se da entre las de menor flujo y las de velocidades menores,

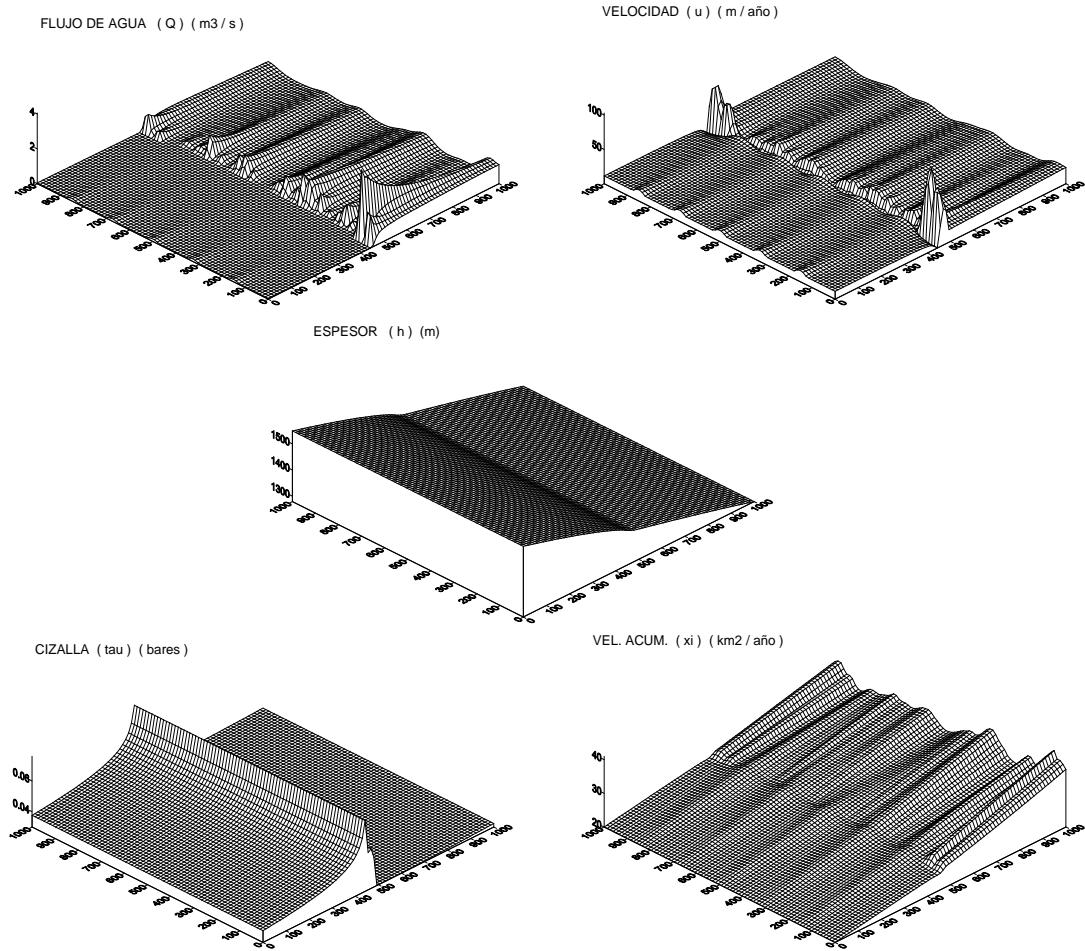


Figura 2.2: Resultados obtenidos con el modelo de Fowler y Johnson: flujo de agua, velocidad, espesor, cizalla y velocidad acumulada.

ilustra la dinámica descrita por la ley de deslizamiento considerada,  $(S_F)_4$ , según la cual, el agua basal tiene un efecto lubricante sobre la base que favorece el deslizamiento basal y por tanto hace crecer la velocidad del flujo de hielo.

Los resultados que aparecen en la figura 2.2, relativos a  $Q$ ,  $u$  y  $\tau$ , ilustran la existencia de oscilaciones transversales en el flujo de agua y en el campo de velocidades, debidas al balance de fuerzas,  $\tau = h|h'|$ , y a la ley de deslizamiento,  $u = \tau^R(Q + \bar{Q})^{1/3}$ , pues para un mismo valor de la cizalla,  $\tau$ , son posibles los dos regímenes de flujo, el lento, en el cual los valores del flujo de agua,  $Q$ , y de la velocidad,  $u$ , son pequeños, y el rápido para el cual, tanto  $Q$  como  $u$ , toman valores elevados. Obsérvese que como  $h$ , el espesor de hielo, no depende de la coordenada transversal, la cizalla tampoco ya que su expresión es  $\tau = -hh'$ . Por tanto, al fijar un valor de  $x$ , la cizalla toma un valor constante.

De este modo, pasada la zona de transición, se tiene que para un mismo valor de  $\tau$ ,



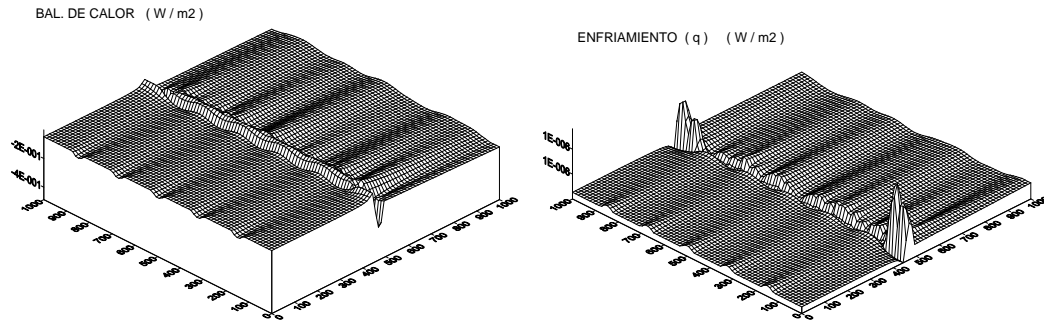


Figura 2.3: Resultados obtenidos con el modelo de Fowler y Johnson: balance de calor y enfriamiento.

son posibles los dos regímenes,

- el régimen de flujo rápido (las corrientes), donde los valores de  $u$  son elevados, al igual que los de  $Q$ ,
- y el régimen de flujo típicamente lento (zonas adyacentes a las corrientes) donde los valores de  $u$  y  $Q$  son bajos.

De los resultados obtenidos se deducen la importancia cuantitativa y cualitativa del término de balance de calor, la presencia en el fenómeno de un mecanismo de realimentación y la existencia de relaciones multívocas entre algunas variables.

### 2.3.5. Conclusiones. Limitaciones del modelo.

Aunque el modelo se muestra cualitativamente coherente con los fenómenos observados, ya que reproduce satisfactoriamente las oscilaciones laterales en el régimen de flujo del hielo, se evidencian importantes limitaciones. A continuación se comentan algunas de las limitaciones detectadas:

- Los resultados no son desde el punto de vista cuantitativo demasiado precisos, dado que los valores obtenidos para la velocidad son del orden de 100 m/año en las corrientes y de 10 m/año en las zonas lentas, cuando los valores deseados, serían del orden de 400 a 800 m/año en las corrientes, que son los medidos experimentalmente en la corriente de Whillans de la Siple Coast.
- Los resultados obtenidos mediante la resolución del modelo de Fowler y Johnson por el método de diferencias finitas descrito anteriormente, ponen de manifiesto que las soluciones posiblemente no sean clásicas (a juzgar por las pendientes que aparecen, tanto en la dirección longitudinal como en la transversal,

en las figuras relativas a algunas de las variables), sino débiles. Esto hace pensar que quizá el método de diferencias finitas no sea el más adecuado para aproximar las soluciones del modelo. Por esta razón, la formulación fuerte del problema planteada por Fowler y Johnson sugiere una reformulación débil del mismo, donde el método de resolución empleado sea, por ejemplo, del tipo elementos finitos.

- Se ha observado que los resultados que se obtienen varían notablemente en función de los datos iniciales y de los valores paramétricos prescritos. Al realizar el análisis paramétrico se vió que si se aumentaba  $\gamma$ , ó se disminuía el valor de  $\delta$ , el fenómeno no se producía. Esto se debe a que para que se genere el fenómeno,  $Q$  debe comenzar disminuyendo<sup>6</sup>, y si  $\gamma$  aumenta ó  $\delta$  disminuye, lo que se origina es un aumento de los términos de calentamiento del balance de calor basal o una disminución del enfriamiento, que conduce a una mayor fusión de hielo basal y por tanto, a un aumento de  $Q$  (contrario a lo que se precisa). También se obtuvo, que una disminución de  $\gamma$ , ó un aumento de  $\delta$ , originaba un adelanto de la zona en la cual se producía el colapso del sistema de drenaje (el decrecimiento de los valores de  $Q$  es más rápido, al disminuir el valor del término de balance de calor), es decir, las corrientes de hielo aparecían antes (a menor distancia del *ice divide*).

En las figuras 2.4 y 2.5 se muestran algunos resultados para ilustrar lo que se acaba de comentar.

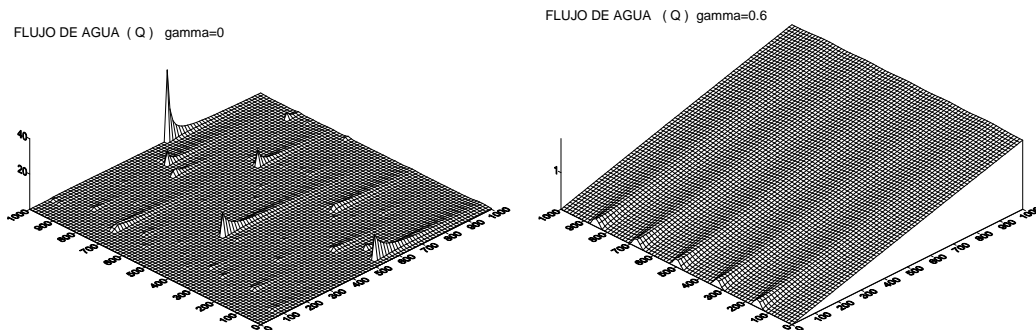


Figura 2.4: Flujo de agua con  $\gamma = 0$  y  $\gamma = 0,6$ , respectivamente.

- También se observa que con ciertos valores paramétricos, con los cuales se generan corrientes, el flujo  $Q$  toma en ciertos nodos valores negativos. Esto significa que pueden obtenerse soluciones no físicamente admisibles ( $Q(x, y) <$

<sup>6</sup>Este hecho, será explicado en el capítulo cuarto, cuando se describa el mecanismo de realimentación positiva que tiene lugar en las zonas que presentan un régimen de flujo rápido.

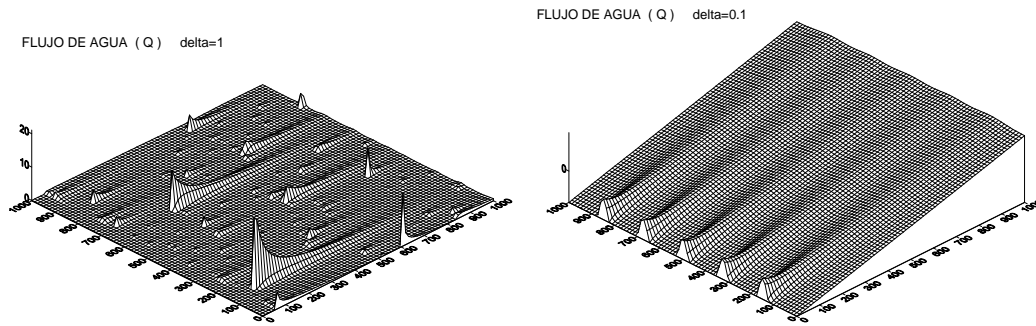


Figura 2.5: Flujo de agua con  $\delta = 1$  y  $\delta = 0,1$ , respectivamente.

0), ya que  $Q$  representa el flujo de agua y por tanto, sólo tienen sentido físico soluciones no negativas.

Esto sugiere una reformulación del modelo en términos de operadores multívocos, según la cual, sólo se considerarían soluciones físicamente admisibles, es decir, no negativas ( $Q(x, y) \geq 0$ ). La reformulación multívoca del modelo propuesto por Fowler y Johnson, al que nos referiremos de ahora en adelante como modelo multívoco (el próximo capítulo se dedicará a su estudio), permitirá describir de manera matemáticamente correcta la transición polar-temperada<sup>7</sup>. Esto hace que el modelo multívoco sea una generalización del modelo propuesto por Fowler y Johnson dado por el sistema de ecuaciones ( $S_F$ ), en el que las ecuaciones sólo son aplicables en un régimen temperado.

- Otra de las limitaciones (de carácter físico) que se ha detectado en el modelo consiste en no considerar las variaciones del espesor de hielo  $h$  respecto de la coordenada transversal  $y$ , y en consecuencia, tampoco tenerla en cuenta para  $\tau$ . Este hecho hace que con las soluciones obtenidas al resolver el modelo de Fowler y Johnson no se simule adecuadamente el efecto de los fuertes gradientes de cizalla en la dirección transversal. Existe evidencia empírica de la existencia de valores elevados de las fuerzas de cizalla en las fronteras entre las zonas de flujo lento y las corrientes. En [39] y en [10] puede encontrarse información acerca del papel que tiene la componente transversal de la fuerza de cizalla, denominada en la bibliografía *marginal stress*, en la dinámica de las corrientes de hielo.

Esto sugiere una nueva formulación del modelo, que denominaremos *totalmente bidimensional*, en la cual se consideren las variables como funciones de

<sup>7</sup>Recuérdese que se dice que la base presenta un régimen térmico temperado si la temperatura del hielo basal alcanza el valor de la temperatura de fusión del hielo a presión local (ley de Clausius-Clapeyron) y se dice que presenta un régimen térmico polar si la temperatura basal es inferior a la del fusión del hielo a presión local.

ambas coordenadas la longitudinal  $x$  y la transversal  $y$ , y en la que además la velocidad y la cizalla (tensor de esfuerzos viscosos) sean consideradas variables vectoriales. Es decir, las variables de esta nueva formulación serán:

$$h(x, y), \vec{\tau}(x, y), \vec{Q}(x, y), \vec{u}(x, y), q(x, y) \text{ y } N(x, y).$$

Al realizar un análisis detallado del proceso de modelado, se aprecia que al mantener la dependencia del espesor respecto de la coordenada transversal, lo que se obtiene es una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico para el espesor. Al generalizar adecuadamente las ecuaciones del modelo de Fowler y Johnson al caso *totalmente bidimensional*, resulta un sistema que puede reducirse (argumentando de modo similar a como se hizo para obtener  $(SR)$  a partir de  $(S_F)$ ) a otro equivalente, de sólo dos ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico, una para el espesor  $h$  y otra para la presión efectiva  $N$ . La formulación *totalmente bidimensional* a la que se está haciendo referencia será presentada en el capítulo 5.

# Capítulo 3

## Modelo multívoco. Análisis matemático.

En este capítulo se presentará la formulación multívoca relativa al modelo de Fowler y Johnson, que consiste, básicamente, en la formulación matemáticamente correcta del problema de obstáculo asociado a la variable  $Q$ , mediante la introducción de un grafo maximal monótono multívoco en la ecuación de conservación del flujo de agua. Una vez planteado el sistema de ecuaciones multívoco, que será denotado por  $(S)$ , para las variables  $w$ ,  $h$  y  $\xi$ , en el dominio  $\Omega_T = (0, T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , se realizará el análisis matemático del mismo. La nueva incógnita,  $w$ , procede de un cambio de variable efectuado en la ecuación multívoca que resulta para el flujo de agua y se define en términos de  $Q$  por  $w = (1/2)(Q + \bar{Q})^{2/3}$ . Del análisis matemático realizado, se deducirá el resultado de existencia de soluciones.

Para llevar a cabo el estudio matemático del sistema multívoco se recurrirá a la utilización de un esquema de desacoplamiento iterativo de las ecuaciones que constituyen el sistema, resultando así, una sucesión de sistemas desacoplados, que denotaremos por  $\{(S_j)\}$ . Cada sistema  $(S_j)$  constará de tres problemas desacoplados, uno asociado a cada una de las variables,  $w$ ,  $h$  y  $\xi$ , denotados por  $P(w_j)$ ,  $P(h_j)$  y  $P(\xi_j)$ . De los tres problemas, el de mayor complejidad es  $P(w_j)$ , pues se trata de un problema de obstáculo con una ecuación no lineal de tipo parabólico y cuyo término fuente (de tipo sublineal) no tiene un signo predefinido. Para el tratamiento del problema  $P(w_j)$  se recurrirá al empleo de técnicas de penalización, técnicas de aproximaciones Yosida, estimaciones *a priori* de la energía y resultados del análisis funcional, que permitirán, por un lado, aproximar el problema  $P(w_j)$  por problemas regulares en los cuales poder utilizar resultados clásicos de existencia, y por otro, pasar al límite en dichos problemas regulares, para así, obtener la existencia, unici-

dad y la regularidad de las soluciones del problema  $P(w_j)$ . Una vez demostrada la existencia de solución del sistema  $(S_j)$ , que se denotará por  $(w_j, h_j, \xi_j)$ , se realizará el estudio de la convergencia de la sucesión de soluciones  $\{(w_j, h_j, \xi_j)\}$  a una solución del sistema multívoco  $(S)$ .

El análisis matemático del sistema, es un paso necesario y previo a la resolución numérica (que será presentada en el próximo capítulo) del mismo. Los métodos a utilizar en la resolución numérica del sistema de ecuaciones del modelo multívoco, serán elegidos en función de la regularidad obtenida para las soluciones.

La notación empleada para denotar distintos conceptos relativos al análisis funcional (espacios funcionales, convergencias,...) a lo largo de la exposición, será la estándar (véase por ejemplo [1]). En numerosas ocasiones, para no sobrecargar el tratamiento matemático, se recurrirá a la utilización directa de ciertos resultados, dándose, en cualquier caso, referencias en las cuales pueden encontrarse las demostraciones de los mismos.

**Observación 3.1.** *La notación empleada para denotar las derivadas parciales será la utilizada en secciones anteriores. Es decir, se utilizarán indistintamente las expresiones  $\partial_z f = \partial f / \partial z = (f)_z$ , para denotar la derivada parcial de una función  $f$  respecto de una variable  $z$ . En el caso particular de la variable espesor de hielo,  $h$ , puesto que sólo depende de una componente (la coordenada longitudinal  $x$ ), se utilizará la notación  $h'$  para denotar la derivada ordinaria  $dh/dx$ .*

### 3.1. Formulación multívoca.

La formulación multívoca del modelo propuesto por Fowler y Johnson ([53]), al cual nos referiremos de ahora en adelante como modelo multívoco, permitirá describir de manera matemáticamente correcta la transición polar-temperada. Este hecho hace que el modelo multívoco sea una generalización del modelo propuesto por Fowler y Johnson (véase el capítulo segundo, sección 2), dado por el sistema de ecuaciones  $(SR)$ . Hacemos notar, que el sistema  $(SR)$  sólo es aplicable en un régimen térmico temperado, siendo por tanto, particularmente delicada su resolución numérica, ya que el fenómeno buscado depende críticamente del comportamiento del sistema de drenaje para pequeños valores del flujo de agua. Por otro lado, la formulación multívoca permite respetar el significado físico del problema, en el sentido de que sólo se considerarán las soluciones que tomen valores no negativos en el dominio considerado, que denotaremos por  $\Omega_T \subset \mathbb{R}^2$ , donde  $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Omega = (0, L)$  y  $T, L \in \mathbb{R}^+$ .

En el modelo propuesto por Fowler y Johnson, la ecuación de conservación del flujo de agua  $(SR)_1$  sólo tiene sentido en el conjunto de los puntos del plano  $\Sigma \subset \Omega_T \subset \mathbb{R}^2$ , definido por

$$\Sigma := \{(x, y) \in \Omega_T : Q(x, y) > 0\}.$$

Esto significa que la formulación fuerte planteada por Fowler y Johnson (dada por el sistema de ecuaciones  $(SR)$ ) no es la adecuada, desde el punto de vista físico-matemático<sup>1</sup>, pues en realidad, el problema asociado al modelado de las corrientes de hielo rápidas es un problema de frontera libre, ya que el dominio  $\Sigma$ , sobre el cual debiera aplicarse la ecuación de conservación del flujo de agua dada por  $(SR)$ , es *a-priori* desconocido. Siguiendo [31], se definirá la **frontera libre** asociada al problema para la variable flujo de agua  $Q$  del modo siguiente,

**Definición 3.1.** Sean los conjuntos  $N(Q) := \{(x, y) \in \bar{\Omega}_T : Q(x, y) = 0\}$ , denominado conjunto de anulación (null set) y  $S(Q) := \overline{\{(x, y) \in \Omega_T : Q(x, y) \neq 0\}}$ , denominado conjunto soporte (support), se define la **frontera libre** asociada al problema de la determinación del flujo basal de agua, como el conjunto  $F(Q)$ , dado por

$$F(Q) := \partial N(Q) \cap \partial S(Q), \quad (3.1)$$

donde  $\partial N(Q)$  y  $\partial S(Q)$  designan, respectivamente, las fronteras de los conjuntos  $N(Q)$  y  $S(Q)$ .

La técnica de los métodos de dominio fijo para problemas de frontera libre consiste en la formulación del problema en el dominio total fijo, en este caso  $\Omega_T$ , extendiendo la función  $Q$  por la función cero, a los puntos de  $\Omega_T \setminus \Sigma$ , es decir, a los puntos donde  $Q$  no es positiva. La función construida (extensión de  $Q$ ), que será denotada igualmente por  $Q$ , verificará una nueva ecuación de conservación del flujo de agua, obtenida mediante la introducción de un operador multívoco, concretamente un grafo maximal monótono (g.m.m.), en la ecuación de conservación del flujo de agua considerada en  $(SR)$ . La ecuación multívoca de conservación del flujo de agua hace que el problema quede, desde el punto de vista físico-matemático, bien planteado, pues sólo se computan soluciones físicamente admisibles y también hace que la frontera libre quede descrita de forma matemáticamente correcta. Además, permite considerar la posible existencia de una zona con régimen térmico polar, en la cual, el flujo de agua,  $Q$ , tomaría el valor cero ( $Q = 0$ ), puesto que la base se encuentra congelada. No debe confundirse el hecho de que el balance de calor en la base sea

---

<sup>1</sup>Aunque el modelo haya sido propuesto bajo la hipótesis de base temperada, no es posible garantizar *a priori* que el régimen térmico de la base se mantenga en un estado temperado. Esto depende de los valores paramétricos del modelo (véase el comentario realizado en el capítulo 2, sección 2.3).

positivo o negativo, con la presencia o ausencia de agua en la misma. Puede ocurrir, como de hecho se observa en las simulaciones numéricas efectuadas en el capítulo anterior, que siendo el término de balance de calor, negativo (la temperatura de la base desciende, es decir, se produce un enfriamiento), exista un flujo de agua positivo (base en régimen temperado). Concretamente, este hecho se produce en la parte del dominio, anterior (más cercana al *ice divide*) a la zona en la cual tiene lugar el colapso del sistema de drenaje (véase el capítulo segundo, sección 2).

El resto de las ecuaciones del modelo multívoco, es decir, las ecuaciones para el espesor de hielo  $h$  y la velocidad acumulada  $\xi$ , coinciden con las del sistema  $(SR)$ .

**Observación 3.2.** *De ahora en adelante, dado el carácter parabólico de la ecuación para el flujo de agua, se utilizará la coordenada  $t$  para denotar la coordenada respecto de la dirección longitudinal (principal de flujo) y  $x$ , en vez de  $y$ , para denotar la transversal. Por tanto, los puntos del dominio serán denotados, a partir de ahora, por  $(t, x) \in \Omega_T$ .*

El sistema acoplado que describe el modelo multívoco, para las variables  $Q$ ,  $h$  y  $\xi$ , es el que se presenta a continuación.

En el dominio  $\Omega_T$ , se considera el sistema multívoco,

$$(SQ) := \begin{cases} \partial_t Q - \frac{1}{3} \partial_x [(Q + \bar{Q})^{-1/3} \partial_x Q] + \beta(Q) \ni f(\xi, h, h', Q), & \text{en } \Omega_T, \\ h' = -M^{1/R} h^{-(R+1)/R} \left( \int_{\Omega} (Q + \bar{Q})^S dx \right)^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t \xi = (h|h'|)^R (Q + \bar{Q})^S, & \text{en } \Omega_T. \end{cases}$$

El término fuente en la ecuación del flujo de agua es,

$$f(\xi, h, h', Q) = (h|h'|)^R \left( h|h'| - \xi^{-1/2} \right) (Q + \bar{Q})^S + \gamma - \delta h^{-1}, \quad (3.2)$$

y representa el balance de calor en la base. El operador multívoco  $\beta$  es un grafo maximal monótono definido por

$$\beta(r) = \emptyset \quad \text{si } r < 0, \quad \beta(0) = (-\infty, 0], \quad \beta(r) = 0 \quad \text{si } r > 0 \quad (3.3)$$

donde el símbolo  $\emptyset$  denota el conjunto vacío. El símbolo  $\ni$  en la ecuación  $(SQ)_1$ , significa que el valor que toma el término de la derecha,  $f(\xi, h, h', Q)$ , pertenece al conjunto de valores (si  $Q(t, x) = 0$ ) o valor (si  $Q(t, x) > 0$ ) que toma el de la izquierda en  $c\forall (t, x) \in \Omega_T$ .



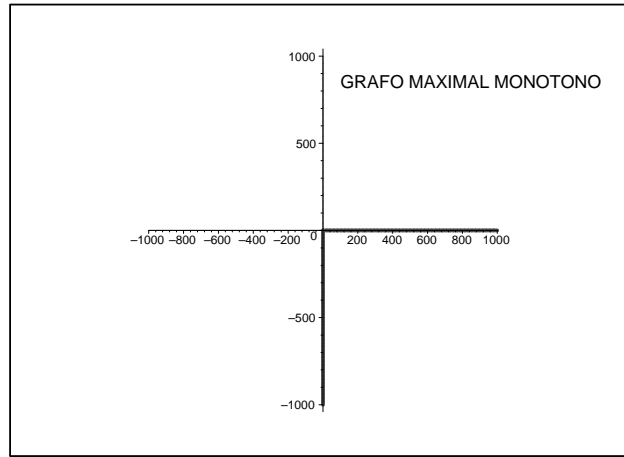


Figura 3.1: Grafo maximal monótono.

**Observación 3.3.** Siguiendo argumentos clásicos utilizados en la bibliografía relativa al estudio de propiedades cualitativas de ecuaciones en derivadas parciales (véanse por ejemplo [41], [31] y en el contexto de la glaciología, [36]) es posible demostrar que la frontera libre,  $F(Q)$ , se localiza dentro del conjunto de puntos del dominio  $\Omega_T$ , en los cuales el balance de calor,  $f$ , es no positivo. Además, puesto que en  $F(Q)$ , el flujo de agua toma el valor  $Q = 0$ , el valor del término fuente (balance de calor),  $f$ , debe pertenecer al intervalo  $\beta(0) = (-\infty, 0]$ , como se deduce de (3.3) (véase la figura 3.1).

Este tipo de propiedades cualitativas (existencia y localización de la frontera libre) serán objeto de ulteriores investigaciones, aunque, a partir de los resultados numéricos presentados en el capítulo cuarto, se podrán deducir algunos resultados preliminares en este sentido.

El sistema de ecuaciones  $(SQ)$  se complementa con las condiciones de contorno e iniciales dadas por  $(B_C)$ ,

$$(B_C) := \begin{cases} \partial_x Q(t, 0) = \partial_x Q(t, L) = 0, & \text{en } t \in (0, T), \\ Q(0, x) = Q_0(x), & \text{en } x \in \Omega, \\ h(0, x) = h_0(x), & \text{en } x \in \Omega, \\ \xi(0, x) = \xi_0(x), & \text{en } x \in \Omega. \end{cases}$$

La condición de contorno  $(B_C)_1$ , considerada para la ecuación de conservación del flujo de agua,  $(SQ)_1$ , es de tipo Neumann homogénea y la interpretación física de la misma, es la no existencia de flujo de agua a través de las fronteras  $x = 0$  y  $x = L$ ,

es decir, las fronteras laterales se consideran impermeables. Este tipo de condiciones ha sido propuesto por Fowler y Johnson en [53]. El resto de condiciones en  $(B_C)$  son iniciales. La interpretación física de las condiciones iniciales es la prescripción de valores para  $Q$ ,  $h$  y  $\xi$ , en la región donde el espesor del hielo alcanza su máximo (en la bibliografía, *ice divide*). Los datos experimentales acerca de los valores de  $Q_0$ ,  $h_0$  y  $\xi_0$  son todavía escasos y poco rigurosos, debido, fundamentalmente, a la difícil accesibilidad a la zona bajo estudio (la Siple Coast, Antártida Occidental).

**Observación 3.4. Parámetros, constantes y exponentes del sistema  $(SQ)$ .**

En el sistema  $(SQ)$  aparecen los parámetros  $\delta$  y  $\gamma$ , que toman valores en el intervalo  $(0, 1)$ , y los exponentes  $S$  y  $R$ , ambos relacionados con los exponentes de la reología de flujo viscoso no lineal de Boulton e Hindmarsh,  $r$  y  $s$  (mencionados en el capítulo 2, en referencia a la ley de deslizamiento), del modo siguiente:  $R = 1/r$  y  $S = s/3r$ . En el estudio que se realizará, se considerarán los valores  $S = 1/3$  y  $R > 1$ . Estos valores ya han sido considerados en [55]. También aparecen las constantes:  $M$ , constante positiva que representa el valor del flujo de hielo prescrito en el ice divide y  $\bar{Q}$ , que es el valor (muy pequeño y positivo) asignado al flujo residual de agua.

**Observación 3.5. Datos iniciales.** Respecto a los datos iniciales para el espesor y la velocidad acumulada, se considerarán datos iniciales de valor constante, es decir,  $h_0(x) = h_0$  y  $\xi_0(x) = \xi_0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , siendo  $h_0$  y  $\xi_0$  constantes positivas. La función  $h_0(x)$  ha de ser de valor constante porque en el modelo, se asume que el espesor sólo varía en la dirección longitudinal ( $h := h(t)$ ). Los datos iniciales para  $Q$  y para  $\xi$ , deben ser funciones estrictamente positivas,  $Q_0(x)$  y  $\xi_0(x)$ , tales que  $\xi_0(x)$  y  $Q_0(x) \in H^1(\Omega)$ . En particular, se supondrá que  $\xi_0$  es constante (lo cual no supone una restricción para el estudio analítico, ni para el numérico), por analogía a los datos utilizados en las simulaciones numéricas.

**Definición 3.2.** Dadas las constantes  $L$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $\bar{Q}$  y el valor inicial  $h_0$ , se define la constante  $m_h$  por

$$m_h = \left[ h_0^{(2R+1)/R} - [(2R+1)/R]TM^{1/R}(L\bar{Q}^{1/3})^{-1/R} \right]^{R/(2R+1)}. \quad (3.4)$$

**Definición 3.3.** Diremos que los datos (constantes) del problema son admisibles, si el valor de la constante  $m_h$ , dada por la **definición 3.2**, es positivo, es decir,  $m_h > 0$ .

Hacemos notar, que el hecho de que  $m_h > 0$ , será utilizado posteriormente para demostrar que en el dominio  $\Omega_T$ , la variable  $h$ , espesor de hielo, toma siempre un valor estrictamente positivo. En realidad, el modelo postula la existencia de una región de transición (*grounding line*) que separa las regiones en las cuales el hielo se desliza sobre un lecho de sedimentos porosos, de aquellas en las que flota sobre el agua del mar. Por tanto, la condición  $m_h > 0$ , es una hipótesis simplificadora que permite evitar una segunda frontera libre en el problema (dada por  $h = 0$ ).

El sistema multívoco  $(SQ)$  admite la siguiente formulación de complementariedad (véase por ejemplo [98], donde aparece la relación de equivalencia que existe entre la formulación multívoca y la formulación de complementariedad para un problema de obstáculo unilateral),

$$(SQC) := \begin{cases} Q \geq 0, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t Q - (1/3)\partial_x [(Q + \bar{Q})^{-1/3}\partial_x Q] - f(\xi, h, h', Q) \geq 0, & \text{en } \Omega_T, \\ \left( \partial_t Q - \frac{1}{3}\partial_x [(Q + \bar{Q})^{-1/3}\partial_x Q] - f(\xi, h, h', Q) \right) Q = 0, & \text{en } \Omega_T, \\ h' = -M^{1/R}h^{-(R+1)/R} \left( \int_{\Omega} (Q + \bar{Q})^{1/3} dx \right)^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t \xi = (h|h'|)^R(Q + \bar{Q})^{1/3}, & \text{en } \Omega_T, \end{cases}$$

complementada con las condiciones de contorno e iniciales  $(B_C)$ .

En esta formulación, se aprecia con mayor claridad, que al tratar de modelar el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas nos enfrentamos a un problema de obstáculo. Concretamente, el obstáculo viene dado por la función idénticamente nula, es decir,  $Q \equiv 0$  (problema unilateral; véanse por ejemplo, [38] y [98]). Por comodidad, para considerar la no linealidad del término de difusión dado por  $D(Q) = (Q + \bar{Q})^{-1/3}$ , que modela un proceso de difusión rápida (véase el comentario realizado en el capítulo 2, sección 3), se considerará el cambio de variable

$$w(t, x) = \frac{1}{2}(Q(t, x) + \bar{Q})^{2/3}, \quad \text{es decir, } Q + \bar{Q} = b(w) = (2w)^{3/2}. \quad (3.5)$$

Con este cambio de variable se obtiene una difusión lineal dada por  $D(w) = w$  y a cambio, aparece una no linealidad del tipo  $b(w) = (2w)^{3/2}$ , es decir, Lipschitz, en el término parabólico. Obsérvese que, al ser  $\bar{Q}$  una constante, entonces,  $\partial_t Q = \partial_t b(w)$ .

Este tipo de tratamiento, en el cual se realiza un cambio de variable para evitar tratar la no linealidad del término difusivo y en su lugar, tratar la no linealidad que surge en el término parabólico, es frecuentemente utilizada en la bibliografía, por ejemplo puede verse en [3] y en [35]. El nuevo sistema multívoco de ecuaciones acopladas, que denominaremos  $(SW)$ , para las variables  $w$ ,  $h$  y  $\xi$ , en el dominio  $\Omega_T$ , es

$$(SW) := \begin{cases} \partial_t b(w) - w_{xx} + \beta(w - \Phi) \ni f(\xi, h, h', w), & \text{en } \Omega_T, \\ h' = -M^{1/R} h^{-(R+1)/R} \left[ \int_{\Omega} (2w)^{1/2} dx \right]^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t \xi = (h|h'|)^R (2w)^{1/2}, & \text{en } \Omega_T, \end{cases}$$

donde el grafo  $\beta$  está definido como en (3.3),  $b(w) = (2w)^{3/2}$  y el término de balance de calor definido por (3.2), se expresa ahora del siguiente modo:

$$f(\xi, h, h', w) = (h|h'|)^R \left( h|h'| - \xi^{-1/2} \right) (2w)^{1/2} + \gamma - \delta h^{-1}. \quad (3.6)$$

El sistema se complementa con las correspondientes condiciones de contorno e iniciales:

$$(B.C.I) := \begin{cases} \partial_x w(t, 0) = \partial_x w(t, L) = 0, & \text{en } t \in (0, T), \\ w(0, x) = w_0(x), & \text{en } x \in \Omega, \\ h(0, x) = h_0, & \text{en } x \in \Omega, \\ \xi(0, x) = \xi_0, & \text{en } x \in \Omega. \end{cases}$$

La formulación de complementariedad asociada al sistema  $(SW)$  y a las condiciones

de contorno e iniciales (B.C.I.), es la siguiente:

$$(S) := \left\{ \begin{array}{ll} w \geq \Phi, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t b(w) - w_{xx} - f(\xi, h, h', w) \geq 0, & \text{en } \Omega_T, \\ [\partial_t b(w) - w_{xx} - f(\xi, h, h', w)] (w - \Phi) = 0, & \text{en } \Omega_T, \\ h' = -M^{1/R} h^{-(R+1)/R} \left[ \int_{\Omega} (2w)^{1/2} dx \right]^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t \xi = (h|h'|)^R (2w)^{1/2}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_x w(t, 0) = \partial_x w(t, L) = 0, & \text{en } t \in (0, T), \\ w(0, x) = w_0(x), & \text{en } x \in \Omega, \\ h(0, x) = h_0, & \text{en } x \in \Omega, \\ \xi(0, x) = \xi_0, & \text{en } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

**Observación 3.6.** Al haber realizado el cambio de variable (3.5), pasando de la formulación en la variable  $Q$ , a la formulación en la variable  $w$ , se ha producido un desplazamiento del obstáculo, en el sentido de que el grafo maximal monótono  $\beta$ , en la nueva formulación, queda definido en  $(w - \Phi)$ , donde  $\Phi = (1/2)\bar{Q}^{2/3}$ , es el obstáculo que debe superar la variable  $w$ . Nótese que:

$$Q(t, x) \geq 0 \iff w(t, x) \geq \Phi, \quad c \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

**Observación 3.7.** Diremos que los datos (constantes) del problema son admisibles, si el valor de la constante  $m_h$ , dada por

$$m_h = \left[ h_0^{(2R+1)/R} - [(2R+1)/R] T M^{1/R} (L(2\Phi)^{1/2})^{-1/R} \right]^{R/(2R+1)}, \quad (3.7)$$

es positiva. Nótese que la definición de  $m_h$  dada por (3.7) en términos de  $\Phi$ , es la equivalente a la dada en la **definición 3.2**, en términos de  $\bar{Q}$ .

## 3.2. Planteamiento matemático.

En esta sección se demostrará la existencia de (al menos) una solución para el problema dado por el sistema (S). El estudio del sistema (S) se basará en la idea de

considerar dicho sistema como problema límite de una sucesión de problemas desacoplados, denotados por  $(S_j)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , asociados a un esquema de desacoplamiento iterativo. Esta técnica ha sido empleada por ejemplo en [36]. Los sistemas  $(S_j)$  constarán de ecuaciones desacopladas, lo cual permitirá tratar por separado cada una de ellas. De las tres ecuaciones de las que constan los sistemas  $(S_j)$ , la que presentará mayor dificultad será la correspondiente a la ecuación de conservación del flujo de agua, que es una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico no lineal.

### 3.2.1. Esquema de desacoplamiento iterativo.

Existen dos motivos fundamentales que hacen suponer que las posibles soluciones del sistema  $(S)$  no sean clásicas, sino débiles, en algún sentido a precisar. Estos motivos son los siguientes:

- el tipo de conclusiones deducidas de los resultados numéricos obtenidos al resolver mediante un método de diferencias finitas el sistema  $(S_F)$  (véase la sección segunda del capítulo segundo)
- y la propia naturaleza del sistema  $(S)$ , ya que aparece un grafo maximal monótono multívoco y no acotado.

Lo dicho anteriormente sugiere la introducción del concepto de solución débil, a partir de la definición del espacio de soluciones. Para ello, se definirán una serie de espacios funcionales que serán utilizados posteriormente y que están relacionados con la regularidad de la terna de funciones solución del problema de obstáculo dado por el sistema  $(S)$ . Comenzaremos definiendo un espacio de funciones, convexo y cerrado, que denotaremos por  $\mathbb{K}$ , naturalmente asociado al problema unilateral para la variable  $w$ .

**Definición 3.4.** *Se define el conjunto convexo y cerrado  $\mathbb{K}$ , como el conjunto dado por*

$$\mathbb{K} := \{v(x) \in H^1(\Omega), \text{ tales que } v(x) \geq \Phi, c \forall x \in \Omega\}. \quad (3.8)$$

En otras palabras, se trata del conjunto de funciones suficientemente regulares (de clase  $H^1(\Omega)$ ) que superan el obstáculo, siendo por tanto físicamente admisibles.

A continuación se define el espacio de soluciones,  $V = V_w \times V_h \times V_\xi$  y las funciones coeficientes que aparecen en las ecuaciones del sistema  $(S)$ .

**Definición 3.5.** *El espacio de soluciones  $V$  para el sistema  $(S)$ , viene dado por*

$$V = V_w \times V_h \times V_\xi,$$

donde

$$\begin{aligned} V_w &\doteq \{\eta : \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}) \cap L^\infty(\Omega_T), \partial_t b(\eta) \in L^2(\Omega_T)\}, \\ V_h &\doteq \{\phi : \phi \in C([0, T]), \phi' \in L^\infty(0, T)\}, \\ V_\xi &\doteq \{\psi : \psi \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))\}. \end{aligned}$$

**Lema 3.1.** *El espacio  $V_w$  está contenido en el espacio funcional  $C([0, T]; L^2(\Omega))$  y el espacio  $V_\xi$  está contenido en el espacio funcional  $C([0, T]; L^\infty(\Omega))$ .*

**Demostración:** En primer lugar, nótese que al tenerse que  $\partial_t b(w) \in L^2(\Omega_T)$ , donde  $b$  es tal que,  $b(z) = (2z)^{3/2}$ , y que  $w(t, x) \geq \Phi > 0$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$  (puesto que  $w \in V_w$ ) entonces,  $w_t \in L^2(\Omega_T)$ . El resultado para la variable  $w$ , enunciado en el lema, se deduce de la aplicación de un resultado de Lions (véase [74], lema 1.2.), según el cual, si  $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  y  $w_t \in L^2(\Omega_T)$  resulta que  $w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ . En el caso de la variable  $\xi$ , aplicando de nuevo [74], se tiene que, al verificarse que  $\xi \in L^\infty(\Omega_T)$  y  $\xi_t \in L^\infty(\Omega_T)$ , pues  $\xi \in V_\xi$ , entonces  $\xi \in C([0, T]; L^\infty(\Omega))$ .  $\square$

**Definición 3.6.** *Dadas las funciones  $w(t, x)$ ,  $\xi(t, x)$  y  $h(t)$ , se definen las siguientes funciones coeficientes:*

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t, x) = (2w(t, x))^{1/2}, \\ B(t) = (h(t)|h'(t)|)^{R+1}, \\ C(t, x) = (h(t)|h'(t)|)^R (\xi(t, x))^{-1/2}, \\ D(t) = \gamma - \delta h^{-1}(t), \\ E(t) = (h(t)|h'(t)|)^R, \\ F(t, x) = B(t) - C(t, x). \end{array} \right.$$

y las funciones auxiliares:  $\Psi(z) = (3/10)z^{5/3}$ ,  $S(z) = (6\sqrt{2}/5)z^{5/2}$  y  $p(z) = z^{1/3}$ .

Teniendo en cuenta que  $b(z) = (2z)^{3/2}$ , es fácil deducir las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} b(z) &= (2/3)dS/dz, \quad p(b(z)) = A(z) = (2z)^{1/2} \quad y \\ S(z) &= \Psi(b(z)) = zb(z) - (2/3)S(z) = \int_0^z [b(z) - b(s)]ds. \end{aligned}$$

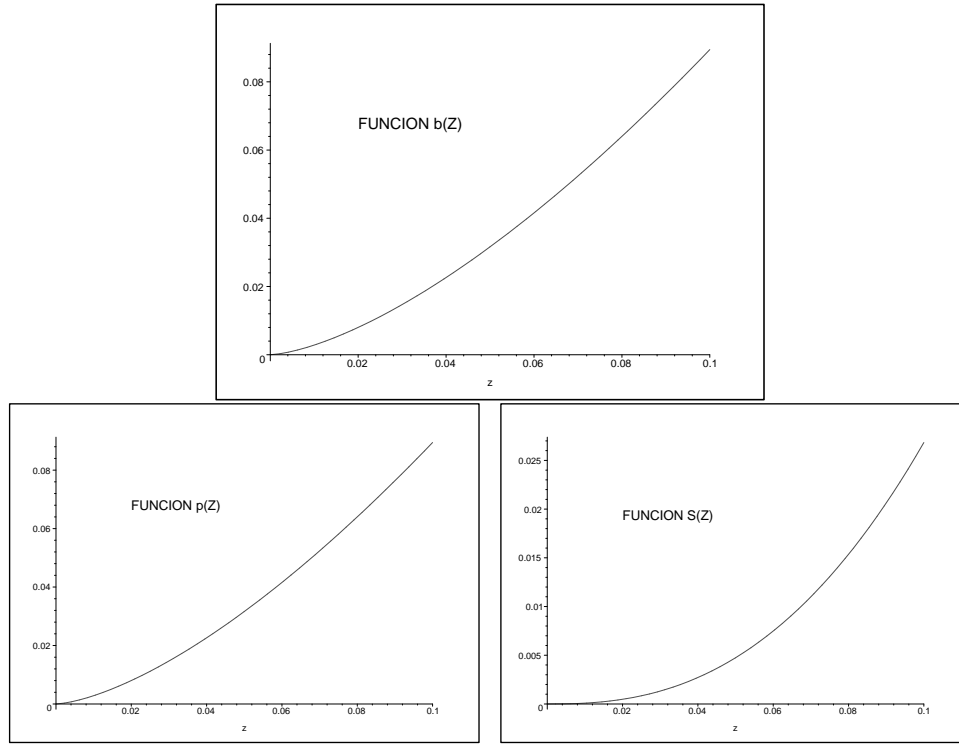


Figura 3.2: Funciones auxiliares.

La función producto,  $F(t, x) \cdot p(b(w(t, x)))$ , representa el término del balance de calor que depende de ambas coordenadas, la longitudinal y la transversal, es decir,

$$F(t, x) \cdot p(b(w(t, x))) = (h(t)|h'(t)|)^R \left[ h(t)|h'(t)| - \xi^{-1/2}(t, x) \right] (2w(t, x))^{1/2},$$

(dado por la diferencia entre los efectos de la disipación viscosa y enfriamiento convectivo) mientras que  $D(t)$ , representa el término del balance de calor que sólo depende de la longitudinal,  $D(t) = \gamma - \delta h^{-1}(t)$  (dado por la diferencia entre el efecto del calor geotérmico y el enfriamiento conductivo). Por tanto, el término de balance térmico (término fuente) puede expresarse como sigue:

$$f(t, x, w) = [B(t) - C(t, x)] p(b(w)) + D(t). \quad (3.9)$$

En el estudio que se realizará, se supondrán ciertas hipótesis que serán enumeradas a continuación, acerca de la regularidad, monotonía y signo de los datos iniciales y de las funciones coeficientes y auxiliares.

### H1. Hipótesis sobre los datos iniciales.



Los datos iniciales verifican que:  $w_0 \in H^1(\Omega)$ ,  $w_0 \in \mathbb{K}$ ,  $h_0$  y  $\xi_0$  son constantes positivas y además  $h_0$  satisface la **observación 3.7**.

## H2. Hipótesis sobre las funciones coeficientes y auxiliares.

Las funciones coeficientes y auxiliares verifican las siguientes hipótesis de regularidad, signo y monotonía:

1.  $A \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  y  $A \geq (2\Phi)^{1/2} > 0$ ,  $c \forall t \in (0, T)$ ,  $\forall x \in \Omega$ ,
2.  $B \in L^\infty(0, T)$  y  $B(t) > 0$ ,  $c \forall t \in (0, T)$ ,
3.  $C \in L^\infty(\Omega_T)$ ,  $C(t, x) > 0$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ ,
4.  $D \in C([0, T])$ ,  $dD/dt = D' \in L^\infty(0, T)$  y  $D' > 0$ ,  $c \forall t \in (0, T)$ ,
5.  $E \in L^\infty(0, T)$  y  $E(t) > 0$ ,  $c \forall t \in (0, T)$ ,
6.  $F \in L^\infty(\Omega_T)$  y no tiene un signo predefinido.
7. La función (compuesta)  $p(b(w(t, x)))$  verifica las siguientes propiedades:
  - a)  $|w \cdot p(b(w))| \leq K [1 + S(w)]$ , donde  $K$  es una constante positiva,
  - b)  $w \cdot \partial_b p(b(w)) = 1/6$ ,
  - c)  $p(b(w)) \in L^\infty(\Omega_T)$ .

Nótese, que las estimaciones dadas en **H2.7** son fácilmente deducibles a partir de las **definiciones 3.4, 3.5 y 3.6**. En efecto:  $p(b(w)) = A(w) = (2w)^{1/2}$  y por tanto,  $|wA(w)| = \sqrt{2}w^{3/2}$ . Aplicando la desigualdad de Young:  $ab \leq (a^p/p) + (b^q/q)$ , donde  $p, q > 1$  y  $(1/p) + (1/q) = 1$ , al producto  $\sqrt{2}w^{3/2}$ , tomando  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = w^{3/2}$ ,  $p = 5/2$  y  $q = 5/3$  resulta que

$$|wA(w)| \leq (2/5)2^{5/4} + (5/3)w^{5/2} \leq K \left[ 1 + (6\sqrt{2}/5)w^{5/2} \right] = C_1 [1 + S(w)].$$

Por otro lado, como  $p(b) = b^{1/3}$ , entonces  $\partial_b p(b) = b^{-2/3}/3$  y por tanto,  $b^{-2/3}(w)/3 = (6w)^{-1}$ , pues  $b(w) = (2w)^{3/2}$ . El cálculo anterior tiene sentido ya que se tiene que,  $w(t, x) \geq \Phi > 0$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$  (recuérdese que se supone que  $w \in V_w$ ). De las

consideraciones anteriores, se deduce que  $w \cdot \partial_b p(b(w)) = 1/6$ . Y por último, como se supone que  $w \in V_w$ , en particular, se tiene que  $w \in L^\infty(\Omega_T)$ , de donde resulta, al ser  $p$  y  $b$  continuas, la acotación de la función  $p(b(w))$ .

**Definición 3.7.** *Dados los parámetros  $\delta$  y  $\gamma$ , la constante  $M$ , el exponente  $R$  según la **observación** 3.7, dados los datos iniciales  $w_0, h_0, \xi_0$  verificando **H1** y las funciones coeficientes  $A, B, C, D$  y  $E$ , verificando **H2**, diremos que una terna  $(w, h, \xi) \in V_w \times V_h \times V_\xi$  es una **solución débil acotada** del sistema  $(S)$ , si se verifican las siguientes expresiones:*

1.

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(w) \nu + \int_0^T \int_\Omega [b(w) - b(w_0)] \partial_t \nu = 0,$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tales que } \nu(T, \cdot) = 0,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(w)(\eta - w) + \int_0^T \int_\Omega w_x(\eta - w)_x \geq \int_0^T \int_\Omega f(\eta - w), \quad \forall \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}),$$

$$\text{donde } f := [B(t) - C(t, x)] A(t, x) + D(t) = [B(t) - C(t, x)] \cdot p(b(w)) + D(t),$$

2.

$$h(t) = \left[ h_0^{(2R+1)/R} - [(2R+1)/R] M^{1/R} \int_0^t \left( \int_\Omega A(r, x) dx \right)^{-1/R} dr \right]^{R/(2R+1)},$$

$$\forall t \in [0, T],$$

3.

$$\xi(t, x) = \xi_0 + \int_0^t A(s, x) E(s) ds, \quad c \forall t \in (0, T), \quad c \forall x \in \Omega.$$

La existencia de solución débil acotada para el sistema  $(S)$  dada por una terna de funciones  $(w, h, \xi)$ , será demostrada mediante el estudio de la convergencia de un proceso iterativo, basado en el desacoplamiento del sistema  $(S)$  en tres problemas distintos, uno para cada una de las variables.

### Esquema de desacoplamiento iterativo.

Se utilizará el parámetro  $j = 1, \dots, J \rightarrow \infty$ , para denotar las distintas etapas del esquema de desacoplamiento iterativo. En la etapa  $j$ -ésima, se ha de resolver el sistema desacoplado  $(S_j)$ ,

$$(S_j) := \left\{ \begin{array}{ll} w_j \geq \Phi, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t b(w_j) - (w_j)_{xx} - [B_{j-1} - C_{j-1}]p(b(w_j)) - D_{j-1} \geq 0, & \text{en } \Omega_T, \\ (\partial_t b(w_j) - (w_j)_{xx} - [B_{j-1} - C_{j-1}]p(b(w_j)) - D_{j-1})(w - \Phi) = 0, & \text{en } \Omega_T, \\ h'_j = -M^{1/R} h_j^{-(R+1)/R} \left( \int_{\Omega} A_j(t, x) dx \right)^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t \xi_j = E_j(t) A_j(t, x), & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_x w_j(t, 0) = \partial_x w_j(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ w_j(0, x) = w_0(x), & x \in \Omega, \\ h_j(0, x) = h_0, & x \in \Omega, \\ \xi_j(0, x) = \xi_0, & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

**Definición 3.8.** Las funciones coeficientes que aparecen en el sistema  $(S_j)$  están definidas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_j(t, x) = (2w_j(t, x))^{1/2}, \\ B_j(t) = (h_j(t)|h'_j(t)|)^{R+1}, \\ C_j(t, x) = (h_j(t)|h'_j(t)|)^R (\xi_j(t, x))^{-1/2}, \\ D_j(t) = \gamma - \delta h_j^{-1}(t), \\ E_j(t) = (h_j(t)|h'_j(t)|)^R, \\ F_j(t, x) = B_j(t) - C_j(t, x). \end{array} \right.$$

**Propiedad 3.1.** Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , se asumirá que las funciones coeficientes asociadas al problema  $(S_j)$ :  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$ ,  $E_j$  y  $F_j$  verifican las hipótesis **H2**, en-

tendiéndose que  $A_j$  satisface las hipótesis asumidas para  $A$ , y análogamente para el resto de las funciones.

**Definición 3.9.** *Dados los parámetros  $\delta$  y  $\gamma$ , la constante  $M$  y el exponente  $R > 1$  según la **observación 3.7**, dados los datos iniciales  $w_0, h_0, \xi_0$  verificando **H1** y las funciones coeficientes  $A_j, B_{j-1}, C_{j-1}, D_{j-1}, E_j$ , verificando **H2**, definimos como **solución débil acotada** del sistema  $(S_j)$  a una terna de funciones  $(w_j, h_j, \xi_j) \in V_w \times V_h \times V_\xi$ , tal que,*

1.

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(w_j) \nu + \int_0^T \int_\Omega [b(w_j) - b(w_0)] \partial_t \nu = 0,$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tales que } \nu(T, \cdot) = 0,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(w_j)(\eta - w_j) + \int_0^T \int_\Omega (w_j)_x (\eta - w_j)_x \geq \int_0^T \int_\Omega f_j (\eta - w_j), \quad \forall \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}),$$

$$\text{donde } f_j := [B_{j-1} - C_{j-1}] A_j + D_{j-1} = [B_{j-1} - C_{j-1}] \cdot p(b(w_j)) + D_{j-1},$$

2.

$$h_j(t) = \left[ h_0^{(2R+1)/R} - [(2R+1)/R] M^{1/R} \int_0^t \left( \int_\Omega A_j(r, x) dx \right)^{-1/R} dr \right]^{R/(2R+1)},$$

$$\forall t \in [0, T],$$

3.

$$\xi_j(t, x) = \xi_0 + \int_0^t A_j(s, x) E_j(s) ds, \quad c \forall t \in (0, T), \quad c \forall x \in \Omega.$$

A continuación se estudiarán por separado los problemas desacoplados asociados a las variables  $w_j, h_j$  y  $\xi_j$ , denotados por  $P(w_j), P(h_j)$  y  $P(\xi_j)$ . Puesto que el problema  $P(w_j)$  es el de mayor complejidad, comenzaremos tratando los problemas  $P(h_j)$  y  $P(\xi_j)$ .

**Observación 3.8.** *Las desigualdades entre funciones serán entendidas en casi todo punto, es decir, si  $f$  y  $g$  son funciones definidas en  $\Omega_T$ , la expresión  $f \leq g$  debe entenderse en el sentido de que  $f(t, x) \leq g(t, x), c \forall (t, x) \in \Omega_T$ .*

### 3.2.2. Problema para el espesor de hielo.

Dados el exponente  $R > 1$ , la constante positiva  $M$ , el dato inicial  $h_0$  verificando **H1** y la función  $A_j$  satisfaciendo las hipótesis de regularidad **H2**, se considera el problema  $P(h_j)$  (en una etapa genérica  $j$ -ésima del proceso de desacoplamiento iterativo), dado por

$$P(h_j) := \begin{cases} h_j' = -M^{1/R} h_j^{-(R+1)/R} \left( \int_{\Omega} A_j(\cdot, x) dx \right)^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \\ h_j(0) = h_0. \end{cases}$$

**Teorema 3.1. Existencia y unicidad de solución para el problema del espesor  $P(h_j)$ .** *Existe una única solución fuerte  $h_j \in W^{1,\infty}(0, T)$ , estrictamente positiva y decreciente  $\forall t \in (0, T)$ , del problema  $P(h_j)$ , dada por la siguiente expresión explícita:*

$$h_j(t) = \left[ h_0^{(2R+1)/R} - [(2R+1)/R] M^{1/R} \int_0^t \left( \int_{\Omega} A_j(r, x) dx \right)^{-1/R} dr \right]^{R/(2R+1)}, \quad (3.10)$$

$\forall t \in [0, T]$ .

**Demostración:** La ecuación diferencial del problema  $P(h_j)$  puede ser considerada de variables separadas, ya que puede expresarse de la forma

$$h_j'(t) = -M^{1/R} h_j^{-(R+1)/R}(t) X(t), \quad (3.11)$$

donde  $X(t) := \left( \int_{\Omega} A_j(t, x) dx \right)^{-1/R}$  y por tanto,  $X \in C([0, T])$ . Dicha regularidad se obtiene sin más que tener en cuenta la regularidad de la función  $A_j$ . Recuérdese que por hipótesis  $A_j$  verifica **H2**, y por tanto,  $A_j(t, x) > (2\Phi)^{1/2} c \forall (t, x) \in \Omega_T$ , y además,  $A_j \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Integrando en (3.11) se obtiene la expresión implícita de la variable  $h_j$ , es decir,

$$h_j(t) = \left[ h_0^{(2R+1)/R} - [(2R+1)/R] M^{1/R} \int_0^t X(s) ds \right]^{R/(2R+1)}, \quad c \forall t \in (0, T).$$

En principio, la igualdad anterior se tiene  $c \forall t \in (0, T)$ , pero más adelante se verá que, en realidad, dicha igualdad se da en todo punto  $t \in [0, T]$ . Obsérvese que dado que  $A_j$  verifica **H2**, la expresión anterior está bien definida. Además, como  $h_0$  satisface **H1**, se tiene que

$$h_j(t) = \left[ h_0^{(2R+1)/R} - [(2R+1)/R] M^{1/R} \int_0^t \left( \int_{\Omega} A_j(r, x) dx \right)^{-1/R} dr \right]^{R/(2R+1)} \geq m_h,$$

(se recuerda que  $m_h$  es de valor constante y  $m_h > 0$ ) en principio  $c \forall t \in (0, T)$ . Por otro lado, resulta evidente que como  $A_j > 0$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ , pues  $A_j$  verifica **H2**, entonces  $h'_j < 0$ ,  $c \forall t \in (0, T)$ , y por tanto  $h_j$  es monótona decreciente. De lo anterior se deduce que

$$0 < m_h \leq h_j(t) \leq h_0, \quad c \forall t \in (0, T), \quad (3.12)$$

luego,  $\|h_j\|_{L^\infty(0,T)} \leq h_0$  y  $h_j > 0$ . Obsérvese que la acotación anterior es válida para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

De la ecuación diferencial del problema  $P(h_j)$ , se deduce fácilmente que  $h'_j \in L^\infty(0, T)$ , ya que

$$|h'_j| \leq (M/L)^{1/R} m_h^{-(R+1)/R} (2\Phi)^{-1/2R}, \quad c \forall t \in (0, T).$$

Recuérdese que  $\Omega = (0, L)$ , luego la medida de  $\Omega$ , denotada por  $|\Omega|$ , es  $|\Omega| = L$ . Luego,

$$\|h'_j\|_{L^\infty(0,T)} \leq (M/L)^{1/R} m_h^{-(R+1)/R} (2\Phi)^{-1/2R} = c_{ht}. \quad (3.13)$$

Recuérdese que  $\Phi$  es de valor constante y estrictamente positivo y obsérvese que la acotación para  $\|h'_j\|_{L^\infty(0,T)}$  no depende del parámetro  $j$ , asociado a la etapa de desacoplamiento iterativo.

De las estimaciones anteriores se deduce que  $h_j \in W^{1,\infty}(0, T)$ , y en particular, como  $W^{1,\infty}(0, T)$  tiene inyección compacta en  $C([0, T])$  (véase [20]), entonces  $h_j \in C([0, T])$ . Una consecuencia de la continuidad de la función  $h_j$ , es que las estimaciones y expresiones relativas a  $h_j$ , pueden considerarse  $\forall t \in [0, T]$ , en lugar de  $c \forall t \in (0, T)$ .  $\square$

**Lema 3.2.** *La familia de normas  $\{\|h_j\|_{W^{1,\infty}(0,T)}\}$ , está uniformemente acotada en  $j \in \mathbb{N}$ .*

**Demostración:** Se deduce de modo inmediato a partir de las estimaciones (3.12) y (3.13).  $\square$

**Lema 3.3.** *Las funciones  $h_j \in C([0, T])$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ .*

**Demostración:** Puesto que  $h_j \in W^{1,\infty}(0, T)$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$  y  $W^{1,\infty}(0, T)$  tiene inyección compacta en el espacio  $C([0, T])$ , entonces,  $h_j \in C([0, T])$ .  $\square$

**Teorema 3.2. Resultado de dependencia continua respecto de los datos.** *Sean  $h_1$  y  $h_2$  soluciones del problema  $P(h_j)$  asociadas respectivamente a las condiciones iniciales  $h_{01}$  y  $h_{02}$ , verificando la hipótesis **H1** y a los términos integrales no locales,*

$$I_1(r) = \int_{\Omega} A_1(r, x) dx \quad e \quad I_2(r) = \int_{\Omega} A_2(r, x) dx, \quad r \in (0, T),$$

con  $A_1 = (2w_1)^{1/2}$  y  $A_2 = (2w_2)^{1/2}$ , donde las funciones  $w_1$  y  $w_2 \in V_w$  (recuérdese la **definición 3.5**). Entonces se tiene que:

$$\|h_1 - h_2\|_{L^\infty(0,T)} \leq C_g \left| h_{01}^{(2R+1)/R} - h_{02}^{(2R+1)/R} \right| + K_\Phi \|w_1 - w_2\|_{L^1(\Omega_T)}. \quad (3.14)$$

**Demostración:** En efecto, de (3.10) se tiene, al verificar  $A_1$  y  $A_2$ , las hipótesis mencionadas en **H2**, relativas a la función  $A$  (por estar asociadas a soluciones de  $P(w_j)$ ), que

$$\begin{aligned} & \left| h_1^{(2R+1)/R}(t) - h_2^{(2R+1)/R}(t) \right| \leq \left| h_{01}^{(2R+1)/R} - h_{02}^{(2R+1)/R} \right| + \\ & + [(2R+1)/2R] M^{1/R} (L(2\Phi)^{1/2})^{-(R+1)/R} \int_0^t |I_1 - I_2| \leq \\ & \leq \left| h_{01}^{(2R+1)/R} - h_{02}^{(2R+1)/R} \right| + \\ & + [(2R+1)/2R] M^{1/R} L^{-(R+1)/R} (2\Phi)^{-(2R+1)/2R} \int_0^t \int_\Omega |w_1(t,x) - w_2(t,x)| dx, \end{aligned}$$

$c \forall t \in (0, T)$ . Dado que, tanto  $h_1(t)$  como  $h_2(t)$ , verifican que  $0 < m_h \leq h_1(t)$ ,  $h_2(t)$ ,  $\forall t \in (0, T)$  por ser soluciones de  $P(h_j)$ , asociadas respectivamente a las funciones coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  y a los datos iniciales  $h_{01}$  y  $h_{02}$ , entonces existe una constante  $C_g$  tal que en  $c \forall t \in (0, T)$  se tiene que

$$|h_1(t) - h_2(t)| = \left| g(h_1^{(2R+1)/R}) - g(h_2^{(2R+1)/R}) \right| \leq C_g \left| h_1^{(2R+1)/R}(t) - h_2^{(2R+1)/R}(t) \right|.$$

En realidad, la constante  $C_g$  es la constante de Lipschitz de la función  $g(x) = x^{R/(2R+1)}$  en el intervalo  $(m_h, h_0)$ . Obsérvese que aunque por hipótesis se tiene que  $R > 1$  y por tanto,  $0 < R/(2R+1) < 1$ , la derivada de  $g$  está acotada superiormente en el intervalo  $(m_h, h_0)$ , pues  $m_h > 0$  (recuérdese la **observación 3.3**). Por ejemplo, puede tomarse como valor de  $C_g$ , la constante dada por  $C_g = [R/(2R+1)] m_h^{-(R+1)/(2R+1)}$ .

Tomando  $K_\Phi = [(2R+1)/2R] C_g M^{1/R} L^{-(R+1)/R} (2\Phi)^{-(2R+1)/2R}$ , se verifica que

$$\|h_1 - h_2\|_{L^\infty(0,T)} \leq C_g \left| h_{01}^{(2R+1)/R} - h_{02}^{(2R+1)/R} \right| + K_\Phi \|w_1 - w_2\|_{L^1(\Omega_T)}.$$

□

**Observación 3.9.** Las estimaciones anteriores no dependen del parámetro  $j$ , asociado a la etapa de desacoplamiento iterativo, por tanto, son válidas para todo  $h_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

**Corolario 3.1.** Existe una subsucesión de  $\{h_j\}$ , que se denotará del mismo modo, que converge en la topología usual de  $C([0, T])$  a una función  $h \in C([0, T])$ .

**Demostración:** Basta tener en cuenta que las normas  $\|h_j\|_{W^{1,\infty}(0,T)}$  están acotadas uniformemente en  $j$  y que  $W^{1,\infty}(0,T)$  tiene inyección compacta en  $C([0,T])$  (véanse los lemas 3.2 y 3.3).  $\square$

**Corolario 3.2.** *Las funciones  $B_j$  y  $E_j$  pertenecen al espacio  $L^\infty(0,T)$ . Además, las normas  $\|B_j\|_{L^\infty(0,T)}$  y  $\|E_j\|_{L^\infty(0,T)}$ , están uniformemente acotadas en  $j \in \mathbb{N}$ , es decir, existe una constante  $C$ , tal que*

$$\|B_j\|_{L^\infty(0,T)} \leq C, \quad \|E_j\|_{L^\infty(0,T)} \leq C, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

*Y por tanto, en particular, existe una subsucesión de  $\{B_j\}$  que converge (fuerte) en la topología de  $L^2(0,T)$  a una función  $B$  y existe una subsucesión de  $\{E_j\}$  que converge (fuerte) en la topología de  $L^2(0,T)$  a una función  $E$ .*

**Demostración:** Este resultado es consecuencia de que  $h_j|h'_j| \in L^\infty(0,T)$ . Además, dada la no dependencia respecto de  $j$  de las estimaciones de la norma de  $h_j|h'_j|$  en  $L^\infty(0,T)$ , se tiene que las normas  $\|B_j\|_{L^\infty(0,T)}$  y  $\|E_j\|_{L^\infty(0,T)}$  están uniformemente acotadas en  $j \in \mathbb{N}$ . La existencia de una subsucesión de  $\{B_j\}$ , respectivamente de  $\{E_j\}$ , que converja en la topología de  $L^2(0,T)$  a una función  $B$ , respectivamente a  $E$ , es consecuencia de la acotación uniforme de las normas  $\|B_j\|_{L^\infty(0,T)}$ , respectivamente  $\|E_j\|_{L^\infty(0,T)}$ , y de la aplicación del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (véase [20], por ejemplo).  $\square$

**Corolario 3.3.** *La función coeficiente  $D_j$  es continua, es decir,  $D_j \in C([0,T])$  y además,  $D'_j \in L^\infty(0,T)$ . Las normas  $\|D_j\|_{L^\infty(0,T)}$  y  $\|D'_j\|_{L^\infty(0,T)}$  están uniformemente acotadas en  $j \in \mathbb{N}$ .*

**Demostración:** En efecto, a partir de la expresión de  $D_j$ , dada por la **definición** 3.6 y utilizando la monotonía de la función  $h$  (véase el **teorema** 3.1), se deduce que  $\|D_j\|_{L^\infty(0,T)} \leq \gamma + \delta/m_h$ , y además, su derivada (en un sentido débil) verifica

$$|D'_j| = |\delta h_j^{-2} h'_j| \leq \delta m_h^{-2} \|h'_j\|_\infty \leq \delta m_h^{-2} c_{ht}.$$

Puesto que  $m_h$  y  $c_{ht}$  son constantes, las cotas anteriores no dependen del parámetro  $j$  y por tanto, son uniformes.  $\square$

**Observación 3.10.** *Nótese que a partir del teorema 3.1, del lema 3.1 y de H2 es posible deducir que las funciones  $h'_j$ ,  $B_j$  y  $E_j$  pertenecen al espacio  $C([0,T])$ .*



### 3.2.3. Problema para la velocidad acumulada.

Dados el dato inicial  $\xi_0$  verificando **H1** y las funciones  $A_j$  y  $E_j$  satisfaciendo **H2**, se considera el problema:

$$P(\xi_j) := \begin{cases} \partial_t \xi_j = A_j(t, x)E_j(t), & c \forall t \in (0, T), c \forall x \in \Omega, \\ \xi_j(0, x) = \xi_0, & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

**Teorema 3.3. Existencia y unicidad de solución para el problema de la velocidad acumulada.** *Existe una única solución fuerte,  $\xi_j \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega))$ , del problema  $P(\xi_j)$ , dada por la expresión*

$$\xi_j(t, x) = \xi_0 + \int_0^t A_j(s, x)E_j(s)ds, \quad c \forall t \in (0, T), c \forall x \in \Omega. \quad (3.15)$$

**Demostración:** Puesto que  $A_j$  y  $E_j \in L^\infty(\Omega_T)$  (véase la **propiedad** 3.1 y las hipótesis **H2**) entonces, el producto  $A_j E_j$  es integrable en  $\Omega_T$ . En particular,  $A_j(\cdot, x)E_j(\cdot)$  es integrable en  $(0, t)$ ,  $c \forall x \in \Omega$ . Así pues, la existencia de solución resulta obvia, ya que para obtener la expresión explícita de la solución, dada por (3.15), basta integrar respecto del tiempo la ecuación dada en el problema  $P(\xi_j)$ . La unicidad, es consecuencia directa de la aplicación del lema fundamental del cálculo variacional (en su versión débil). También se deduce que al ser  $A_j$  y  $E_j$  acotadas (por **H2**),  $\xi_j \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega))$ . Además, puesto que  $A_j$  y  $E_j$  son funciones positivas,  $c \forall t \in (0, T)$  y  $c \forall x \in \Omega$ , resulta que

$$\xi_j > 0 \quad \text{y} \quad \partial_t \xi_j > 0, \quad c \forall t \in (0, T), c \forall x \in \Omega, \quad (3.16)$$

es decir,  $\xi_j$  es positiva y monótona creciente respecto de la variable temporal. Desde el punto de vista físico, este resultado es coherente con la definición de  $\xi_j$ , variable que representa la velocidad acumulada del sistema (nótese, que si  $\xi$  es positiva en el *ice divide*, es decir,  $\xi_0 > 0$ , entonces  $\xi_j$  es positiva y además crece respecto de  $t$ ).

□

**Lema 3.4.** *La función  $\partial_x \xi_j$ , pertenece al espacio  $L^2(\Omega_T)$ , y por tanto*

$$\xi_j \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

**Demostración:** En efecto, de (3.15), derivando en el sentido de las distribuciones (véanse por ejemplo [104] y [114]), se tiene que, al ser  $\xi_0$  una constante,

$$\partial_x \xi_j(t, x) = \int_0^t E_j(s) \partial_x A_j(s, x) ds, \quad c \forall t \in (0, T), c \forall x \in \Omega.$$

Como  $E_j \in L^\infty(0, T)$  y  $A_j \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , el resultado se obtiene de manera inmediata. □

**Corolario 3.4.** *Existe una constante  $C$ , tal que*

$$\|C_j\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq C, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

**Demostración:** El resultado se obtiene sin más que tener en cuenta: la expresión de  $C_j$ ,  $C_j = (h_j|h'_j|)^2 \xi_j^{-1/2}$  (véase la **definición** 3.8), la acotación uniforme en  $j$  de las normas  $\|h_j\|_{L^\infty(0,T)}$  y  $\|h'_j\|_{L^\infty(0,T)}$  (véase el **lema** 3.2) y la monotonía de  $\xi_j$  (monótona creciente respecto del tiempo, véase (3.16)). En efecto, de las consideraciones que se acaban de mencionar, se desprende que:

$$\xi_j^{-1/2}(t, x) \leq \xi_0^{-1/2}(x) = \xi_0^{-1/2}, \quad \forall x \in \Omega,$$

donde  $\xi_0$  es una constante estrictamente positiva. Y por tanto, se verifica que

$$\|C_j\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq (h_0 c h t)^2 \xi_0^{-1/2} = C, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

□

**Corolario 3.5.** *Existe una constante  $C_F$ , tal que*

$$\|F_j\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq C_F, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

**Demostración:** Es consecuencia de la definición de  $F_j$ ,  $F_j = B_j - C_j$  y de las acotaciones uniformes en  $j$  de  $\|B_j\|_{L^\infty(\Omega_T)}$  y de  $\|C_j\|_{L^\infty(\Omega_T)}$  (véanse los **corolarios** 3.2 y 3.4). □

**Observación 3.11.** *Nótese que a partir de los **teoremas** 3.1, 3.3, del **lema** 3.1 y de **H2** es posible deducir que las funciones  $C_j$  y  $F_j$  pertenecen al espacio  $C([0, T]; L^\infty(\Omega))$ .*

### 3.2.4. Problema relativo al flujo de agua.

Dado el dato inicial  $w_0$  verificando **H1**, dadas las funciones coeficientes  $D_{j-1}$  y  $F_{j-1}$  verificando **H2**, dadas las funciones  $b$  y  $p(b)$  según la **definición** 3.6 y el obstáculo  $\Phi$  (constante positiva, véase la **observación** 3.6), se considera el problema  $P(w_j)$ ,

$$P(w_j) := \begin{cases} w_j \geq \Phi, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t b(w_j) - (w_j)_{xx} - F_{j-1} \cdot p(b(w_j)) - D_{j-1} \geq 0, & \text{en } \Omega_T, \\ [\partial_t b(w_j) - (w_j)_{xx} - F_{j-1} \cdot p(b(w_j)) - D_{j-1}] (w - \Phi) = 0, & \text{en } \Omega_T, \\ w_j(0, x) = w_0(x), & x \in \Omega, \\ \partial_x w_j(t, 0) = \partial_x w_j(t, L) = 0, & t \in (0, T). \end{cases}$$

El problema  $P(w_j)$  es un problema de obstáculo unilateral. Como definición de solución del problema  $P(w_j)$ , se considerará la que se suele dar para este tipo de problemas (véase, por ejemplo [3]).

**Definición 3.10.** Se dirá que  $w_j \in V_w$  (recuérdese la **definición 3.5**) es una solución débil acotada del problema  $P(w_j)$ , si se verifican las siguientes expresiones:

1.

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_j) \nu + \int_0^T \int_{\Omega} [b(w_j) - b(w_0)] \partial_t \nu = 0, \quad (3.17)$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tal que} \quad \nu(T, \cdot) = 0,$$

2.

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_j) (\eta - w_j) + \int_0^T \int_{\Omega} (w_j)_x (\eta - w_j)_x \geq \int_0^T \int_{\Omega} [F_{j-1} p(b(w_j)) + D_{j-1}] (\eta - w_j), \quad (3.18)$$

$$\forall \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}),$$

donde  $\mathbb{K}$  es el conjunto convexo dado por la **definición 3.4**

Lo primero que se hará es obtener una estimación *a priori* de  $\|w_j\|_{L^\infty(\Omega_T)}$ , puesto que va a ser utilizada en la demostración de la existencia de soluciones débiles acotadas para los problemas  $P(w_j)$ .

### Acotación de las soluciones.

Comenzamos esta sección definiendo varios conceptos que van a ser utilizados, no sólo en la demostración de la acotación uniforme de las normas  $\left\{ \|w_j\|_{L^\infty(\Omega_T)} \right\}$ , sino también en otras posteriores.

**Definición 3.11.** Sea  $(X, \|\cdot\|)$ , un espacio de Banach, sean  $x, y \in X$ ,  $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ , se define el **producto superior semi-interior** como

$$(x, y)_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} (x, y)_h, \quad \text{donde} \quad (x, y)_h := \frac{1}{h} (\|x + hy\|^2 - \|x\|^2).$$

**Definición 3.12.** Un operador  $A : D(A) \subset X \rightarrow 2^X$  es **acretivo** si y sólo si

$$(x - \bar{x}, y - \bar{y})_+ \geq 0,$$

para cada  $x, \bar{x} \in D(A)$ ,  $y \in A(x)$  e  $\bar{y} \in A(\bar{x})$ , donde  $(\cdot, \cdot)_+$  es el producto superior semi-interior. Se dice que  $A$  es *m-acretivo* si es acretivo y además  $R(I + \lambda A) = X$  para todo  $\lambda > 0$ .

**Teorema 3.4.** *Supongamos que  $w_j$  es solución del problema  $P(w_j)$  en el sentido de la **definición 3.9**. Sea  $\beta$ , dado por (3.3),  $b$ ,  $p(b)$ ,  $D_{j-1}$  y  $F_{j-1}$ , dadas por la **definición 3.6** y verificando **H2** y el dato  $w_0$ , verificando **H1**. Entonces se verifican las hipótesis siguientes:*

$$(\mathbf{H3}) := \left\{ \begin{array}{l}
 1. \text{ El operador } -u_{xx} + \beta(u - \Phi) \text{ es un operador m-acretivo;} \\
 2. \text{ La función } b \text{ es continua, creciente y } b(0) = 0, \\
 3. \text{ La función } F_{j-1} \cdot p(b(u)) \text{ es una función de Caratheodory y} \\
 \quad |F_{j-1} \cdot p(b(u))| \leq C_F |u|^{1/2}, \\
 4. \quad F_{j-1} \cdot [p(b(u_1)) - p(b(u_2))] \geq -C^*(b(u_1) - b(u_2)), \\
 \text{donde } C^* \text{ es la constante de Lipschitz de la función } F_{j-1} \cdot p(b(u)) \\
 \text{respecto de } b \text{ y que depende por tanto del obstáculo } \Phi. \\
 \text{Puede tomarse } C^* = C_F(6\Phi)^{-1}. \\
 5. \text{ La función coeficiente } D_{j-1} \in L^\infty(0, T).
 \end{array} \right.$$

Y por tanto,

$$\|b(w_j)\|_{L^p(\Omega_T)} \leq e^{C^*T} \left\{ \|b(w_0)\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^T e^{-C^*s} \|D_{j-1}(s)\|_{L^p(\Omega)} ds \right\}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (3.19)$$

En particular, existe una constante  $W_j$ , tal que

$$\|w_j\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq W_j. \quad (3.20)$$

**Demostración:** El hecho de que el operador  $-u_{xx} + \beta(u - \Phi)$  sea m-acretivo, con  $\beta$  definido según (3.3) es bien conocido (véase por ejemplo [31]). La verificación del resto de las hipótesis de **(H3)** a partir de las propiedades de  $p(b)$ ,  $D_{j-1}$ ,  $F_{j-1}$  y  $w_0$  es inmediata. Para obtener (3.19) a partir de las hipótesis **(H3)**, puede consultarse por ejemplo ([8]). La acotación (3.20) se deduce de (3.19) y de la monotonía de  $b$ .

□

**Corolario 3.6.** *Existe una constante  $W$  no dependiente de  $j$ , tal que*

$$\|w_j\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq W, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.21)$$

**Demostración:** El resultado se deduce de (3.19) y de que las normas  $\|D_{j-1}\|_{L^\infty(0,T)}$  están uniformemente acotadas en  $j$  (véase el **corolario 3.3**). □

**Corolario 3.7.** *Existe una subsucesión  $\{w_j\}$ , que será denotada del mismo modo, y existe una función  $w$ , tal que*

$$w_j \rightarrow w, \quad \text{fuerte en la topología de } L^p(\Omega_T), \quad 1 \leq p < \infty.$$

**Demostración:** Basta tener en cuenta el **corolario** 3.6 y aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.  $\square$

**Corolario 3.8.** *Las funciones coeficientes  $A_j = (2w_j)^{1/2}$  están uniformemente acotadas respecto de  $j$  en la norma del espacio  $L^\infty(\Omega_T)$  y por tanto, existe una función  $A$  tal que*

$$A_j \rightarrow A, \quad \text{fuerte en } L^p(\Omega_T), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Como  $w_j \rightarrow w$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ , entonces  $A = (2w)^{1/2}$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ .

**Demostración:** El resultado es consecuencia de la definición de las funciones coeficientes  $A_j$  y de los **corolarios** 3.6 y 3.7.  $\square$

### Existencia de soluciones débiles acotadas.

La prueba de la existencia de solución para el problema unilateral  $P(w_j)$ , se realizará a través de las siguientes etapas:

- En una primera etapa, se construirá una sucesión de problemas aproximantes regulares, que denotaremos  $P_{n,j}(w)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , para el problema  $P(w_j)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el problema  $P_{n,j}(w)$  consistirá en tomar la ecuación del problema  $P(w_j)$ , pero substituyendo la función  $F_{j-1} \cdot p(b(w))$  por la función  $F_{j-1} \cdot p_n(b(w))$ , donde  $\{p_n(b(w))\}$  es una sucesión de aproximaciones Yosida (y por tanto Lipschitz) de la función  $p(b(w))$  respecto de  $b$  tales que  $p_n \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$  (recuérdese que  $p$  no es Lipschitz, sino sublineal respecto de  $b$ , véase la **definición** 3.6).
- A continuación, se probará la existencia de soluciones de los problemas  $P_{n,j}(w)$  y se realizarán las estimaciones *a priori* oportunas, que permitirán demostrar la convergencia de una subsucesión de soluciones de los problemas aproximantes a una solución del problema  $P(w_j)$ .
- La prueba de la existencia de soluciones para los problemas  $P_{n,j}$  se realizará mediante la aplicación de la técnica utilizada en [3]<sup>2</sup>, basada en el método de penalización.

---

<sup>2</sup>Los problemas  $P_{n,j}(w)$  entran en la generalidad de las hipótesis requeridas en [3], salvo que

**Problemas unilaterales aproximantes.** Los problemas unilaterales  $P_{n,j}(w)$ , serán regularizaciones del problema  $P(w_j)$ , basadas en el empleo de aproximaciones Yosida de la función  $F_{j-1} \cdot p(b(w))$ . Antes de pasar a estudiar los problemas  $P_{n,j}(w)$ , se recordarán algunos resultados básicos sobre operadores acretivos, funciones aproximantes Yosida y resolventes.

**Definición 3.13.** Sea  $A : D(A) \subset X \rightarrow 2^X$  un operador y  $\lambda > 0$ .

1. El operador  $J_\lambda : D(J_\lambda) \subset X \rightarrow 2^X$  definido por

$$J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1},$$

donde  $I$  designa la identidad en  $X$  y  $D(J_\lambda) = R(I + \lambda A)$ , se llama **resolvente** de  $A$ .

2. El operador  $A_\lambda : D(A_\lambda) \subset X \rightarrow 2^X$  definido por

$$A_\lambda := (1/\lambda)(I - \lambda A),$$

con  $D(A_\lambda) = R(I + \lambda A)$ , se llama **aproximación Yosida** de  $A$ .

**Propiedad 3.2.** Un operador  $A : D(A) \subset X \rightarrow 2^X$  es acretivo si y sólo si para cada  $\lambda > 0$ , la resolvente  $J_\lambda$  es una aplicación unívoca y no expansiva, es decir,

$$\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leq \|x - y\|,$$

para cada  $x, y \in R(I + \lambda A)$ .

**Propiedad 3.3.** Si  $A : D(A) \subset X \rightarrow 2^X$  es acretivo y  $\lambda > 0$ , entonces:

1.  $A_\lambda$  es unívoca, acretiva y Lipschitz continua en  $R(I + \lambda A)$  (la constante de Lipschitz es  $2/\lambda$ ),
2.  $A_\lambda x \in A J_\lambda x$ , para cada  $x \in R(I + \lambda A) \cap D(A)$ ,
3.  $\|A_\lambda x\| \leq |Ax|$ , para cada  $x \in R(I + \lambda A) \cap D(A)$ , donde

$$|Ax| := \inf \{\|y\| : y \in Ax\}, \quad \forall x \in D(A).$$

---

en vez de tenerse una condición de contorno de tipo Dirichlet, como se supone en [3], en nuestro caso se tiene una condición de contorno de tipo Neumann homogénea. Esta diferencia no influye en la validez de los resultados, pues las demostraciones realizadas en el caso de condición de tipo Dirichlet son fácilmente extrapolables al caso de condición de tipo Neumann homogénea, con pequeñas modificaciones.

Los resultados anteriores pueden encontrarse, por ejemplo, en [110].

A continuación se demostrará que es lícito considerar aproximaciones Yosida para la función  $F_{j-1} \cdot p(b(w))$  y que por tanto, tiene sentido construir los problemas aproximantes  $P_{n,j}(w)$ .

**Propiedad 3.4.** *Se consideran la función  $b$ , definida en la **definición 3.6**, las funciones  $p(b)$  y  $F_{j-1}$  verificando **H2**. Entonces  $F_{j-1} \cdot p(b)$  es un operador  $m$ -acretivo respecto de  $b$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$  (es monótono en la variable  $b$ , ya que  $p(b) = b^{1/3}$ , véase **definición 3.6**) y por tanto, existen las funciones  $Y_n(t, x, b(w)) = F_{j-1}(t, x) \cdot p_n(b(w))$  y  $J_n(b)$ , donde  $p_n(b(w))$  y  $J_n(b)$  son respectivamente la aproximación Yosida y la resolvente de  $p(b(w))$ , respecto de  $b$ , de parámetro  $1/n$ . De la **propiedad 3.3**, se deduce que  $p_n$  es Lipschitz y que  $p_n(b) \leq p(b)$ , de la **propiedad 3.2**, se deduce que  $J_n$  es no expansiva y además, se da la siguiente relación,  $I = J_n + (1/n)p_n$ , donde  $I$  denota el operador identidad.*

**Corolario 3.9.** *Sea la función  $F_{j-1}$  verificando **H2** y el **corolario 3.5** y sea  $p(b)$  satisfaciendo la hipótesis **H2**. Entonces, existe una constante positiva  $C_F$  tal que*

$$|Y_n(t, x, b(w))| \leq C_F p(b), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad c \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

**Demostración:** Es consecuencia de la definición de las funciones  $Y_n$ ,

$$Y_n(t, x, b(w)) = F_{j-1}(t, x) \cdot p_n(b(w)),$$

ya que la sucesión  $\{p_n(b(w))\}$  está formada por las aproximaciones Yosida de  $p(b(w))$  y por tanto,  $p_n(b) \leq p(b)$ , y de que la familia de normas  $\left\{ \|F_{j-1}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \right\}$  está uniformemente acotada por una constante positiva  $C_F$  (véase el **corolario 3.5**).  $\square$

A continuación se definirá la sucesión de problemas unilaterales  $P_{n,j}(w)$ .

**Observación 3.12.** *En ocasiones, se utilizará la notación  $Y_n(b(w)) := Y_n(t, x, b(w))$ , para simplificar la exposición.*

**Definición 3.14.** *Dado el dato inicial  $w_0$  verificando **H1**, dado el obstáculo  $\Phi$ , dadas las funciones  $D_{j-1}$  y  $F_{j-1}$  verificando **H1** y la función  $Y_n$ , dada en la **propiedad***

3.4 y verificando el **corolario** 3.9, se define el problema  $P_{n,j}(w)$  por

$$P_{n,j}(w) := \begin{cases} w \geq \Phi, & \text{en } \Omega_T \\ \partial_t b(w) - w_{xx} - Y_n(b(w)) - D_{j-1} \geq 0, & \text{en } \Omega_T, \\ [\partial_t b(w) - w_{xx} - Y_n(b(w)) - D_{j-1}](w - \Phi) = 0, & \text{en } \Omega_T, \\ w(0, x) = w_0(x), & x \in \Omega, \\ \partial_x w(t, 0) = \partial_x w(t, L) = 0, & t \in (0, T). \end{cases}$$

**Definición 3.15.** Se dirá que  $w \in V_w$ , donde se recuerda que

$$V_w \doteq \{ \eta : \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}) \cap L^\infty(\Omega_T), \partial_t b(\eta) \in L^2(\Omega_T) \},$$

es una **solución débil acotada** de  $P_{n,j}(w)$ , si se verifican las dos expresiones siguientes:

1.

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(w) \nu + \int_0^T \int_\Omega [b(w) - b(w_0)] \partial_t \nu = 0, \quad (3.22)$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tal que } \nu(T, \cdot) = 0,$$

2.

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(w) (\eta - w) + \int_0^T \int_\Omega w_x (\eta - w)_x \geq \int_0^T \int_\Omega (Y_n(b(w)) + D_{j-1}) (\eta - w), \quad (3.23)$$

$$\forall \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}),$$

con  $\mathbb{K}$  dado por la **definición** 3.4

**Observación 3.13.** Supuesto que  $w \in V_w$  y en consecuencia,  $Y_n(t, x, b(w)) \in L^\infty(\Omega_T)$ , y que  $D_{j-1} \in L^\infty(0, T)$ , se tiene que la integral

$$\int_0^T \int_\Omega (Y_n(b(w)) + D_{j-1}) (\eta - w),$$

está bien definida.

A continuación, demostraremos que si las funciones  $w_{nj}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  son soluciones de los problemas regularizados  $P_{n,j}(w)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , entonces la familia de normas  $\{\|w_{nj}\|_{L^\infty(\Omega_T)}\}$ , está acotada uniformemente en  $n \in \mathbb{N}$ .



**Acotación uniforme de soluciones.**

**Lema 3.5.** *Sea  $j \in \mathbb{N}$  fijo. Supongamos que  $w_{nj}$  es solución del problema  $P_{n,j}(w)$ , entonces, se verifica que existe una constante positiva,  $W$ , tal que*

$$\|w_{nj}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq W, \quad \forall n, j \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

**Demostración:** Supongamos que  $w_{nj}$  es solución de  $P_{n,j}(w)$ , entonces, se tiene que

$$w_{nj}(t, x) \geq \Phi, \quad \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

La propiedad anterior, hace que en realidad, para nuestro estudio, sólo tengan relevancia las propiedades de las funciones  $p_n$  y  $p$  en el intervalo  $[(2\Phi)^{3/2}, \infty)$ . Como  $p_n \leq p$  y, tanto  $p_n(b)$  como  $p(b)$ , son Lipschitz para  $b \geq (2\Phi)^{3/2}$  (obsérvese que si  $w_{nj} \geq \Phi > 0$ , entonces  $b(w_{nj}) \geq b(\Phi) = (2\Phi)^{3/2} > 0$ ), puede asumirse que  $p_n(b) = p(b)$  para  $b \in [(2\Phi)^{3/2}, \infty)$ . De este modo, la constante de Lipschitz de  $p_n$  en el intervalo  $[(2\Phi)^{3/2}, \infty)$ , está acotada superiormente por la constante  $(6\Phi)^{-1}$  (recuérdese que  $p(b) = b^{1/3}$ ). Aplicando el resultado de Benilan que aparece en ([8]) al problema  $P_{n,j}(w)$  (es fácil comprobar que este problema verifica las hipótesis **H3**), resulta que

$$\|b(w_{nj})\|_{L^p(\Omega_T)} \leq e^{C^*T} \left\{ \|b(w_0)\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^T e^{-C^*s} \|D_{j-1}(s)\|_{L^p(\Omega)} ds \right\}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (3.25)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ , donde  $C^*$  puede tomarse  $C^* = C_F (6\Phi)^{-1}$ . De nuevo, por la monotonía de  $b$  y el **corolario** 3.3 acerca de la acotación uniforme de las funciones  $D_j$ , se tiene que en particular, existe una constante  $W$ , tal que

$$\|w_{nj}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq W, \quad \forall n, j \in \mathbb{N}.$$

□

**Existencia de solución.**

**Teorema 3.5. Existencia.** *Existe al menos una solución del problema  $P_{n,j}(w)$  dado en la definición 3.14*

**Demostración:** Para demostrar la existencia de solución para el problema  $P_{n,j}(w)$  se seguirá la técnica utilizada en [3], consistente en la utilización del método de penalización. □

**Los problemas penalizados.**

Para cada  $j \in \mathbb{N}$  (subíndice considerado para denotar la sucesión de problemas  $P(w_j)$ , resultantes de la aplicación del esquema desacoplamiento iterativo al sistema  $(S)$ ) y  $n \in \mathbb{N}$  (subíndice considerado para denotar a la sucesión de problemas regularizados  $P_{n,j}(w)$  que aproximan al problema  $P(w_j)$ ) fijos, se consideran los problemas de penalización aproximantes  $P_{rnj}$ , con el objeto de demostrar la existencia de solución del problema  $P_{n,j}(w)$ . Antes de definir tales problemas, se presentarán una serie de definiciones y propiedades que serán utilizadas posteriormente.

**Definición 3.16.** Se define el funcional de dualidad  $\mathbf{j}$ , como el operador  $\mathbf{j} : H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^*$ , tal que:

$$\langle \mathbf{j}(w), \psi \rangle = \int_{\Omega} (w\psi + w_x\psi_x), \quad \forall w, \psi \in H^1(\Omega).$$

**Observación 3.14.** El funcional  $\mathbf{j}$  es un operador monótono (este resultado aparece, por ejemplo en [74]). Téngase en cuenta que  $\mathbf{j}$  es un funcional de dualidad, es decir,  $\mathbf{j}(w) \in (H^1(\Omega))^*$  para todo  $w \in H^1(\Omega)$  ( $(H^1(\Omega))^*$ , denota el espacio dual de  $H^1(\Omega)$ ). Nótese, que en este caso particular se tiene que  $H^1(\Omega) \equiv (H^1(\Omega))^*$ . Además,  $\mathbf{j}$  es un operador convexo, puesto que es suma de factores cuadráticos de aplicaciones lineales (la identidad y la diferencial).

**Definición 3.17.** Se define el operador proyección,  $\mathbf{P}$ , sobre el convexo  $\mathbb{K}$ , como el operador  $\mathbf{P} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ , dado por

$$\langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \mathbf{P}w - v \rangle \geq 0, \quad \text{para } v \in \mathbb{K},$$

donde recuérdese que (definición 3.4)

$$\mathbb{K} := \{v(x) \in H^1(\Omega), \text{ tales que } v(x) \geq \Phi, c \forall x \in \Omega\}.$$

**Definición 3.18.** Dados el parámetro  $r \in \mathbb{N}$ , el dato inicial  $w_0$  verificando **H1**, dadas las funciones  $D_{j-1}$  e  $Y_n$  como en el problema  $P_{n,j}(w)$  y los operadores  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{P}$  dados en las definiciones 3.16 y 3.17, se define el problema de penalización  $P_{rnj}$ , como sigue

$$P_{rnj} := \begin{cases} \partial_t b(w_{rnj}) - (w_{rnj})_{xx} + r\mathbf{j}(w_{rnj} - \mathbf{P}w_{rnj}) = Y_n(b(w_{rnj})) + D_{j-1}, & \text{en } \Omega_T, \\ w_{rnj}(0, x) = w_0(x), & x \in \Omega, \\ \partial_x w_{rnj}(t, 0) = \partial_x w_{rnj}(t, L) = 0, & t \in (0, T). \end{cases}$$

**Definición 3.19.** Se dirá que  $w_{rnj} \in V_w$ , es una **solución débil acotada** del problema  $P_{rnj}$ , si se verifican las dos identidades siguientes:

1.

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_{rnj}) \nu + \int_0^T \int_{\Omega} [b(w_{rnj}) - b(w_0)] \partial_t \nu = 0, \quad (3.26)$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tal que } \nu(T, \cdot) = 0.$$

2.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_{rnj}) \psi + \int_0^T \int_{\Omega} (w_{rnj})_x \psi_x + r \int_0^T \langle \mathbf{j}(w_{rnj} - \mathbf{P}w_{rnj}), \psi \rangle = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} (Y_n(b(w_{rnj})) + D_{j-1}) \psi, \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Observación 3.15.** Nótese, que como  $w_{rnj} \in V_w$ , en particular, está globalmente acotada, entonces  $b((w_{rnj}))$  (donde  $b$  es continua) y  $Y_n(t, x, b(w_{rnj})) = F_{j-1}(t, x) \cdot p_n(b(w_{rnj}))$  (recuérdese la **propiedad 3.4**) pertenecen al espacio  $L^\infty(\Omega_T)$ , es decir, están globalmente acotadas, deduciéndose por tanto, que la integral

$$\int_0^T \int_{\Omega} (Y_n(b(w_{rnj})) + D_{j-1}) \psi,$$

está bien definida.

Antes de enunciar y demostrar el resultado de existencia para el problema  $P_{rnj}$ , se presenta una propiedad relativa a la función  $b$  (fórmula de integración por partes) que será utilizada posteriormente.

**Proposición 3.1.** Supongamos que  $w_{rnj}$  es solución del problema  $P_{rnj}$ . Entonces, la función  $S$  verifica que  $S(w_{rnj}(t, \cdot)) \in L^\infty(\Omega)$ ,  $c \forall t \in (0, T)$  y

$$\int_0^t \int_{\Omega} \partial_t b(w_{rnj}) w_{rnj} = \int_{\Omega} S(w_{rnj}(t)) - \int_{\Omega} S(w_0), \quad c \forall t \in (0, T).$$

**Demostración:** Dado que  $w_{rnj} \in V_w \subset L^\infty(\Omega_T)$  y por tanto,  $w_{rnj}(t, \cdot) \in L^\infty(\Omega)$   $c \forall t \in (0, T)$  y teniendo en cuenta que  $S$  es una función continua (véase la **definición 3.6**), entonces,  $S(w_{rnj}(t, \cdot)) \in L^\infty(\Omega)$ . Por otro lado, utilizando la fórmula de integración por partes (véanse por ejemplo, [3] ó [68]), se tiene que

$$\int_0^t \int_{\Omega} \partial_t b(w_{rnj}) w_{rnj} = \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t (b(w_{rnj}) w_{rnj}) - \int_0^t \int_{\Omega} b(w_{rnj}) \partial_t (w_{rnj}) =$$

$$\begin{aligned}
&= b(w_{rnj}(t))w_{rnj}(t) - b(w_0)w_0 - (2/3) \int_0^t \int_{\Omega} S'(w_{rnj}) \partial_t(w_{rnj}) = \\
&= b(w_{rnj}(t))w_{rnj}(t) - b(w_0)w_0 - (2/3) \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t(S(w_{rnj})) = \\
&= b(w_{rnj}(t))w_{rnj}(t) - b(w_0)w_0 + (2/3) [S(w_{rnj}(t)) - S(w_0)] = S(w_{rnj}(t)) - S(w_0),
\end{aligned}$$

que era el resultado buscado.  $\square$

**Teorema 3.6. Existencia de solución para los problemas  $P_{rnj}$ .** *Existe, al menos, una solución para el problema  $P_{rnj}$  dado por la definición 3.18*

**Demostración:** La existencia de solución de este tipo de problemas es bien conocida (véase [7]). La prueba se basa en considerar una semidiscretización temporal, consistente en reemplazar en  $P_{rnj}$  el término parabólico,  $\partial_t b(w_{rnj})$ , por el cociente en diferencias regresivas,  $\partial_t^{-h} b(w_{rnj})$ , definido por

$$\partial_t^{-h} b(w_{rnj}(\tau)) = (b(w_{rnj}(\tau)) - b(w_{rnj}(\tau - h))) / h.$$

Para que esta expresión tenga sentido en  $c \forall \tau \in (0, T)$ , se asume que

$$w_{rnj}(\tau) = w_{rnj}^0 = w_0, \quad c \forall \tau \in (-h, 0).$$

Esto conduce a la obtención de problemas elípticos bien planteados, para los cuales la existencia de solución está asegurada por ser  $Y_n(t, x, b(w)) := F_{j-1}(t, x) \cdot p_n(b(w))$  Lipschitz respecto de  $b$ . Además, las soluciones de los problemas aproximantes elípticos convergen a una solución del problema  $P_{rnj}$  (véase [7]).  $\square$

Una vez demostrada la existencia de solución para los problemas  $P_{rnj}$ , se realizarán las oportunas estimaciones *a priori* de la energía de las soluciones  $w_{rnj}$ , con el objeto de demostrar la existencia de una subsucesión de  $\{w_{rnj}\}$  (entendida como sucesión en  $r \in \mathbb{N}$ , para  $n$  y  $j \in \mathbb{N}$  fijos) que converge a una función  $w_{nj}$ , solución del problema unilateral  $P_{n,j}(w)$ .

**Estimaciones *a priori* para la solución del problema  $P_{rnj}$ .**

Se realizarán dos estimaciones: en la primera, se obtendrá una estimación que permitirá demostrar la convergencia débil de  $\{w_{rnj}\}$  a una función  $w_{nj} \in L^2((0, T); H^1(\Omega))$ , y en la segunda, se obtendrá la regularidad del término parabólico, en particular, se tendrá que  $\partial_t b(w_{rnj}) \in L^2(\Omega_T)$ .

**Observación 3.16.** *Utilizaremos la notación  $w := w_{rnj}$ . En algunas ocasiones, para simplificar la notación, se denotará por  $w(t)$ ,  $t \in [0, T]$  a la función  $w(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $w(t)(x) = w(t, x)$ .*

Primera estimación.

Para obtener la estimación de la norma de  $w$  en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  y de  $S(w)$  en  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$  se procede del modo siguiente: Se considera la ecuación del problema  $P_{rnj}$ , se multiplica por la función  $\psi = w - w_0$ , donde  $w_0$  es el dato inicial y se integra en  $(0, t) \times \Omega$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega \partial_t b(w)(w - w_0) + \int_0^t \int_\Omega w_x(w - w_0)_x + \\ & + r \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), w - w_0 \rangle = \int_0^t \int_\Omega (Y_n(b(w)) + D_{j-1})(w - w_0). \end{aligned}$$

Estimamos cada uno de los términos integrales,

Término parabólico.

Aplicando la **proposición** 3.1, se tiene que

$$\int_0^t \int_\Omega \partial_t b(w) \cdot w = \int_\Omega [S(w(t)) - S(w_0)].$$

Por otro lado, como  $\partial_t w_0 = 0$ , puesto que el dato inicial es evidente que no depende de  $t$ , al aplicar la fórmula de integración por partes al término  $\int_0^t \int_\Omega \partial_t b(w) \cdot w_0$ , resulta que

$$\int_0^t \int_\Omega \partial_t b(w) \cdot w_0 = \int_\Omega b(w(t))w_0 - \int_\Omega b(w_0)w_0 \leq \delta \int_\Omega S(w(t)) + C_\delta \int_\Omega S(w_0). \quad (3.28)$$

Para obtener la segunda desigualdad en (3.28), se ha aplicado la desigualdad de Hölder, utilizando la función convexa  $\Psi$  (recuérdese que  $\Psi(b) = S$ ) y luego, la desigualdad de Young con parámetro  $\delta$ , siendo  $\delta \ll 1$ . Utilizando los cálculos anteriores se tiene que

$$\int_0^t \int_\Omega \partial_t b(w) (w - w_0) \geq (1 - \delta) \int_\Omega S(w(t)) - (1 + C_\delta) \int_\Omega S(w_0).$$

Término elíptico.

Aplicando nuevamente la fórmula de integración por partes y la desigualdad de Young, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega w_x(w - w_0)_x &= \int_0^t \int_\Omega |w_x|^2 - \int_0^t \int_\Omega w_x(w_0)_x \geq \\ &\geq (1 - \delta) \int_0^t \int_\Omega |w_x|^2 - C_\delta \int_0^t \int_\Omega |(w_0)_x|^2. \end{aligned}$$

Término de penalización.

$$r \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), w - w_0 \rangle \geq r \int_0^t \|w - \mathbf{P}w\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

En la desigualdad anterior se ha tenido en cuenta que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), w - w_0 \rangle &= \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), w - \mathbf{P}w \rangle + \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \mathbf{P}w - w_0 \rangle \geq \\ &\geq \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), w - \mathbf{P}w \rangle, \end{aligned}$$

ya que  $\langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \mathbf{P}w - w_0 \rangle \geq 0$ , por ser  $w_0 \in \mathbb{K}$  (véase **H1**).

Término fuente.

Existen unas constantes,  $C_1$  y  $C_2$ , tales que:

$$\int_0^t \int_{\Omega} [Y_n(b(w)) + D_{j-1}] (w - w_0) \leq \int_0^t \int_{\Omega} C_1 S(w) + C_2 \int_{\Omega} [1 + S(w_0) + S^2(w_0)], \quad (3.29)$$

$\forall n, j, r \in \mathbb{N}$ .

En efecto:

a) Teniendo en cuenta la estimación dada en **H2**. 7.a) y la **propiedad** 3.4, resulta que

$$\int_0^t \int_{\Omega} Y_n(b(w)) \cdot w \leq \int_0^t \int_{\Omega} C_F \cdot p(b(w)) w \leq C_F \int_0^t \int_{\Omega} K(1 + S(w)).$$

b) Considerando la **propiedad** 3.4, el **corolario** 3.9 y la definición de  $S$  (véase **definición** 3.6) y utilizando las desigualdades de Hölder y Young de modo adecuado, se obtienen las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} Y_n(b(w)) \cdot w_0 &\leq \int_0^t \int_{\Omega} C_F \cdot p(b(w)) w_0 \leq C \left( \int_0^t \int_{\Omega} S(w) \right)^{1/5} \left( \int_0^t \int_{\Omega} S^2(w_0) \right)^{4/5} \leq \\ &C' \left[ \int_0^t \int_{\Omega} S(w) + \int_0^t \int_{\Omega} S^2(w_0) \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde  $C'$  es una constante positiva.

c) De nuevo, empleando las definiciones y propiedades mencionadas anteriormente, así como el **corolario** 3.3 (acerca de la acotación de  $D_{j-1}$ ), se tiene que existen unas constantes positivas,  $C$  y  $C'$ , tales que:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1} \cdot w &\leq C \left( \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1}^{5/3} \right)^{3/5} \left( \int_0^t \int_{\Omega} S(w) \right)^{2/5} \leq \\ &\leq (5/3)C \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1}^{5/3} + (5/2)C \int_0^t \int_{\Omega} S(w) \leq C' \left[ 1 + \int_0^t \int_{\Omega} S(w) \right], \end{aligned}$$

$\forall n, j, r \in \mathbb{N}$ .

d) Y por último, repitiendo el proceso realizado anteriormente en c), con  $w_0$  en lugar de  $w$ , se tiene que existen unas constantes positivas,  $C$  y  $C'$ , tales que:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1} w_0 &\leq C \left( \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1}^{5/3} \right)^{3/5} \left( \int_0^t \int_{\Omega} S(w_0) \right)^{2/5} \leq \\ &\leq (5/3)C \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1}^{5/3} + (5/2)C \int_0^t \int_{\Omega} S(w_0) \leq C' \left[ 1 + \int_0^t \int_{\Omega} S(w_0) \right], \end{aligned}$$

$\forall n, j, r \in \mathbb{N}$ .

Para obtener (3.29), basta tener en cuenta las estimaciones obtenidas en a), b), c) y d).

A partir de las anteriores estimaciones parciales, se obtiene la siguiente estimación global de la energía de las soluciones del problema  $P_{rnj}$ ,

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \int_{\Omega} S(w(t)) - (1 + C_{\delta}) \int_0^t \int_{\Omega} S(w_0) + (1 - \delta) \int_0^t \int_{\Omega} |w_x|^2 - C_{\delta} \int_0^t \int_{\Omega} |(w_0)_x|^2 + \\ + r \int_0^t \|w - \mathbf{P}w\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_0^t \int_{\Omega} C_1 S(w) + C_2 \int_{\Omega} [1 + S(w_0) + S^2(w_0)], \end{aligned}$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_{\delta}$  son constantes positivas. Reordenando términos, se tiene que

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \int_{\Omega} S(w(t)) + (1 - \delta) \int_0^t \int_{\Omega} |w_x|^2 + r \int_0^t \|w - \mathbf{P}w\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \\ \leq (1 + C_{\delta}) \int_{\Omega} S(w_0) + C_{\delta} \int_0^t \int_{\Omega} |(w_0)_x|^2 + \\ + C_1 \int_0^t \int_{\Omega} S(w) + C_2 \int_{\Omega} [1 + S(w_0) + S^2(w_0)] \end{aligned}$$

y por tanto, existe una constante positiva,  $C$ , tal que

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \left( \int_{\Omega} S(w(t)) + \int_0^t \int_{\Omega} |w_x|^2 \right) + r \int_0^t \|w - \mathbf{P}w\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \\ \leq C_1 \int_0^t \int_{\Omega} S(w) + C, \quad c \forall t \in (0, T), 0 < \delta \ll 1. \end{aligned}$$

La no negatividad del segundo y del tercer término integral que aparecen en el lado de la izquierda de la desigualdad integral anterior, es decir, el hecho de que

$$(1 - \delta) \int_0^t \int_{\Omega} |w_x|^2 + r \int_0^t \|w - \mathbf{P}w\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq 0,$$

con  $0 < \delta \ll 1$ , permite deducir que,

$$(1 - \delta) \int_{\Omega} S(w(t)) \leq C_1 \int_0^t \int_{\Omega} S(w) + C. \quad (3.30)$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall a (3.30) y tomando  $\delta \rightarrow 0$ , resulta que existe una constante positiva,  $C_{E1}$ , que no depende de  $\{r, n, j\}$  tal que

$$\sup_{\text{ess}\{0 < t < T\}} \int_{\Omega} S(w(t)) + \int_0^T \int_{\Omega} |w_x|^2 + r \int_0^T \|w - \mathbf{P}w\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_{E1}. \quad (3.31)$$

**Observación 3.17.** En la estimación anterior, el término  $\sup_{\text{ess}\{0 < t < T\}} \int_{\Omega} S(w(t))$ , denota el supremo en  $c \forall t \in (0, T)$  de la función  $g(t) := \int_{\Omega} S(w(t))$ . Nótese que se ha empleado la notación  $S(w(t))$ , para denotar a la función  $S(w(t)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $S(w(t))(x) = S(w(t, x))$ ,  $x \in \Omega$ . Por tanto, la función  $\int_{\Omega} S(w(t))$ , sólo depende de  $t$ , ya que se integra en  $\Omega$ .

**Observación 3.18.** La constante de acotación,  $C_{E1}$ , puede tomarse independiente de  $\{r, n, j\}$ , ya que el dato inicial  $w_0$  verifica **H1**, y las constantes obtenidas tras acotar las funciones coeficientes, están uniformemente acotadas en  $j$ .

**Lema 3.6.** Existe una subsucesión de  $\{w_{rnj}\}$ , (entendida como sucesión en  $r$ , para  $n$  y  $j$  fijos) que será denotada nuevamente por  $\{w_{rnj}\}$ , que converge débilmente a una función  $w_{nj}$  en el espacio  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

**Demostración:** De la expresión (3.31), se deduce que existe una constante positiva,  $C$ , tal que

$$\|w_{rnj}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C, \quad \forall r \in \mathbb{N},$$

por tanto, existe una subsucesión de  $\{w_{rnj}\}$  que converge en la topología débil de  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  (obsérvese, que como  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  coincide con su dual, las topologías débil y débil\* coinciden).  $\square$

**Segunda estimación.**

Como resultado de esta segunda estimación, se obtendrá la regularidad del término  $\partial_t b(w)$  y en consecuencia, la de  $\partial_t w$ . Para ello, se toma la ecuación del problema  $P_{rnj}$ , se multiplica por la función  $\psi = \partial_t w$  y se integra en  $(0, t) \times \Omega$ , obteniendo la identidad siguiente

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t b(w) \partial_t w + \int_0^t \int_{\Omega} w_x (\partial_t w)_x + \\ & + r \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \partial_t w \rangle = \int_0^t \int_{\Omega} (Y_n(b(w)) + D_{j-1}) \partial_t w. \end{aligned}$$



Estudiamos término a término, para hacer más sencillo el proceso de acotación de la norma de  $\partial_t(b(w))$  en el espacio  $L^2(\Omega_T)$ .

### Término parabólico.

Dado que la función  $b$  es de tipo Lipschitz, existe una constante positiva,  $C_b$ , tal que

$$\int_0^t \int_{\Omega} \partial_t b(w) \partial_t w \geq C_b \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t b(w)|^2.$$

### Término elíptico.

Haciendo los cálculos oportunos, se tiene que

$$\int_0^t \int_{\Omega} w_x (\partial_t w)_x = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t [(w_x)^2] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_x|^2(t) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |(w_0)_x|^2.$$

### Término de penalización.

Para realizar el estudio del término,

$$r \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \partial_t w \rangle, \quad (3.32)$$

se aproximará la derivada  $\partial_t w$  por el cociente en diferencias regresivas,  $\partial_t^{-h} w = (w(t) - w(t-h))/h$ , donde se supone que  $w(t, x) = w_0(x)$ , en  $t \in (-h, 0)$  y se estimará el valor del término

$$r \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \partial_t^{-h} w \rangle. \quad (3.33)$$

Una vez estudiado (3.33), se tomará el límite  $h \rightarrow 0$ , en la estimación obtenida y con ello se obtendrá una estimación válida para (3.32). En [3], por ejemplo, aparece utilizado este tipo de razonamiento. Sea pues  $0 < h \ll 1$ , entonces

$$\begin{aligned} r \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \partial_t^{-h} w \rangle &= (r/h) \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), w(s) - w(s-h) \rangle = \\ &= (r/h) \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), w(s) - \mathbf{P}w(s) \rangle + \\ &+ (r/h) \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \mathbf{P}w(s) - \mathbf{P}w(s-h) \rangle + \\ &+ (r/h) \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \mathbf{P}w(s-h) - w(s-h) \rangle. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \mathbf{P}w(s) - \mathbf{P}w(s-h) \rangle \geq 0$$

por la **definición** 3.17, ya que  $\mathbf{P}w(s-h) \in \mathcal{K}$  y la convexidad del operador  $\mathbf{j}$  (obsérvese que aparecen formas cuadráticas de términos lineales), se tiene que

$$\begin{aligned} r \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \partial_t^{-h} w \rangle &\geq (r/2h) \int_0^t \|w(s) - \mathbf{P}w(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \\ &-(r/2h) \int_0^t \|w(s-h) - \mathbf{P}w(s-h)\|_{H^1(\Omega)}^2 = (r/2h) \int_{t-h}^t \|w(s) - \mathbf{P}w(s)\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Tomando el límite  $h \rightarrow 0$  en

$$r \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \partial_t^{-h} w \rangle \geq (r/2h) \int_{t-h}^t \|w(s) - \mathbf{P}w(s)\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

resulta que

$$r \int_0^t \langle \mathbf{j}(w - \mathbf{P}w), \partial_t(w) \rangle \geq (r/2) \|w(t) - \mathbf{P}w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Término fuente.

Se ha de estimar el término:

$$\int_0^t \int_{\Omega} (Y_n(b(w)) + D_{j-1}) \partial_t w.$$

Aplicando la desigualdad triangular y el **corolario** 3.9, según el cual  $Y_n(b(w)) \leq C_F \cdot p(b(w))$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \int_{\Omega} (Y_n(b(w)) + D_{j-1}) \cdot \partial_t w \right| \leq \\ &C_F \left| \int_0^t \int_{\Omega} p(b(w)) \cdot \partial_t w \right| + \left| \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1} \cdot \partial_t w \right|, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Para estudiar cada uno los términos que aparecen en el lado derecho de la desigualdad se utilizará la notación siguiente

$$I_1 := C_F \int_0^t \int_{\Omega} p(b(w)) \cdot \partial_t w \quad \text{e} \quad I_2 := \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1} \cdot \partial_t w.$$

A continuación se estudiarán por separado  $I_1$  e  $I_2$ .

#### ■ Estudio de $I_1$ .

Aplicando la fórmula de integración por partes se obtiene que,

$$I_1 = C_F \int_0^t \int_{\Omega} p(b(w)) \cdot \partial_t w = C_F \int_{\Omega} [p(b(w)) \cdot w](t, r) dr -$$

$$\begin{aligned}
& -C_F \int_{\Omega} [p(b(w)) \cdot w](0, r) dr - C_F \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t(p(b(w)) \cdot w) = \\
& = C_F \left( \int_{\Omega} [p(b(w)) \cdot w](t, r) dr - \int_{\Omega} [p(b(w)) \cdot w](0, r) dr - \int_0^t \int_{\Omega} \partial_b p \cdot \partial_t(b(w)) w \right).
\end{aligned}$$

Como por **H2** se verifica que  $p(b(w)) \cdot w \leq K[1 + S(w)]$ , entonces

$$C_F \int_{\Omega} [p(b(w)) \cdot w](\tau, x) \leq C_F K \int_{\Omega} [1 + S(w(\tau, x))], \forall \tau \in (0, T).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
& C_F \left( \int_{\Omega} [p(b(w)) \cdot w](t, r) dr - \int_{\Omega} [p(b(w)) \cdot w](0, r) dr \right) \leq \\
& \leq C_F K \int_{\Omega} [2 + S(w(t)) + S(w_0)].
\end{aligned}$$

Por otro lado, existe una constante  $K_{\delta}$  (depende de  $\delta$ ) tal que

$$\begin{aligned}
C_F \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_b p(b(w)) \cdot \partial_t b(w)) \cdot w & \leq C_F \int_0^t \left( \int_{\Omega} |w \cdot \partial_b p|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\partial_t b(w)|^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \leq C_F K_{\delta} \int_0^t \int_{\Omega} |w \cdot \partial_b p|^2 + C_F \delta \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t(b(w))|^2.
\end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis sobre  $\partial_b p$ , dada en **H2**, es decir,  $|w \cdot \partial_b p(b(w))|^2 = 6^{-2}$ , se obtiene que

$$C_F \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_b p \cdot \partial_t b(w)) \cdot w \leq C_F K_{\delta} + \delta C_F \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t b(w)|^2.$$

### ■ Estudio de $I_2$ .

Integrando por partes y aplicando de modo oportuno las desigualdades de Hölder y Young, se tiene que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1} \cdot \partial_t w \right| = \left| \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t(D_{j-1} \cdot w) - \int_0^t \int_{\Omega} w \cdot D'_{j-1} \right| \leq \\
& \leq \int_{\Omega} |D_{j-1}(t)w(t)| + \int_{\Omega} |D_{j-1}(0)w_0| + \\
& + \left[ 5/(6\sqrt{2}) \right]^{2/5} \left| \left( \int_0^t \int_{\Omega} S(w) \right)^{2/5} \left( \int_{\Omega} (D'_{j-1})^{5/3} \right)^{3/5} \right| \leq \\
& \left( \int_{\Omega} S(w(t)) \right)^{2/5} \left( \int_{\Omega} |D_{j-1}^{5/3}(t)| \right)^{3/5} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} |D_{j-1}(0)w_0(s)| ds + [1/(3\sqrt{2})] \int_0^t \int_{\Omega} S(w) + (3/5) \int_0^t \int_{\Omega} |D'_{j-1}|^{5/3} \leq \\
& \leq [1/(3\sqrt{2})] \int_{\Omega} S(w(t)) + (3/5) \int_{\Omega} |D_{j-1}^{5/3}(t)| + \\
& + \int_{\Omega} |D_{j-1}(0)w_0| + [1/(3\sqrt{2})] \int_0^t \int_{\Omega} S(w) + (3/5) \int_0^t \int_{\Omega} |D'_{j-1}|^{5/3}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (3.31), que permite acotar los términos relativos a  $S(w)$  mediante la constante  $C_{E1}$ , la regularidad de los datos iniciales y la de las funciones  $D_{j-1}$  y  $D'_{j-1}$ , se obtiene que existe una constante positiva  $C_d$ , tal que

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega} D_{j-1} \cdot \partial_t w \right| \leq C_d, \quad \forall t \in (0, T), \quad \forall n, j, r \in \mathbb{N}.$$

Como conclusión de las consideraciones anteriores, se tiene que existen constantes  $K_1$  y  $K_{\delta}$  tales que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\Omega} [Y_n(b(w)) + D_{j-1}] \cdot \partial_t w \right| \leq \\
& \leq C_F \left( K_{\delta} + K_1 \int_{\Omega} [2 + S(w(t)) + S(w_0)] + \delta \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t(b(w))|^2 \right) + C_d,
\end{aligned}$$

$\forall n, j, r \in \mathbb{N}$ .

La consecuencia de las estimaciones previamente realizadas es la siguiente acotación

$$\begin{aligned}
& (1 - \delta C_F) \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t b(w)|^2 + (r/2) \|w(t) - \mathbf{P}w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1/2) \int_{\Omega} |w_x|^2(t) \leq \\
& \leq (1/2) \int_{\Omega} |(w_0)_x|^2 + C_F \left( K_{\delta} + K_1 \int_{\Omega} [2 + S(w(t)) + S(w_0)] \right) + C_d. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Teniendo en consideración la regularidad de  $S(w)$ , obtenida a partir de (3.31), la desigualdad (3.34), implica que  $\partial_t(b(w)) \in L^2(\Omega_T)$ ,  $\forall n, j, r \in \mathbb{N}$ . En definitiva, existe una constante  $C_{E2}$  tal que

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t b(w)|^2 + (r/2) \|w(t) - \mathbf{P}w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1/2) \int_{\Omega} |w_x|^2(t) \leq C_{E2}, \quad (3.35)$$

$$c \forall t \in (0, T), \quad \forall n, j, r \in \mathbb{N}.$$

Recuérdese que se está empleando la notación  $w := w_{rnj}$

**Lema 3.7.** *Existe una subsucesión de la sucesión  $\{\partial_t(b(w_{rnj}))\}$ , que denotaremos del mismo modo, que converge débilmente a  $\partial_t(b(w_{nj}))$ , donde  $w_{nj}$  es el límite débil de  $\{w_{rnj}\}$  en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  y además,*

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t(b(w_{nj})) \cdot \nu = - \int_0^T \int_{\Omega} [b(w_{nj}) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu, \quad \forall \nu \in \mathcal{M},$$

donde  $\mathcal{M} := \{\eta : \eta \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^{\infty}(\Omega)), \quad \nu(T, \cdot) = 0\}$ .

**Demostración:** Utilizando que  $w_{rnj}$  es solución del problema aproximante de penalización, se tiene que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t(b(w_{rnj})) \cdot \nu = - \int_0^T \int_{\Omega} [b(w_{rnj}) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu, \quad \forall r \in \mathbb{N}, \forall \nu \in \mathcal{M}. \quad (3.36)$$

Como la sucesión  $\{\partial_t(b(w_{rnj}))\}$  está uniformemente acotada respecto de  $r$  en  $L^2(\Omega_T)$  por (3.35), existe una subsucesión, que denotaremos igual, que converge débilmente a una función  $\lambda$ . Puesto que  $\lambda$  es el límite débil de  $\{\partial_t(b(w_{rnj}))\}$  y  $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega_T)$ , entonces:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t(b(w_{rnj})) \cdot \nu = \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \cdot \nu, \quad \forall \nu \in \mathcal{M}.$$

Por otro lado, al ser  $w_{nj}$  el límite débil de  $\{w_{rnj}\}$  en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , se tiene que  $w_{rnj}(t, x) \rightarrow w_{nj}$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$  y por tanto,  $\{b(w_{rnj})\}$  converge en casi todo punto a  $b(w_{nj})$ , ya que  $b$  es una función continua.

Así pues, para cada  $\nu \in \mathcal{M}$  fija se verifica que:

$$- \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} [b(w_{rnj}) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu = - \int_0^T \int_{\Omega} [b(w_{nj}) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu.$$

Entonces, por unicidad de límite

$$\int_0^T \int_{\Omega} \lambda \cdot \nu = - \int_0^T \int_{\Omega} [b(w_{nj}) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu, \quad \forall \nu \in \mathcal{M},$$

es decir,  $\lambda = \partial_t b(w_{nj})$  y por tanto,  $w_{nj}$  verifica (3.22).  $\square$

**Lema 3.8.** *En las hipótesis del problema  $P_{rnj}$ , mencionadas en la **definición** 3.18, se verifican las hipótesis siguientes:*

- (H4) :=  $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ El operador } -w_{xx} + rj(w - \mathbf{P}(w)) \text{ es un operador } m\text{-acretivo;} \\ 2. \text{ La función } b \text{ es continua, creciente y } b(0) = 0, \\ 3. \text{ } Y_n(t, x, b(w)) \text{ es una función de Caratheodory e} \\ |Y_n(t, x, b(w))| \leq C_F |w|^{1/2}, \\ 4. \text{ } Y_n(t, x, b(w_1)) - Y_n(t, x, b(w_2)) \geq -c_n^*(b(w_1) - b(w_2)), \text{ donde } c_n^* \\ \text{es la constante de Lipschitz de } Y_n \text{ respecto de } b, \\ 5. \text{ } D_{j-1} \in L^\infty(0, T). \end{array} \right.$

Y por tanto, se tiene la siguiente desigualdad

$$\|b(w_{rnj})\|_{L^p(\Omega_T)} \leq e^{c_n^* T} \left\{ \|b(w_0)\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^T e^{-c_n^* s} \|D_{j-1}(s)\|_{L^p(\Omega)} ds \right\}, \quad (3.37)$$

para  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\forall r \in \mathbb{N}$ . Como consecuencia de la estimación (3.37) existe una constante  $M_{n,j}$ , tal que

$$\|w_{rnj}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq M_{n,j}, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \quad (3.38)$$

**Demostración:** Véase [8] para obtener (3.37) a partir de **H4**. La acotación (3.38) se deduce de (3.37) sin más que tomar  $p = \infty$  y tener en cuenta la monotonía de  $b$ .

□

**Teorema 3.7.** *Las soluciones  $w_{rnj}$  están uniformemente acotadas respecto de  $r$  en el espacio  $L^\infty(\Omega_T)$ . Es decir, existe una constante  $M_{n,j}$ , tal que*

$$\|w_{rnj}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq M_{n,j}, \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

**Demostración:** Es consecuencia inmediata del **lema 3.8**. □

**Lema 3.9.** *Existe una subsucesión de  $\{w_{rnj}\}$ , que converge a una función  $w_{nj}$ , débilmente en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  y fuertemente en  $L^p(\Omega_T)$ , para  $1 \leq p < \infty$ .*

**Demostración:** Es consecuencia inmediata del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, del **teorema 3.7** y del **lema 3.9**. □

**Paso al límite en los problemas penalizados.**

**Lema 3.10.** *Existe una subsucesión de  $\{w_{rnj}\}$  que se denotará del mismo modo y una función  $w_{nj}$ , tal que:*

- $w_{rnj} \rightharpoonup w_{nj}$ , en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,
- $w_{rnj} \rightarrow w_{nj}$ , en  $L^p(0, T; \Omega)$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$ ,
- $\partial_t b(w_{rnj}) \rightharpoonup \partial_t b(w_{nj})$ , en  $L^2(\Omega_T)$ ,
- $S(w_{rnj}) \rightarrow S(w_{nj})$ , en  $L^p(\Omega_T)$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$  y
- $Y_n(t, x, b(w_{rnj})) \rightarrow Y_n(t, x, b(w_{nj}))$ , en  $L^p(\Omega_T)$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$ .

Además,  $w_{nj} = \mathbf{P}w_{nj}$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$  y por tanto,  $w_{nj} \in \mathbb{K}$ .

**Demostración:** Las convergencias se deducen las estimaciones *a priori* realizadas para  $w_{rnj}$ , (3.31) y (3.35), de la **propiedad** 3.4, del **corolario** 3.9, de los **lemas** 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 y de la aplicación tanto de resultados de compacidad, como del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Además, puesto que existe una constante,  $C_{E2}$ , que no depende de  $r$ , tal que

$$(r/2) \cdot \sup \text{ess}_{\{0 < t < T\}} \|w_{rnj}(t) - \mathbf{P}w_{rnj}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_{E2},$$

como  $w_{rnj} \rightarrow w_{nj}$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ , y

$$\|w_{rnj}(t) - \mathbf{P}w_{rnj}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (2/r) C_{E2} \rightarrow 0,$$

cuando  $r \rightarrow \infty$ , se tiene que  $w_{nj} = \mathbf{P}w_{nj}$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$  y por tanto,  $w_{nj} \in \mathbb{K}$ .  $\square$

**Lema 3.11.** *Sea  $w_{nj}$ , la función obtenida en el lema anterior. Entonces, existen constantes positivas,  $C_{E1}$  y  $C_{E2}$ , tales que,*

$$\sup \text{ess}_{\{0 < t < T\}} \int_{\Omega} S(w_{nj}(t)) + \int_0^t \int_{\Omega} |(w_{nj})_x|^2 \leq C_{E1}, \quad (3.39)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t b(w_{nj})|^2 + (1/2) \int_{\Omega} |(w_{nj})_x|^2(t) \leq C_{E2}, \quad c \forall t \in (0, T), \quad \forall n, j \in \mathbb{N}. \quad (3.40)$$

**Demostración:** Basta tener en cuenta el **lema** 3.10 y utilizar dichas convergencias para tomar límite respecto de  $r$  en las estimaciones (3.31) y (3.35), donde las constantes que allí aparecen,  $C_{E1}$  y  $C_{E2}$ , no dependen de los parámetros  $\{r, n, j\}$ .

$\square$

**Teorema 3.8.** *Existe  $w_{nj}$ , solución del problema unilateral  $P_{n,j}(w)$ .*

**Demostración:** A partir de los **lemas** 3.7, 3.10 y 3.11, se deduce de forma inmediata que la función  $w_{nj}$ , obtenida en el **lema** 3.10, satisface que  $w_{nj} \in V_w$  y

1.

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_{nj}) \cdot \nu + \int_0^T \int_{\Omega} [b(w_{nj}) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu = 0,$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)) \quad \text{tal que} \quad \nu(T, \cdot) = 0$$

2.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_{n,j}) \psi + \int_0^T \int_{\Omega} (w_{n,j})_x \psi_x \geq \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega} (Y_n(b(w)) + D_{j-1}) \psi, \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

□

**Paso al límite en los problemas unilaterales aproximantes.** En esta sección se obtendrá la existencia de una subsucesión de la sucesión de soluciones  $\{w_{n,j}\}$  convergente a cierta función  $w_j$ . Posteriormente, se demostrará que  $w_j$  es solución del problema  $P(w_j)$ .

Para demostrar la convergencia de una subsucesión de la sucesión  $\{w_{n,j}\}$ , se aplicará una versión del teorema de Ascoli-Arzelá (véase [110]), que enunciamos a continuación con el objeto de facilitar la comprensión de la demostración.

**Teorema de Ascoli-Arzelá:** *Un subconjunto  $K$  de  $C([a, b]; X)$  es relativamente secuencialmente compacto si y sólo si:*

$$K \text{ es débilmente equicontinuo en } [a, b], \quad (3.41)$$

*y existe un subconjunto denso en  $[a, b]$ , tal que para cada  $t \in D$ , el conjunto*

$$K(t) := \{f(t); f \in K\}, \quad \text{es débilmente relativamente compacto en } X. \quad (3.42)$$

En nuestro caso, se tiene que el intervalo considerado será  $[0, T]$ ,  $X = L^1(\Omega)$  y  $K := \{b(w_{n,j})\}$ . En los lemas siguientes, se presentarán las hipótesis que van a ser utilizadas para poder aplicar la versión del teorema de Ascoli-Arzelá que acabamos de presentar.

**Lema 3.12.** *Existe una constante  $C_Y$ , tal que*

$$\|Y_n(t, \cdot, b(w_{n,j}(t, \cdot)))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_Y, \quad c \forall t \in (0, T), \forall n, j \in \mathbb{N}. \quad (3.43)$$

**Demostración:** Sea  $\{w_{n,j}\}$  la sucesión de soluciones asociadas a los problemas  $P_{n,j}(w)$ . De los lemas 3.1 y 3.5 se deduce que existe una constante  $W$ , tal que

$$\|b(w_{n,j}(t, \cdot))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq b(W), \quad \forall t \in [0, T], \forall n, j \in \mathbb{N}. \quad (3.44)$$

Puesto que  $Y_n(b(w)) = F_{j-1} \cdot p_n(b(w))$ , donde  $p_n$  es la aproximación Yosida de  $p$  respecto de  $b$ , e  $Y_n(b(w)) \leq F_{j-1} \cdot p(b(w))$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , teniendo en cuenta los lemas



3.1 y 3.5, y la estimación (3.44), se puede deducir que existe una constante positiva  $C_Y$ , tal que:

$$\|Y_n(t, \cdot, b(w_{nj}(t, \cdot)))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{2}C_F W^{1/2} = C_Y, \quad \forall t \in (0, T), \forall n, j \in \mathbb{N}.$$

□

**Observación 3.19.** Se recuerda que  $w_{nj}(t)$  y  $F_{j-1}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , denotan, respectivamente las funciones  $w_{nj}(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $F_{j-1}(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que,  $w_{nj}(t)(x) = w_{nj}(t, x)$  y  $F_{j-1}(t)(x) = F_{j-1}(t, x)$ .

**Lema 3.13.** La familia  $\{b(w_{nj})\}$  es equicontinua en el siguiente sentido:

$$\|b(w_{nj}(t)) - b(w_{mj}(t))\|_{L^1(\Omega)}^2 \leq M \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right), \quad \forall t \in [0, T], \forall j \in \mathbb{N},$$

para cierta constante positiva  $M$  que depende de las constantes  $W$  y  $C_Y$ .

**Demostración:** En efecto, puesto que  $-w_{xx} + \beta(w - \Phi)$  es un operador  $m$ -acretivo, y  $b(w_{nj}(0)) = b(w_0)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , se verifica la desigualdad (véase [110]),

$$\begin{aligned} & \|b(w_{nj}(t)) - b(w_{mj}(t))\|_{L^1(\Omega)}^2 \leq \\ & 2 \int_0^t (b(w_{nj}(s)) - b(w_{mj}(s)), F_{j-1}(s)[p_n(b(w_{nj}(s))) - p_m(b(w_{mj}(s)))]_+ ds \leq \\ & \leq 2 \int_0^t (J_n(b(w_{nj}(s))) - J_m(b(w_{mj}(s))), F_{j-1}(s)[p_n(b(w_{nj}(s))) - p_m(b(w_{mj}(s)))]_+ ds + \\ & + 2 \int_0^t \left( \frac{1}{n} p_n(b(w_{nj})) - \frac{1}{m} p_m(b(w_{mj})), F_{j-1}[p_n(b(w_{nj})) - p_m(b(w_{mj}))] \right)_+ ds \leq \\ & \leq M \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde  $(\cdot, \cdot)_+$  denota el producto superior semi-interior dado en la **definición** 3.11, respecto de la norma usual del espacio  $L^1(\Omega)$ . En la desigualdad (3.45) se ha utilizado que  $p_n(b) = n(I - J_n)(b)$  y por tanto,  $I = (1/n)p_n + J_n$ . Utilizando (3.44), (3.43) y el hecho de que la resolvente es una contracción (véase [20]), se tiene, que existe una constante positiva  $M$ , tal que,

$$\|b(w_{nj}(t)) - b(w_{mj}(t))\|_{L^1(\Omega)}^2 \leq M \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right), \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

**Teorema 3.9. Teorema de convergencia.** *Existe una subsucesión de la sucesión de soluciones  $\{w_{n_j}\}$ , que será denotada del mismo modo, y existe una función  $w_j$ , tal que  $w_{n_j} \rightarrow w_j$  fuerte en la topología de  $C([0, T]; L^1(\Omega))$ .*

**Demostración:** Los lemas 3.12 y 3.13 permiten aplicar la versión considerada del teorema de Ascoli-Arzelá (véase [110]) a una sucesión de  $\{b(w_{n_j})\}$ . En efecto, del lema 3.12 y de la aplicación del teorema de la convergencia dominada, se obtiene que  $\forall t \in [0, T]$ , existe una subsucesión de  $\{b(w_{n_j}(t))\}$  que converge en la topología fuerte de  $L^1(\Omega)$  y por tanto, se verifica (3.42). Por otro lado, resulta claro que el lema 3.13 implica (3.41). Entonces, la tesis del teorema de Ascoli Arzelá asegura la existencia de una subsucesión de  $\{b(w_{n_j})\}$ , que será denotada de igual manera, y una función  $b$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(w_{n_j}) = \mathbf{b}$ , fuerte en la topología de  $C([0, T]; L^1(\Omega))$ .

Puesto que las normas  $\{\|w_{n_j}\|_{L^\infty(\Omega)}\}$  están uniformemente acotadas en  $n \in \mathbb{N}$  (véase el lema 3.5) y  $b$  es estrictamente monótona, se obtiene el resultado buscado, es decir, existe una función  $w_j$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{n_j} = b^{-1}(\mathbf{b}) = w_j.$$

□

**Resultado de existencia para el problema desacoplado asociado al flujo de agua.**

En esta sección se comprobará que la función  $w_j$  obtenida en la sección anterior verifica la definición de solución del problema  $P(w_j)$  dada en la **definición** 3.10.

Se recuerda, que al no depender las cotas establecidas en las estimaciones (3.39) y (3.40), ni de  $r$ , ni de  $n$ , se tiene que:

**Lema 3.14.** *La sucesión de funciones  $\{w_{n_j}\}$ , considerada en el teorema 3.9, verifica las siguientes propiedades:*

- $\{\|w_{n_j}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}\}$  está uniformemente acotada respecto de  $n$ ,
- $\{\|\partial_t b(w_{n_j})\|_{L^2(\Omega_T)}\}$  está uniformemente acotada respecto de  $n$ ,
- $w_{n_j}(t) \in \mathbb{K}$ ,  $c \forall t \in (0, T)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración:** Es consecuencia de las estimaciones dadas en el lema 3.11. □

**Lema 3.15.** *Existe una subsucesión de la sucesión considerada en el teorema 3.9, que se denotará de igual modo,  $\{w_{n_j}\}$ , que converge fuerte en la topología de  $C([0, T]; L^1(\Omega))$  y débil en la de  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , a una función  $w_j$ . Además,*

- $w_{nj} \rightarrow w_j$ , fuerte en  $L^p(\Omega_T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,
- $b(w_{nj}) \rightarrow b(w_j)$ , fuerte en  $L^p(\Omega_T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,
- $\partial_t b(w_{nj}) \rightarrow \partial_t b(w_j)$ , débil en  $L^2(\Omega_T)$ ,
- $Y_n(b(w_{nj})) = F_{j-1}p_n(b(w_{nj})) \rightarrow F_{j-1}p(b(w_j))$ , fuerte en  $L^p(\Omega_T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,
- $w_j(t) \in \mathbb{K}$ ,  $c \forall t \in [0, T]$ .

**Demostración:** Basta tener en cuenta los **lemas** 3.5, 3.12 y 3.15 y aplicar resultados bien conocidos de compacidad (véase por ejemplo [20]).  $\square$

**Lema 3.16.** *Sea  $w_j$  la función obtenida en el **lema** 3.15. Entonces, existen dos constantes positivas,  $C_{E1}$  y  $C_{E2}$ , tales que,*

$$\sup_{\text{ess}_{\{0 < t < T\}}} \int_{\Omega} S(w_j(t)) + \int_0^T \int_{\Omega} |(w_j)_x|^2 \leq C_{E1}, \quad (3.46)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t b(w_j)|^2 + (1/2) \int_{\Omega} |(w_j)_x|^2(t) \leq C_{E2}, \quad c \forall t \in (0, T), \quad c \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.47)$$

**Demostración:** Basta tener en cuenta las convergencias dadas en el **lema** 3.15 y tomar límite respecto de  $n$ , en las estimaciones (3.39) y (3.40), donde, se recuerda, que las constantes que allí aparecen,  $C_{E1}$  y  $C_{E2}$ , no dependen de los parámetros  $n$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Teorema 3.10. Existencia de solución para el problema  $P(w_j)$ .** *Existe (al menos) una solución  $w_j$  del problema  $P(w_j)$ .*

**Demostración:** Como consecuencia del **lema** 3.15 se tiene que, por un lado, la función  $w_j$  verifica que  $w_j \in V_w$  y por otro, permite asegurar (razonando de manera análoga a como se hizo en la demostración del **lema** 3.7), que es posible tomar el límite  $n \rightarrow \infty$  en

1.

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_{nj}) \cdot \nu + \int_0^T \int_{\Omega} [b(w_{nj}) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu = 0,$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tales que } \nu(T, \cdot) = 0,$$

2.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_{n_j})(\eta - w_{n_j}) + \int_0^T \int_{\Omega} (w_{n_j})_x (\eta - w_{n_j})_x \geq \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega} (Y_n(t, x, b(w_{n_j})) + D_{j-1})(\eta - w_{n_j}), \quad \forall \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}), \end{aligned}$$

para obtener que

1.

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_j) \nu + \int_0^T \int_{\Omega} (b(w_j) - b(w_0)) \partial_t \nu = 0,$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tales que } \nu(T, \cdot) = 0,$$

2.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_j)(\eta - w_j) + \int_0^T \int_{\Omega} (w_j)_x (\eta - w_j)_x \geq \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega} (F_{j-1} \cdot p(b(w_j)) + D_{j-1})(\eta - w_j), \quad \forall \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}), \end{aligned}$$

y por tanto deducir que  $w_j$  es solución de  $P(w_j)$  en el sentido de la **definición 3.10**.

□

**Corolario 3.10.** *Las funciones  $\{w_j\}$  están uniformemente acotadas, respecto de  $j \in \mathbb{N}$ , en las normas de los espacios funcionales que intervienen en la definición del espacio  $V_w$ .*

**Demostración:** En efecto, para obtener este resultado, basta recordar la **definición 3.5**, donde se define el espacio  $V_w$  y tener en cuenta las acotaciones uniformes en  $j$  que proporcionan el **lema 3.16** y el **corolario 3.6**. □

**Corolario 3.11.** *La función coeficiente  $A_j(t, x) = (2w_j(t, x))^{1/2}$  verifica las hipótesis **H2**, con acotación uniforme en  $j \in \mathbb{N}$  de las normas en los espacios que allí se citan. Existe una subsucesión de  $\{A_j\}$ , que será denotada del mismo modo, tal que*

$$A_j = (2w_j)^{1/2} \rightarrow A = (2w)^{1/2}, \quad \text{fuerte en } L^p(\Omega_T), \quad 1 \leq p < \infty. \quad (3.48)$$

En particular, se tiene que  $A \geq (2\Phi)^{1/2} > 0$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ .

**Demostración:** El resultado es consecuencia directa del hecho de que  $w_j \in V_w$  y de que  $w_j \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ , ya que basta aplicar a la función  $w_j$ , el mismo tipo de argumento empleado en la demostración del **lema 3.1**. La acotación uniforme de las normas de las funciones  $\{A_j\}$  se deduce de las acotaciones uniformes de las funciones  $\{w_j\}$  en el espacio  $C([0, T]; L^2(\Omega))$  y del **corolario 3.8**. Nótese, que dichas funciones están uniformemente acotadas en las normas de los espacios funcionales que aparecen en la definición del espacio  $V_w$  (véase [74]). La positividad de  $A$  se deduce del hecho de que, en particular, se tiene (3.48) y por tanto, como  $w_j \geq \Phi > 0$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ , ya que  $w_j \in V_w$ , entonces  $A \geq (2\Phi)^{1/2} > 0$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ .  $\square$

### Unicidad de solución.

En esta sección ofreceremos un resultado de comparación para una determinada clase de problemas de obstáculo. De dicho resultado, deduciremos la unicidad de soluciones para el problema  $P(w_j)$ . Hacemos notar, que la unicidad de soluciones para el problema  $P(w_j)$ , no garantiza la unicidad de soluciones para el problema límite, y por tanto, para el sistema multívoco  $(S)$ . El estudio de la unicidad de soluciones del modelo multívoco es un problema de gran dificultad que será tratado en investigaciones futuras.

Para la formulación del resultado de comparación de soluciones aplicable a un determinado tipo de problemas de obstáculo, en cuya generalidad entra el problema que nos ocupa, es decir,  $P(w_j)$ , utilizaremos una definición de soluciones débiles para dichos problemas, que es equivalente<sup>3</sup> a la considerada en la **definición 3.10** para la caracterización de las soluciones débiles del problema  $P(w_j)$ .

Comenzaremos pues, presentando los problemas de obstáculo para los cuales vamos a establecer el resultado de comparación de soluciones y estableciendo la definición de soluciones débiles para dichos problemas.

**Definición 3.20.** *Dada la función  $u_{0,i}$  verificando las hipótesis relativas al dato inicial mencionadas en **H1**, dadas las funciones  $D_i$  y  $F$  verificando las hipótesis de regularidad dadas en **H2** (se entiende que  $D_i$  verifica las relativas a la función denotada en **H2** de igual modo, análogamente  $F$ ), dadas las funciones  $b$  y  $p(b)$  según la **definición 3.6**, dado el grafo máximo monótono  $\beta$ , definido en (3.3) y el obstáculo  $\Phi$  (constante positiva, véase la **observación 3.6**), se considera en el*

---

<sup>3</sup>La equivalencia entre ambas definiciones puede verse en [19] y en [98].

dominio  $\Omega_T$ , el problema de obstáculo  $P_i$ ,

$$(P_i) := \begin{cases} \partial_t b(u_i) - (u_i)_{xx} + \beta(u_i - \Phi) - F \cdot p(b(u_i)) \ni D_i, & \text{en } \Omega_T, \\ u_i(0, x) = u_{0,i}(x), & x \in \Omega, \\ \partial_x u_i(t, 0) = \partial_x u_i(t, L) = 0, & t \in (0, T). \end{cases}$$

Se dirá que  $u_i$  es una solución débil del problema  $P_i$ , si  $u_i \in L^2(0, T; \mathbb{K}) \cap L^\infty(\Omega)$ , donde  $\mathbb{K}$  es el conjunto convexo dado en la **definición 3.4**,  $\partial_t b(u_i) \in L^2(\Omega_T)$ , y existe una función  $\Gamma_i \in L^1(\Omega_T)$ , con  $\Gamma_i(t, x) \in \beta(u_i(t, x) - \Phi)$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ , de modo que

1.

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(u_i) \nu + \int_0^T \int_\Omega [b(u_i) - b(u_{0,i})] \partial_t \nu = 0,$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tales que } \nu(T, \cdot) = 0,$$

2.

$$\iint_{\Omega_T} (\partial_t b(u_i) \eta + \Gamma_i \eta) dx dt = \iint_{\Omega_T} (u_i)_x \eta_x dx dt + \iint_{\Omega_T} (F p(b(u_i)) + D_i) \eta dx dt,$$

$$\forall \eta \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega).$$

A continuación, enunciamos el resultado de comparación al que hacíamos referencia. Tanto en la tesis de dicho resultado, como a lo largo de la demostración del mismo, se utilizará la notación mencionada en la **observación 3.16**. Para denotar la parte positiva de una función arbitraria  $f$ , emplearemos la notación siguiente,  $[f]_+$ , es decir,  $[f]_+ := \max\{0, f\}$ .

**Teorema 3.11.** *Sean  $u_1$  y  $u_2$ , soluciones de los problemas de obstáculo  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ , dados por la **definición 3.20** y asociados, respectivamente, a los datos iniciales  $u_{0,i}$ ,  $i = 1, 2$  y a las funciones  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , del término fuente. Entonces, se verifica que*

$$\begin{aligned} & \int_\Omega [b(u_1)(t) - b(u_2)(t)]_+ dx \leq \\ & \leq e^{C^*t} \left( \int_\Omega [b(u_{0,1}) - b(u_{0,2})]_+ dx + \int_0^t e^{-C^*s} \|D_1 - D_2\|_{L^1(\Omega)} ds \right), \quad c \forall t \in (0, T). \end{aligned} \tag{3.49}$$

**Demostración:** Sea  $u_i$  una solución de  $(P_i)$ ,  $i = 1, 2$ , en el sentido dado por la **definición** 3.20, entonces, existen dos funciones  $\Gamma_i(t, x) \in \beta(u_i(t, x) - \Phi)$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ ,  $i = 1, 2$ , de modo que

$$\partial_t b(u_i) - (u_i)_{xx} + \Gamma_i - F \cdot p(b(u_i)) = D_i, \quad c \forall (t, x) \in \Omega, \quad i = 1, 2. \quad (3.50)$$

Restando las identidades (en el sentido débil considerado en la **definición** 3.20) dadas por (3.50) para  $i = 1, 2$ , se tiene que,

$$\begin{aligned} & \partial_t b(u_1) - \partial_t b(u_2) + \Gamma_1 - \Gamma_2 - (u_1)_{xx} + (u_2)_{xx} = \\ & = F[p(b(u_1)) - p(b(u_2))] + D_1 - D_2, \quad c \forall (t, x) \in \Omega_T. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Puesto que  $u_1(t, x) \geq \Phi$  y  $u_2(t, x) \geq \Phi$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ , por ser soluciones, respectivamente, de  $(P_1)$  y  $(P_2)$ , existe una constante positiva  $C_p$  tal que

$$|p(b(u_1)) - p(b(u_2))| \leq C_p |b(u_1) - b(u_2)|,$$

ya que  $p(b(z)) = (b(z))^{1/3} = (2z)^{1/2}$ , es localmente Lipschitz en  $(0, \infty)$ , y por tanto Lipschitz en cualquier intervalo compacto contenido en  $(0, \infty)$ .

Sea la función  $sig_0^+$ , definida por

$$sig_0^+(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ 1, & s > 0. \end{cases}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $T_n$ , aproximación de la función  $sig_0^+(s)$ , por

$$T_n(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ \frac{n^2 s^2}{2}, & 0 < s \leq \frac{1}{n}, \\ 2ns - \frac{n^2 s^2}{2} - 1, & \frac{1}{n} < s \leq \frac{2}{n}, \\ 1, & s > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

Es fácil ver que,

$$0 \leq T_n'(s) \leq n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} sT_n'(s) = 0, \quad |T_n(s)| \leq 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(s) = sig_0^+(s) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} sT_n(s) = [s]^+.$$

Sea  $z = b(u_1) - b(u_2)$ . Puesto que, en particular,  $u_1, u_2 \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega)$ , por ser soluciones de respectivamente, de  $P_1$  y  $P_2$  y que  $T_n$  es continua, se tiene que  $T_n(u_1 - u_2) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega)$ .

Multiplicando la ecuación (3.51) por la función  $T_n(u_1 - u_2)$  e integrando en  $(0, t) \times \Omega$ , se obtiene la identidad siguiente:

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \int_\Omega T_n(u_1 - u_2) z_t dx ds = - \int_0^t \int_\Omega (\Gamma_1 - \Gamma_2) T_n(u_1 - u_2) dx ds + \\ & + \int_0^t \int_\Omega [(u_1)_x - (u_2)_x]_x T_n(u_1 - u_2) dx ds - \int_0^t \int_\Omega F \cdot [p(b(u_1)) - p(b(u_2))] T_n(u_1 - u_2) dx ds - \\ & - \int_0^t \int_\Omega (D_1 - D_2) T_n(u_1 - u_2) dx ds. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A continuación, se estudiarán los términos integrales que aparecen en (3.52) y se tomará límite respecto de  $n$  en las estimaciones obtenidas a partir de (3.52).

Comenzamos estudiando el término integral asociado al flujo:

$$\int_0^t \int_\Omega -[(u_1)_x - (u_2)_x]_x T_n(u_1 - u_2) dx ds.$$

**Lema 3.17.** *Bajo las hipótesis mencionadas anteriormente, se verifica que*

$$- \int_0^t \int_\Omega [(u_1)_x - (u_2)_x]_x T_n(u_1 - u_2) dx ds = \int_0^t \int_\Omega T_n'(u_1 - u_2) \|(u_1)_x - (u_2)_x\|^2 dx ds \geq 0,$$

$c \forall t \in (0, T)$ .

**Demostración:** Se deduce de la monotonía de las funciones aproximantes  $T_n$ , de la aplicación de la fórmula de integración por partes al término

$$- \int_0^t \int_\Omega [(u_1)_x - (u_2)_x]_x T_n(u_1 - u_2) dx ds,$$

y del hecho de que en los problemas  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ , se considera una condición de contorno de tipo Neumann homogénea.  $\square$

El segundo término que estimamos es:  $-\int_0^t \int_\Omega T_n(u_1 - u_2) z_t dx ds$ .

**Lema 3.18.** *En las hipótesis mencionadas anteriormente, se verifica que*

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_\Omega T_n(u_1 - u_2) \partial_t (b(u_1) - b(u_2)) dx ds = \\ & = \int_\Omega [b(u_1) - b(u_2)]_+(t) dx - \int_\Omega [b(u_{0,1}) - b(u_{0,2})]_+ dx, \quad c \forall t \in (0, T). \end{aligned}$$



**Demostración:** Como  $\partial_t b(u_1)$  y  $\partial_t b(u_2) \in L^2(\Omega_T)$  entonces  $z_t \in L^2(\Omega_T)$ . Además, se verifica que  $T_n(u_1 - u_2) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  y  $T_n'(u_1 - u_2) \in L^2(\Omega_T)$ . Por otro lado, dada la monotonía de la función  $b$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(u_1 - u_2) = \text{sig}_0^+(u_1 - u_2) = \text{sig}_0^+(b(u_1) - b(u_2)), \quad c \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

De las consideraciones anteriores, se deduce que

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} T_n(u_1 - u_2) z_t dx ds = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} \text{sig}_0^+(u_1 - u_2) z_t dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} \text{sig}_0^+(z) z_t dx ds, \quad c \forall t \in (0, T). \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} T_n(z) z_t dx ds = \int_{\Omega} T_n(z(t)) z(t) dx - \\ & - \int_{\Omega} T_n(z(0)) z(0) dx - \int_0^t \int_{\Omega} z T_n'(z) z_t dx ds, \quad c \forall t \in (0, T), \end{aligned}$$

entonces, tomando límite,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} T_n(z) z_t dx ds = \\ & = \int_{\Omega} \text{sig}_0^+(z(t)) z(t) - \int_{\Omega} \text{sig}_0^+(z(0)) z(0) dx ds, \quad c \forall t \in (0, T), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} T_n(u_1 - u_2) \partial_t (b(u_1) - b(u_2)) dx ds = \\ & = \int_{\Omega} [b(u_1) - b(u_2)]_+(t) dx - \int_{\Omega} [b(u_{0,1}) - b(u_{0,2})]_+ dx, \quad c \forall t \in (0, T). \end{aligned}$$

□

A continuación, estimamos el término

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\Gamma_1 - \Gamma_2) T_n(u_1 - u_2) dx ds.$$

**Lema 3.19.** *Bajo las hipótesis consideradas en el teorema que nos ocupa, se tiene que*

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\Gamma_1 - \Gamma_2) T_n(u_1 - u_2) dx ds \geq 0, \quad c \forall t \in (0, T).$$

**Demostración:** Es consecuencia de que  $\beta$  es un grafo maximal monótono (véase (3.3)) y  $\Gamma_i(t, x) \in \beta(u_i(t, x) - \Phi)$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ ,  $i = 1, 2$ .  $\square$

De los lemas e hipótesis anteriormente citadas, se deduce la desigualdad siguiente:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [b(u_1) - b(u_2)]_+(t) dx \leq \int_{\Omega} [b(w_{01}) - b(w_{02})]_+ dx + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (F \cdot [p(b(u_1)) - p(b(u_2))] + D_1 - D_2) sig_0^+(u_1 - u_2) dx ds, \quad c \forall t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sea  $C^*$  tal que,

$$F \cdot [p(b(u_1)) - p(b(u_2))] \leq C^* (b(u_1) - b(u_2)).$$

**Observación 3.20.** Puede elegirse como valor de  $C^*$ ,  $C^* = \|F\|_{L^\infty(\Omega_T)} C_p$ .

Sean  $v_1(t, x) = e^{-C^*t} b(u_1(t, x))$  y  $v_2(t, x) = e^{-C^*t} b(u_2(t, x))$ . Entonces, debido a la monotonía de  $b$ , se verifica que  $sig_0^+(u_1 - u_2) = sig_0^+(v_1 - v_2)$ . Además,

$$\partial_t v_i = -C^* v_i + e^{-C^*t} \partial_t b(u_i) \in L^2(\Omega), \quad c \forall t \in (0, T),$$

identidad que debe ser entendida en un sentido débil. Considerando la expresión anterior para  $i = 1, 2$ , y restando ambas, se obtiene

$$\partial_t (v_1 - v_2) = -C^* (v_1 - v_2) + e^{-C^*t} \partial_t (b(u_1) - b(u_2)). \quad (3.54)$$

Multiplicando (3.54) por la función  $T_n(v_1 - v_2)$ , operando de modo análogo al realizado anteriormente se obtiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [v_1(t) - v_2(t)]_+ dx \leq \int_{\Omega} [v_{0,1} - v_{0,2}]_+ dx - C^* \int_0^t \int_{\Omega} [v_1 - v_2]_+ dx ds + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} [F \cdot (p(b(u_1)) - p(b(u_2))) + D_1 - D_2] e^{-C^*s} sig_0^+(u_1 - u_2) dx ds, \end{aligned}$$

$c \forall t \in (0, T)$ . Teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} & F \cdot [p(b(u_1)) - p(b(u_2))] e^{-C^*s} sig_0^+(v_1 - v_2) \leq \\ & \leq C^* [b(u_1) - b(u_2)] e^{-C^*s} sig_0^+(v_1 - v_2) = C^* [v_1 - v_2]_+, \quad c \forall s \in (0, T), \end{aligned}$$

resulta la siguiente desigualdad

$$\int_{\Omega} [v_1(t) - v_2(t)]_+ dx \leq \int_{\Omega} [v_{0,1} - v_{0,2}]_+ dx - C^* \int_0^t \int_{\Omega} [v_1 - v_2]_+ dx ds +$$

$$+C^* \int_0^t \int_{\Omega} [v_1 - v_2]_+ dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} e^{-C^*s} |D_1 - D_2| dx ds, \quad c \forall t \in (0, T).$$

Sustituyendo los valores de  $v_1$  y  $v_2$  en la desigualdad anterior, se tiene que

$$\int_{\Omega} e^{-C^*t} [b(u_1) - b(u_2)]_+(t) dx \leq \int_{\Omega} [b(u_{0,1}) - b(u_{0,2})]_+ dx + \int_0^t \int_{\Omega} e^{-C^*s} |D_1 - D_2| dx ds,$$

$c \forall t \in (0, T)$ , de donde se deduce que,

$$\int_{\Omega} [b(u_1) - b(u_2)]_+(t) dx \leq e^{C^*t} \left( \int_{\Omega} [b(u_{0,1}) - b(u_{0,2})]_+ dx + \int_0^t \int_{\Omega} e^{-C^*s} |D_1 - D_2| dx ds \right),$$

$c \forall t \in (0, T)$ , y por tanto, se obtiene (3.49), es decir,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [b(u_1)(t) - b(u_2)(t)]_+ dx \leq \\ & \leq e^{C^*t} \left( \int_{\Omega} [b(u_{0,1}) - b(u_{0,2})]_+ dx + \int_0^t e^{-C^*s} \|D_1 - D_2\|_{L^1(\Omega)} ds \right), \quad c \forall t \in (0, T), \end{aligned}$$

que era el resultado buscado.  $\square$

**Corolario 3.12.** Sean  $u_1$  y  $u_2$ , soluciones de los problemas  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente. Supongamos que  $u_{0,1} \leq u_{0,2}$ ,  $c \forall x \in \Omega$ , y que  $D_1 = D_2$ , entonces  $u_1 \leq u_2$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ .

**Demostración:** Se deduce de modo inmediato a partir de (3.49).  $\square$

**Corolario 3.13. Resultado de unicidad de solución para el problema  $P(w_j)$ .** Sean  $w_1$  y  $w_2$ , soluciones del problema  $P(w_j)$  para los mismos datos, entonces

$$w_1(t, x) = w_2(t, x), \quad c \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

**Demostración:** Se deduce de (3.49), sin más que tener en cuenta que el problema  $P(w_j)$  satisface la generalidad considerada en la definición de los problemas  $P_i$ , y que por tanto, se le puede aplicar el resultado de comparación dado por el **teorema** 3.11. Tomando en dicho resultado,  $w_1 = u_1$ ,  $w_2 = u_2$ ,  $u_{0,1} = u_{0,2}$  y  $D_1 = D_2$ , se obtiene que  $w_1(t, x) = w_2(t, x)$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ .  $\square$

### 3.3. Convergencia del esquema iterativo.

Tras demostrar la existencia de soluciones de los problemas desacoplados, se procederá a la obtención del resultado principal de este capítulo, es decir, el teorema de existencia de soluciones débiles acotadas del modelo multívoco (sección 3.3.1).

**Teorema 3.12.** *Existe una única terna  $(w_j, h_j, \xi_j)$  solución débil del sistema  $S_j$ ,*

$$(S_j) := \left\{ \begin{array}{ll} w_j \geq \Phi, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t b(w_j) - (w_j)_{xx} - F_{j-1} p(b(w_j)) - D_{j-1} \geq 0, & \text{en } \Omega_T, \\ [\partial_t b(w_j) - (w_j)_{xx} - F_{j-1} p(b(w_j)) - D_{j-1}] (w - \Phi) = 0, & \text{en } \Omega_T, \\ h'_j = -M^{1/R} h_j^{-(R+1)/R} \left( \int_{\Omega} A_j(t, x) dx \right)^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t \xi_j = E_j(t) A_j(t, x), & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_x w_j(t, 0) = \partial_x w_j(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ w_j(0, x) = w_0(x), & x \in \Omega, \\ h_j(0, x) = h_0, & x \in \Omega, \\ \xi_j(0, x) = \xi_0, & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

**Demostración:** Es consecuencia directa de los **teoremas** 3.1, 3.3, 3.10 y del **corolario** 3.13.  $\square$

**Corolario 3.14.** *Existe una subsucesión de  $\{h_j\}$ , denotada de igual modo, que converge fuerte en la topología de  $C([0, T])$  a una función  $h$ .*

**Demostración:** La existencia de la función  $h$ , tal que  $h_j \rightarrow h$  en la topología de  $C([0, T])$ , se deduce del **corolario** 3.1.

**Corolario 3.15.** *La función  $h$ , mencionada en el **corolario** 3.14, límite de  $\{h_j\}$ , satisface que  $h \in V_h$  y viene dada por la identidad:*

$$h(t) = \left[ h_0^{(2R+1)/R} - [(2R+1)/R] M^{1/R} \int_0^t \left( \int_{\Omega} A(r, x) dx \right)^{-1/R} dr \right]^{R/(2R+1)}, \quad (3.55)$$

$\forall t \in [0, T]$ . Además, verifica las mismas propiedades de monotonía y positividad mencionadas en el **teorema** 3.1, para las funciones  $h_j$ .

**Demostración:** Es consecuencia de la elección de las constantes y del valor inicial (véase la **observación** 3.7), así como de los **corolarios** 3.8, 3.11, pues de ellos se deduce que  $A \geq (2\Phi)^{1/2} > 0$  y que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} A_j(r, x) dx = \int_{\Omega} A(r, x) dx, \quad c \forall r \in (0, T).$$

Por tanto,  $c \forall t \in (0, T)$ ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h_j(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[ h_0^{(2R+1)/R} - [(2R+1)/R] M^{1/R} \int_0^t \left( \int_{\Omega} A(r, x) dx \right)^{-1/R} dr \right]^{R/(2R+1)}. \quad (3.56)$$

Del **corolario** 3.14 (nótese, que se tiene que  $h \in C([0, T])$ ) y de (3.56), por la propiedad de unicidad del límite se obtiene la expresión (3.55). De (3.55), se deduce que  $h \geq m_h > 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . A partir de los **corolarios** 3.8, 3.11 y del **lema** 3.2, se obtiene que  $h'_j \rightarrow h'$  fuerte en  $L^p(0, T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , que

$$h' = -M^{1/R} h^{-(R+1)/R} \left( \int_{\Omega} A(r, x) dx \right)^{-1/R},$$

$h' \in L^\infty$  y que  $h' < 0$ ,  $c \forall t \in (0, T)$ .  $\square$

**Corolario 3.16.** *Las sucesiones <sup>4</sup>  $\{A_j\}$ ,  $\{B_j\}$ ,  $\{D_j\}$  y  $\{E_j\}$ , verifican los siguientes resultados de convergencia:*

- a)  $B_j \rightarrow B = (h|h'|)^{R+1}$ , fuerte en  $L^p(0, T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,
- b)  $E_j \rightarrow E = (h|h'|)^R$ , fuerte en  $L^p(0, T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,
- c)  $D_j \rightarrow D = \gamma - \delta/h$ , fuerte en  $C([0, T])$ ,
- d)  $D'_j \rightarrow D'$ , fuerte en  $L^p(0, T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,
- e)  $A_j E_j \rightarrow AE$ , fuerte en  $L^2(\Omega_T)$ .

Además  $B$ ,  $E$  y  $D$  satisfacen las hipótesis mencionadas en **H2**.

**Demostración:** Las convergencias citadas en a) – e), se deducen a partir de los **corolarios** 3.1, 3.2, 3.3, del **teorema** 3.4 y de la aplicación del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. En el caso concreto del producto  $A_j E_j$ , ha de tenerse en cuenta que, por el **corolario** 3.8,  $A_j$  converge fuerte en  $L^2(\Omega_T)$  a  $A$  y por el **corolario** 3.2,  $E_j$  converge fuerte en  $L^2(\Omega_T)$  a  $E$ . Y por tanto, el producto  $A_j E_j$  converge fuerte en  $L^2(\Omega_T)$ . El hecho de que  $B$ ,  $E$  y  $D$  satisfagan las hipótesis **H2** se debe a los **corolarios** 3.2, 3.3 (en los cuales se obtienen acotaciones uniformes en  $j \in \mathbb{N}$  de la norma de las funciones  $B_j$ ,  $E_j$ ,  $D_j$  y  $D'_j$  en el espacio  $L^\infty(0, T)$ ), a las convergencias fuertes a) – e), y al **corolario** 3.15, en el que se dice que  $h$  es una función positiva y decreciente.  $\square$

<sup>4</sup>En realidad, se trata de subsucesiones de las primitivas, lo que ocurre que se denotan del mismo modo para no complicar la notación.

**Corolario 3.17.** *Existe una subsucesión de  $\{\xi_j\}$ , que denotaremos del mismo modo, tal que  $\{\xi_j\}$  converge fuerte a una función  $\xi$ , en el espacio  $C([0, T]; L^p(\Omega))$ , para  $1 \leq p < \infty$ . La función  $\xi$  pertenece al espacio  $V_\xi$  y viene dada por*

$$\xi(t, x) = \xi_0 + \int_0^t A(x, s)E(s)ds, \quad c\forall t \in (0, T), c\forall x \in \Omega, \quad (3.57)$$

donde  $A$  y  $E$  son las funciones obtenidas en el **corolario 3.16**. Además,  $\xi$  es una función positiva y creciente respecto de  $t$ .

**Demostración:** De los **corolarios 3.2, 3.8 y 3.16** se deduce que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_j(t, x) = \xi_0 + \int_0^t A(x, s)E(s)ds, \quad c\forall t \in (0, T), c\forall x \in \Omega.$$

Por el **teorema 3.3**, se verifica que  $\xi_j \in L^\infty((0, T); W^{1,1}(\Omega))$ , su derivada temporal,  $\partial_t \xi_j$  satisface que  $\partial_t \xi_j \in L^\infty((0, T); L^1(\Omega))$  (en realidad se tiene que  $\partial_t \xi_j \in L^\infty(\Omega_T)$ , pero para demostrar el resultado es suficiente la regularidad considerada) y las acotaciones de tales funciones en dichos espacios son uniformes en  $j \in \mathbb{N}$ , por serlo las de las funciones  $A_j$  y  $E_j$ , como se deduce en los **corolarios 3.8, 3.11 y 3.2**. La acotación uniforme de  $\xi_j$  y  $\partial_t \xi_j$ , en los espacios mencionados, permite asegurar, como consecuencia de la aplicación de un resultado de compacidad debido a Simon (véase [102]), que existe una subsucesión de  $\{\xi_j\}$ , que será denotada del mismo modo, que converge fuerte a una función  $\xi$  en el espacio  $C([0, T]; L^p(\Omega))$ , para  $1 \leq p < \infty$  (nótese, que  $W^{1,1}(\Omega)$  tiene inclusión compacta en  $L^p(\Omega)$  para  $1 \leq p < \infty$ , que  $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  y que además, la regularidad en tiempo, tanto de  $\xi_j$ , como de  $\partial_t \xi_j$  (en los respectivos espacios funcionales en  $\Omega$ ), es  $L^\infty$ ).

Así pues, por la propiedad de unicidad del límite, se tiene que  $\xi$  verifica (3.57), es decir,

$$\xi(t, x) = \xi_0 + \int_0^t A(x, s)E(s)ds, \quad c\forall t \in (0, T), c\forall x \in \Omega.$$

A partir de la regularidad de las funciones  $A$  y  $E$  (véanse los **corolarios 3.11 y 3.16**) se deduce, de modo inmediato que  $\xi \in V_\xi$  y las propiedades de monotonía y signo de  $\xi$  (positividad y crecimiento respecto de  $t$ ).  $\square$

**Corolario 3.18.** *Existe una subsucesión de  $\{C_j\}$ , que denotaremos igual, tal que*

$$C_j \rightarrow C = (h|h'|)^R \xi^{-1/2}, \quad \text{fuerte en } L^p(\Omega_T), 1 \leq p < \infty,$$

y por tanto,  $C$ , satisface las hipótesis mencionadas en **H2**. Además,

$$F_j = B_j - C_j \rightarrow F = B - C, \quad \text{fuerte en } L^p(\Omega_T), 1 \leq p < \infty.$$

En particular,  $F_j \rightarrow F$ , fuerte en  $L^2(\Omega_T)$  y  $F$  satisface las hipótesis mencionadas en **H2**.

**Demostración:** Es consecuencia de los **corolarios** 3.4, 3.14, 3.15 y 3.17.  $\square$

**Lema 3.20.** *Existe una subsucesión de  $\{w_j\}$ , que se denotará igual, tal que,*

- a)  $w_j \rightharpoonup w$ , en  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,
- b)  $\partial_t b(w_j) \rightharpoonup \partial_t b(w)$ , en  $L^2(\Omega_T)$ ,
- c)  $w_j \rightarrow w$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ ,
- d)  $w(t) \in \mathbb{K}$ ,  $c \forall t \in [0, T]$ ,
- e)  $p(b(w_j)) \rightarrow p(b(w))$ , en  $L^2(\Omega_T)$ ,
- f)  $F_j \cdot p(b(w_j)) \rightharpoonup F \cdot p(b(w))$ , en  $L^2(\Omega_T)$ .

Existen unas constantes positivas,  $C_{E1}$  y  $C_{E2}$ , tales que,

$$\sup \text{ess}_{\{0 < t < T\}} \int_{\Omega} S(w(t)) + \int_0^T \int_{\Omega} |w_x|^2 \leq C_{E1} \quad y \quad (3.58)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t b(w)|^2 + (1/2) \int_{\Omega} |w_x|^2(t) \leq C_{E2}, \quad c \forall t \in (0, T). \quad (3.59)$$

Además,

$$w \in V_w \doteq \{\eta : \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}) \cap L^\infty(\Omega_T), \partial_t b(\eta) \in L^2(\Omega_T)\}.$$

**Demostración:** Del **lema** 3.16, se deduce (puesto que en las estimaciones *a priori*, (3.46) y (3.40), las cotas no dependen de  $j$ ) que

- $\{\|w_j\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}\}$  está uniformemente acotada respecto de  $j$ ,
- $\{\|\partial_t b(w_j)\|_{L^2(\Omega_T)}\}$  está uniformemente acotada respecto de  $j$ ,
- $w_j(t) \in \mathbb{K}$ ,  $c \forall t \in [0, T]$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ .

Por tanto, existe una subsucesión de  $\{w_j\}$ , que se denotará igual, tal que,

$$w_j \rightharpoonup w \quad \text{en} \quad L^2(0, T; H^1(\Omega)) \quad y \quad \partial_t b(w_j) \rightharpoonup \partial_t b(w) \quad \text{en} \quad L^2(\Omega_T).$$

Por otro lado, por el **corolario** 3.6 se tiene que la sucesión  $\{\|w_j\|_{L^\infty(\Omega_T)}\}$  está uniformemente acotada por la constante  $W$ . Las convergencias mencionadas en a)–d) se obtienen como consecuencia de las consideraciones anteriores. Las estimaciones

(3.58) y (3.59) se obtienen tras tomar el límite respecto de  $j$  en las estimaciones de la energía citadas en el **lema** 3.16. Nótese, que basta tener en cuenta las convergencias a)–d) y la definición de la función  $S$  (véase la **definición** 3.6).

De las consideraciones anteriores, se obtiene, de modo inmediato, que

$$w \in V_w \doteq \{\eta : \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}) \cap L^\infty(\Omega_T), \partial_t b(\eta) \in L^2(\Omega_T)\}.$$

Respecto a la convergencia afirmada en e), recuérdese que  $p(b(x)) = (2x)^{1/2}$  (véase la **definición** 3.6) y que por tanto, resulta evidente que si se tiene la convergencia a) entonces se tiene e). Para obtener la convergencia dada en f), basta recordar que  $F_j \rightarrow F$  en  $L^2(\Omega_T)$  por el **corolario** 3.18 y la convergencia dada por e), ya que así, el producto  $F_j \cdot p(b(w_j))$  convergerá a  $F \cdot p(b(w))$  en  $L^2(\Omega_T)$ , que era el resultado buscado.  $\square$

**Lema 3.21.** *La función  $w$  obtenida en el lema 3.20 verifica:*

1.

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(w) \cdot \nu + \int_0^T \int_\Omega [b(w) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu = 0, \quad (3.60)$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tal que } \nu(T, \cdot) = 0,$$

2.

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(w)(\eta - w) + \int_0^T \int_\Omega w_x(\eta - w)_x \geq \int_0^T \int_\Omega [F \cdot p(b(w)) + D](\eta - w),$$

$$\forall \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}).$$

**Demostración:** De los resultados y convergencias citados en los **corolarios** 3.16, 3.18 y el **lema** 3.20 y razonando de modo análogo a como se hizo en la demostración del **lema** 3.7, en lo que se refiere a la verificación de la identidad (3.60), se tiene que al tomar el límite  $n \rightarrow \infty$  en

1.

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t b(w_j) \cdot \nu + \int_0^T \int_\Omega [b(w_j) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu = 0,$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tal que } \nu(T, \cdot) = 0,$$



2.

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w_j)(\eta - w_j) + \int_0^T \int_{\Omega} (w_j)_x (\eta - w_j)_x \geq \int_0^T \int_{\Omega} [F_{j-1} \cdot p(b(w_j)) + D_{j-1}](\eta - w_j),$$

$$\forall \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}),$$

resultan las identidades buscadas, es decir,

1.

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w) \cdot \nu + \int_0^T \int_{\Omega} [b(w) - b(w_0)] \cdot \partial_t \nu = 0,$$

$$\forall \nu \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \text{tal que } \nu(T, \cdot) = 0,$$

2.

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t b(w)(\eta - w) + \int_0^T \int_{\Omega} w_x (\eta - w)_x \geq \int_0^T \int_{\Omega} [F \cdot p(b(w)) + D](\eta - w),$$

$$\forall \eta \in L^2(0, T; \mathbb{K}).$$

□

**Corolario 3.19.** *La función coeficiente  $A$  satisface las hipótesis mencionadas en H2.*

**Demostración:** Es consecuencia directa del **corolario** 3.11 y del **lema** 3.20. □

### 3.3.1. Existencia de soluciones débiles acotadas.

**Teorema 3.13.** **Existencia de (al menos) una solución para el sistema  $(S)$ .** *La terna de funciones  $(w, h, \xi)$ , obtenida de los **corolarios** 3.15, 3.16 y los **lemas** 3.20 y 3.21, verifica las condiciones de solución débil de  $(S)$ , dada en la **definición** 3.7.*

**Demostración:** El hecho de que la terna  $(w, h, \xi)$ , verifique la **definición** 3.7, es consecuencia directa de los **corolarios** 3.15, 3.16, 3.17 y de los **lemas** 3.20 y 3.21. Por tanto, dicha terna es solución débil de  $(S)$ , en el sentido dado por la **definición** 3.7. □

### 3.3.2. Regularidad de las magnitudes físicas.

**Lema 3.22.** *Sea  $(w, h, \xi) \in V$ , una terna solución del sistema (S), entonces las funciones coeficientes  $A, B, C, D, E$  y  $F$ , definidas en función de  $w, h$  y  $\xi$ , dadas en la **definición 3.6**, verifican las hipótesis de regularidad, signo y monotonía mencionadas en **H2**.*

**Demostración:** Es consecuencia de los **corolarios 3.16, 3.18 y 3.19**.  $\square$

**Lema 3.23.** *Sea  $(w, h, \xi) \in V$ , una terna solución del sistema (S), entonces:*

- 1) *El flujo de agua,  $Q + \bar{Q} = (2w)^{2/3}$  (donde  $\bar{Q}$  representa la pequeña cantidad de agua debida a la cizalla), es una variable no negativa y acotada que es continua respecto de la coordenada longitudinal  $t$ , pero que puede presentar discontinuidades respecto de la coordenada transversal  $x$ .*
- 2) *El espesor de hielo,  $h$ , es una función continua, positiva, decreciente y sólo depende de la variable longitudinal,  $t$ . Su pendiente es acotada.*
- 3) *La variable  $\xi$ , velocidad acumulada, es una función continua, positiva y monótona creciente respecto de la coordenada longitudinal  $t$ .*
- 4) *La cizalla (esfuerzos viscosos) representada por la variable  $\tau = h|h'|$  es una función que sólo depende de la variable  $t$ , es positiva y acotada.*
- 5) *La parte del término de balance de calor que sólo depende de la coordenada longitudinal,  $t$ , y que engloba al flujo de calor geotérmico y al enfriamiento conductivo, está representado por la función  $D$  y por tanto, es continuo y decreciente. Su signo dependerá de los valores de los parámetros  $\gamma, \delta$  y de la condición inicial  $h_0$ .*
- 6) *La parte del término de balance de calor, que depende de ambas coordenadas, la longitudinal,  $t$ , y la transversal,  $x$ , y que engloba al calor de fricción (disipación viscosa), dado por  $\tau u = B p(b(w))$  y al enfriamiento convectivo, dado por  $-u\xi^{-1/2} = -C p(b(w))$ , es un término acotado y sin signo predefinido.*

**Demostración:** Los resultados anteriores se deducen de las **definiciones 3.5, 3.6** y de las hipótesis **H1** y **H2**.  $\square$

# Capítulo 4

## Análisis numérico del modelo multívoco.

Una vez demostrada en el capítulo anterior la existencia de solución para el sistema ( $S$ ), dada por una terna de funciones  $(w, h, \xi)$  y obtenida su regularidad, se procederá a la resolución numérica de dicho sistema.

Los resultados obtenidos mediante el análisis matemático, realizado en el capítulo tercero, serán complementados con los resultados numéricos presentados en este cuarto capítulo (algunos resultados preliminares pueden ser consultados en [87], en [88] y en [89]). De este modo, tras la realización de un análisis completo (matemático y numérico) del sistema ( $S$ ) se estará en disposición de validar el modelo multívoco.

La existencia de solución para el sistema ( $S$ ), demostrada mediante el análisis matemático realizado, justifica el análisis numérico y además, los resultados obtenidos acerca de la regularidad de la solución<sup>1</sup>, permiten realizar una elección adecuada de los métodos a emplear en la resolución numérica. Concretamente, el tratamiento numérico del sistema ( $S$ ) se basará en un esquema de discretización respecto de la coordenada longitudinal  $t$ , que permitirá un desacoplamiento de las ecuaciones en cada etapa asociada a dicha discretización. Los problemas desacoplados, uno para cada una de las variables, en una etapa  $m$ -ésima genérica serán resueltos en este orden: primero, se resuelve el problema relativo a la variable  $w$  (empleando los valores de  $h$  y  $\xi$  obtenidos en la etapa  $(m-1)$ -ésima), luego se pasa a resolver el problema para  $h$ , el espesor (donde se utiliza el valor de  $w$  en la etapa actual) y por último, se resuelve el problema para la variable  $\xi$ , velocidad acumulada.

---

<sup>1</sup>Recuérdese la **definición** 3.5 donde se ofrece la definición del espacio de soluciones  $V$  (soluciones entendidas en el sentido débil dado por la **definición** 3.7).

Recordamos que el sistema  $(S)$ , correspondiente a la formulación de complementariedad asociada al modelo multívoco, viene dado por las siguientes ecuaciones (acopladas) en derivadas parciales para las variables  $w$ ,  $h$  y  $\xi$ , complementadas con las correspondientes condiciones de contorno e iniciales:

$$(S) := \left\{ \begin{array}{ll} w \geq \Phi, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t b(w) - w_{xx} - f(\xi, h, h', w) \geq 0, & \text{en } \Omega_T, \\ [\partial_t b(w) - w_{xx} - f(\xi, h, h', w)] (w - \Phi) = 0, & \text{en } \Omega_T, \\ h' = -M^{1/R} h^{-(R+1)/R} \left[ \int_{\Omega} (2w)^{1/2} dx \right]^{-1/R}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_t \xi = (h|h'|)^R (2w)^{1/2}, & \text{en } \Omega_T, \\ \partial_x w(t, 0) = \partial_x w(t, L) = 0, & \text{en } t \in (0, T), \\ w(0, x) = w_0(x), & \text{en } x \in \Omega, \\ h(0, x) = h_0, & \text{en } x \in \Omega, \\ \xi(0, x) = \xi_0, & \text{en } x \in \Omega, \end{array} \right.$$

donde  $R > 1$ ,  $b(w) = (2w)^{3/2}$ , el grafo maximal monótono  $\beta$  está definido por

$$\beta(r) = \emptyset \quad \text{si } r < 0, \quad \beta(0) = (-\infty, 0] \quad \text{y} \quad \beta(r) = 0 \quad \text{si } r > 0, \quad (4.1)$$

y el término de balance de calor viene dado por

$$f(\xi, h, h', w) = (h|h'|)^R \left( h|h'| - \xi^{-1/2} \right) (2w)^{1/2} + \gamma - \delta h^{-1}. \quad (4.2)$$

La resolución numérica del problema de obstáculo asociado a la variable  $w$  se llevará a cabo mediante diferentes esquemas numéricos, para posteriormente, realizar una comparación de los resultados obtenidos con cada uno de ellos. Los esquemas empleados se basan en un método de elementos finitos (recuérdese la regularidad de la variable  $w$ ) y diferentes métodos para tratar este problema de obstáculo, concretamente se utilizarán el método de Gauss Seidel con proyección (véanse por ejemplo [62] y [25]) y diferentes métodos basados en el algoritmo de dualidad de Bermúdez-Moreno (véase [11]).

La resolución numérica del problema para el espesor, consistente en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con un término integral no local, se realizará mediante el esquema de Taylor de orden dos y una fórmula de cuadratura gaussiana (véase [22]). Por último, para el problema de la variable  $\xi$  se empleará un método de Euler.

Para las simulaciones numéricas se ha considerado un dominio de integración que trata de reflejar la geometría de la Siple Coast y se han empleado datos relativos a mediciones realizadas en esta zona, para poder así, contrastar los resultados numéricos, con los datos experimentales. Los resultados numéricos obtenidos ilustran que el modelo multívoco es capaz de reproducir la generación de corrientes de hielo rápidas. De dichos resultados se podrán deducir interesantes propiedades cualitativas de las variables físicas. También se realizará una interpretación física de los resultados numéricos, que ayudará a comprender los mecanismos de inestabilidad que operan en la dinámica no lineal del flujo del hielo de las corrientes de hielo rápidas.

## 4.1. Resolución numérica del sistema.

El proceso de resolución está basado fundamentalmente en tres etapas: en la primera, se discretiza el sistema ( $S$ ) respecto de la variable  $t$ , en la segunda, se realiza un esquema de desacoplamiento de las ecuaciones y en la tercera, se resuelven por separado cada uno de los tres problemas desacoplados obtenidos, uno para cada variable. A continuación, se detallan las etapas de las que consta el esquema de resolución.

### Etapa 1: Discretización temporal.

Sea  $\delta t$  el paso de discretización temporal considerado. Por simplicidad, se asumirá que  $T/\delta t$  es un entero positivo, donde se recuerda que  $t = T$  localiza el margen. El operador derivada parcial  $\partial_t$  es aproximado por el operador en diferencias regresivas asociado al paso de discretización  $\delta t$ , es decir, se consideran las aproximaciones

$$\partial_t w(s, \cdot) \approx (w(s, \cdot) - w(s - \delta t, \cdot))/\delta t, \quad h'(s) \approx (h(s) - h(s - \delta t))/\delta t,$$

$$\partial_t \xi(s, \cdot) \approx (\xi(s, \cdot) - \xi(s - \delta t, \cdot))/\delta t.$$

Para  $m = 0, 1, \dots, T/\delta t$ , se consideran las etapas  $t_m = m\delta t$  y para cada etapa  $t_m$  se definen las funciones  $w_m(x)$ ,  $h_m(x)$  y  $\xi_m(x)$  como sigue

$$w_m(x) = w(t_m, x), \quad h_m(x) = h(t_m, x), \quad \xi_m(x) = \xi(t_m, x), \quad \text{con } x \in \Omega.$$

Se asumirá que las funciones  $w_0(x)$ ,  $h_0(x)$  y  $\xi_0(x)$  vienen dadas por las condiciones iniciales prescritas en (S).

### Etapa 2: Desacoplamiento iterativo.

En cada etapa  $t_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, T/\delta t$ , se considerarán tres problemas desacoplados, uno para cada una de las variables. La resolución en la etapa  $m$ -ésima se realiza del siguiente modo: supuestos conocidos los valores de  $w_{m-1}$ ,  $h_{m-1}$  y  $\xi_{m-1}$ , correspondientes a la etapa  $(m-1)$ -ésima, primero se resuelve el problema para  $w_m$  donde se utilizan los valores de  $h_{m-1}$  y  $\xi_{m-1}$  para aproximar el término fuente; una vez que se tiene  $w_m$ , se pasa a resolver el problema para  $h_m$  utilizando  $w_m$ , y por último, se actualiza  $\xi_m$  empleando los valores obtenidos para  $w_m$  y  $h_m$ .

### Etapa 3: Problemas desacoplados.

A continuación, se presentan los problemas desacoplados que se resuelven para cada una de las variables en una etapa  $m$ -ésima genérica.

#### Problema para $w_m$ :

Dadas  $w_{m-1}$ ,  $h_{m-1}$  y  $\xi_{m-1}$ , determinar  $w_m$  tal que:

$$P_w^m := \begin{cases} w_m \geq \Phi, & \text{en } x \in \Omega, \\ 3\sqrt{2}w_{m-1}^{1/2} \left( \frac{w_m - w_{m-1}}{\delta t} \right) - (w_m)_{xx} - f_m^\sigma \geq 0, & \text{en } x \in \Omega, \\ \left[ 3\sqrt{2}w_{m-1}^{1/2} \left( \frac{w_m - w_{m-1}}{\delta t} \right) - (w_m)_{xx} - f_m^\sigma \right] (w_m - \Phi) = 0, & \text{en } x \in \Omega, \\ \partial_x w_m(0) = \partial_x w_m(L) = 0, \end{cases}$$

donde  $\Phi$  es el valor constante y positivo del obstáculo (véase la **observación 3.6**), el término  $3\sqrt{2}w_{m-1}^{1/2} (w_m - w_{m-1}) / \delta t$ , es la aproximación considerada para el término  $\partial_t b(w)$  que aparece en el sistema (S). El término fuente  $f_m^\sigma$  viene dado por

$$f_m^\sigma = (B_{m-1} - C_{m-1}) [\sigma A(w_m) + (1 - \sigma)A(w_{m-1})] + D_{m-1}, \quad (4.3)$$

donde consideraremos que el parámetro  $\sigma$  toma valores en el conjunto  $\{0, 1\}$ , la función  $A$  es  $A(z) = (2z)^{1/2}$  y el resto de funciones coeficientes están definidas como sigue:

$$B_{m-1} = (h_{m-1}|h'_{m-1}|)^{R+1}, \quad C_{m-1} = (h_{m-1}|h'_{m-1}|)^R \xi_{m-1}^{-1/2} \quad \text{y} \quad D_{m-1} = \gamma - \delta h_{m-1}^{-1}.$$

Nótese, que para  $\sigma = 0$ , el término fuente queda evaluado en la etapa  $(m - 1)$ -ésima, mientras que para  $\sigma = 1$ , en el término fuente aparece la no linealidad en la variable  $w_m$ , dada por el término  $A(w_m)$ .

Para aproximar la solución del problema de obstáculo unilateral  $P_w^m$  se considerará el conjunto convexo  $\mathbb{K}$  definido por

$$\mathbb{K} = \{w \in H^1(\Omega) / w \geq \Phi, \quad c \forall x \in \Omega\}. \quad (4.4)$$

Nótese, que la regularidad <sup>2</sup> obtenida en el capítulo tercero para la variable  $w$ , en particular, el hecho de que  $w(t, \cdot) \in H^1(\Omega)$ ,  $c \forall t \in (0, T)$  y  $w(t, x) \geq \Phi$ ,  $c \forall (t, x) \in \Omega_T$ , permite justificar la consideración de tal conjunto.

A continuación, se detalla el tipo de métodos adecuados a este tipo de problemas, que van a ser empleados. El problema asociado al caso  $\sigma = 0$ , en el cual, el término de balance queda evaluado en la etapa de discretización anterior, se resolverá de dos modos distintos: con el método de Gauss-Seidel con proyección (sobre el convexo  $\mathbb{K}$ ; véase [62]) y mediante un algoritmo de dualidad (véase [11]) con un multiplicador (asociado a la función indicatriz del convexo  $\mathbb{K}$ ). Para el caso  $\sigma = 1$ , en el cual, el término de balance presenta una no linealidad en la variable del problema, es decir, en  $w_m$ , se utilizarán dos tipos de procedimiento distintos: un algoritmo de dualidad con un multiplicador (asociado a la función indicatriz del convexo  $\mathbb{K}$ ) combinado con el método de Newton (para resolver la no linealidad en  $w_m$  dada por el término  $A(w_m)$ ), y un algoritmo de dualidad con dos multiplicadores, uno asociado a la función indicatriz del conjunto convexo  $\mathbb{K}$  y otro asociado a la no linealidad  $A(w_m)$  que aparece en el término fuente.

Posteriormente, se realizará una comparación de los resultados obtenidos mediante los diferentes métodos. El tipo de técnicas de resolución que se acaban de enumerar, ya han sido empleadas en [24], [25], [26] y [27], donde se tratan problemas de frontera libre que surgen al modelar fenómenos relativos a la dinámica no lineal del flujo del hielo.

Pasemos ahora al cálculo del espesor

**Problema para  $h_m$ :**

*Dadas  $w_m$  y  $h_{m-1}$ , determinar  $h_m$  tal que:*

$$h_m = h_{m-1} - (C_1 + C_2)h_{m-1}^{-(R+1)/R}(\delta t) + [(R + 1)/2R]C_1h_{m-1}^{-(R+3)/R}(\delta t)^2, \quad (4.5)$$

---

<sup>2</sup>Recuérdese que  $w(t, \cdot) \in \mathbb{K}$ ,  $c \forall t \in (0, T)$ , donde  $\mathbb{K}$  aquí hace alusión al conjunto dado en la definición 3.4.

donde  $C_1 = (M/I_{m-1})^{1/R}$ ,  $C_2 = ((M/I_m)^{1/R} - (M/I_{m-1})^{1/R})/2$ , y las constantes  $I_{m-1}$  e  $I_m$  son los valores obtenidos al aproximar mediante la fórmula de cuadratura gaussiana para un soporte de cinco puntos los términos integrales no locales asociados a  $w_{m-1}$  y  $w_m$  respectivamente, es decir,

$$I_{m-1} \approx \int_{\Omega} (2w_{m-1})^{1/2} dx, \quad I_m \approx \int_{\Omega} (2w_m)^{1/2} dx.$$

La ecuación (4.5) resulta de aplicar a la ecuación diferencial que se tenía en  $(S)_4$  para el espesor de hielo, el esquema de Taylor de orden dos.

### Problema para $\xi_m$ :

Dadas  $h_m$  y  $w_m$ , determinar  $\xi_m$  tal que:

$$\xi_m = \xi_{m-1} + (\delta t)(h_m |h'_m|)^R (2w_m)^{1/2} = \xi_{m-1} + (\delta t) M I_m^{-1} h_m^{-1} (2w_m)^{1/2}. \quad (4.6)$$

A continuación se detallan los distintos métodos de resolución utilizados para resolver el problema  $P_w^m$ .

## 4.2. Método de Gauss-Seidel con proyección.

Se comenzará resolviendo el sistema asociado al problema  $P_w^m$  para el caso  $\sigma = 0$ . Para ello, primero se discretizará el problema respecto de la variable  $x$ , mediante elementos finitos de Lagrange  $\mathbf{P}_1$  y posteriormente para resolver el sistema obtenido como consecuencia de tal discretización, se empleará el método de Gauss-Seidel con proyección.

### 4.2.1. Formulación débil del problema asociado al flujo de agua.

Para resolver el problema de complementariedad  $P_w^m$  se considerará el espacio  $H^1(\Omega)$  y el conjunto convexo  $\mathcal{K}$  definido en (4.4). De ahora en adelante se utilizará la siguiente notación  $c := 3\sqrt{2}/\delta t$ .

**Definición 4.1.** Se dirá que  $w_m \in \mathcal{K}$  es solución débil del problema  $P_w^m$  si se verifica la siguiente inecuación variacional:

$$c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} w_m (\eta - w_m) dx + \int_{\Omega} (w_m)_x (\eta - w_m)_x dx \geq$$



$$\geq c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} (\eta - w_m) dx + \int_{\Omega} f_m^{\sigma} (\eta - w_m) dx, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega).$$

**Observación 4.1.** *La relación entre las inecuaciones variacionales elípticas, los problemas de complementariedad elípticos y los problemas de obstáculo pueden verse en [18]. La idea básica es que las tres formulaciones admiten las mismas soluciones y por tanto, son equivalentes.*

Para discretizar en la variable  $x$ , se emplean elementos finitos lineales a trozos sobre una malla uniforme de paso  $k$  en  $\bar{\Omega} = [0, L]$ , denotada por  $\mathbf{T}_k$ . De este modo, el problema discretizado se formula como sigue:

Encontrar  $(w_m)_k \in \mathbb{K}_k$  tal que

$$\begin{aligned} & c \int_{\Omega} (w_{m-1})_k^{1/2} (w_m)_k \phi dx + \int_{\Omega} ((w_m)_k)_x \phi_x dx \geq \\ & \geq c \int_{\Omega} (w_{m-1})_k^{3/2} \phi dx + \int_{\Omega} f_m^{\sigma} \phi dx, \quad \forall \phi \in V_k, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde

$$V_k = \{\phi \in C([0, L]) : \phi|_E \in P_1, \forall E \in \mathbf{T}_k\}, \quad \mathbb{K}_k = \{\phi \in V_k : \phi \geq \Phi\}$$

y  $E$  denota un intervalo estándar.

### 4.2.2. Esquema de resolución.

Para resolver (4.7) por el método de Gauss-Seidel con proyección sobre el convexo  $\mathbb{K}$ , se consideran las siguientes etapas:

**Etapas 1.** Se consideran los elementos finitos de Lagrange  $\mathbf{P}_1$  (polinomios lineales a trozos) asociados a la malla  $\mathbf{T}_k$ , que denotaremos por  $\{\psi_i, i = 1, \dots, (N+1)\}$ , donde  $(N+1)$  es el número de nodos. En concreto, los polinomios  $\psi_i$  son los siguientes:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{k} & \text{si } x \in [0, x_2], \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

$$\text{para } i = 2, \dots, N, \quad \psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{k} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{k} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

$$\psi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{k} & \text{si } x \in [x_N, L], \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

donde  $x_i$ ,  $i=1,\dots,(N+1)$ , denotan los nodos de la malla uniforme  $\mathbf{T}_k$ . La expresión de  $(w_m)_k$  respecto de la base de polinomios  $\{\psi_i, i = 1, \dots, (N+1)\}$  es

$$(w_m)_k = \sum_1^{N+1} w_{m,i} \psi_i, \quad (4.8)$$

donde  $\{w_{m,i}, i = 1, \dots, (N+1)\}$  son las aproximaciones en los nodos  $(w_m)_k$ .

**Observación 4.2.** *La componente  $i$ -ésima de un vector  $\mathbf{v}$  será denotada del modo siguiente,  $\mathbf{v}_i$ . En el caso de que el vector presente subíndices, para denotar una componente genérica, se utilizará un subíndice que se colocará en último lugar, con respecto a los que ya tuviera dicho vector. Para denotar cada uno de los elementos de una matriz  $\mathbf{M}$ , también se empleará la notación de subíndices. De este modo,  $\mathbf{M}_{i,j}$ , denota el elemento situado en la fila  $i$ , columna  $j$ . Al igual que en el caso de los vectores, si la matriz presentase subíndices, para denotar un elemento genérico se utilizarán dos subíndices, que se colocarán a continuación de los que ya tuviera dicha matriz.*

**Etapas 2.** El problema dado por (4.7), tras la discretización descrita en la etapa anterior, se ha reducido a determinar los valores  $\{w_{m,i}, i = 1, \dots, (N+1)\}$ , ya que conocidos estos, se conoce la solución aproximada  $(w_m)_k$  dada por (4.8). Para ello, se reemplaza sucesivamente en (4.7) (considerando la igualdad) la función arbitraria  $\phi \in V_k$  por las distintas funciones  $\psi_i$  y se utiliza la fórmula del trapecio para aproximar el valor de las integrales. Este proceso conduce a la obtención de un sistema de ecuaciones tridiagonal para las incógnitas  $\{w_{m,i}, i = 1, \dots, (N+1)\}$ , cuya expresión matricial es la siguiente,  $\mathbf{M}w = \mathbf{b}$ , donde la matriz de coeficientes  $\mathbf{M} = (m_{i,j})$  es una matriz tridiagonal en la cual:

- los elementos de la subdiagonal son:  $m_{i-1,i} = -1/k, \quad i = 2, \dots, (N+1),$

- los elementos de la diagonal son:

$$m_{1,1} = (c/2)kw_{m-1,1}^{1/2} + 1/k, \quad m_{N+1,N+1} = (c/2)kw_{m-1,N+1}^{1/2} + 1/k,$$

$$m_{i,i} = ckw_{m-1,i}^{1/2} + 2/k, \quad i = 2, \dots, N,$$

- y los elementos de la superdiagonal son:  $m_{i,i+1} = -1/k, \quad i = 1, \dots, N.$

El vector de términos independientes  $\mathbf{b}$  viene dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= (cw_{m-1,1}^{3/2} + f_{m,1}^0)k/2, & \mathbf{b}_{N+1} &= (cw_{m-1,N+1}^{3/2} + f_{m,N+1}^0)k/2, \\ \mathbf{b}_i &= (cw_{m-1,i}^{3/2} + f_{m,i}^0)k, & i &= 2, \dots, N.\end{aligned}$$

El sistema se resuelve con el método de Gauss-Seidel con proyección sobre el conjunto convexo  $\mathcal{K}$  definido en (4.4). El esquema de resolución se basa en el esquema iterativo que se detalla a continuación:

- Se fija un valor máximo permitido, que se denotará por  $tol$ , para el error relativo entre los resultados obtenidos para dos iteraciones consecutivas.
- Se parte de un valor  $w_m^0$  inicial tomado como aproximación de la solución. Por ejemplo, puede tomarse el valor obtenido para  $w_{m-1}$ .
- Para  $j = 1, 2, \dots, J$ , donde  $J$  será determinado posteriormente, se considera el esquema de cálculo

$$w_{m,i}^j = P \left[ \left( w_{m,i}^{j-1} - \left( \sum_{l < i} m_{i,l} w_{m,l}^j + \sum_{l > i} m_{i,l} w_{m,l}^{j-1} \right) + \mathbf{b}_i \right) m_{i,i}^{-1} \right],$$

donde el superíndice  $j$  hace referencia a la iteración y el operador  $P$ , es el operador proyección sobre el convexo  $\mathcal{K}$ , es decir,

$$P[u_i] = \max\{u_i, \Phi\}.$$

- Se itera en el esquema anterior hasta que obtenerse un valor de  $j$ , que se denota por  $j = J$ , para el cual

$$\frac{\|w_m^J - w_m^{J-1}\|_\infty}{\|w_m^J\|_\infty} \leq tol,$$

y se toma el vector  $w_m^J$  como vector solución aproximada  $w_m$ .

### 4.3. Algoritmo de dualidad con un multiplicador.

En esta sección, se describe el algoritmo de dualidad para tratar el problema de obstáculo  $P_w^m$ . Para ello, se considerará la formulación variacional correspondiente a  $P_w^m$ , expresada en términos de la función indicatriz  $I_{\mathcal{K}}$  del convexo  $\mathcal{K}$ . La formulación en términos de  $I_{\mathcal{K}}$  es la siguiente:

Encontrar  $w_m \in \mathcal{K}$  tal que

$$c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} w_m (\eta - w_m) dx + \int_{\Omega} (w_m)_x (\eta - w_m)_x dx + I_{\mathcal{K}}(\eta) - I_{\mathcal{K}}(w_m) \geq$$

$$\geq c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} (\eta - w_m) dx + \int_{\Omega} f_m^0 (\eta - w_m) dx, \forall \eta \in H^1(\Omega), \quad (4.9)$$

donde se recuerda que  $f_m^\sigma = (B_{m-1} - C_{m-1})[\sigma A(w_m) + (1 - \sigma)A(w_{m-1})] + D_{m-1}$  (véase (4.3)) y por tanto, para  $\sigma = 0$ ,  $f_m^0 = (B_{m-1} - C_{m-1})A(w_{m-1}) + D_{m-1}$ .

Aplicando resultados del cálculo subdiferencial a la función convexa  $I_{\mathbb{K}}$ , podemos escribir la inecuación anterior de la forma siguiente:

$$\mu_m = -(\mathbf{A}(w_m) - F_m^0) \in \partial I_{\mathbb{K}}(w_m),$$

donde  $\partial I_{\mathbb{K}}(u)$  denota la subdiferencial de  $I_{\mathbb{K}}$  en  $u$ ; el operador  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}),$$

( $\mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R})$  denota el conjunto de las aplicaciones lineales definidas en  $H^1(\Omega)$ ) viene dado por

$$(\mathbf{A}(\phi), \psi) = c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} \phi \psi dx + \int_{\Omega} \phi_x \psi_x dx, \quad \psi \in H^1(\Omega)$$

y  $F_m^0 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R})$  es la aplicación dada por

$$(F_m^0, \psi) = c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} \psi dx + \int_{\Omega} f_m^0 \psi dx, \quad \psi \in H^1(\Omega).$$

Por tanto, se tiene el siguiente problema equivalente a (4.9),

*Encontrar  $w_m \in \mathbb{K}$  tal que*

$$c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} w_m \psi + \int_{\Omega} \mu_m \psi dx + \int_{\Omega} (w_m)_x \psi_x dx - c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} \psi dx = \int_{\Omega} f_m^0 \psi dx, \\ \forall \psi \in H^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \mu_m \in \partial I_{\mathbb{K}}(w_m).$$

El método propuesto por Bermúdez-Moreno en [11], introduce una nueva incógnita  $q_m$ , definida términos del parámetro positivo  $\omega$ , por

$$q_m + \omega w_m = \mu_m \in \partial I_{\mathbb{K}}(w_m).$$

El problema anterior se escribe en función de esta nueva variable del modo siguiente,

*Encontrar  $w_m \in \mathbb{K}$  tal que*

$$c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} w_m \psi + \int_{\Omega} (q_m + \omega w_m) \psi dx + \int_{\Omega} (w_m)_x \psi_x dx = \\ = c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} \psi dx + \int_{\Omega} f_m^0 \psi dx,$$

para toda  $\psi \in H^1(\Omega)$ , donde  $q_m \in \partial I_{\mathbb{K}}(w_m) - \omega w_m$ .

Dado que  $\partial I_{\mathbb{K}}$  es un operador maximal monótono, se tiene la siguiente equivalencia (demostrada en [11]),

$$q_m \in \partial I_{\mathbb{K}}(w_m) - \omega w_m \iff q_m = (\partial I_{\mathbb{K}})_\lambda^\omega [w_m + \lambda q_m],$$

donde  $(\partial I_{\mathbb{K}})_\lambda^\omega$  es la aproximación Yosida del operador  $(\partial I_{\mathbb{K}} - \omega I)$  con parámetro  $\lambda > 0$ .

Para discretizar en la variable  $x$ , se emplean elementos finitos lineales a trozos sobre una malla uniforme de paso  $k$  en  $[0, L]$ , denotada por  $\mathbf{T}_k$ . El problema discretizado es, *Encontrar  $(w_m)_k \in \mathbb{K}_k$  tal que*

$$\begin{aligned} c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} (w_m)_k \psi dx + \omega \int_{\Omega} (w_m)_k \psi dx + \int_{\Omega} ((w_m)_k)_x \psi_x dx = \\ = - \int_{\Omega} (q_m)_k \psi dx + c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} \psi dx + \int_{\Omega} f_m^0 \psi dx, \end{aligned}$$

para toda  $\psi \in V_k$ .

La formulación anterior se resolverá mediante el siguiente esquema iterativo en  $j$ :

1. Primero se inicializa  $(w_m)_k^0$ . Por ejemplo se puede tomar el valor obtenido para  $(w_{m-1})_k$ .
2. Dado  $(w_m)_k^j$ , se calcula  $(w_m)_k^{j+1} \in V_k$ , solución del problema:

*Encontrar  $(w_m)_k^{j+1}$  tal que*

$$\begin{aligned} c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} (w_m)_k^{j+1} \psi dx + \omega \int_{\Omega} (w_m)_k^{j+1} \psi dx + \int_{\Omega} ((w_m)_k^{j+1})_x \psi_x dx = \\ = - \int_{\Omega} (q_m)_k^j \psi dx + c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} \psi dx + \int_{\Omega} f_m^\sigma \psi dx, \forall \psi \in V_k, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde  $\sigma = 0$  y la actualización del multiplicador se realiza mediante la ecuación:

$$(q_m)_k^{j+1} = (\partial I_{\mathbb{K}})_\lambda^\omega \left[ (w_m)_k^{j+1} + \lambda (q_m)_k^j \right]. \quad (4.11)$$

En la implementación realizada para calcular (4.11), se utilizará una relajación de parámetro  $\nu \in [0, 1]$ , es decir, en realidad se tendrá que:

$$(q_m)_k^{j+1} = \nu (\partial I_{\mathbb{K}})_\lambda^\omega \left[ (w_m)_k^{j+1} + \lambda (q_m)_k^j \right] + (1 - \nu) (q_m)_k^j. \quad (4.12)$$

La convergencia del método de dualidad se obtiene con  $\omega\lambda = 0,5$ . Para una elección de parámetros  $\omega\lambda = 0,5$ , la aproximación Yosida resulta ser

$$(\partial I_{\mathbb{K}})_{\frac{1}{2\omega}}^{\omega}(r) = \begin{cases} -2\omega r, & \text{si } r \geq \frac{\Phi}{2}, \\ 2\omega(r - \Phi), & \text{si } r < \frac{\Phi}{2}. \end{cases}$$

En el caso  $\sigma = 0$ , el problema (4.10) es lineal. El sistema de ecuaciones obtenido tras la aplicación de la fórmula del trapecio en los términos integrales que aparecen en (4.10), cuando se considera una discretización mediante elementos finitos  $\mathbf{P}_1$ , viene dado por la siguiente expresión matricial:  $M_{mr}W_m^{j+1} = S_m^j$ , donde  $W_m^{j+1}$  es el vector cuyas componentes son las incógnitas (valores nodales de  $(w_m)_k^{j+1}$ ),  $M_{mr}$  es la matriz de masa-rigidez y  $S_m^j$  es el vector de términos independientes. La matriz de masa-rigidez  $M_{mr}$ , es una matriz tridiagonal tal que:

- los elementos de la subdiagonal son:  $M_{mr,i-1,i} = -1/k$ ,  $i = 2, \dots, (N + 1)$ ,
- los elementos de la diagonal son:

$$M_{mr,1,1} = (1/k) + (k/2)(\omega + cw_{m-1,1}^{1/2}),$$

$$M_{mr,i,i} = (2/k) + k(\omega + cw_{m-1,i}^{1/2}), \quad i = 2, \dots, N,$$

$$M_{mr,N+1,N+1} = (1/k) + (k/2)(\omega + cw_{m-1,N+1}^{1/2}),$$

- y los elementos de la superdiagonal son:  $M_{mr,i,i+1} = -1/k$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

El vector término derecho  $S_m^j$  viene dado por las componentes:

$$S_{m,1}^j = (k/2) \left[ f_{m,1}^0 - (q_{m,1})_k^j + cw_{m-1,1}^{3/2} \right],$$

$$S_{m,i}^j = k \left[ f_{m,i}^0 - (q_{m,i})_k^j + cw_{m-1,i}^{3/2} \right], \quad i = 2, \dots, N,$$

$$S_{m,N+1}^j = (k/2) \left[ f_{m,N+1}^0 - (q_{m,N+1})_k^j + cw_{m-1,N+1}^{3/2} \right].$$

### 4.3.1. Cálculo de la aproximación Yosida de la subdiferencial.

Sea  $\mathbb{K}$  el convexo definido en (4.4). Sea  $I_{\mathbb{K}}$ , la función indicatriz del convexo  $\mathbb{K}$ . Se define  $\mathbb{K}_\lambda^\omega$  por

$$\mathbb{K}_\lambda^\omega(x) = (\partial I_{\mathbb{K}})_\lambda^\omega(x) = \frac{1}{1 - \lambda\omega} \mathbb{K}_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) - \omega\bar{x},$$

donde  $\bar{x} = \frac{1}{1 - \omega\lambda} x$ ,  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{1 - \omega}$  y

$$\mathbb{K}_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = \frac{\bar{x} - P_{\mathbb{K}}(\bar{x})}{\bar{\lambda}} = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{x} \geq \Phi, \\ \frac{\bar{x} - \Phi}{\bar{\lambda}}, & \text{si } \bar{x} < \Phi. \end{cases}$$

Entonces,

$$\mathbb{K}_\lambda^\omega(x) = \frac{1}{1 - \lambda\omega} \frac{\bar{x} - P_{\mathbb{K}}(\bar{x})}{\bar{\lambda}} - \omega\bar{x} = \begin{cases} -\omega\bar{x}, & \text{si } \bar{x} \geq \Phi, \\ \frac{\bar{x} - \Phi}{(1 - \lambda\omega)\bar{\lambda}} - \omega\bar{x}, & \text{si } \bar{x} < \Phi. \end{cases}$$

Puesto que, para asegurar la convergencia del algoritmo de dualidad, se toman  $\lambda$  y  $\omega$  satisfaciendo la relación,  $\lambda\omega = 0,5$ , resulta que  $\bar{x} = 2x$  y  $\bar{\lambda} = 2\lambda = 1/\omega$ . Sustituyendo estos valores en la expresión obtenida anteriormente para  $\mathbb{K}_\lambda^\omega$ , se llega a la siguiente expresión para  $(\partial I_{\mathbb{K}})_{\frac{1}{2\omega}}^\omega$ ,

$$(\partial I_{\mathbb{K}})_{\frac{1}{2\omega}}^\omega(r) = \begin{cases} -2\omega r, & \text{si } r \geq \frac{\Phi}{2}, \\ 2\omega(r - \Phi), & \text{si } r < \frac{\Phi}{2}. \end{cases}$$

#### 4.4. Algoritmo de dualidad con un multiplicador y el método de Newton.

Para resolver el problema (4.10) en el caso  $\sigma = 1$ , es decir, con el segundo miembro totalmente implícito, tenemos en cuenta que el término de balance térmico viene dado por

$$f_m^1 = (B_{m-1} - C_{m-1})A((w_m)_k^{j+1}) + D_{m-1}.$$

Se trata pues de un término no lineal que resolvemos con el método iterativo de Newton. A continuación, se presenta con mayor detalle el esquema de resolución empleado en este caso.

El problema (4.10) se aproxima por el sistema de ecuaciones no lineales siguiente:

$$\vec{F}_{j+1}(W_{m+1}^{j+1}) = \vec{0}, \quad \text{donde}$$

$$\vec{F}_{j+1}(W_m^{j+1}) = M_{B_M} W_m^{j+1} - \theta \vec{b} M_m G(W_m^{j+1}) - (1 - \theta) \vec{b} M_m G(W_m^j) - \vec{s} M_m. \quad (4.13)$$

En (4.13) se ha suprimido el subíndice  $k$  (asociado a la discretización espacial) para simplificar la notación. Se recuerda que el superíndice  $j$  hace referencia a la iteración del algoritmo de dualidad en el que nos encontramos, el subíndice  $m$  hace referencia a la etapa desacoplamiento iterativo (nivel respecto de la coordenada temporal  $t$ ) y  $\theta \in [0, 1]$  es un parámetro de relajación. Las matrices y vectores que aparecen en la ecuación vectorial son definidos a continuación.

La matriz de masa,  $M_{B_M} = (M_{B_M,i,j})$  es una matriz tridiagonal, donde:

- los elementos de la subdiagonal son:  $M_{B_M,i-1,i} = -1/k$ ,  $i = 2, \dots, (N + 1)$ ,
- los elementos de la diagonal son:
  - $M_{B_M,1,1} = (k/2)(cw_{m-1,1}^{1/2} + \omega) + 1/k$ ,
  - $M_{B_M,i,i} = k(cw_{m-1,i}^{1/2} + \omega) + 2/k$ ,  $i = 2, \dots, N$
  - $M_{B_M,N+1,N+1} = (k/2)(cw_{m-1,N+1}^{1/2} + \omega) + 1/k$ , donde  $c = 3\sqrt{2}/\delta t$ ,
- los elementos de la superdiagonal son:  $M_{B_M,i,i+1} = -1/k$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

La matriz de rigidez,  $M_m = (M_{m,i,j})$ , es una matriz diagonal. La diagonal está definida por:

$$M_{m,1,1} = k/2, \quad M_{m,i,i} = k, \quad i = 2, \dots, N, \quad \text{y} \quad M_{m,N+1,N+1} = k/2.$$

El vector  $\vec{b}$ , es el vector de componentes:

$$\vec{b}_i = B_{m-1,i} - C_{m-1,i} = (h_{m-1,i} | h'_{m-1,i} |)^R (h_{m-1,i} | h'_{m-1,i} | - \xi_{m-1,i}^{-1/2}).$$

El vector  $W_m^{j+1}$  viene dado por  $W_m^{j+1}(i) = w_{m,i}^{j+1}$ , y el vector  $W_m^j$  es el vector obtenido en la etapa iterativa  $j$ -ésima (del esquema del algoritmo de dualidad) y por tanto, de componentes  $W_m^j(i) = w_{m,i}^j$ .

El vector  $G(W_m^{j+1})$ , es el vector de componentes  $G(W_m^{j+1}) = (2w_{m,i}^{j+1})^{1/2}$ , y el vector  $G(W_m^j)$  se define análogamente. Y por último, el vector  $\vec{s}$  tiene por componentes:

$$\vec{s}_i = \gamma - \delta h_{m-1,i}^{-1} - (q_{m,i})^j - cw_{m-1,i}^{3/2}.$$

El esquema iterativo de resolución para el sistema no lineal (4.13) es el siguiente:

- Paso 0: inicializar  $(W_m)_0 = (W_m^{j+1})_0$ . Por ejemplo, se puede tomar  $W_m^j$ .



- Paso  $(s + 1)$ : calcular  $(W_m^{j+1})_{(s+1)}$  resolviendo el sistema lineal

$$D\vec{F}((W_m^{j+1})_s)(W_m^{j+1})_{(s+1)} = D\vec{F}((W_m^{j+1})_s)(W_m^{j+1})_s - \vec{F}((W_m^{j+1})_s),$$

donde  $D\vec{F}$  denota la matriz jacobiana de la función vectorial  $\vec{F}$ .

Este esquema se itera en  $s$ , hasta alcanzar la tolerancia establecida para el error relativo entre los resultados obtenidos para dos iteraciones consecutivas. Una vez conseguida la tolerancia considerada, se toma la solución obtenida en la última iteración como valor aproximado de  $W_m^{j+1}$ .

## 4.5. Algoritmo de dualidad con dos multiplicadores.

En esta sección, se resolverá el problema (4.3) para el caso  $\sigma = 1$ , mediante el algoritmo de dualidad con dos multiplicadores, uno asociado a la subdiferencial de la función indicatriz del convexo  $\mathbb{K}$  y otro asociado a la no linealidad representada por el término  $A(w_m) = (2w_m)^{1/2}$ . Para ello se introducen las variables:

$$\mu_{m,1} \in \partial I_{\mathbb{K}}(w_m), \quad \text{y} \quad \mu_{m,2} = \Lambda(w_m),$$

donde la primera está asociada a la subdiferencial de la función indicatriz del conjunto convexo  $\mathbb{K}$  y la segunda asociada a la no linealidad dada por la función  $A(v) = \sqrt{2}|v|^{-1/2}v$ . El problema a resolver, expresado en términos de  $\mu_{m,1}$  y  $\mu_{m,2}$  resulta ser:

*Encontrar  $w_m \in \mathbb{K}$  tal que*

$$\begin{aligned} c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} w_m \psi + \int_{\Omega} \mu_{m,1} \psi dx + \int_{\Omega} (w_m)_x \psi_x dx &= c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} \psi dx + \\ + \int_{\Omega} (B_{m-1} - C_{m-1}) \mu_{m,2} \psi dx + \int_{\Omega} D_{m-1} \psi dx, & \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.14)$$

La aplicación de un algoritmo de dualidad para resolver este problema, sugiere considerar dos nuevas incógnitas (multiplicadores),  $q_{m,1}$  y  $q_{m,2}$ , definidas en términos de los parámetros positivos,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , como sigue

$$q_{m,1} \in \partial I_{\mathbb{K}}(w_m) - \omega_1 w_m \quad \text{y} \quad q_{m,2} = A(w_m) - \omega_2 w_m.$$

La formulación equivalente para el problema (4.14), expresada en función de las dos nuevas incógnitas,  $q_{m,1}$  y  $q_{m,2}$ , y los parámetros,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , es la siguiente:

*Encontrar  $w_m \in \mathbb{K}$  tal que*

$$c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} w_m \psi + \int_{\Omega} (q_{m,1} + \omega_1 w_m) \psi dx + \int_{\Omega} (w_m)_x \psi_x dx = c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} \psi dx +$$

$$+ \int_{\Omega} (B_{m-1} - C_{m-1})(q_{m,2} + \omega_2 w_m) \psi dx + \int_{\Omega} D_{m-1} \psi dx, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (4.15)$$

Puesto que  $\partial I_{\mathbb{K}}$  y  $A$  son operadores maximales monótonos, las siguientes condiciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} q_{m,1} \in \partial I_{\mathbb{K}}(w_m) - \omega_1 w_m &\iff q_{m,1} = (\partial I_{\mathbb{K}})_{\lambda_1}^{\omega_1} [w_m + \lambda_1 q_{m,1}], \\ q_{m,2} = A(w_m) - \omega_2 w_m &\iff q_{m,2} = A_{\lambda_2}^{\omega_2} [w_m + \lambda_2 q_{m,2}], \end{aligned}$$

donde las funciones  $(\partial I_{\mathbb{K}})_{\lambda_1}^{\omega_1}$  y  $A_{\lambda_2}^{\omega_2}$  son las aproximaciones Yosida de los operadores  $(\partial I_{\mathbb{K}} - \omega_1 I)$  y  $(A - \omega_2 I)$  con parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente. El problema discretizado mediante elementos finitos  $\mathbf{P}_1$  en la malla  $\mathbf{T}_k$ , es el siguiente:

Encontrar  $(w_m)_k \in \mathbb{K}_k$  tal que

$$\begin{aligned} &c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} (w_m)_k \psi dx + \omega_1 \int_{\Omega} (w_m)_k \psi + \int_{\Omega} ((w_m)_k)_x \psi_x dx - \\ &-\omega_2 \int_{\Omega} (B_{m-1} - C_{m-1})(w_m)_k \psi dx = - \int_{\Omega} (q_{m,1})_k \psi dx + c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} \psi dx + \\ &+ \int_{\Omega} (B_{m-1} - C_{m-1})(q_{m,2})_k \psi dx + \int_{\Omega} D_{m-1} \psi dx, \quad \forall \psi \in V_k. \end{aligned}$$

Para resolver el problema anterior, se considera el siguiente algoritmo:

1. Primero se inicializa  $(w_m)_k^0$ . Por ejemplo se puede tomar el valor obtenido para  $(w_{m-1})_k$ .
2. Dado  $(w_m)_k^j$ , se calcula  $(w_m)_k^{j+1} \in V_k$ , solución del problema lineal

$$\begin{aligned} &c \int_{\Omega} w_{m-1}^{1/2} (w_m)_k^{j+1} \psi dx + \omega_1 \int_{\Omega} (w_m)_k^{j+1} \psi + \int_{\Omega} ((w_m)_k^{j+1})_x \psi_x dx - \\ &-\omega_2 \int_{\Omega} (B_{m-1} - C_{m-1})(w_m)_k^{j+1} \psi dx = - \int_{\Omega} (q_{m,1})_k^j \psi dx + c \int_{\Omega} w_{m-1}^{3/2} \psi dx + \\ &+ \int_{\Omega} (B_{m-1} - C_{m-1})(q_{m,2})_k^j \psi dx + \int_{\Omega} D_{m-1} \psi dx, \quad \forall \psi \in V_k. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Los multiplicadores se actualizan mediante los siguientes esquemas:

$$\begin{aligned} (q_{m,1})_k^{j+1} &= \nu (\partial I_{\mathbb{K}})_{\lambda_1}^{\omega_1} [(w_m)_k^{j+1} + \lambda_1 (q_{m,1})_k^j] + (1 - \nu) (q_{m,1})_k^j, \\ (q_{m,2})_k^{j+1} &= \nu A_{\lambda_2}^{\omega_2} [(w_m)_k^{j+1} + \lambda_2 (q_{m,2})_k^j] + (1 - \nu) (q_{m,2})_k^j, \end{aligned}$$

donde  $\nu \in [0, 1]$  es un parámetro de relajación.

El método anterior converge para parámetros que verifiquen las relaciones  $\omega_1\lambda_1 = 0,5$  y  $\omega_2\lambda_2 = 0,5$ . Para parámetros satisfaciendo dichas relaciones, las aproximaciones Yosida están definidas por:

$$(\partial I_{\mathbb{K}})^{\frac{\omega_1}{2\omega_1}}(r) = \begin{cases} -2\omega_1 r, & \text{si } r \geq \frac{\Phi}{2}, \\ 2\omega_1(r - \Phi), & \text{si } r < \frac{\Phi}{2}. \end{cases}$$

$$A^{\frac{\omega_2}{2\omega_2}}(r) = \begin{cases} 2\omega_2 r - 2\omega_2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2\omega_2} + \sqrt{2r + \frac{1}{2\omega_2^2}} \right)^2, & \text{si } r \geq 0, \\ 2\omega_2 r + 2\omega_2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2\omega_2} + \sqrt{-2r + \frac{1}{2\omega_2^2}} \right)^2, & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones que resulta tras aplicar la fórmula del trapecio en los términos integrales que aparecen en (4.16), cuando se consideran los polinomios base asociados a la discretización mediante elementos finitos  $\mathbf{P}_1$ , viene dado por la siguiente expresión matricial:  $M_{mr}W_m^{j+1} = S_m^j$ , donde  $W_m^{j+1}$  es el vector cuyas componentes son las incógnitas (valores nodales de  $(w_m)_k^{j+1}$ ),  $M_{mr}$  es la matriz de masa/rigidez y  $S_m^j$  es el vector de términos independientes. La matriz de coeficientes (de masa/rigidez),  $M_{mr}$ , es una matriz tridiagonal, en la cual,

- los elementos de la subdiagonal son:

$$M_{mr,i-1,i} = -1/k, \quad i = 2, \dots, (N + 1),$$

- los elementos de la diagonal son:

$$M_{mr,1,1} = (1/k) + (k/2) \left[ \omega_1 - \omega_2(B_{m-1,1} - C_{m-1,1}) + cw_{m-1,1}^{1/2} \right],$$

$$M_{mr,i,i} = (2/k) + k \left[ \omega_1 - \omega_2(B_{m-1,i} - C_{m-1,i}) + cw_{m-1,i}^{1/2} \right], \quad i = 2, \dots, N,$$

$$M_{mr,N+1,N+1} = (1/k) + (k/2) \left[ \omega_1 - \omega_2(B_{m-1,N+1} - C_{m-1,N+1}) + cw_{m-1,N+1}^{1/2} \right],$$

- los elementos de la superdiagonal son:

$$M_{mr,i,i+1} = -1/k, \quad i = 1, \dots, N.$$

El vector término derecho  $S_m^j$  viene dado por las componentes:

$$S_{m,1}^j = (k/2)[f_{m,1}^0 - (q_{m,1,1})_k^j + (q_{m,2,1})_k^j(B_{m-1,1} - C_{m-1,1}) + cw_{m-1,1}^{3/2}],$$

$$S_{m,i}^j = k[f_{m,i}^0 - (q_{m,1,i})_k^j + (q_{m,2,i})_k^j(B_{m-1,i} - C_{m-1,i}) + cw_{m-1,i}^{3/2}], \quad i = 2, \dots, N,$$

$$S_{m,N+1}^j = (k/2)[f_{m,N+1}^0 - (q_{m,1,N+1})_k^j + (q_{m,2,N+1})_k^j(B_{m-1,N+1} - C_{m-1,N+1}) + cw_{m-1,N+1}^{3/2}].$$

### 4.5.1. Cálculo de las aproximaciones Yosida.

Puesto que la aproximación Yosida  $(\partial I_{\mathcal{K}})^{\frac{\omega_1}{2\omega_1}}$  ya ha sido calculada en la sección (4.3.1), en esta sección sólo calcularemos la expresión de  $A^{\frac{\omega_2}{2\omega_2}}$ . Se utilizará la notación  $\omega_2 = \omega$ . La aplicación  $A$  se define como

$$A(v) = \sqrt{2}|v|^{-1/2}v = \frac{\sqrt{2}v}{|v|^{1/2}} = \begin{cases} \sqrt{2}v, & \text{si } v > 0, \\ -\sqrt{-2v}, & \text{si } v \leq 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$(A - \omega I)(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x^{1/2} - \omega x, & \text{si } x > 0, \\ -\sqrt{2}(-x)^{1/2} - \omega x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Se considera el operador:

$$A_{\bar{\lambda}}^{\omega}(x) = \frac{1}{1 - \omega\bar{\lambda}} A_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) - \omega\bar{x}, \quad \text{donde } \bar{x} = \frac{1}{1 - \omega\bar{\lambda}}x \quad \text{y} \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{1 - \omega}.$$

Para determinar la expresión de  $A_{\bar{\lambda}}^{\omega}$  en función de  $x$  y de  $\omega$ , es preciso calcular  $A_{\bar{\lambda}}(\bar{x})$ , dado por la expresión

$$A_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = \frac{I - J_{\bar{\lambda}}(\bar{x})}{\bar{\lambda}}, \quad \text{donde } J_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = (I + \bar{\lambda}A)^{-1}(\bar{x}).$$

Sea  $\bar{y} = J_{\bar{\lambda}}(\bar{x})$ . Entonces,

$$\bar{y} = (I + \bar{\lambda}A)^{-1}(\bar{x}) \iff \bar{x} = (I + \bar{\lambda}A)(\bar{y}),$$

de donde,

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{y} + \sqrt{2\bar{\lambda}}\bar{y}^{1/2}, & \text{si } \bar{y} \geq 0, \\ \bar{x} = \bar{y} - \sqrt{2\bar{\lambda}}(-\bar{y})^{1/2}, & \text{si } \bar{y} < 0. \end{cases}$$

Para realizar el estudio de la expresión anterior, se distinguirán los casos:  $\bar{y} \geq 0$  y  $\bar{y} < 0$ .

1. Caso  $\bar{y} \geq 0$ .

$$\bar{x} = \bar{y} + \sqrt{2\bar{\lambda}}\bar{y}^{1/2} \iff \bar{x} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^2 = \bar{y} + \sqrt{2\bar{\lambda}}\bar{y}^{1/2} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^2,$$

de donde,

$$\bar{x} + \frac{1}{2}\lambda^2 = \left( \bar{y}^{1/2} + \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{2}} \right)^2,$$

es decir,

$$\bar{y}^{1/2} + \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{2}} = +\sqrt{\bar{x} + \frac{\lambda^2}{2}} \iff \bar{y} = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\lambda} + \sqrt{\bar{x} + \frac{\lambda^2}{2}} \right)^2.$$

2. Caso  $\bar{y} < 0$ .

$$\bar{x} = \bar{y} - \sqrt{2}\bar{\lambda}(-\bar{y})^{1/2} \iff -\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^2 = ((-\bar{y})^{1/2})^2 + \sqrt{2}\bar{\lambda}(-\bar{y})^{1/2} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^2,$$

de donde,

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \bar{x} = \left( (-\bar{y})^{1/2} + \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{2}} \right)^2,$$

es decir,

$$(-\bar{y})^{1/2} + \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{2}} = +\sqrt{-\bar{x} + \frac{\lambda^2}{2}} \iff \bar{y} = -\left( -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\lambda} + \sqrt{-\bar{x} + \frac{\lambda^2}{2}} \right)^2.$$

De los cálculos anteriores, se deduce que

$$J_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = \begin{cases} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\lambda} + \sqrt{\bar{x} + \frac{\lambda^2}{2}} \right)^2, & \text{si } \bar{x} \geq 0 \\ -\left( -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\lambda} + \sqrt{-\bar{x} + \frac{\lambda^2}{2}} \right)^2, & \text{si } \bar{x} < 0, \end{cases}$$

y en consecuencia,

$$A_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{\bar{x} - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\lambda} + \sqrt{\bar{x} + \frac{\lambda^2}{2}} \right)^2}{\bar{\lambda}}, & \text{si } \bar{x} \geq 0 \\ \frac{\bar{x} + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\lambda} + \sqrt{-\bar{x} + \frac{\lambda^2}{2}} \right)^2}{\bar{\lambda}}, & \text{si } \bar{x} < 0. \end{cases}$$

Puesto que  $\lambda\omega = 0,5$ ,  $\bar{x} = 2x$  y  $\bar{\lambda} = 2\lambda = \frac{1}{\omega}$ , resulta que

$$A_{\frac{1}{2\omega}}^{\omega}(x) = 2A_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) - \omega\bar{x} = \begin{cases} \frac{2x - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2\omega} + \sqrt{2x + \frac{1}{2\omega^2}} \right)^2}{\frac{1}{2\omega}}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{2x + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2\omega} + \sqrt{-2x + \frac{1}{2\omega^2}} \right)^2}{\frac{1}{2\omega}}, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

y por tanto,

$$A_{\frac{1}{2\omega}}^{\omega}(r) = \begin{cases} 2\omega r - 2\omega \left( -\frac{\sqrt{2}}{2\omega} + \sqrt{2r + \frac{1}{2\omega^2}} \right)^2 & \text{si } r \geq 0, \\ 2\omega r + 2\omega \left( -\frac{\sqrt{2}}{2\omega} + \sqrt{-2r + \frac{1}{2\omega^2}} \right)^2 & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

## 4.6. Simulación numérica.

En esta sección se presentarán los resultados numéricos obtenidos mediante los métodos presentados en secciones anteriores, es decir, para el caso  $\sigma = 0$ , los métodos de Gauss Seidel con proyección y el algoritmo de dualidad con un multiplicador y para el caso  $\sigma = 1$ , los algoritmos de dualidad con un multiplicador combinado con el método de Newton y el de dualidad con dos multiplicadores. Puesto que los resultados obtenidos para los distintos métodos de resolución van a ser tanto cualitativa como cuantitativamente similares, como se verá posteriormente, sólo se hará una interpretación física de los resultados obtenidos mediante el método de Gauss Seidel con proyección.

Las magnitudes físicas de las cuales se ofrecerán resultados serán, no sólo de las asociadas a las variables del sistema ( $S$ ), es decir,  $h$ , espesor de hielo,  $\xi$ , velocidad acumulada y

$$Q = (2w)^{3/2} - \bar{Q}, \quad \text{flujo de agua asociado al deslizamiento,} \quad (4.17)$$

sino también de las siguientes (obtenidas a partir de las anteriores):

1.  $\tau = h|h'|$ , la cizalla, (balance de fuerzas),
  2.  $u = (h|h'|)^R(2w)^{1/2}$ , la velocidad del hielo, (ley de deslizamiento),
  3.  $N = (2w)^{-1/2}$ , la presión efectiva, (ley de drenaje),
  4.  $q = u\xi^{-1/2} + \delta h^{-1}$ , el enfriamiento (convectivo y conductivo),
  5.  $f = \gamma + \tau u - q$ , el balance de calor basal.
- (4.18)

Los resultados obtenidos para las distintas magnitudes serán mostrados mediante figuras, a partir de las cuales, por un lado, se podrá obtener una rápida visión del comportamiento cualitativo y cuantitativo de las mismas, y por otro, se podrán comparar fácilmente los resultados obtenidos para los distintos métodos de resolución numérica. También se ofrecerán unas tablas, en las que se podrá apreciar el rango de valores de las distintas variables (magnitudes físicas), según los distintos métodos. Para ilustrar, con mayor detalle, las diferencias (cualitativas y cuantitativas) en el comportamiento de dichas magnitudes físicas, según nos situemos en una zona con

un régimen de flujo lento o en una de rápido, se mostrarán figuras correspondientes a los valores de las mismas en dos secciones (en la dirección principal de flujo), una localizada en una zona donde aparece una corriente y otra localizada en una zona en la que no. Además mostraremos dos figuras, que aunque no se corresponden con los valores numéricos de ninguna de las variables físicas, sí que ayudan a la comprensión del fenómeno. Concretamente, nos referimos a los resultados que aparecen en la figura 4.6, pues permiten localizar por un lado la *frontera libre* (transición base polar/temperada; véase la **definición** 3.1), y por otro, las zonas en las cuales hay un enfriamiento basal y aquellas en las que hay un calentamiento.

Las escalas utilizadas, representativas del régimen de flujo rápido de las corrientes de hielo y adecuadas a un régimen térmico basal temperado, son las mismas que las presentadas en el capítulo 2, sección 2, puesto que su elección se basa en datos experimentales y constantes físicas.

A continuación se recuerdan sus valores:

$$[x] \sim 50 \text{ km}, \quad [t] \sim 400 \text{ km}, \quad [h] \sim 775 \text{ m}, \quad [u] \sim 500 \text{ ma}^{-1},$$

$$[w] = [Q] \sim 1 \text{ m}^3\text{s}^{-1}, \quad [\tau] \sim 0,15 \text{ bares}, \quad [N] \sim 0,4 \text{ bares}, \quad [q] \sim 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ bares ms}^{-1}.$$

El dominio considerado simula la geometría de la Siple Coast y es análogo al utilizado para la integración del sistema ( $S_F$ ) mediante un método de diferencias finitas. Se trata de un dominio rectangular uniforme, de dimensión  $T \cdot L$ , donde  $L = 20$  (equivale a 1000 km). El *ice-divide* queda representado por  $t = 0$ , y el valor  $t = T$  representa una sección de control o margen (denominado en la bibliografía *grounding line*), situado entre la Siple Coast y la plataforma del mar de Ross. La imposición de esta sección de control se debe a razones físicas, pues una vez traspasada ésta, el manto de hielo deja de deslizar sobre la plataforma continental y pasa a flotar en el mar, con lo cual las ecuaciones ya no son válidas por ser otra la física del problema. Por tanto, la computación debe finalizar antes de alcanzar el valor del espesor de hielo medido en el margen. Para tener en cuenta esta consideración, se introduce una condición de parada en el programa. Cuando el valor adimensional de la variable espesor es  $h \approx 0,6$ , que equivale (dimensionalmente) a un espesor  $h \approx 465 \text{ m}$ , valor aproximado del espesor (medido experimentalmente) en el margen, la computación se detiene. El valor de  $t$ , para el cual se verifica que  $h(t) \approx 0,6$ , es denotado por  $t = T$  y localiza el margen. El valor de  $T$ , varía en función de los datos iniciales y valores paramétricos. En las simulaciones numéricas de las cuales se presentarán los resultados,  $T$  tomará un valor adimensional aproximado de 2,1 (es decir, aproximadamente 840 km).

Se recuerda que el flujo principal tiene lugar en la dirección de la coordenada longitudinal, representada por la coordenada  $t$ .

El valor del exponente  $R$  será  $R = r^{-1} = 2$  (donde  $r$  es uno de los exponentes de la reología de Boulton e Hindmarsh que aparece en la ley de deslizamiento asumida en el modelo), los valores paramétricos considerados, asociados respectivamente al flujo de calor geotérmico y al término de enfriamiento conductivo, son  $\gamma = 0,19$  y  $\delta = 0,38$ . Los valores de las constantes,  $M$ , flujo inicial de hielo y  $\bar{Q}$ , flujo de agua residual, son los siguientes:  $M = 1,0$  y  $\bar{Q} = 7,2 \cdot 10^{-12}$ .

La elección de estos valores paramétricos se basa, por un lado, en los rangos de valores obtenidos mediante el análisis adimensional, del cual se deduce que:

$$\delta = \left( \frac{\pi k l}{\rho_i c_p [u] [h]^2} \right)^{1/2} \approx 0,36, \quad \gamma = \frac{G}{[u] [\tau]} \approx 0,2.$$

y por otro lado, en el análisis y comparación, desde los puntos de vista cuantitativos y cualitativos (obtención de valores para la velocidad y el flujo de agua mayores, adelanto o retraso de la zona de inicio de las corrientes, etc.), de resultados obtenidos con distintos valores de dichos parámetros. Se recuerda, que en la exposición de los resultados obtenidos en la resolución del modelo de Fowler y Johnson, ya se comentó el efecto que tiene en los resultados, el aumentar o disminuir los valores de los parámetros  $\gamma$  y  $\delta$ .

Las condiciones iniciales para la variable  $h$  (espesor de hielo) y para la variable  $\xi$  (velocidad acumulada), son las mismas que las que se consideraron en la resolución del modelo de Fowler y Johnson, es decir, valores constantes para el espesor de hielo y la velocidad acumulada:  $h_0 = 2,2$  (un espesor inicial de aproximadamente 1705 m) y  $\xi_0 = 0,1$ . El valor inicial del flujo de agua,  $Q_0$ , trata de reproducir los valores medidos en las corrientes de hielo de la Siple Coast. Se consideran cinco zonas con un flujo inicial de agua mayor (que estarían relacionadas con la posterior aparición de las cinco corrientes de la Siple Coast), y se le da a una de ellas (que sería la correspondiente a la corriente B o de Whillans) unos valores relativamente superiores que a las otras cuatro restantes (recuérdense los comentarios realizados acerca de las características de las corrientes de la Siple Coast, en la sección tercera del capítulo primero). La expresión analítica de  $Q_0$  es la siguiente:

$$Q_0(x) = \epsilon_1 + \epsilon_2 \max \left\{ \text{sen} \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi x}{2} \right), 0 \right\}, \quad (4.19)$$

con  $x \in [0, L]$ , (donde  $L = 20$ ),  $\epsilon_1 = 0,05$  y donde  $\epsilon_2$  toma los siguientes valores:



$$\epsilon_2 = \begin{cases} 0,08, & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ 0,09, & \text{si } 4 < x \leq 8, \\ 0,08, & \text{si } 8 < x \leq 12, \\ 0,105, & \text{si } 12 < x \leq 16, \\ 0,08, & \text{si } 16 < x \leq 20. \end{cases}$$

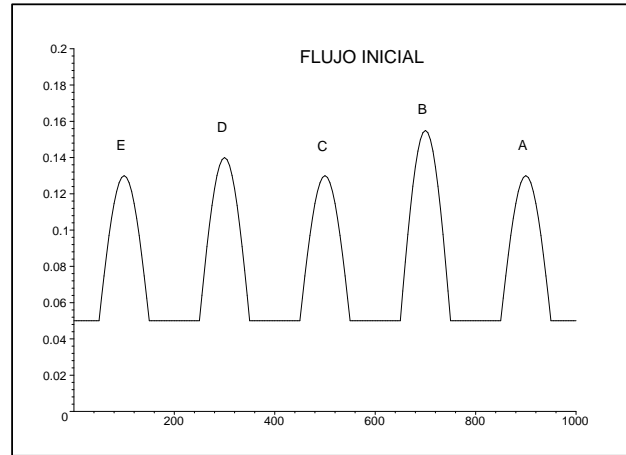


Figura 4.1: Flujo de agua inicial ( $Q_0$ ) para el modelo multívoco.

**Observación 4.3.** *Nótese, que las corrientes (véase la figura 1.3) se enumeran de derecha a izquierda, es decir, la corriente A es la situada más a la derecha y el resto la siguen. De este modo, la corriente B, que es la que se desea destacar, aparece localizada en el intervalo  $12 < x \leq 16$ , de ahí, que en dicho intervalo se prescriba un valor inicial mayor para el flujo de agua.*

Obsérvese, que en el sistema que se resuelve numéricamente, es decir, ( $S$ ), aparece la variable  $w$ , en vez de la variable  $Q$  y que por tanto, deberá tenerse en cuenta la relación  $w = (1/2)(Q + \bar{Q})^{2/3}$ , para obtener el valor inicial de  $w_0$ .

Los valores del flujo inicial de agua varían en el intervalo  $[0,05, 0,155]$ , siendo la escala de  $[Q] = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ , por tanto la variación máxima es de  $0,105 \text{ m}^3/\text{s}$ .

El objetivo de la prescripción de cinco perturbaciones de distinta magnitud sobre un flujo mínimo ( $0,05 \text{ m}^3/\text{s}$ ) es la obtención de cinco zonas (que se corresponderán con las cinco corrientes de la Siple Coast) de mayor flujo, de las cuales, una de ellas, la segunda, comenzando a contar por la derecha (en correspondencia con la corriente B o de Whillans, que es la más activa), destaca claramente sobre las demás. Compárese esta condición inicial con la considerada por Fowler y Johnson, dada en (2.36). Las diferencias básicas entre las dos se basan en la localización de las zonas

de mayor flujo inicial y en los valores dados en las mismas (nótese que los órdenes de dichos valores sí que son iguales, como debe ser). Con la prescripción de (4.19) se ha tratado de reflejar lo más fielmente posible el predominio de la segunda corriente sobre el resto (como se deduce de observaciones experimentales).

Hacemos hincapié en el hecho de que la prescripción en el *ice divide* de oscilaciones o perturbaciones de algún tipo, resulta imprescindible para que el fenómeno se manifieste, pues la prescripción de una condición inicial de valor constante para el flujo de agua,  $Q$ , da lugar a soluciones espacialmente homogéneas, es decir, sin variación respecto de la coordenada transversal. Este hecho es consecuente con la naturaleza simétrica de la ecuación de conservación del flujo de agua, con el hecho de que los valores del espesor no varían respecto de la coordenada transversal (y por tanto, el espesor inicial sea de valor constante) y con la prescripción de un valor inicial constante para la variable  $\xi$ , velocidad acumulada. La justificación de considerar  $\xi_0$  constante, radica en el hecho de que en el *ice divide* (identificado con el valor  $t = 0$ ) los valores de las velocidades se corresponden con los típicos de un régimen de flujo lento (el fenómeno de las corrientes de hielo no se manifiesta hasta transcurridos aproximadamente 470 km medidos desde el *ice divide*) y por tanto, el orden de variación de las velocidades es despreciable. Nótese, que en el *ice divide* las velocidades son del orden de 20 m/año ( $< 100$  m/año), las variaciones laterales de las velocidades son inferiores a 10 m/año y la escala de velocidades es  $[u]=500$  m/año, resultando pues razonable considerar valores iniciales adimensionales para la velocidad acumulada  $\xi_0$ , que sean constantes y del orden de 0,1.

Es de esperar, que en el caso del modelo totalmente bidimensional (el cual será presentado en el capítulo quinto), no resulte necesaria la prescripción de una condición inicial,  $Q_0$ , de tipo oscilatorio, para reproducir el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas. La conjetura anterior se basa en que en el modelo totalmente bidimensional, se tendrán en cuenta las variaciones respecto de ambas coordenadas (la longitudinal y la transversal) de todas las variables y además la velocidad y la cizalla serán consideradas magnitudes vectoriales (permitiendo tener en cuenta los efectos de la componente lateral de las fuerzas de cizallamiento, denominadas en la bibliografía *marginal stresses* y de cuya importancia existe evidencia empírica). Siguiendo las observaciones y argumentos presentados en [53], es razonable conjeturar que la inestabilidad que da lugar al fenómeno de las corrientes de hielo, tiene su origen en el margen y se propaga en forma de onda retrógrada hacia el *ice divide*. Para que esto ocurra, es necesario recuperar la formulación elíptica (en el régimen estacionario) de la ecuación de conservación de la masa, de la cual se habló en el capítulo segundo cuando se justificaba la hipótesis de considerar que el espesor sólo depende de la coordenada longitudinal. La conjetura de que la inestabilidad causante de la transición

de un régimen de flujo lento a uno rápido tiene su origen en el margen y se propaga en forma de onda retrógrada hacia el *ice divide*, fue demostrada numéricamente en [55], para el fenómeno del avance repentino de las masas de hielo (denominado en la bibliografía, *ice surging*). En el próximo capítulo, presentaremos el modelo totalmente bidimensional y unos resultados preliminares. El análisis numérico y matemático, que permita validar la conjetura mencionada anteriormente, en el caso de las corrientes de hielo rápidas, será objeto de investigaciones futuras.

#### 4.6.1. Interpretación física de los resultados.

Para la interpretación física de los resultados numéricos, nos basaremos en los resultados obtenidos mediante el método de Gauss-Seidel con proyección, puesto que los resultados correspondientes a los restantes métodos son similares.

Para la simulación numérica con el método de Gauss Seidel con proyección (véase la sección 4.2 del presente capítulo), se han utilizando un paso temporal (en la dirección longitudinal) de  $\delta t = 10^{-6}$  y un tamaño de discretización uniforme en la dirección transversal de  $k = 0,01$ . La tolerancia del error relativo considerada para el método iterativo de Gauss-Seidel es de  $10^{-3}$ . Nótese que está prescrita para un error relativo y que por tanto, el error permitido para los valores correspondientes a dos niveles temporales consecutivos es suficientemente pequeño para asegurar la convergencia (téngase en cuenta que los valores del flujo de agua están muy próximos a cero).

Los resultados numéricos muestran que el modelo considerado permite reproducir de forma satisfactoria el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas (*ice streams*) de la Siple Coast.

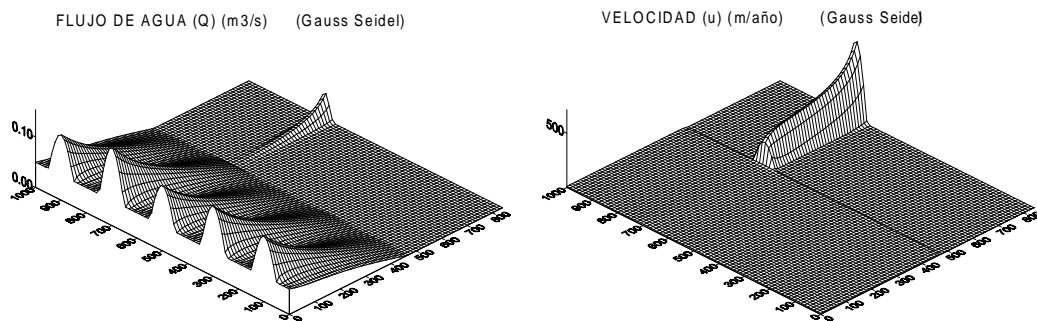


Figura 4.2: Modelo multívoco resuelto mediante el método de Gauss-Seidel con proyección: flujo de agua y velocidad, respectivamente.

La figura 4.2, derecha, corresponde al resultado obtenido para  $u$ , la velocidad del hielo, medida en m/año. Los valores de las velocidades varían entre un valor mínimo

de 0,0453 m/año y un valor máximo de 725,79 m/año. En la figura 4.2, izquierda, aparece representado el flujo de agua  $Q$  en el sistema de drenaje, medido en  $\text{m}^3/\text{s}$ . Los valores del flujo de agua varían entre un mínimo del orden de  $10^{-26} \text{ m}^3/\text{s}$  (es decir, cero, pues en la resolución numérica se han declarado los valores de las variables como números reales en doble precisión ( $10^{-16}$ )) y un máximo de 0,115  $\text{m}^3/\text{s}$ . En ambas gráficas (figura 4.2) se aprecia claramente la existencia de una zona de colapso del sistema de drenaje, localizada aproximadamente en el kilómetro 470 en la dirección principal de flujo a partir de la cual se produce la generación de las corrientes. La zona de inicio de las corrientes depende críticamente de los valores paramétricos  $\gamma$  y  $\delta$ . La correspondencia entre las zonas de valores altos de la velocidad y las zonas de mayor flujo de agua resulta evidente sin más que observar las figuras.

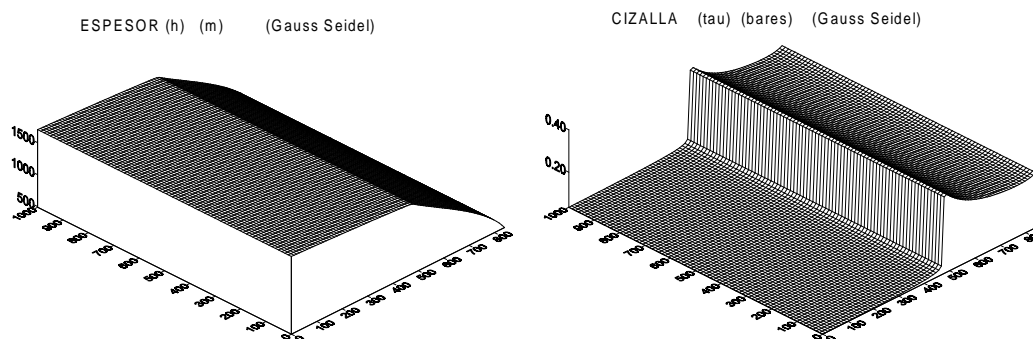


Figura 4.3: Modelo multívoco resuelto mediante el método de Gauss-Seidel con proyección: espesor de hielo y cizalla, respectivamente.

Los resultados que aparecen en las figuras 4.2 y 4.3 (derecha), relativas a  $Q$ ,  $u$  y  $\tau$ , ilustran la existencia de oscilaciones transversales en el flujo de agua y en el campo de velocidades, debidas al balance de fuerzas (4.18)<sub>1</sub> y a la ley de deslizamiento (4.18)<sub>2</sub> (recuérdese que viene dada por  $u = \tau^R(Q + \bar{Q})^{1/3}$  (en particular, hemos considerado  $R = 2$ ), donde  $\tau = h|h'|$ ). Nótese que para un mismo valor de la cizalla,  $\tau$ , son posibles los dos regímenes de flujo, el lento, en el cual los valores del flujo de agua,  $Q$ , y de la velocidad,  $u$ , son pequeños, y el rápido para el cual, tanto  $Q$  como  $u$ , toman valores elevados. Téngase en cuenta que como  $h$ , el espesor de hielo, no depende de la coordenada transversal, la cizalla tampoco ya que su expresión es  $\tau = -hh'$ . Por tanto, al fijar un valor de  $t$ , la cizalla toma un valor constante.

Los resultados del espesor (medido en metros) aparecen representados en la figura 4.3, izquierda. Como se aprecia claramente, el espesor es una función decreciente respecto de  $t$  (en la dirección principal del flujo) y constante respecto de  $x$  (en la dirección transversal). Los valores del espesor pertenecen al intervalo  $[465, 1705]$ , tomando el valor de 1705 m en  $t = 0$  (*ice divide*) y 465 m en  $t = T$  (*grounding line*).

En los resultados obtenidos para la cizalla,  $\tau$ , se aprecia la existencia de una gran pendiente (gradiente) en la zona de colapso del sistema de drenaje, que quizá sea responsable, entre otros factores, de la transición de un régimen de flujo lento (localizado antes de llegar a la zona de colapso) a un régimen de flujo rápido (localizado en la zona posterior a la de colapso), hecho que refleja la existencia de un mecanismo de inestabilidad en la dirección principal de flujo. Más adelante, cuando se muestren los resultados obtenidos para una sección (valor de  $x$  fijo y  $t$  variable) localizada en una zona de flujo rápido, se verá como existe una relación multívoca entre la cizalla y la velocidad (y también entre la cizalla y el flujo de agua). Esta relación de multivalocidad, conjeturada por Fowler en [51], implica que la cizalla toma un determinado rango de valores tanto en la zona anterior a la producción del colapso en el sistema de drenaje basal como en la posterior y que por tanto, en ese rango de valores son posibles los dos regímenes de flujo, el lento y el rápido. El cambio de signo de la pendiente de la cizalla señalaría el cambio de régimen del flujo de hielo.

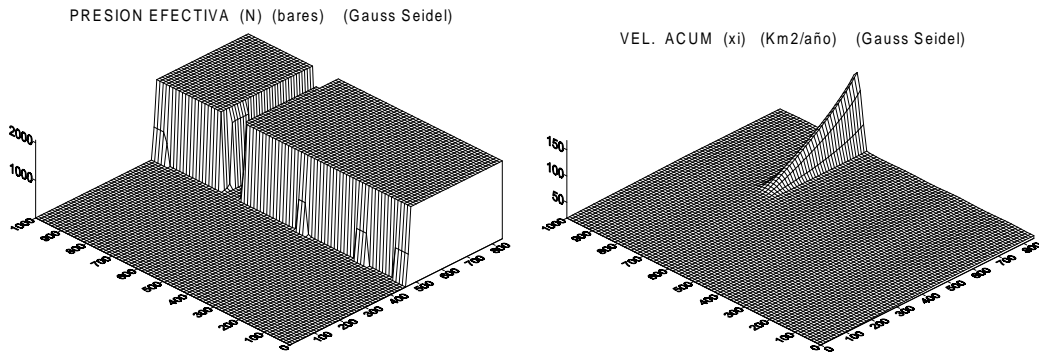


Figura 4.4: Modelo multívoco resuelto mediante el método de Gauss-Seidel con proyección: presión efectiva y velocidad acumulada, respectivamente.

En la figura 4.4, correspondiente a la presión efectiva (medida en bares), se aprecia con mayor facilidad como a partir del lugar en el cual, los sedimentos saturados con agua se congelan y se produce el colapso del sistema de drenaje, surgen unas zonas en las cuales se abren canales (será la zona en la cual aparece la corriente) y otras en las que se cierran. Los valores de la presión efectiva en las corrientes son muy bajos (del orden de 0.74 bares) lo cual significa que la presión ejercida por el agua basal toma valores similares a los que toma la presión ejercida por el hielo. Sin embargo, en las zonas lentas, donde el flujo de hielo se debe fundamentalmente a la deformación interna del hielo y no tanto al deslizamiento asociado a la presencia de agua en la base, los valores de la presión efectiva son del orden de  $[N]\bar{Q}^{-1/3} \approx 0,4 \cdot (7,2 \cdot 10^{-12})^{-1/3} \approx 2075$  bares (recuérdense (4.17) y la ley de drenaje, (4.18)<sub>3</sub>). Nótese, que en las zonas lentas los valores de  $Q$  son próximos a cero y por tanto, la velocidad de deslizamiento del hielo (de valores muy pequeños, del orden de 0,075

m/año), se debe a la pequeña cantidad de agua presente en la base (flujo residual modelado mediante el término  $\bar{Q}$ , que es del orden de  $10^{-12}$ ) debida a la cizalla que siempre existe en la misma. Los altos valores alcanzados por la presión efectiva impiden que los canales de agua se desarrollen y por tanto, el flujo de agua es residual.

Como puede apreciarse, en la zona de colapso de drenaje, los valores del flujo de agua son prácticamente nulos y sin aparentes oscilaciones. Las oscilaciones iniciales del flujo de agua en el *ice divide* ( $t=0$ ), prescritas en el dato inicial  $Q_0$ , son homogeneizadas casi en su totalidad en la zona inmediatamente anterior a la de colapso del sistema de drenaje. Sin embargo, en la zona previa a la de colapso, oscilaciones del orden de  $10^{-12}$ , son suficientes para que se manifieste el fenómeno. Este hecho ilustra el grado de sensibilidad del mecanismo a pequeñas variaciones de los datos y valores paramétricos. Por otro lado, el hecho de que aparezca una única corriente dominante sobre el resto, contrasta y valida, en cierto modo, la conjetura mencionada en algunas de las recientes teorías que cuentan con mayor aceptación por parte de la comunidad científica (mencionadas en el capítulo primero), acerca de la competencia existente en las corrientes. La conjetura a la que se hace referencia consiste en explicar la inactividad de la corriente  $C$ , frente a la gran actividad de la  $B$ , mediante un fenómeno denominado en la bibliografía *water piracy* y que consiste, básicamente, en la apropiación por parte de la corriente  $B$  del agua basal existente en corrientes adyacentes. En este sentido, se han realizado numerosos ensayos en los cuales la condición inicial era perturbada, de manera aleatoria y siempre dentro de unos límites permisibles, y los resultados obtenidos, siempre presentaban la existencia de una corriente dominante sobre las demás (aunque hubiese dos o más con un mayor o igual flujo inicial).

En la figura 4.5 aparecen representados el balance de calor basal y el enfriamiento basal (ambos medidos en  $\text{W}/\text{m}^2$ ). Los valores del balance de calor varían entre un mínimo de  $-1,273 \cdot 10^{-6} \text{ W}/\text{m}^2$  y un máximo de  $2,09 \cdot 10^{-6} \text{ W}/\text{m}^2$ . Y los valores del enfriamiento varían entre un mínimo de  $4,776 \cdot 10^{-7} \text{ W}/\text{m}^2$  y un máximo de  $5,479 \cdot 10^{-6} \text{ W}/\text{m}^2$ .

En la figura 4.6, izquierda, aparecen representadas las zonas en las cuales el flujo de agua es positivo,  $Q > 0$ , es decir, aquellas en las que la base presenta un régimen térmico temperado (identificadas con las zonas en las cuales la gráfica toma en el eje  $z$ , el valor constante uno), existiendo un flujo de hielo asociado al deslizamiento (consecuencia de la acción lubricante del agua en la base), y las zonas en las que  $Q = 0$ , o sea, aquellas en las que la base presenta un régimen térmico polar (identificadas con las zonas en las cuales la gráfica toma en el eje  $z$  el valor constante cero), y

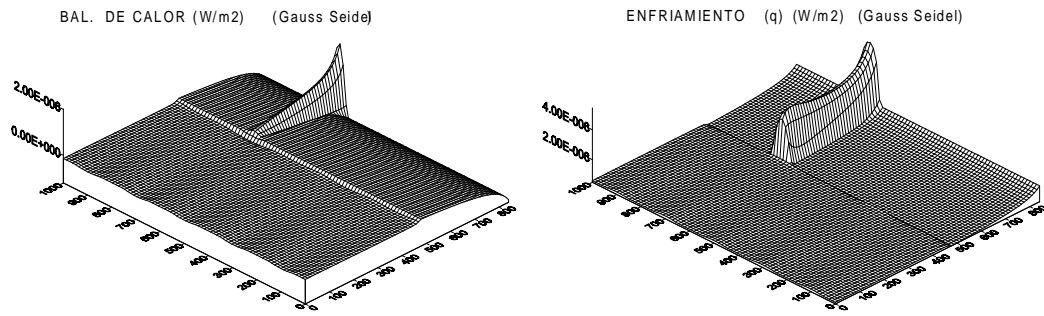


Figura 4.5: Modelo multívoco resuelto mediante el método de Gauss-Seidel con proyección: balance de calor y enfriamiento, respectivamente.

por tanto, el flujo del hielo se debe fundamentalmente a la deformación interna del hielo.

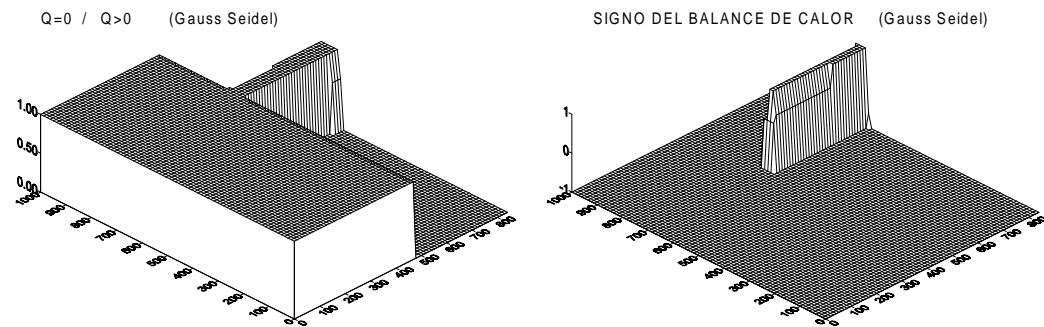


Figura 4.6: En la figura de la izquierda, aparecen representadas las zonas en las que la base presenta un régimen térmico temperado ( $Q > 0$ ) y aquellas en las cuales presenta un régimen térmico polar ( $Q = 0$ ). En la de la derecha aparecen representadas las zonas en las que el balance de calor es positivo (calentamiento) y aquellas en las que es negativo (enfriamiento).

En la figura 4.6, derecha, se distinguen con mayor facilidad las zonas en las que el balance de calor basal es positivo y por tanto, hay un calentamiento en la base (identificadas con las zonas en las cuales la gráfica toma en el eje  $z$  el valor constante uno), de aquellas en las que el término de balance de calor basal toma valores negativos y por tanto, hay un enfriamiento (identificadas con las zonas en las cuales la gráfica toma en el eje  $z$  el valor constante menos uno). De estas figuras se deduce la existencia de una correspondencia entre la zona en la cual se produce un cambio de signo del balance, pasando de valores negativos a positivos y la zona de inicio de la corriente. Este hecho es justificable físicamente, ya que por un lado, el aumento de la temperatura basal puede hacer que el hielo de la base alcance su temperatura de fusión a la presión local y en consecuencia aparezca agua en la base, aumentando el valor del flujo basal de agua y el de la velocidad del hielo debido al efecto lubricante

del agua. Por otro lado, al aumentar la velocidad, aumenta la disipación viscosa (calor de fricción, representado por el término  $\tau u$ ) favoreciendo un aumento de la temperatura basal. Nótese sin embargo, que también en la zona de flujo rápido el término de enfriamiento toma un valor mayor. Este hecho se debe a que, al crecer la velocidad, crece el valor del enfriamiento convectivo (la parte del enfriamiento asociada al movimiento). De todos modos, el aumento del enfriamiento convectivo es menor que el del término de calentamiento, como se deduce del valor positivo que toma el balance de calor, dado por la diferencia entre los términos de calentamiento y los de enfriamiento. Además, es la parte *dinámica* (parte del balance que depende de ambas coordenadas, la longitudinal y la transversal) del balance la que interviene en este proceso, ya que de la expresión del término de balance *estático* (parte de balance que depende sólo de la coordenada longitudinal),  $\gamma - \delta h^{-1}$ , se deduce que al no variar  $h$  respecto de la coordenada transversal, este término tampoco varía en la dirección transversal, es decir, toma el mismo valor para cada  $t$  fijo. Por tanto la diferencia en el comportamiento del término de balance de calor entre las zonas de mayor flujo y las de menor, reside en el término de balance *dinámico*,  $\tau u - u\xi^{-1/2}$ .

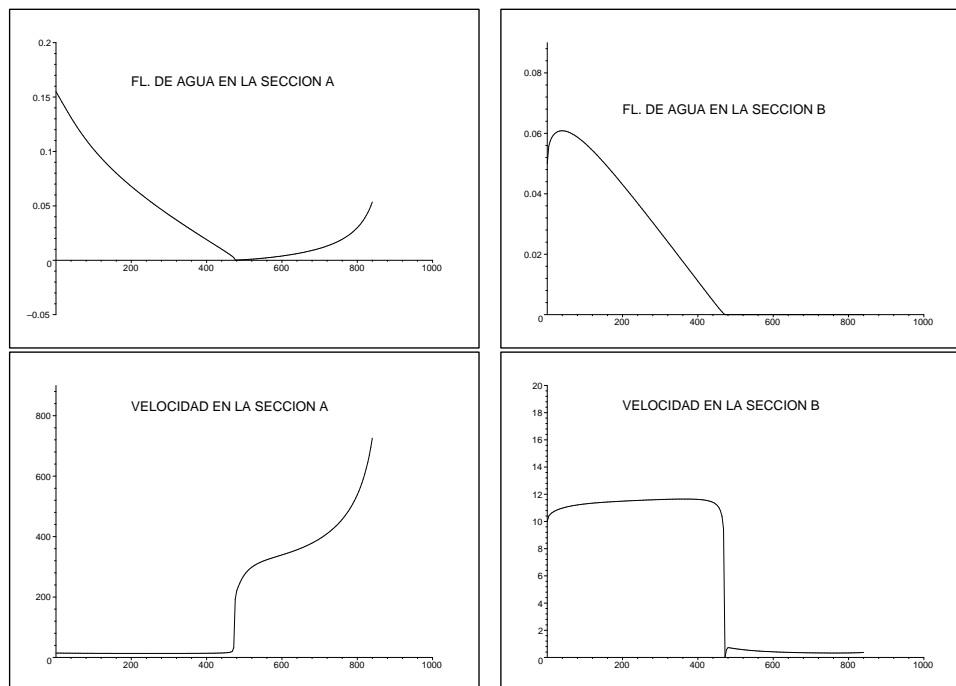


Figura 4.7: Flujo de agua y velocidad en las secciones A (localizada en la zona en la que surge la corriente) y B (localizada en una zona de flujo lento).

Con el objeto de observar las diferencias existentes en el comportamiento de las variables según nos encontremos en la zona en la cual se produce la corriente o en una flujo de lento, elegimos una sección ( $t$  variable y  $x$  fijo,  $x = 700$  km), que denotaremos por A, en la zona donde surge la corriente dominante y otra sección,



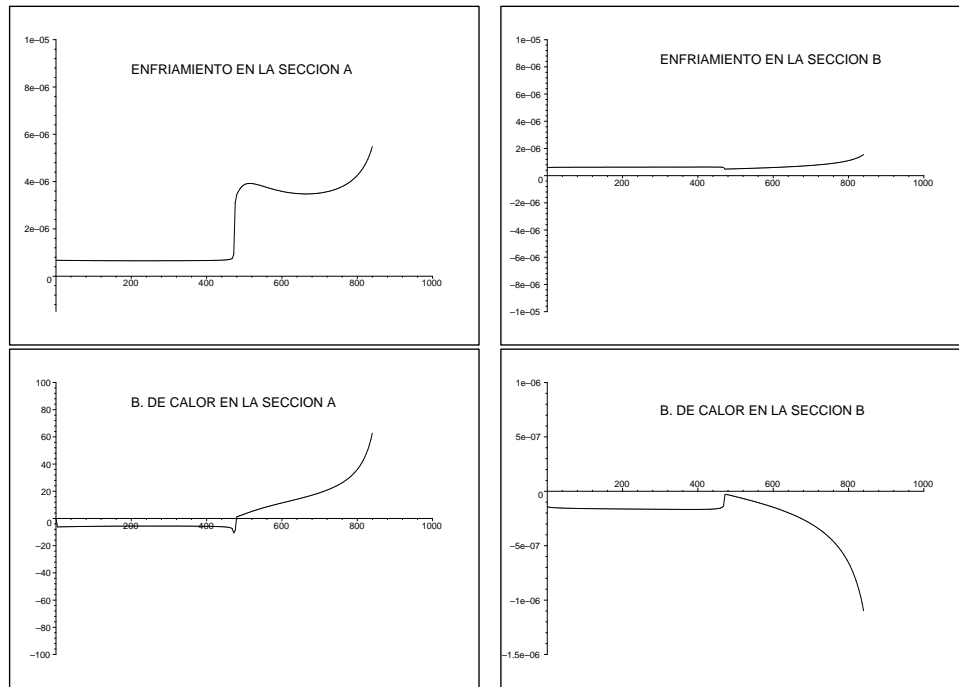


Figura 4.8: Enfriamiento y balance de calor en las secciones A (localizada en la zona en la que surge la corriente) y B (localizada en una zona de flujo lento).

situada zona de flujo lento, que denotaremos por B ( $x = 50$  km), y representamos gráficamente los valores de las distintas variables en cada una de dichas secciones. En las figuras 4.7 y 4.8 se presentan los resultados para  $u$ ,  $Q$ ,  $q$  (enfriamiento) y el balance de calor total, correspondientes a la sección A (figuras situadas a la izquierda) y a la sección B (figuras situadas a la derecha). Nótese que para algunas variables, las escalas difieren según se esté representando los valores asociados a la sección A ó a la sección B. Por tanto, será necesario fijarse en las mismas para apreciar, no sólo las diferencias desde el punto de vista cualitativo, sino también desde el punto de vista cuantitativo.

El cambio de signo en el balance térmico basal tiene lugar aproximadamente en el punto de inicio de la corriente, lo cual refleja el hecho de que se produce una fusión efectiva de hielo basal que hace que el flujo basal de agua aumente.

En la figura 4.9 se muestran los resultados para  $N$  y para  $\xi$ . En la figura 4.10 aparecen los resultados para el espesor  $h$  y la cizalla  $\tau$ , válidos para ambas secciones. Nótese que  $h$  y  $\tau$  no varían respecto de  $x$  (coordenada transversal) y por tanto coinciden en las dos secciones.

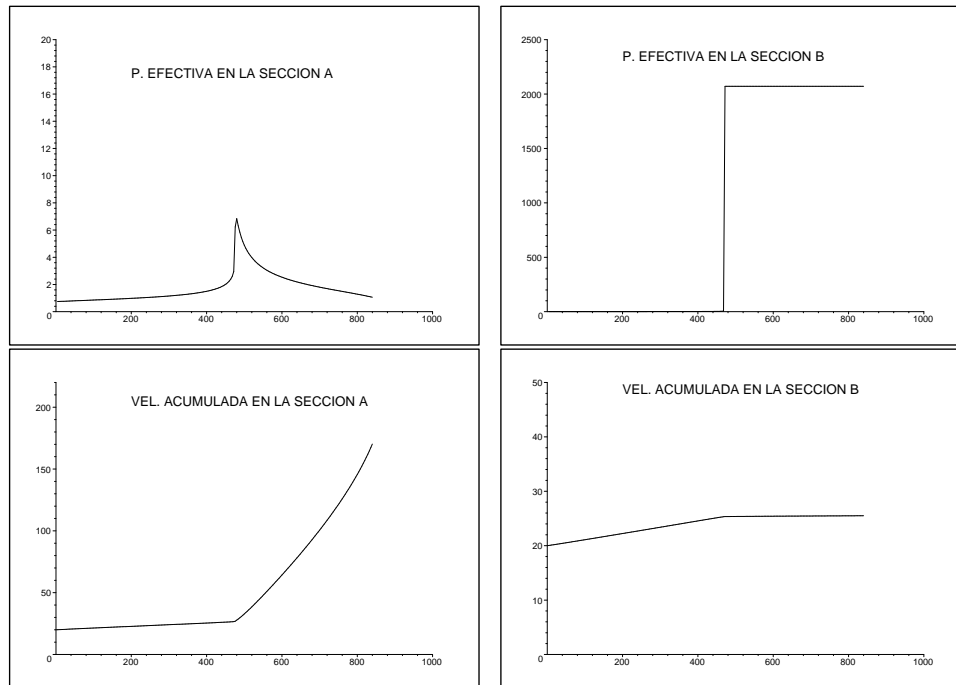


Figura 4.9: Presión efectiva y velocidad acumulada en las secciones A (localizada en la zona en la que surge la corriente) y B (localizada en una zona de flujo lento).

### Descripción del mecanismo de realimentación existente en las corrientes.

Observando las gráficas correspondientes a la sección A, en la cual se da un flujo rápido a partir de la zona de transición, se puede ver como opera un mecanismo de realimentación que se detalla a continuación.

El flujo de agua comienza disminuyendo en los primeros kilómetros (véase la figura 4.7, arriba, izquierda) y esto hace que  $|h'|$  aumente, como se deduce de la ecuación de conservación de la masa  $(S)_4$ ,

$$h' = -M^{1/R} h^{-(R+1)/R} \left[ \int_0^L (Q + \bar{Q})^S dx \right]^{-1/R}$$

y por tanto, aumente  $\tau$  (véase la figura 4.10, derecha). Al ser mayor  $\tau$  aumenta  $u$  por la ley de deslizamiento (véase la figura 4.7, abajo, izquierda),

$$u = \tau^R (Q + \bar{Q})^S$$

con lo cual el balance de calor se hace más positivo (véase la figura 4.8, abajo, derecha) debido al aumento del calor de fricción (recordamos que en la simulación numérica se ha asumido el valor  $R = 2$ ). Este aumento de calor en la base hace que se funda más hielo en la misma, con lo que aparece más agua y por tanto crece el valor del flujo de agua  $Q$ . El aumento del flujo favorece el deslizamiento y por tanto,

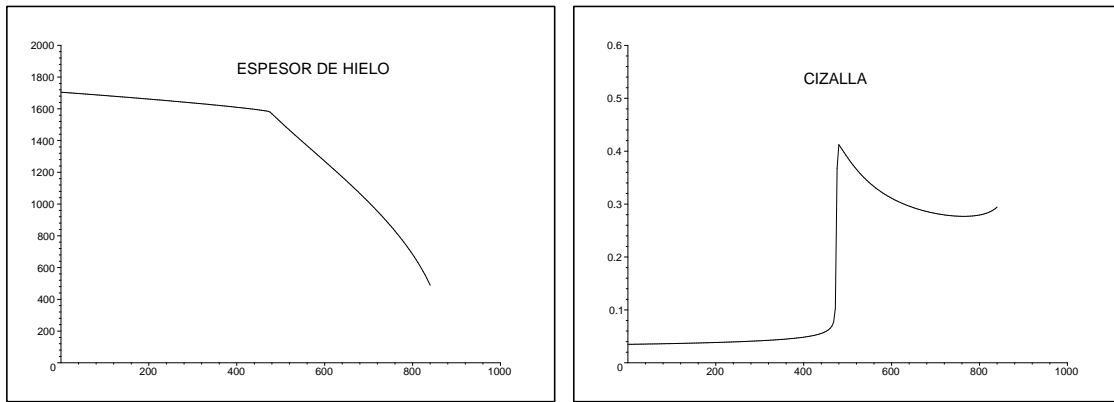


Figura 4.10: Secciones del espesor y de la cizalla.

$u$  aumenta. En consecuencia, aumenta el calor de fricción y vuelve a darse el proceso que se acaba de describir. Este mecanismo de realimentación se vería frenado por el aumento, a medida que se hace mayor la velocidad, del enfriamiento convectivo, dado por  $u\xi^{-1/2}$  (véase la figura 4.8, arriba, izquierda).

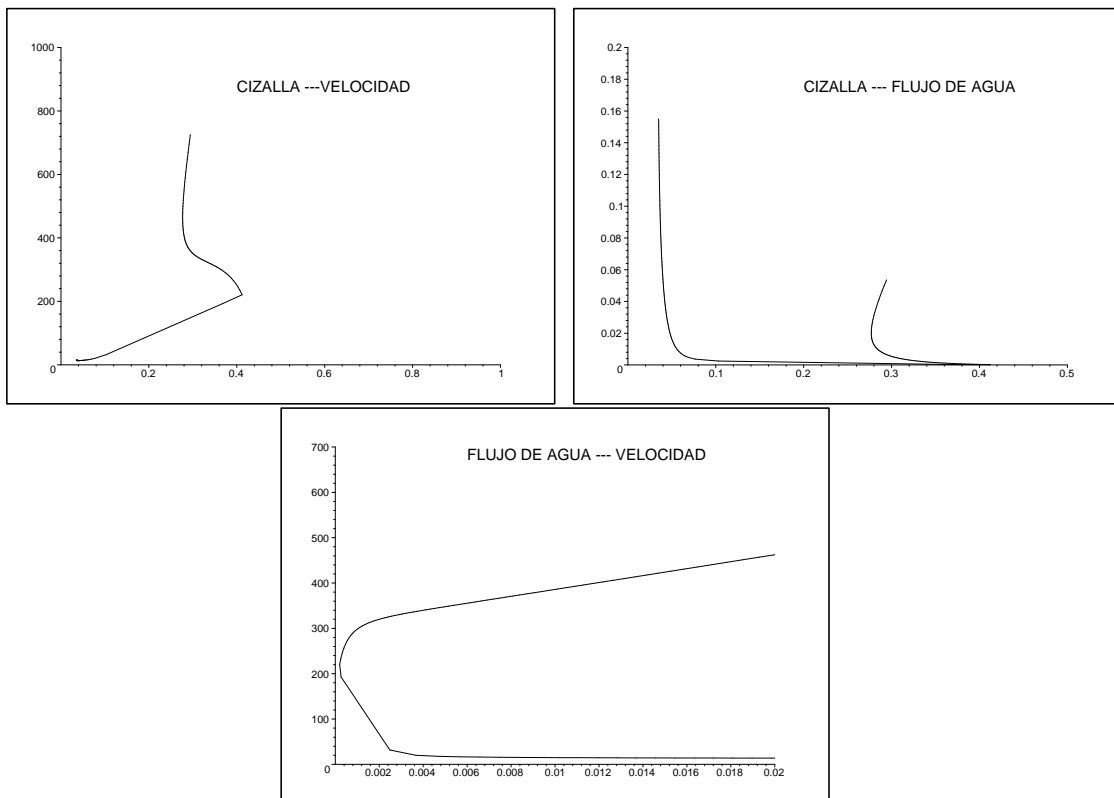


Figura 4.11: Relaciones de multivocidad entre las variables:  $\tau$  y  $u$ ,  $\tau$  y  $Q$ , y  $Q$  y  $u$ .

### Relaciones multívocas.

En la figura 4.11 se pueden observar las relaciones multívocas que existen entre algunas de las variables, en la sección A, localizada en la zona donde aparece la corriente. Concretamente, en dicha figura, arriba, a la izquierda, se representan la cizalla  $\tau$  (abscisa) y la velocidad  $u$  (ordenada) en la sección A. Como puede apreciarse, para un mismo valor de  $\tau$  son posibles distintos valores para la velocidad,  $u$ . Arriba, a la derecha, se representa la relación entre  $\tau$  (abscisa) y el flujo de agua,  $Q$  (ordenada). Y por último, en la gráfica que aparece abajo, se ilustra la relación de multivocidad que existe entre las variables  $Q$  (abscisa) y  $u$  (ordenada).

Las relaciones de multivocidad presentadas se dan en la sección A, es decir, en la dirección principal de flujo, por tanto, se puede obtener un mismo valor para la cizalla en la zona anterior a la región donde tiene lugar el colapso del sistema de drenaje y en la zona posterior, donde ya se ha manifestado el fenómeno (zona donde aparece la corriente).

Estas relaciones multívocas posibilitan la existencia de un comportamiento de tipo oscilatorio para el régimen del flujo de hielo. En este punto, conviene recordar los comentarios realizados al comienzo del capítulo segundo, acerca de la conjetura formulada por Fowler y Johnson, basada en una idea original de MacAyeal.

#### 4.6.2. Comparación de los resultados obtenidos por los diferentes métodos.

Los resultados relativos al método de dualidad para el caso  $\sigma = 0$ , han sido obtenidos con el valor del parámetro  $\omega = 1000$ . El error máximo permitido correspondiente al método iterativo asociado al algoritmo de dualidad es de  $10^{-3}$ . La elección del parámetro  $\omega$  no es tarea fácil, pues los resultados obtenidos varían mucho, sobre todo cualitativamente en función de su valor. Por este motivo, cuando el aspecto de la solución no es conocido, el problema se resuelve primero por el método de Gauss Seidel con proyección, que no depende de parámetros asociados a la computación, para saber de que naturaleza es el resultado.

Una vez conocido el aspecto de la solución, el valor del parámetro se varía hasta conseguir un valor para el cual el resultado sea tanto cualitativa como cuantitativamente similar al obtenido mediante Gauss Seidel. El valor del parámetro también señala qué términos compiten (es decir, son del mismo orden) en el problema. En este caso se deduce que el factor de mayor peso en la ecuación (4.10) es el término

que proviene del término parabólico (derivada temporal).

Los resultados relativos al método de dualidad combinado con el método de Newton para resolver el problema del flujo de agua en el caso  $\sigma = 1$ , han sido obtenidos con el valor paramétrico  $\omega_1$  igual a  $\omega_1 = 1000$ . Los errores máximos permitidos en los esquemas iterativos asociados al método de dualidad y al método de Newton son en ambos casos de  $10^{-3}$ .

Los resultados relativos al método de dualidad con dos multiplicadores han sido obtenidos con los valores paramétricos  $\omega_1 = 1000$  y  $\omega_2 = 100$ . El error máximo permitido en el método iterativo asociado al algoritmo de dualidad es de nuevo  $10^{-3}$ . El primer parámetro se toma igual al elegido en el caso de un multiplicador. El segundo afecta al peso otorgado a la parte del término de balance de calor que depende de ambas componentes (la longitudinal y la transversal) con respecto al resto de términos (véase la ecuación (4.15)). Nótese que los valores de los parámetros han de ser válidos para toda discretización temporal de tamaño suficientemente pequeño.

Los tiempos de C.P.U. empleados por cada uno de los métodos aparecen expuestos en la siguiente tabla. El procesador que se ha utilizado para la computación es un Pentium (R) 4 CPU 2.00 GHz (2.48 MB de RAM).

| Método de resolución             | Tiempo de C.P.U. en segundos |
|----------------------------------|------------------------------|
| Gauss-Seidel con proyección      | 14.252                       |
| Dualidad con un multiplicador    | 14.952                       |
| Dualidad con dos multiplicadores | 15.930                       |
| D. con un multiplicador + Newton | 17.133                       |

La distancia medida desde el *ice divide* al margen (*grounding line*) varía ligeramente en función del método empleado. Los valores de  $T$  (se recuerda que  $t = T$  localiza la sección de control identificada con el valor de la coordenada longitudinal para el cual el espesor toma un valor de 465 metros), correspondientes a los diferentes métodos se muestran en la siguiente tabla.

| Método de resolución             | Localización del margen (T) |
|----------------------------------|-----------------------------|
| Gauss-Seidel con proyección      | 843,818 km                  |
| Dualidad con un multiplicador    | 837,659 km                  |
| Dualidad con dos multiplicadores | 839,650 km                  |
| D. con un multiplicador + Newton | 839,642 km                  |

En las figuras 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 y 4.19 se muestran los resultados obtenidos para  $Q$  (flujo de agua),  $u$  (velocidad del hielo),  $h$  (espesor),  $\tau$  (cizalla), el balance de calor,  $q$  (enfriamiento),  $\xi$  (velocidad acumulada) y  $N$  (presión efectiva), donde las figuras que aparecen:

- arriba y a la izquierda, corresponden a los resultados obtenidos con el método de Gauss Seidel con proyección,
- arriba y a la derecha, muestran los resultados obtenidos con el método de dualidad con un multiplicador,
- abajo y a la izquierda, corresponden a los resultados obtenidos con el método de dualidad con dos multiplicadores,
- abajo y a la derecha, corresponden a los resultados obtenidos con el método de dualidad con un multiplicador combinado con el método de Newton.

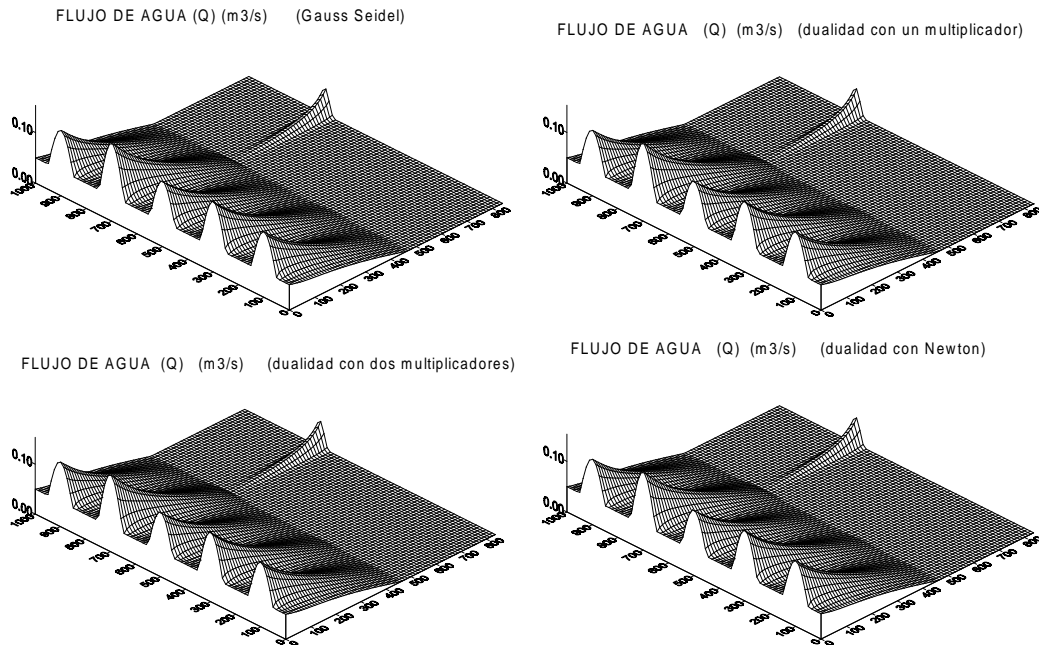


Figura 4.12: Resultados obtenidos para el flujo de agua.

En la figura 4.12 aparecen los resultados correspondientes al flujo de agua en el sistema de drenaje. Como puede observarse, las cuatro gráficas guardan un gran parecido. En todas ellas, destaca la existencia de una única zona en la cual, el flujo  $Q$  toma un valor mayor que el que toma en el resto.

Los resultados obtenidos reflejan un comportamiento prácticamente idéntico de la variable  $Q$  para los diferentes métodos, en la zona previa al colapso del sistema de

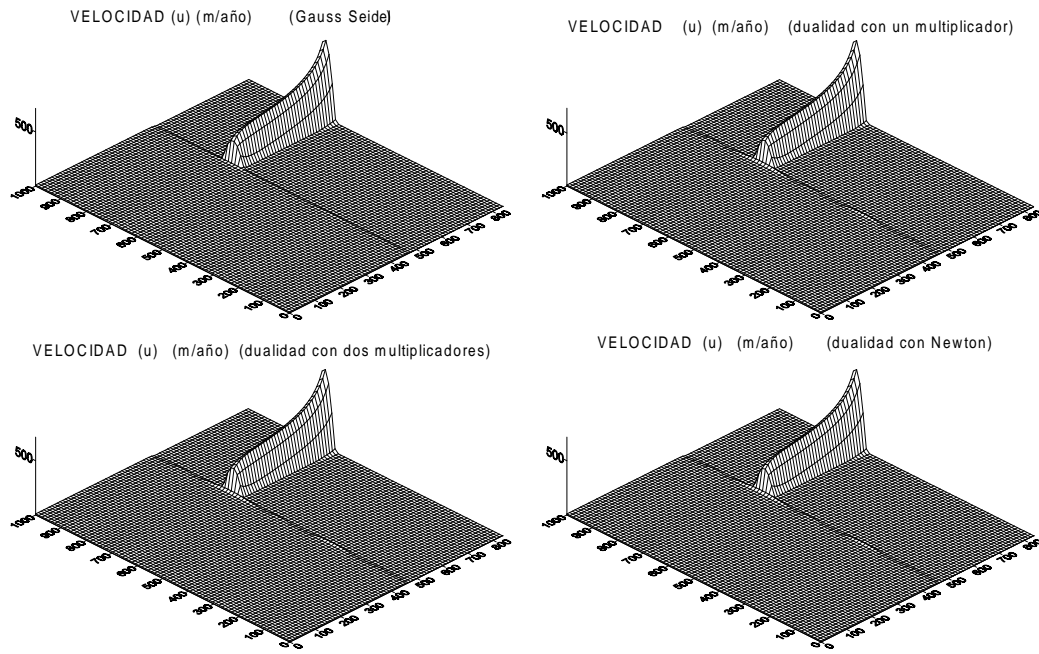


Figura 4.13: Resultados obtenidos para la velocidad del hielo.

drenaje (formación de un único túnel). Los valores de  $Q$  se van homogeneizando a medida que aumenta el valor de la coordenada longitudinal  $t$ . Estos se mantienen del orden de  $10^{-2}$  y  $10^{-3}$  hasta llegar a la zona de colapso del sistema de drenaje. Desde el punto de vista físico, la zona de colapso del sistema de drenaje es aquella en la cual, canales que estaban abiertos (es decir, zonas por las que fluía agua), pasan a cerrarse (el flujo de agua asociado al deslizamiento es prácticamente nulo y sólo se da un flujo residual, del orden de  $\bar{Q} \approx 10^{-12}$ ). Esto se traduce, desde el punto de vista de los resultados numéricos, en identificar la zona de colapso con el lugar en el cual, el flujo de agua,  $Q$ , deja de tener valores homogéneos respecto de la coordenada transversal (del orden de  $10^{-3}$ ), para pasar a darse variaciones en los órdenes, pues aparecen zonas respecto de la coordenada transversal (en realidad sólo una, localizada entorno a  $x = 700$  km y que se corresponde con la zona donde aparece la única corriente) en las que se mantienen valores del orden de  $10^{-3}$  y  $10^{-2}$  mientras que en el resto, los valores del flujo de agua  $Q$  descienden bruscamente y pasan a ser del orden de  $10^{-12}$  e incluso inferiores. Concretamente, el colapso del sistema de drenaje se produce aproximadamente para el método de Gauss Seidel en el kilómetro 472 en la dirección principal de flujo, mientras que en los otros tres (dualidad con un multiplicador, dualidad con dos multiplicadores y el de dualidad con un multiplicador combinado con el de Newton) tiene lugar aproximadamente para  $t = 468$  km. Este cambio de carácter cuantitativo y cualitativo en el flujo de agua que se observa a partir de la zona de colapso, se produce de un modo distinto según el método empleado. A continuación se detalla en que consisten estas

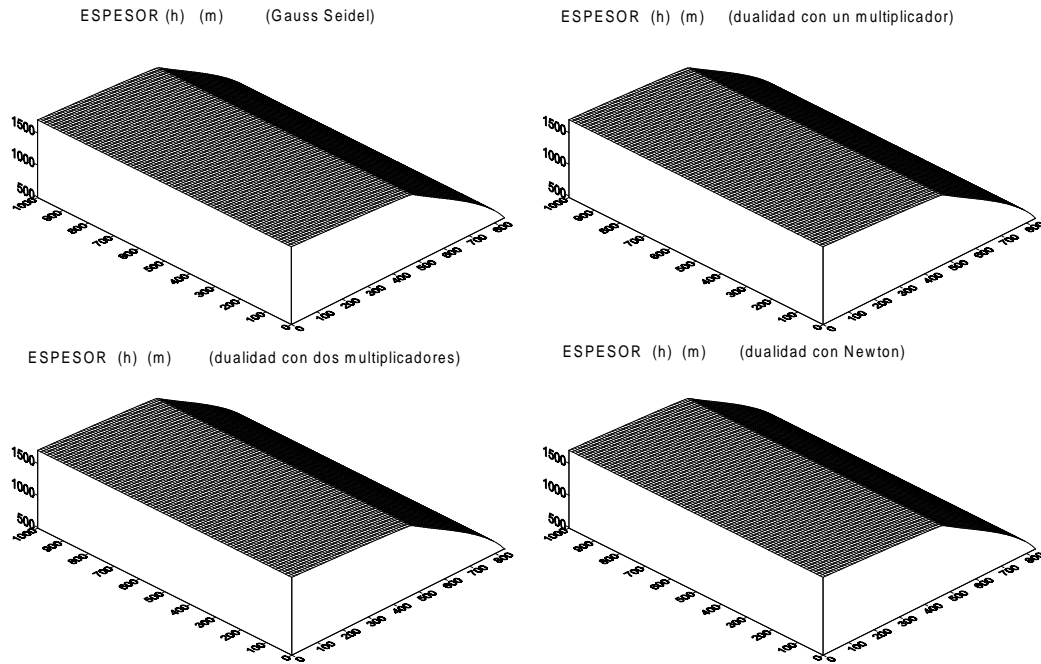


Figura 4.14: Resultados obtenidos para el espesor de hielo.

diferencias:

- si la resolución ha tenido lugar con el método de Gauss Seidel con proyección o el de dualidad con un multiplicador combinado con el método de Newton, para cada sección transversal considerada en los primeros 150 km medidos desde la zona de colapso en la dirección principal de flujo, aparece un único intervalo (considerado en la dirección transversal) entorno al valor  $x = 700$  km, donde el flujo se mantiene del orden de  $10^{-3}$  para luego ir aumentando a medida que se avanza en la dirección principal de flujo (aumenta la coordenada longitudinal). Fuera de ese intervalo, los valores del flujo son muy parecidos, de ordenes  $10^{-11}$  y  $10^{-12}$  en el caso del método de dualidad combinado con Newton y del orden de  $10^{-26}$  en el método de Gauss-Seidel con proyección (es decir, cero, pues se ha utilizado doble precisión), manteniéndose este orden hasta el final.
- si para la resolución se han empleado el método de dualidad con un multiplicador o el de dos multiplicadores, el comportamiento es ligeramente diferente al comentado anteriormente. La diferencia consiste en que en este caso, además de aparecer un único intervalo entorno al kilómetro 700 medido en la sección transversal donde el flujo se mantiene del orden de  $10^{-3}$ , aparecen otros intervalos en los cuales el orden es de  $10^{-6}$ , siendo en el resto del orden de  $10^{-11}$ . A medida que se avanza respecto de la coordenada longitudinal, en el caso de dualidad con un multiplicador, los órdenes mencionados se mantienen excepto



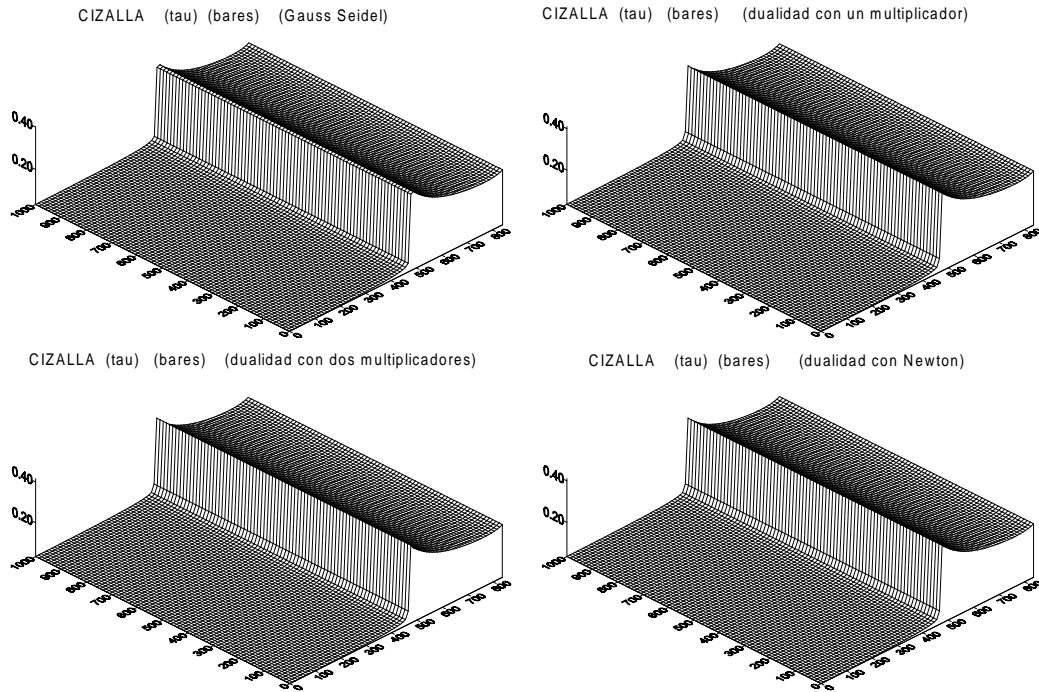


Figura 4.15: Resultados obtenidos para la cizalla.

en el intervalo para el cual el orden era de  $10^{-3}$  que pasa a ser de orden  $10^{-2}$ , mientras que en el caso de dualidad con dos multiplicadores, aquellos intervalos en los cuales el orden era de  $10^{-6}$ , éste disminuye, de modo que pasado el kilómetro 630 ya son del orden de  $10^{-11}$ , al igual que en el resto, con excepción del único intervalo en el cual el orden era  $10^{-3}$ , pues aquí crece hasta alcanzar el orden  $10^{-2}$ .

Estas diferencias de comportamiento reflejan lo sensible que resulta el modelo a pequeñas oscilaciones, pues los valores del flujo son muy próximos a cero. Nótese, que al ser las diferencias entre los valores que toma  $Q$  en la zona próxima al colapso del sistema de drenaje, para los distintos métodos de resolución empleados, del orden de  $10^{-6}$ , no resultan apreciables en las figuras.

Para el resto de las variables, salvo la presión efectiva, sucede lo mismo, es decir, los resultados son muy similares, tanto cuantitativa como cualitativamente, pues las posibles diferencias son de varios órdenes de magnitud inferiores al de los valores representativos de dichas variables. A continuación se muestran a modo ilustrativo los valores máximos y mínimos que toman las variables  $u$ ,  $\tau$ , balance de calor y enfriamiento, en función del método utilizado.

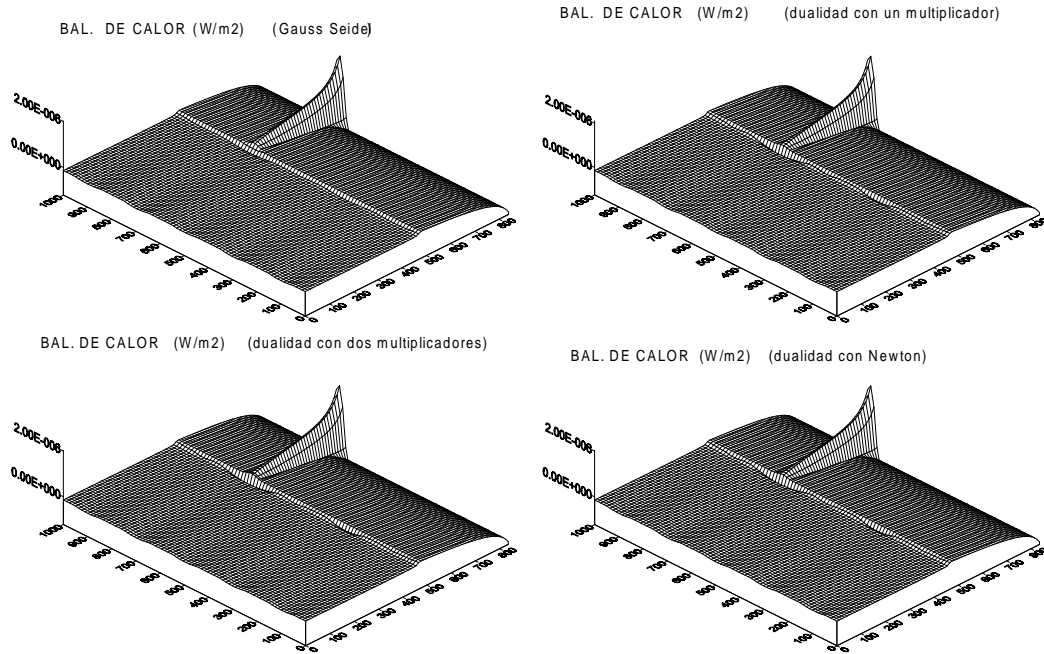


Figura 4.16: Resultados obtenidos para el balance de calor.

| Valores de la velocidad ( $u$ )  | Valor mínimo     | Valor máximo  |
|----------------------------------|------------------|---------------|
| Gauss-Seidel con proyección      | 0,045327 m/año   | 725,79 m/año  |
| Dualidad con un multiplicador    | 0,00786731 m/año | 743,9 m/año   |
| Dualidad con dos multiplicadores | 0,0644301 m/año  | 727,448 m/año |
| D. con un multiplicador + Newton | 0,0711898 m/año  | 727,349 m/año |

| Valores de cizalla ( $\tau$ )    | Valor mínimo    | Valor máximo   |
|----------------------------------|-----------------|----------------|
| Gauss-Seidel con proyección      | 0,0349612 bares | 0,412268 bares |
| Dualidad con un multiplicador    | 0,0349612 bares | 0,414426 bares |
| Dualidad con dos multiplicadores | 0,0349612 bares | 0,417305 bares |
| D. con un multiplicador + Newton | 0,0349612 bares | 0,41426 bares  |

En las tablas de valores correspondientes a la variable  $h$  y a la variable  $\xi$  se observa (como era de esperar) que en todos los métodos el valor máximo para  $h$  y el mínimo para  $\xi$  se identifican con los valores iniciales y los mínimos para el espesor coinciden con el valor que localiza la sección de control (margen).

| Valores del espesor ( $h$ )      | Valor mínimo | Valor máximo |
|----------------------------------|--------------|--------------|
| Gauss-Seidel con proyección      | 488,7115 m   | 1705 m       |
| Dualidad con un multiplicador    | 475,521 m    | 1705 m       |
| Dualidad con dos multiplicadores | 487,637 m    | 1705 m       |
| D. con un multiplicador + Newton | 487,683 m    | 1705 m       |

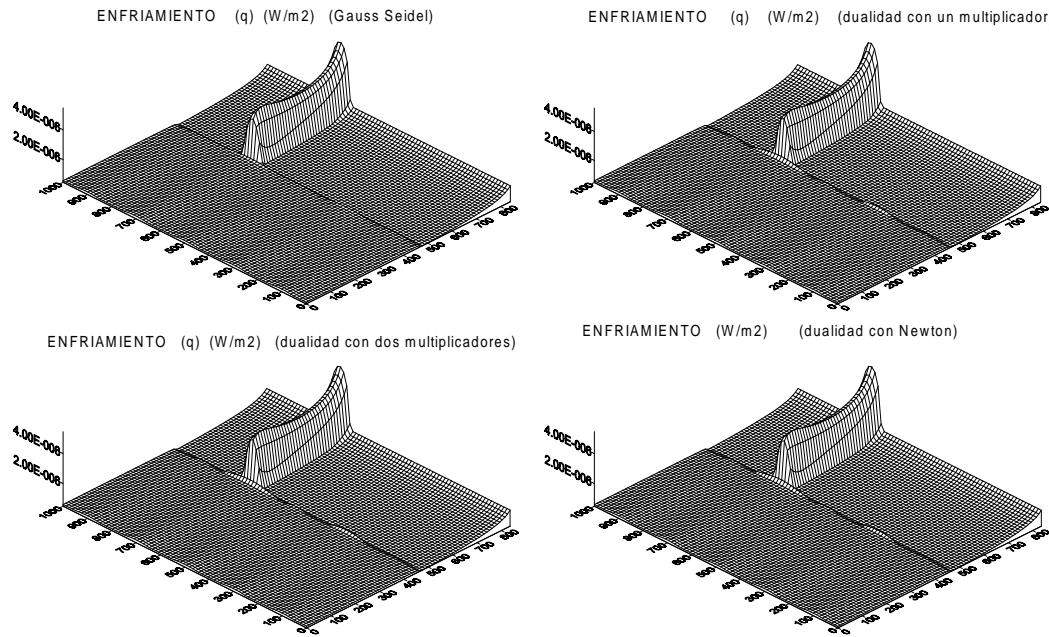


Figura 4.17: Resultados obtenidos para el enfriamiento.

| Velocidad acumulada ( $\xi$ )    | Valor mínimo            | Valor máximo                 |
|----------------------------------|-------------------------|------------------------------|
| Gauss-Seidel con proyección      | 20 km <sup>2</sup> /año | 170,214 km <sup>2</sup> /año |
| Dualidad con un multiplicador    | 20 km <sup>2</sup> /año | 169,694 km <sup>2</sup> /año |
| Dualidad con dos multiplicadores | 20 km <sup>2</sup> /año | 170,667 km <sup>2</sup> /año |
| D. con un multiplicador + Newton | 20 km <sup>2</sup> /año | 170,66 km <sup>2</sup> /año  |

| Valores del balance de calor     | Valor mínimo                              | Valor máximo                             |
|----------------------------------|---|--|
| Gauss-Seidel con proyección      | $-1,27339 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> | $2,09082 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> |
| Dualidad con un multiplicador    | $-1,3482 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup>  | $2,19054 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> |
| Dualidad con dos multiplicadores | $-1,27954 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> | $2,09841 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> |
| D. con un multiplicador + Newton | $-1,27911 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> | $2,09788 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> |

| Valores del enfriamiento (q)     | Valor mínimo                             | Valor máximo                             |
|----------------------------------|--|--|
| Gauss-Seidel con proyección      | $4,77678 \cdot 10^{-7}$ W/m <sup>2</sup> | $5,47982 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> |
| Dualidad con un multiplicador    | $4,76938 \cdot 10^{-7}$ W/m <sup>2</sup> | $5,62705 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> |
| Dualidad con dos multiplicadores | $4,77754 \cdot 10^{-7}$ W/m <sup>2</sup> | $5,48699 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> |
| D. con un multiplicador + Newton | $4,77826 \cdot 10^{-7}$ W/m <sup>2</sup> | $5,48639 \cdot 10^{-6}$ W/m <sup>2</sup> |

En el caso de  $N$ , presión efectiva, se aprecian notables diferencias tanto cualitativas como cuantitativas, en los resultados obtenidos con los diferentes métodos. La explicación a tales diferencias se basa en la propia definición de la variable presión

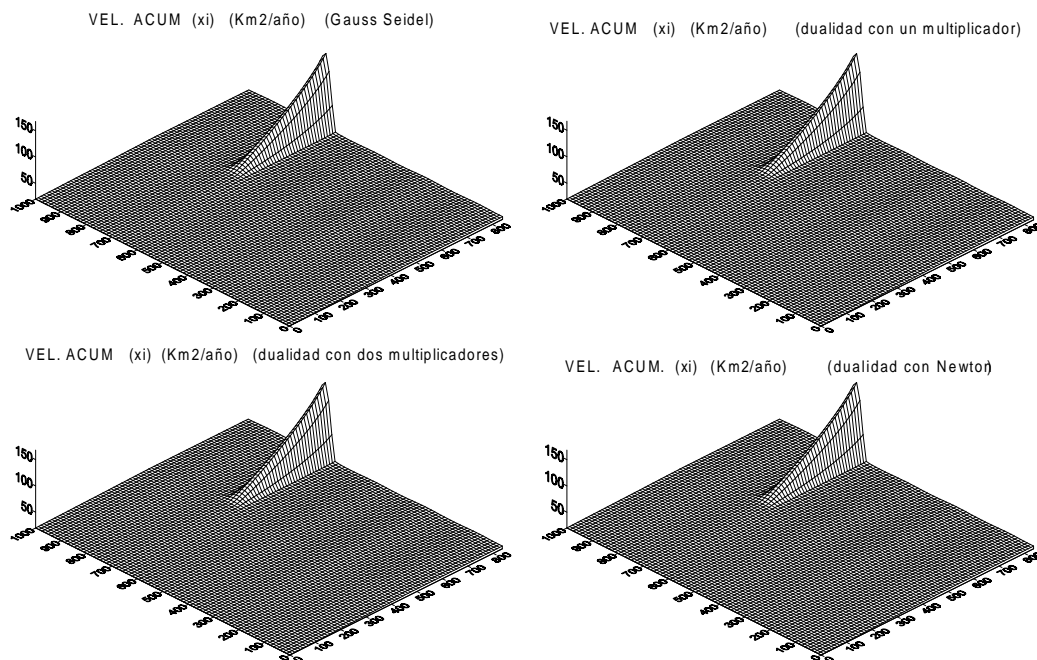


Figura 4.18: Resultados obtenidos para la velocidad acumulada.

efectiva. Se recuerda que la expresión de  $N$  en función de la variable flujo de agua en el sistema de drenaje es  $N = (Q + \bar{Q})^{-1/3}$ , y por tanto, variaciones del orden de  $10^{-6}$  o de  $10^{-11}$  en la variable  $Q$  se traducen en variaciones de los valores obtenidos por los distintos métodos para  $N$  del orden de  $10^2$  y  $10^4$  (recuérdese que  $\bar{Q} = 7,2 \cdot 10^{-12}$ ).

## 4.7. Conclusiones

Como se dijo con anterioridad, los resultados numéricos ilustran que el modelo multívoco reproduce satisfactoriamente la generación de corrientes de hielo rápidas. Sin embargo, aunque con dicho modelo se formule de manera matemáticamente correcta el problema de obstáculo naturalmente asociado a la determinación del flujo de agua basal y se obtengan soluciones físicamente admisibles, sigue presentando una debilidad. Nos referimos, concretamente, a la limitación que supone la necesidad de prescribir unas condiciones iniciales especiales (de tipo oscilatorio) para el problema del flujo de agua. Esta limitación pretendemos superarla mediante la formulación de un modelo totalmente bidimensional, el cual presentamos y estudiamos en el próximo capítulo.

La resolución numérica, también revela la gran dependencia del comportamiento cualitativo y cuantitativo de los resultados respecto de los valores paramétricos y de los datos iniciales. Uno de los problemas que dejamos para investigaciones futuras es

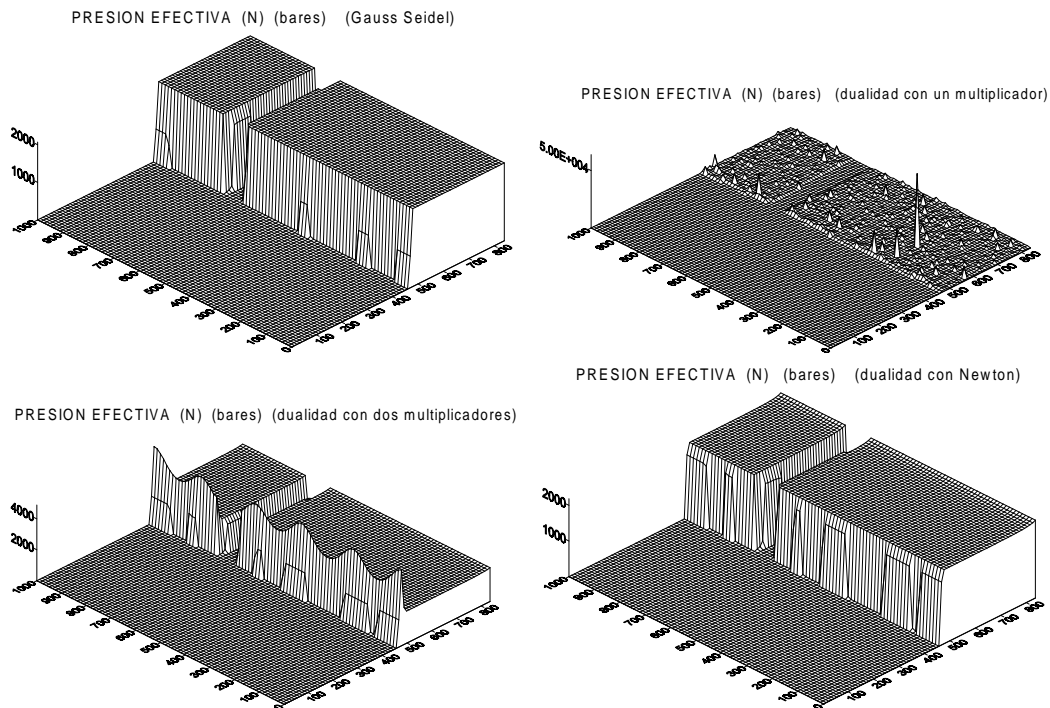


Figura 4.19: Resultados obtenidos para la presión efectiva.

el estudio, desde los puntos de vista analítico y numérico, de la simetría del problema y también el de las implicaciones que puedan tener en los resultados obtenidos, el empleo de una ley de conservación de la masa de tipo integral en vez de local. Nos referimos, concretamente, a la presencia del término integral no local que aparece en  $(S)_4$  (ecuación de conservación de la masa). Los resultados numéricos obtenidos nos inducen a pensar que el hecho de que sólo aparezca una corriente, incluso en el caso de que las perturbaciones sean simétricas y tomen los mismos valores, se debe precisamente a dicho término integral.

Otra de las líneas de trabajo futuras, consiste en el modelado del flujo de hielo en la zona denominada en la bibliografía *ice sheet/ice shelf transition*, es decir, la zona en la cual el hielo deja de deslizar sobre el lecho de sedimentos y pasa a flotar en el agua del mar. Este problema, al igual que el de las corrientes de hielo, es un problema de obstáculo (o de frontera libre, pero en este caso, asociada al espesor de hielo), para el cual esperamos plantear un modelo, y posteriormente, resolverlo numéricamente. Los conocimientos y experiencia adquirida en este trabajo de investigación, en el empleo de métodos y algoritmos del análisis numérico (método de Gauss Seidel con proyección, algoritmo de dualidad,...), adecuados para la resolución de problemas de frontera libre, nos ofrece la posibilidad de aplicar dichos métodos a numerosos problemas que surgen en el modelado de fenómenos geofísicos, entre los cuales, se encuentra el que acabamos de mencionar, relativo a la dinámica del flujo del hielo.



# Capítulo 5

## El Sistema elíptico.

En esta sección se presenta un nuevo modelo para tratar de describir el fenómeno de las corrientes rápidas de hielo de la Siple Coast, con el que se pretenden superar algunas de las limitaciones físicas detectadas en el modelo de Fowler y Johnson. Algunos resultados preliminares en esta dirección pueden encontrarse en el libro de Fowler ([50]) y en la tesis de Johnson ([53]).

El problema subyacente al de establecer un modelo bidimensional para el sistema de drenaje de la Siple Coast radica en la elaboración de una teoría general del drenaje subglaciar, que generalice la teoría de Fowler y Walder ([111]) y sea aplicable a distintos escenarios geofísicos (por ejemplo, la bahía de Hudson).

En este nuevo modelo, todas las variables dependen de las dos coordenadas espaciales (la longitudinal, en la dirección principal de flujo y la transversal o lateral, en la dirección perpendicular a la anterior), siendo de especial interés las variaciones a pequeñas escalas de los perfiles de las masas de hielo y su papel en las variaciones (a gran escala) del flujo de agua en el sistema de drenaje. Además, la velocidad y la cizalla son consideradas magnitudes vectoriales, para de este modo, poder analizar la importancia que puedan tener sus componentes transversales (no consideradas en el modelo de Fowler y Johnson) en el mecanismo de inestabilidad que opera en el sistema dinámico no lineal de las corrientes de hielo rápidas.

La deducción del sistema no lineal acoplado para el espesor y la presión efectiva, su generalización al caso de las corrientes rápidas de los glaciares (*glacier streams*), la formulación completa del problema (incluyendo condiciones de contorno adecuadas) y la resolución explícita en algunos casos sencillos son completamente originales y abren el camino hacia el modelado y la comprensión del problema de las corrientes rápidas de hielo. El objetivo fundamental que se persigue en este capítulo es la

reproducción del fenómeno de las corrientes de hielo sin la necesidad de prescribir condiciones iniciales especiales en el *ice divide*, pues según una conjetura de Fowler y Schiavi (véase [55]), el fenómeno se debe a la existencia de un mecanismo de propagación retrógrada originado por una inestabilidad en el frente (*grounding line*).

## 5.1. Deducción del modelo.

Las variables vectoriales que se estudian en este nuevo modelo son:  $\vec{Q} = (Q_{\parallel}, Q_{\perp})$ , vector flujo de agua,  $\vec{u} = (u_{\parallel}, u_{\perp})$ , vector velocidad del hielo,  $\vec{\tau} = (\tau_{\parallel}, \tau_{\perp})$ , vector de cizalla (tensor de esfuerzos viscosos), complementadas con los campos escalares:  $N = N(x, y)$ , presión efectiva,  $h = h(x, y)$ , espesor de hielo y  $q = q(x, y)$ , término de enfriamiento conductivo y convectivo.

Una vez presentadas las variables, siguiendo una técnica bien establecida (véase [50]), se procederá a la deducción física de las ecuaciones dimensionales de las que va a constar el modelo. Las mayoría de las ecuaciones se obtienen de forma casi directa, sin más que generalizar convenientemente las expresiones y ecuaciones relativas al modelo de Fowler y Johnson. Sin embargo, para la deducción de algunas ecuaciones, no servirá una simple generalización, sino que se requerirá un análisis más detallado y profundo, pues en este caso, en el que quieren superarse algunas de las limitaciones detectadas en el modelo de Fowler y Johnson, ya no serán válidas algunas de las hipótesis y simplificaciones que ellos asumieron.

En el estudio del modelo de Fowler y Johnson se vio que el sistema de siete ecuaciones adimensionales ( $S_F$ ) podía reducirse al sistema ( $SR$ ), que era un sistema acoplado de tres ecuaciones, una para cada una de las variables  $h(x)$ ,  $Q(x, y)$ , y  $\xi(x, y)$ . En el caso del modelo bidimensional se verá que el sistema de seis ecuaciones adimensionales (en el modelo bidimensional, no existe una variable que se corresponda con la variable  $\xi$ , velocidad acumulada, del modelo de Fowler y Johnson) es reducible a un sistema acoplado de dos ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico para las variables escalares  $N(x, y)$  y  $h(x, y)$ . Seguimos, por tanto, considerando un régimen estacionario, dejando el modelado y el estudio de las interacciones entre distintas escalas temporales del fenómeno para investigaciones futuras. En [55] y en [100], pueden encontrarse algunos resultados preliminares en este sentido, pues se consideran las interacciones entre la escala usual empleada en el modelado del flujo del hielo y la escala asociada al cambio de configuración del sistema de drenaje.



### 5.1.1. La formulación físico-matemática.

En esta sección, se plantearán las ecuaciones dimensionales del modelo totalmente bidimensional. La coordenada longitudinal será denotada por  $x$ , la coordenada transversal por  $y$ ,  $z$  denotará la coordenada vertical,  $z_b = z_b(x, y)$  denotará la altura de la base y  $z_i = z_i(x, y)$ , la superficie del manto de hielo. De este modo, el espesor puede expresarse en función de  $z_i$  y  $z_b$  del modo siguiente:  $h = z_i - z_b$ .

El hecho de considerar la variación del flujo de hielo en ambas direcciones, es decir, en la dirección longitudinal (principal) y la transversal, hace que se considere una expresión de la conservación de la masa de la forma

$$\nabla \cdot (h\vec{u}) = a. \quad (5.1)$$

El término de acumulación/ablación, como en el modelo de Fowler Johnson, se considera nulo, es decir,  $a \approx 0$ , puesto que seguimos considerando un régimen estacionario. Nótese, que la influencia del término de acumulación es mayor en un régimen transitorio (véase [100] y [55]) y en regiones donde el efecto oscilatorio de las precipitaciones es (o ha sido) mayor (en la bahía de Hudson durante el último máximo glacial por ejemplo). Desarrollando el operador de divergencia en (5.1), la ecuación de conservación de la masa de hielo es

$$\nabla \cdot (h\vec{u}) = (hu_{\parallel})_x + (hu_{\perp})_y = 0, \quad (5.2)$$

donde  $u_{\parallel}$  es la componente del vector velocidad en la dirección longitudinal, es decir, la dirección principal de flujo y  $u_{\perp}$  es la componente en la dirección transversal.

El movimiento horizontal de los mantos de hielo (*ice sheets*), para los cuales se tiene que  $\beta \approx 0$ , donde  $\beta$  es el ángulo que mide la inclinación de la base con respecto a la horizontal, está originado por la fuerza de cizalla presentes en las capas de hielo más profundas, debidas a la pendiente superficial (*gravity driven fluid flow*). En el caso de los glaciares, para modelar su movimiento horizontal es necesario tener en cuenta, no sólo la pendiente superficial, sino también la pendiente de la base. Por tanto, para determinar la expresión del vector de cizalla,  $\vec{\tau} = (\tau_{\parallel}, \tau_{\perp})$ , donde  $\tau_{\parallel}$  es la componente longitudinal y  $\tau_{\perp}$  es la componente transversal, han de tenerse en cuenta tanto la pendiente superficial de la masa de hielo, como la inclinación de la base. La ecuación para el vector de cizalla  $\vec{\tau}$ , que se obtiene mediante un balance entre las fuerzas de cizalla y la fuerza asociada a la presión ejercida por la masa de hielo, es la siguiente:

$$\vec{\tau} = \rho_i gh(\sin(\beta)\vec{x} - \nabla h), \quad (5.3)$$

donde  $\vec{x}$  es el vector unitario en la dirección principal de flujo.

**Observación 5.1.** *La expresión unidimensional correspondiente a (5.3), es decir, la expresión que se obtendría para la cizalla, cuando se considera sólo la dirección principal de flujo, es*

$$\tau = -\rho_i g h h_x + \rho_i g h \operatorname{sen}(\beta). \quad (5.4)$$

*En dicha expresión, el término  $\rho_i g h \operatorname{sen}(\beta)$  representa la componente en la dirección principal de flujo del peso del hielo, la cual sólo aparece cuando la base presenta cierta inclinación, pues de lo contrario, el flujo principal sigue la dirección de la horizontal y el peso es perpendicular a la base.*

*Si se considera la relación de escalas,  $[\tau] = \rho_i g [h] \operatorname{sen}(\beta)$ , entonces la ecuación adimensional que se obtiene es,*

$$\tau = h(1 - \mu h_x),$$

*siendo  $\mu$  un parámetro, dado por  $\mu = [h]/(l \operatorname{sen}(\beta))$ , donde  $l$  es la escala de longitud considerada en la dirección principal de flujo. Cuando la base se supone prácticamente plana, es decir,  $\beta \rightarrow 0$ , se tiene que  $\mu \rightarrow \infty$ . Sin embargo, si se elige la relación de escalas  $[\tau] = \rho_i g [h]^2 / l$ , que es la relación considerada en el modelo de Fowler y Johnson, se llega a la siguiente ecuación adimensional*

$$\tau = -h(h_x - \nu),$$

*donde el parámetro  $\nu = l \operatorname{sen}(\beta) / [h]$ . Nótese, que en el límite  $\beta \rightarrow 0$  (base plana),  $\nu \rightarrow 0$ , recuperándose en este caso, la expresión de la cizalla presentada en el modelo de Fowler y Johnson.*

El modelo también está basado en la consideración de la reología del hielo propuesta por Boulton e Hindmarsh ([15]) para el caso en el que sólo se considera el flujo del hielo en la dirección longitudinal (dominante). Según esta teoría, las fuerzas de cizalla en la dirección principal de flujo (longitudinal)  $\tau$ , está relacionada con la velocidad del hielo  $u$  (en la misma dirección) mediante una ley de deslizamiento del tipo

$$\tau = c N^s u^r, \quad (5.5)$$

(recuérdese la deducción de la ley de deslizamiento propuesta para el modelo de Fowler y Johnson en el capítulo segundo) donde  $c$  es un coeficiente de fricción y los exponentes  $r$  y  $s$  deben tomar valores en el intervalo  $(0, 1)$ . La generalización al caso bidimensional de este tipo de leyes es la siguiente:

$$\vec{\tau} = c N^s |\vec{u}|^{r-1} \vec{u}. \quad (5.6)$$

También se empleará la expresión equivalente a la anterior dada por

$$\vec{u} = c^{-1/r} N^{-s/r} |\vec{\tau}|^{\frac{1}{r}-1} \vec{\tau}.$$

Se recuerda que la variable  $N$ , en (5.6), representa la presión efectiva, la cual estará relacionada con el flujo de agua mediante una ley de drenaje. Para la deducción de una ley de drenaje relativa al caso bidimensional nos basaremos, al igual que se hizo para la deducción de la ley de drenaje del modelo de Fowler y Johnson, en la teoría de drenaje unidimensional propuesta por Fowler y Walder. Se recuerda, que según dicha teoría, la relación entre la presión efectiva y el flujo de agua es del tipo:  $N = \tilde{c}Q^{-1/n}$ , donde  $n$  era el exponente de la ley de flujo no lineal de Glen,  $\tilde{c}$  era una constante que medía la cohesión de los sedimentos que constituyen la base y en la que destaca la relación inversamente proporcional entre  $Q$  y  $N$ .

El flujo de agua  $Q$  tiene la misma dirección, pero sentido opuesto al del gradiente de la fuerza ejercida por el agua y además, se considera que dicho flujo de agua es proporcional al cuadrado del gradiente hidráulico (véase [50]). La fuerza ejercida por el agua viene dada por la expresión,  $p_w + \rho_w g z_b$ , donde  $\rho_w$  es la densidad del agua y  $p_w$  es la presión del agua. El gradiente hidráulico, en el caso unidimensional (donde sólo se considera la dirección principal de flujo), vendría dado por

$$\phi = -\frac{\partial p_w}{\partial x} - \rho_w g \frac{\partial z_b}{\partial x}. \quad (5.7)$$

Si se sustituye en (5.7) la presión de agua  $p_w$ , por su expresión en función de la presión efectiva  $N$  y la presión de la carga de hielo  $p_i$ , es decir,  $p_w = p_i - N$  y se supone  $\beta \approx 0$ , según lo cual sería lícito aproximar el término  $-\partial z_b/\partial x$  por  $\text{sen}(\beta)$ , se llega a la expresión

$$\phi = -\frac{\partial(p_i - N)}{\partial x} + \rho_w g \text{sen}(\beta) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial p_i}{\partial x} + \rho_w g \text{sen}(\beta). \quad (5.8)$$

Como  $p_i = \rho_i g h$ , entonces

$$\phi = \frac{\partial N}{\partial x} - \rho_i g h \frac{\partial h}{\partial x} + \rho_w g \text{sen}(\beta).$$

La generalización natural de la expresión anterior al caso bidimensional conduce a la siguiente expresión para el vector gradiente hidráulico,

$$\vec{\phi} = \nabla N - \rho_i g \nabla h + \rho_w g \text{sen}(\beta) \vec{x}. \quad (5.9)$$

De este modo, el vector flujo de agua queda definido por la expresión,

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \left( \frac{\tilde{c}}{N} \right)^n |\vec{\phi}| \vec{\phi} = \\ &= \left( \frac{\tilde{c}}{N} \right)^n |\nabla N - \rho_i g \nabla h + \rho_w g \text{sen}(\beta) \vec{x}| (\nabla N - \rho_i g \nabla h + \rho_w g \text{sen}(\beta) \vec{x}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nótese que (5.10) representa una ley de Darcy no lineal para el flujo de agua en términos de la presión y del gradiente hidráulico.

**Observación 5.2.** Para obtener a partir de (5.10), la expresión

$$\vec{Q} = \left( \frac{c'}{N} \right)^n |\nabla N + \rho_i g \text{sen}(\alpha) \vec{x}| (\nabla N + \rho_i g \text{sen}(\alpha) \vec{x}),$$

presentada en la deducción de la ley de drenaje del modelo de Fowler y Johnson (capítulo segundo), se ha razonar como sigue: se parte de la expresión del espesor de hielo en función de  $z_i$  y  $z_b$ , es decir,  $h = z_i - z_b$ . Entonces, al tomar gradientes en la expresión anterior, se tiene que  $\nabla h = \nabla z_i - \nabla z_b$ . Si se supone que  $\beta \approx 0$  (base prácticamente plana), podemos utilizar la aproximación  $-\nabla z_b \approx \text{sen}(\beta) \vec{x}$  y análogamente, suponiendo que  $\alpha \approx 0$ , se puede considerar que  $-\nabla z_i \approx \text{sen}(\alpha) \vec{x}$ , siendo  $\alpha$  el ángulo que forma la superficie del manto de hielo con la horizontal. De este modo, se consigue la siguiente expresión para el gradiente del espesor de hielo,

$$-\nabla h = (\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta)) \vec{x}.$$

En el modelo propuesto por Fowler y Johnson, se supuso que la base era prácticamente plana y por tanto, consideraron el límite  $\beta \rightarrow 0$ . Bajo las suposiciones anteriores, se tiene que el gradiente hidráulico y el vector flujo de agua vendrían dados, respectivamente, por las expresiones consideradas por Fowler y Johnson, es decir,

$$\vec{\phi} = \nabla N + \rho_i g \text{sen}(\alpha) \vec{x},$$

$$\vec{Q} = \left( \frac{\tilde{c}}{N} \right)^n |\vec{\phi}| \vec{\phi} = \left( \frac{\tilde{c}}{N} \right)^n |\nabla N + \rho_i g \text{sen}(\alpha) \vec{x}| (\nabla N + \rho_i g \text{sen}(\alpha) \vec{x}).$$

Para deducir una ecuación que exprese la conservación del flujo de agua en el caso bidimensional, ha de considerarse la expresión del balance térmico basal en forma vectorial (generalización natural de la expresión unidimensional), es decir,  $G + \vec{\tau} \cdot \vec{u} - q$ , donde  $G$  es el flujo de calor geotérmico,  $\vec{\tau} \cdot \vec{u}$  representa el calor de fricción (disipación viscosa de la energía mecánica) y  $q$  consiste en una parametrización de los términos de enfriamiento conductivo y convectivo. La parametrización considerada para el término de enfriamiento  $q$  será la siguiente

$$q = \frac{k \Delta T}{h} + \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left( \frac{\rho_i c_p k}{l} \right)^{1/2} |\vec{u}|^{1/2} \Delta T, \quad (5.11)$$

donde el primer cociente representa el enfriamiento conductivo y el segundo, el convectivo. Esta expresión es una generalización de la versión unidimensional obtenida mediante la aplicación de una teoría de capa límite térmica que describe el flujo de calor desde la base hacia la masa de hielo situada inmediatamente por encima de la capa límite térmica (véase [49]).

El exceso de calor producido en la base, dado por  $G + \vec{\tau} \cdot \vec{u} - q$ , origina una velocidad de derretimiento del hielo dada por

$$(G + \vec{\tau} \cdot \vec{u} - q) / \rho_w L$$

donde  $L$  es el calor latente del hielo y  $\rho_w$ , la densidad del agua. Si el agua basal resultante es distribuida a través de los canales de un sistema basal de drenaje, entonces el flujo de agua a través de los canales varía según la expresión

$$\nabla \cdot \vec{Q} = \frac{(G + \vec{\tau} \cdot \vec{u} - q)w_d}{\rho_w L}, \quad (5.12)$$

donde  $w_d$  es la distancia media entre canales.

Considerando las ecuaciones (5.2), (5.3), (5.6), (5.10) (5.11) y (5.12), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones dimensionales para el modelo totalmente bidimensional:

$$(S_d) := \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (h\vec{u}) = 0, \\ \vec{\tau} = \rho_i g h (\text{sen}(\beta)\vec{x} - \nabla h), \\ \vec{\tau} = cN^s |\vec{u}|^{r-1} \vec{u}, \\ \vec{Q} = \left(\frac{\bar{\epsilon}}{N}\right)^n |\vec{\phi}| \vec{\phi}, \\ \nabla \cdot \vec{Q} = \frac{(G + \vec{\tau} \cdot \vec{u} - q)w_d}{\rho_w L}, \\ q = \frac{k\Delta T}{h} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho_i c_p k}{l}\right)^{1/2} |\vec{u}|^{1/2} \Delta T. \end{array} \right.$$

### 5.1.2. Las ecuaciones básicas del modelo.

Una vez que se tiene el sistema de ecuaciones dimensionales  $(S_d)$ , se procede a la obtención de las ecuaciones adimensionales. El proceso de adimensionalización en este caso será similar al realizado en la adimensionalización de las ecuaciones dimensionales del modelo de Fowler y Johnson.

Las escalas que se considerarán en el caso bidimensional son las siguientes:

$$[x] \sim l \quad [y] \sim d, \quad [h] \sim h,$$

$$[u_{\perp}] = [u_{\parallel}] \frac{d}{l}, \quad [\tau_{\perp}] = [\tau_{\parallel}] \left( \frac{d}{l} \right)^r, \quad [\tau_{\parallel}] = \rho_i g \frac{[h]^2}{l} = c [u_{\parallel}]^r [N]^s, \quad (5.13)$$

$$\frac{[Q_{\perp}]}{d} = \frac{[Q_{\parallel}]}{l} = \frac{w_d}{\rho_w L} [\tau_{\parallel}] [u_{\parallel}], \quad [Q_{\parallel}] = \left( \frac{c'}{[N]} \right)^n \left( \rho_i g \frac{[h]}{l} \right)^2, \quad [q] = [\tau_{\parallel}] [u_{\parallel}],$$

y los parámetros que aparecen como resultado del proceso de adimensionalización son:

$$\gamma = \frac{G}{[\tau_{\parallel}] [u_{\parallel}]}, \quad \nu = \frac{\text{sen}(\beta) l}{[h]}, \quad \delta = \frac{d}{l}, \quad \epsilon = \left( \frac{[N]}{\rho_i g [h]} \right)^{1/2},$$

$$\lambda = \frac{k \Delta T}{[h] [\tau_{\parallel}] [u_{\parallel}]}, \quad \sigma = \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left( \frac{\rho_i c_p k}{l [u_{\parallel}]} \right)^{1/2} \frac{\Delta T}{[\tau_{\parallel}]}. \quad (5.14)$$

Según datos obtenidos en mediciones realizadas en el dominio de flujo de la Siple Coast, se tienen los siguientes valores para las escalas:

$$[\tau_{\parallel}] = 0,15 \text{ bares}, \quad [u_{\parallel}] = 500 \text{ m a}^{-1}, \quad [Q_{\parallel}] = 1 \text{ m s}^{-1},$$

$$[N] = 0,4 \text{ bares}, \quad [h] = 1270, \quad l = d = 1000 \text{ Km}. \quad (5.15)$$

Nótese, que estos valores son sólo indicativos y que en un rescalamiento local (tal y como se hizo en el modelo de Fowler y Johnson) las escalas  $l$  y  $d$  tomarían otros valores<sup>1</sup>. Los valores típicos de las constantes físicas empleadas son los siguientes:

$$k = 2,1 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}, \quad \rho_i = 917 \text{ Kg m}^{-3}, \quad \rho_w = 10^3 \text{ Kg m}^{-3}, \quad g = 9,8 \text{ m s}^{-2},$$

$$\Delta T = 30 \text{ K}, \quad L = 335 \text{ kJ Kg}^{-1}, \quad c_p = 2009 \text{ J Kg}^{-1} \text{K}^{-1}, \quad G = 0,05 \text{ W m}^{-2}. \quad (5.16)$$

De los valores típicos dados en (5.16), se deducen los de  $c$ ,  $\tilde{c}$  y  $w_d$ . De (5.15) y de (5.16), se deduce que la escala para el enfriamiento es  $[q] \sim 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ bares m s}^{-1}$ . Los valores de  $r$  y  $s$ , exponentes relativos a la reología de Boulton y Hindmarsh que aparecen en la ley de deslizamiento, verifican que  $0 < r, s < 1$ . En este caso, al igual que ya se hiciera en el modelo de Fowler y Johnson, se tomarán los valores  $r = s = 1/2$ . El exponente  $n$  (exponente de la ley de flujo de Glen) toma el valor típico  $n = 3$ . Los valores paramétricos son aproximadamente:

$$\gamma = \frac{G}{[\tau_{\parallel}] [u_{\parallel}]} \sim 0,555, \quad \nu = \frac{\text{sen}(\beta) l}{[h]} \sim 0,8, \quad \lambda = \frac{k \Delta T}{[h] [\tau_{\parallel}] [u_{\parallel}]} \sim 0,551,$$

<sup>1</sup>Esta elección se fundamenta en la búsqueda del posible efecto de las componentes laterales de los campos de velocidad y cizalla, y el de las variaciones laterales del espesor.

$$\delta = \frac{d}{l} \sim 1, \quad \epsilon = \left( \frac{[N]}{\rho_i g [h]} \right)^{1/2} \sim 0,18 \cdot 10^{-3}, \quad \sigma = \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left( \frac{\rho_i c_p k}{l [u_{\parallel}]} \right)^{1/2} \frac{\Delta T}{[\tau_{\parallel}]} \sim 11,17.$$

Las variables dimensionales se expresan en función de las variables adimensionales, denotadas con el superíndice \* para distinguirlas de las dimensionales, y de las escalas definidas según los balances dados en (5.13) del modo siguiente:

$$\begin{aligned} h &= [h]h^* = hh^*, \quad \vec{Q} = (Q_{\parallel}, Q_{\perp}) = ([Q_{\parallel}]Q_{\parallel}^*, [Q_{\perp}]Q_{\perp}^*), \\ \vec{u} &= (u_{\parallel}, u_{\perp}) = ([u_{\parallel}]u_{\parallel}^*, [u_{\perp}]u_{\perp}^*), \quad \vec{\tau} = (\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}) = ([\tau_{\parallel}]\tau_{\parallel}^*, [\tau_{\perp}]\tau_{\perp}^*), \\ N &= [N]N^*, \quad q = [q]q^*. \end{aligned} \quad (5.17)$$

A continuación, procedemos a la obtención de las ecuaciones adimensionales del modelo. Comenzamos con la ecuación de conservación de la masa de hielo, (5.2). Sustituyendo las variables dimensionales por su expresión en función de las escalas y las variables adimensionales en la ecuación dimensional y realizando las simplificaciones oportunas en función de los balances dados en (5.13), se obtiene la siguiente ecuación de conservación de la masa del hielo, expresada en función de las variables adimensionales:

$$(hu_{\parallel})_x + (hu_{\perp})_y = 0, \quad (5.18)$$

donde se ha omitido el superíndice \* en las variables adimensionales para simplificar la notación. De ahora en adelante seguiremos esta convención.

Para la ecuación de balance de fuerzas (5.3)

$$\vec{\tau} = (\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}) = \rho_i g h (\text{sen}(\beta) - h_x, -h_y),$$

la expresión adimensional correspondiente, expresada en componentes y obtenida razonando del mismo modo que en el caso de la ecuación de la conservación de la masa, es la siguiente:

$$(\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}) = (h(\nu - h_x), -\delta^{-1} h h_y), \quad (5.19)$$

Respecto a la ley de deslizamiento (5.6),

$$\vec{\tau} = (\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}) = c N^s |\vec{u}|^{r-1} (u_{\parallel}, u_{\perp}),$$

se tiene que la expresión adimensional correspondiente es:

$$(\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}) = N^s |(u_{\parallel}, \delta u_{\perp})|^{r-1} (u_{\parallel}, \delta u_{\perp}). \quad (5.20)$$

También será considerada la siguiente expresión equivalente a (5.20)

$$(u_{\parallel}, \delta u_{\perp}) = (N)^{-s/r} |(\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp})|^{\frac{1}{r}-1} (\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}). \quad (5.21)$$

La ecuación dimensional que expresa la ley de drenaje considerada era

$$\vec{Q} = \frac{\tilde{c}}{N^n} |\vec{\phi}| \vec{\phi}, \quad (5.22)$$

donde  $\vec{\phi}$  es el gradiente hidráulico, dado por,  $\vec{\phi} = \nabla N - \rho_i g \nabla h + \rho_w g \text{sen}(\beta) \vec{x}$ .

La ecuación (5.22) se expresa en función de las variables adimensionales y los parámetros definidos en (5.14) del modo siguiente:

$$(Q_{\parallel}, \delta Q_{\perp}) = N^{-n} \left| \epsilon^2 N_x - h_x + \frac{\rho_w}{\rho_i} \nu, \delta^{-1} (\epsilon^2 N_y - h_y) \right| \left( \epsilon^2 N_x - h_x + \frac{\rho_w}{\rho_i} \nu, \delta^{-1} (\epsilon^2 N_y - h_y) \right), \quad (5.23)$$

donde el gradiente hidráulico  $\vec{\phi}$ , viene dado por

$$\vec{\phi} = \left( \epsilon^2 N_x - h_x + \frac{\rho_w}{\rho_i} \nu, \delta^{-1} (\epsilon^2 N_y - h_y) \right). \quad (5.24)$$

Respecto a la ecuación de conservación del flujo de agua, dada por (5.12)

$$\nabla \cdot \vec{Q} = \frac{(G + \vec{\tau} \cdot \vec{u} - q) w_d}{\rho_w L},$$

se tiene que la ecuación adimensional asociada es:

$$(Q_{\parallel})_x + (Q_{\perp})_y = \gamma + \tau_{\parallel} u_{\parallel} + \delta^{r+1} \tau_{\perp} u_{\perp} - q. \quad (5.25)$$

Por último, la ecuación dimensional para el enfriamiento  $q$ , (5.11)

$$q = \frac{k \Delta T}{h} + \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left( \frac{\rho_i c_p k |\vec{u}|}{l} \right)^{1/2} \Delta T,$$

tiene la siguiente expresión adimensional,

$$q = \frac{\lambda}{h} + \sigma |(u_{\parallel}, \delta u_{\perp})|^{1/2}. \quad (5.26)$$

En conclusión, utilizando las nueve variables adimensionales  $\vec{u} = (u_{\parallel}, u_{\perp})$ ,  $\vec{\tau} = (\tau_{\parallel}, \tau_{\perp})$ ,  $\vec{Q} = (Q_{\parallel}, Q_{\perp})$ ,  $N$ ,  $h$  y  $q$  el sistema de ecuaciones dado por (5.18), (5.19), (5.20), (5.23), (5.25) y (5.26) es:



$$(S_a) := \begin{cases} (hu_{\parallel})_x + (hu_{\perp})_y = 0, \\ (\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}) = (h(\nu - h_x), -\delta^{-1} h h_y), \\ (\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}) = N^s |(u_{\parallel}, \delta u_{\perp})|^{r-1} (u_{\parallel}, \delta u_{\perp}), \\ (Q_{\parallel}, \delta Q_{\perp}) = \frac{1}{N^n} |\vec{\phi}| \vec{\phi}, \\ (Q_{\parallel})_x + (Q_{\perp})_y = \gamma + \tau_{\parallel} u_{\parallel} + \delta^{r+1} \tau_{\perp} u_{\perp} - q, \\ q = \frac{\lambda}{h} + \sigma |(u_{\parallel}, \delta u_{\perp})|^{1/2}. \end{cases}$$

donde  $\vec{\phi}$  está definido por (5.24). Al igual que ocurría en el modelo de Fowler y Johnson, en el que el sistema  $(S_F)$  era reducible al sistema de tres ecuaciones  $(SR)$ , en este caso, se verá que el sistema  $(S_a)$  puede ser reducido a un sistema acoplado de dos ecuaciones elípticas para las variables escalares  $N = N(x, y)$  y  $h = h(x, y)$ . Para ello se argumenta como sigue.

## 5.2. El sistema elíptico para el espesor y la presión efectiva.

Para conseguir información acerca de la estructura de las ecuaciones diferenciales (5.18) y (5.25) del sistema  $(S_a)$  y así, proceder a su clasificación, haremos uso del conocimiento adquirido en el estudio del modelo multívoco, así como de las técnicas, formulaciones y formalismos, introducidos en el capítulo tercero, es decir, adecuados para el análisis matemático (aplicación del método de energía, por ejemplo). Comenzaremos deduciendo el sistema acoplado equivalente a  $(S_a)$ , consistente en dos ecuaciones de tipo elíptico para las variables  $N = N(x, y)$  y  $h = h(x, y)$ .

Se comenzará estudiando la ecuación de conservación de la masa  $(S_a)_1$ :

$$(hu_{\parallel})_x = -(hu_{\perp})_y.$$

El campo de velocidades está definido por las componentes (véase (5.21))

$$(u_{\parallel}, \delta u_{\perp}) = N^{-s/r} |(\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp})|^{(1/r)-1} (\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}),$$

donde el campo de fuerzas de cizalla viene dado por las componentes

$$(\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}) = \left( h(\nu - h_x), -\frac{hh_y}{\delta} \right),$$

luego

$$(u_{\parallel}, \delta u_{\perp}) = N^{-s/r} \left| \left( h(\nu - h_x), -\frac{hh_y}{\delta} \right) \right|^{(1/r)-1} \left( h(\nu - h_x), -\frac{hh_y}{\delta} \right).$$

Es decir, las componentes del campo de velocidades vienen dadas por las siguientes identidades:

$$u_{\parallel} = N^{-s/r} \left[ (h(\nu - h_x))^2 + \left( \frac{hh_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} h(\nu - h_x),$$

$$\delta u_{\perp} = -N^{-s/r} \left[ (h(\nu - h_x))^2 + \left( \frac{hh_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} \left( \frac{hh_y}{\delta} \right).$$

Sacando en las expresiones anteriores factor común  $h^{1/r}$ , resulta que

$$u_{\parallel} = N^{-s/r} h^{1/r} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} (\nu - h_x),$$

$$\delta u_{\perp} = -N^{-s/r} h^{1/r} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} \left( \frac{h_y}{\delta} \right).$$

### 5.2.1. Ecuación de conservación de la masa.

A partir de las relaciones anteriores, la ecuación de conservación de la masa de hielo puede ser expresada de forma más general, en términos de  $h$  y de  $N$  como sigue

$$\begin{aligned} & \left[ N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} (\nu - h_x) \right]_x + \\ & + \left[ -N^{-s/r} \delta^{-1} h^{(1/r)+1} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} \left( \frac{h_y}{\delta} \right) \right]_y = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

La ecuación (5.27) es una ecuación elíptica, degenerada, en la variable  $h$ . Esta ecuación está acoplada con  $N$  a través del coeficiente de difusión. Para evitar una posible singularidad del flujo de agua  $Q$  (es decir, que  $Q \rightarrow \infty$ ) cuando  $N \rightarrow 0$  (condición de flotación) se sustituye  $N$  por  $N + \bar{N}$  ( $\bar{N} \approx 0,05$  bares, véase [53]).

Esto hará posible realizar un análisis formal del sistema acoplado siempre que  $N$  sea una solución (débil) positiva y acotada de la ecuación de conservación del flujo de agua. Nótese, que a simple vista, la ecuación (5.27) parece no depender del parámetro  $\epsilon$ , pero sin embargo, de (5.23) y de (5.24) se deduce que sí existe tal dependencia (a través de la variable  $N$ ). Este hecho sugiere el empleo de un argumento de homogeneización para el estudio formal de la ecuación (5.27). Dejaremos la utilización de este tipo de argumento para investigaciones futuras. En lo sucesivo, con el objeto de simplificar la exposición, para denotar a la presión efectiva, dada por  $N + \bar{N}$ , utilizaremos la notación  $N := N + \bar{N}$ .

Ahora, consideraremos la ecuación  $(S_a)_5$

$$\frac{\partial Q_{\parallel}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\perp}}{\partial y} = \gamma + \tau_{\parallel} u_{\parallel} + \delta^{r+1} \tau_{\perp} u_{\perp} - q.$$

La expresión del término de disipación viscosa es

$$(\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}) \cdot (u_{\parallel}, \delta u_{\perp}) = \tau_{\parallel} u_{\parallel} + \delta^{r+1} \tau_{\perp} u_{\perp}.$$

Como

$$\begin{aligned} \tau_{\parallel} &= h(\nu - h_x), & u_{\parallel} &= N^{-s/r} h^{1/r} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} (\nu - h_x), \\ \delta^r \tau_{\perp} &= -\frac{h h_y}{\delta}, \text{ y } & \delta u_{\perp} &= -N^{-s/r} h^{1/r} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} \left( \frac{h_y}{\delta} \right), \end{aligned}$$

se tienen las relaciones

$$\tau_{\parallel} u_{\parallel} = N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( -\frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \left( \frac{1-r}{r} \right)} (\nu - h_x)^2 \quad (5.28)$$

y

$$\delta^{r+1} \tau_{\perp} u_{\perp} = N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2. \quad (5.29)$$

Utilizando la expresión adimensional del vector gradiente hidráulico, (5.24),

$$\vec{\phi} = \left( -h_x + \epsilon^2 N_x + \frac{\rho_w}{\rho_i} \nu, \frac{-h_y + \epsilon^2 N_y}{\delta} \right)$$

y la ley de drenaje  $(S_a)_5$ , se obtiene la identidad

$$\frac{\partial Q_{\parallel}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\perp}}{\partial y} =$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{N^n} \right) \left[ \left( -h_x + \epsilon^2 N_x + \frac{\rho_w \nu}{\rho_i} \right)^2 + \left( \frac{-h_y + \epsilon^2 N_y}{\delta} \right)^2 \right]^{1/2} \left( -h_x + \epsilon^2 N_x + \frac{\rho_w \nu}{\rho_i} \right) \right]_x +$$

$$+ \left[ \left( \frac{1}{\delta^2 N^n} \right) \left[ \left( -h_x + \epsilon^2 N_x + \frac{\rho_w \nu}{\rho_i} \right)^2 + \left( \frac{-h_y + \epsilon^2 N_y}{\delta} \right)^2 \right]^{1/2} (-h_y + \epsilon^2 N_y) \right]_y$$

Por otro lado, de (5.28) y de (5.29), se deduce que el término de balance térmico viene dado por

$$\gamma + \tau_{\parallel} u_{\parallel} + \delta^{r+1} \tau_{\perp} u_{\perp} - q =$$

$$\gamma + N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( -\frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \left( \frac{1-r}{r} \right)} (\nu - h_x)^2 +$$

$$+ N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left[ (\nu - h_x)^2 + \left( -\frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 - q,$$

identidad que puede ser escrita de la forma (más compacta) siguiente:

$$\gamma + \tau_{\parallel} u_{\parallel} + \delta^{r+1} \tau_{\perp} u_{\perp} - q = \gamma + N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left| \left( \nu - h_x, \frac{h_y}{\delta} \right) \right|^{(1/r)+1} - q.$$

La expresión del enfriamiento  $q$  en función de las variables  $h$  y  $N$  puede obtenerse sin más que tener en cuenta que

$$(u_{\parallel}, \delta u_{\perp}) = N^{-s/r} |(\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp})|^{(1/r)-1} (\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}),$$

de donde

$$|(u_{\parallel}, \delta u_{\perp})|^{1/2} = N^{-s/2r} |(\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp})|^{1/2r} (\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp}).$$

Como

$$|(\tau_{\parallel}, \delta^r \tau_{\perp})| = h \left| \left( \nu - h_x, \frac{h_y}{\delta} \right) \right|,$$

se tiene que

$$|(u_{\parallel}, \delta u_{\perp})|^{1/2} = N^{-s/2r} h^{1/2r} \left| \left( \nu - h_x, \frac{h_y}{\delta} \right) \right|^{1/2r}$$

y por tanto

$$q = \frac{\lambda}{h} + \sigma |(u_{\parallel}, \delta u_{\perp})|^{1/2} = \frac{\lambda}{h} + \sigma N^{-s/2r} h^{1/2r} \left| \left( \nu - h_x, \frac{h_y}{\delta} \right) \right|^{1/2r}.$$

### 5.2.2. Ecuación de conservación para la presión efectiva.

De los cálculos anteriores, se deduce la siguiente expresión para la conservación del flujo de agua en función de las variables  $h$  y  $N$  (conservación de la presión efectiva):

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \frac{1}{N^n} \right) \left[ \left( -h_x + \epsilon^2 N_x + \frac{\rho_w \nu}{\rho_i} \right)^2 + \left( \frac{-h_y + \epsilon^2 N_y}{\delta} \right)^2 \right]^{1/2} \left( -h_x + \epsilon^2 N_x + \frac{\rho_w \nu}{\rho_i} \right) \right]_x \\
& + \left[ \left( \frac{1}{\delta^2 N^n} \right) \left[ \left( -h_x + \epsilon^2 N_x + \frac{\rho_w \nu}{\rho_i} \right)^2 + \left( \frac{-h_y + \epsilon^2 N_y}{\delta} \right)^2 \right]^{1/2} (-h_y + \epsilon^2 N_y) \right]_y = \\
& = \gamma + N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left| \left( \nu - h_x, \frac{h_y}{\delta} \right) \right|^{(1/r)+1} - \frac{\lambda}{h} - \sigma N^{-s/2r} h^{1/2r} \left| \left( \nu - h_x, \frac{h_y}{\delta} \right) \right|^{1/2r}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

### 5.2.3. Condiciones de contorno

A continuación, se procederá a la formalización del problema asociado al modelo bidimensional constituido por las ecuaciones (5.27) y (5.30). Sea  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  el cuadrado unidad que representa la región de flujo de hielo de la Siple Coast. Sea  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_l \cup \Gamma_r \cup \Gamma_m$  la frontera de  $\Omega$ , donde  $\Gamma_0$  denota el *ice divide*,  $\Gamma_l$  y  $\Gamma_r$  denotan las fronteras laterales y  $\Gamma_m$  el margen. Las ecuaciones (5.27) y (5.30) son dos ecuaciones en derivadas parciales elípticas no lineales y están fuertemente acopladas. Ambas deben ser, por tanto, complementadas con unas condiciones de contorno adecuadas en  $\partial\Omega$ . Consideraremos la prescripción de una condición de simetría en el *ice divide*, condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas (condición de flujo nulo) en las fronteras laterales y una condición de tipo Dirichlet no homogénea en el margen. Las consideraciones anteriores se expresan en términos matemáticos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
h_x = 0, \quad N_x = 0, \quad \text{en } \Gamma_0, \quad h_y = 0, \quad N_y = 0, \quad \text{en } \Gamma_l \cup \Gamma_r \\
h = h_m, \quad N = N_m, \quad \text{en } \Gamma_m
\end{aligned} \tag{5.31}$$

donde  $h_m$  representa un espesor de transición en el margen (*grounding line*) y  $N_m$ ,  $0 < N_m \ll 1$  aproxima la condición de flotación ( $N_m \approx 0$ ), localizada en la interfase que representa la frontera de separación entre la parte del manto de hielo que yace sobre un lecho de sedimentos y la parte que flota sobre el agua del mar (*ice-sheet/ice-shelf transition at the grounding line*)<sup>2</sup>. En la sección siguiente, se analizarán casos

<sup>2</sup>Se trata de un problema extremadamente interesante desde el punto de vista geofísico (y climatológico), tal y como se desprende del programa WAIS. Sobre este tema, actualmente, estamos

particulares de este problema, que resultan de distintas elecciones de valores para los parámetros  $\nu$ ,  $\delta$  y  $\epsilon$ .

### 5.3. Mantos de hielo (*Ice sheets*).

En este caso,  $\beta \approx 0$ , por tanto tomaremos  $\nu = 0$ . Consideraremos además, que  $\epsilon \neq 0$  y que  $\delta \neq 0$ . Entonces, la ecuación de conservación de la masa (véase (5.27)), asumiendo que  $\nu = 0$ , viene dada por

$$\begin{aligned} & \left[ N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left[ (h_x)^2 + \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} h_x \right]_x + \\ & + \left[ \delta^{-2} N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left[ (h_x)^2 + \left( \frac{h_y}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{1-r}{2r}} h_y \right]_y = 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

y si se toma  $\delta = 1$ , se obtiene la siguiente ecuación elíptica no lineal, doblemente degenerada (ya que  $r \in (0, 1)$ )

$$\nabla \cdot \left( N^{-s/r} h^{(1/r)+1} |\nabla h|^{(1/r)-1} \nabla h \right) = 0,$$

donde la degeneración tiene lugar cuando  $h = 0$  ó  $\nabla h = 0$ . Como ya se mencionó anteriormente, será necesario asegurar que  $N$  ó  $N + \bar{N}$  toman valores estrictamente positivos para evitar que el problema resulte mal planteado. Con el fin de facilitar la exposición de cálculos y consideraciones posteriores, introduciremos los nuevos exponentes  $R = 1/r$  y  $p = R + 1$ . Nótese que  $p \approx 3$  (para  $r \approx 1/2$ ). Entonces (cuando  $\nu = 0$  y  $\delta = 1$ ) resulta la siguiente ecuación de conservación de la masa:

$$\nabla \cdot \left( N^{-s/r} h^p |\nabla h|^{p-2} \nabla h \right) = 0. \quad (5.33)$$

Haciendo uso de la bien conocida fórmula del operador p-Laplaciano

$$\Delta_p h^m = \nabla \cdot \left( |\nabla h^m|^{p-2} \nabla h^m \right) = m |m|^{p-2} \nabla \cdot \left( h^{(p-1)(m-1)} |\nabla h|^{p-2} \nabla h \right) \quad (5.34)$$

(cuando  $p = 2$  se recupera el operador Laplaciano) y definiendo  $(p-1)(m-1) = p$ , se tiene que,

$$m = (2p-1)/(p-1) = (2R+1)/R = 2+r \approx 5/2.$$

---

realizando algunas colaboraciones con profesores de las universidades de Cambridge (profesores R. Hindmarsh y H. Gudmundsson de la British Antarctic Survey) y Oxford (profesores A. Fowler y F. Ng del Oxford Center for Industrial and Applied Mathematics)

Obsérvense los distintos significados del subíndice  $m$ , que por un lado ha sido empleado para denotar las condiciones de contorno en el margen derecho, y por otro, denota el exponente relacionado con el proceso de difusión no lineal modelado por el operador p-Laplaciano. La ecuación (5.33) puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\nabla \cdot (N^{-s/r} |\nabla h^m|^{p-2} \nabla h^m) = 0. \quad (5.35)$$

Nótese que se pueden considerar las soluciones de (5.35) como los estados estacionarios de un proceso de difusión lenta para el espesor, ya que  $m(p-1) \approx 5 > 1$  (condición de homogeneidad positiva del operador). Ahora pasaremos a considerar la ecuación de conservación del flujo de agua. Si  $\nu = 0$ , entonces (véase (5.30))

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{1}{N^n} \right) \left[ (-h_x + \epsilon^2 N_x)^2 + \left( \frac{-h_y + \epsilon^2 N_y}{\delta} \right)^2 \right]^{1/2} (-h_x + \epsilon^2 N_x) \right]_x + \\ & + \left[ \left( \frac{1}{\delta^2 N^n} \right) \left[ (-h_x + \epsilon^2 N_x)^2 + \left( \frac{-h_y + \epsilon^2 N_y}{\delta} \right)^2 \right]^{1/2} (-h_y + \epsilon^2 N_y) \right]_y = \\ & = \gamma + N^{-s/r} h^{(1/r)+1} \left| \left( h_x, \frac{h_y}{\delta} \right) \right|^{(1/r)+1} - \frac{\lambda}{h} - \sigma N^{-s/2r} h^{1/2r} \left| \left( h_x, \frac{h_y}{\delta} \right) \right|^{1/2r} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Si además se toma  $\delta = 1$ , entonces resulta la ecuación:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{N^n} \right) |-\nabla h + \epsilon^2 \nabla N| (-\nabla h + \epsilon^2 \nabla N) \right] = \\ & = \gamma + N^{-s/r} h^{(1/r)+1} |\nabla h|^{(1/r)+1} - \frac{\lambda}{h} - \sigma N^{-s/2r} h^{1/2r} |\nabla h|^{1/2r} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Las ecuaciones (5.35) y (5.37) se complementan con las condiciones de contorno dadas por (5.31), en el dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ . Nótese que se pueden considerar las soluciones de (5.37) como los estados estacionarios de un proceso de difusión rápida para la presión efectiva ya que  $m(p-1) \approx -1 < 1$  (condición de homogeneidad negativa del operador).

## Soluciones especiales.

Sean  $\nu = 0$  y  $\delta = 1$ . Es fácil comprobar (y lo haremos más adelante, una vez quede aclarada la estructura básica de la ecuación en términos de los distintos comportamientos límites del balance de calor), que el par  $(h = h_m, N = N_m)$ , es una solución del sistema acoplado constituido por las ecuaciones (5.35), (5.37) y las condiciones de contorno (5.31), siempre que se verifique la condición de compatibilidad entre los

datos dada por la relación:  $h_m = \lambda/\gamma$ . El hecho de que la relación anterior sea de naturaleza tan restrictiva (luego, probablemente inestable a pequeñas perturbaciones), induce a preguntarse si existirán otras soluciones del sistema constituido por (5.35), (5.37) y (5.31), que puedan ser interpretadas como estados básicos (estacionarios) del sistema cuando se considere el problema evolutivo naturalmente asociado. La consideración de un sistema de drenaje transitorio (mediante la introducción de una escala temporal de relajación para el drenaje  $t' = \delta't$  y los términos  $h_t$  y  $\delta'N_t$  en las ecuaciones elípticas) y el análisis de la estabilidad del espesor (constante)  $h_m$  y de la presión efectiva, se podría desarrollar siguiendo la técnica propuesta en [50]. Dejaremos este interesante problema para investigaciones futuras, que ya han sido comenzadas, en colaboración con la Universidad de Oxford y la Universidad Politécnica de Madrid.

A continuación, consideraremos la posible existencia de soluciones del sistema definido por (5.35), (5.37) y (5.31) con  $h = h_m$ , pero con  $N$  variable. Es fácil ver que  $h = h_m$  satisface la ecuación de conservación de la masa (5.35) y las condiciones de contorno (5.31). Además,  $N$  verifica que (sustituyendo  $h = h_m$  en (5.37))

$$\epsilon^4 \nabla \cdot (N^{-n} |\nabla N|^{p-2} \nabla N) = \gamma - \frac{\lambda}{h_m}, \quad (5.38)$$

siendo  $\epsilon \ll 1$ . El problema para la presión efectiva dado por (5.38) y (5.31), resulta ser un problema de perturbación singular (ya que en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , perdemos las derivadas de orden mayor de la ecuación), asociado a una ecuación singular. En efecto, se define  $(p-1)(m-1) = -n$ , donde  $n$  es el exponente de la ley de flujo de Glen. Entonces  $m = 1 - n/(p-1) \approx -1/2$ . Utilizando la fórmula

$$\Delta_p N^m = \nabla \cdot (|\nabla N^m|^{p-2} \nabla N^m) = m|m|^{p-2} \nabla \cdot (N^{(p-1)(m-1)} |\nabla N|^{p-2} \nabla N),$$

se obtiene que,

$$\left( \frac{\epsilon^4}{m|m|^{p-2}} \right) \nabla \cdot (|\nabla N^m|^{p-2} \nabla N^m) = \gamma - \frac{\lambda}{h_m},$$

siendo  $m(p-1) \approx -1 < 1$ , la homogeneidad negativa del operador de difusión (doblemente no lineal). Introduciendo la nueva variable  $Z = N^m$ , se tiene

$$\left( \frac{\epsilon^4}{m|m|^{p-2}} \right) \nabla \cdot (|\nabla Z|^{p-2} \nabla Z) = \gamma - \frac{\lambda}{h_m}, \quad (5.39)$$

que puede escribirse en forma más compacta como sigue

$$\left( \frac{\epsilon^4}{m|m|^{p-2}} \right) \Delta_p Z = \gamma - \frac{\lambda}{h_m}.$$



Sustituyendo  $p$  y  $m$  por los valores típicos  $p \approx 3$ ,  $m \approx -1/2$  se deduce la ecuación:

$$-4\epsilon^4 \nabla \cdot (|\nabla(N^{-1/2})| \nabla(N^{-1/2})) = \gamma - \frac{\lambda}{h_m},$$

que en términos de la nueva variable  $Z$  es:

$$-4\epsilon^4 \nabla \cdot (|\nabla Z| \nabla Z) = \gamma - \frac{\lambda}{h_m}$$

**Observación 5.3.** *Nótese que la relación entre  $N$  y  $Z = N^m$ , depende del valor del exponente  $m$ , dado por  $m = 1 - n/(p - 1)$ , donde  $n$  es el exponente de Glen ( $n = 3$ ) y  $p = 1 + R = 1 + 1/r$ , siendo  $r$  el exponente que aparece en la ley de deslizamiento (recuérdese que viene dada por la expresión  $\tau = u^r N^s$ ). En nuestro caso, donde asumimos los exponentes de la reología de flujo viscoso no lineal de Boulton e Hindmarsh, se tiene que  $r = 1/2$  y por tanto,  $m = -1/2$ , es decir entre  $N$  y  $Z$  existe una relación de proporcionalidad inversa. Hacemos notar que, al no existir consenso sobre los valores de  $r$  (y  $s$ ), puede ocurrir que para valores de  $r$  pequeños ( $r < 1/3$ ) se obtengan valores de  $m$  positivos y por tanto la relación entre  $N$  y  $Z$  pase a ser de proporcionalidad directa.*

Volvamos ahora a (5.39) expresada de la forma siguiente

$$-\nabla \cdot (|\nabla Z|^{p-2} \nabla Z) = -\frac{m|m|^{p-2}}{\epsilon^4} \left( \gamma - \frac{\lambda}{h_m} \right) = C_{m,p,\epsilon,\gamma,\lambda,h_m} = C \quad (5.40)$$

y complementada con las condiciones de contorno dadas en (5.31). Cuando se considera que  $p \approx 3$  y  $m \approx -1/2$ , se deduce fácilmente que

$$C > 0, \quad \text{si } h_m > \lambda/\gamma, \quad C = 0, \quad \text{si } h_m = \lambda/\gamma, \quad C < 0, \quad \text{si } h_m < \lambda/\gamma.$$

Esto se traduce en que para  $C > 0$ , el balance de calor es positivo, mientras que para  $C < 0$ , el balance de calor es negativo. Si  $C = 0$ , estamos en equilibrio térmico. Es evidente, que el modelo asociado a las hipótesis hechas (*slab model*, espesor constante y base horizontal), no puede presentar variaciones térmicas longitudinales (ni laterales) y sólo describe la respuesta en equilibrio del sistema de drenaje. Tampoco puede representar una transición polar-temperada en el régimen térmico de la base, que viene determinado por los datos del problema.

A continuación, buscaremos soluciones del problema dado por la ecuación (5.39) complementada con las condiciones de contorno,  $Z'(0) = 0$  y  $Z(1) = Z_m$  (véase(5.31)), del tipo  $Z = Z(x)$ . De ahora en adelante, la derivada de la función  $Z$  será denotada por  $Z'$ , pues se supone que  $Z$  sólo depende de la variable  $x$ . La función  $Z$  satisface

el problema de contorno  $\mathcal{P}$ , definido por

$$\mathcal{P} := \begin{cases} -(|Z'|^{p-2}Z')' = C, & \forall x \in (0, 1), \\ Z'(0) = 0, \\ Z(1) = Z_m = N_m^{-2}. \end{cases}$$

Nótese, que la condición de contorno adecuada en el margen sería  $N_m = 0$  (condición de flotación), así que asumiremos que  $0 < N_m \ll 1$ , es decir,  $Z_m \gg 1$  y por tanto  $Z_m > 0$ . El signo de  $C$  queda determinado por el valor  $h = h_m$  (prescrito) y los valores de los parámetros  $\gamma$  y  $\lambda$ , por tanto, dicho signo es *a priori* conocido.

A continuación, se estudiarán propiedades cualitativas de la variable  $N$  asociada a la solución o soluciones,  $Z$ , del problema  $\mathcal{P}$ , en función del signo del término de balance de calor, representado por la constante  $C$ .

### Balance de calor positivo.

**Lema 5.1.** *Sea el problema  $\mathcal{P}$  con  $p > 1$  y  $Z_m > 0$ . Supongamos que el término de balance de calor, representado por la constante  $C$  (definida en (5.40)), es positivo, es decir,  $C > 0$ . Entonces existe una única solución  $Z$  de problema  $\mathcal{P}$  definida por la expresión:*

$$Z(x) = \frac{p-1}{p} C^{1/(p-1)} [1 - x^{p/(p-1)}] + Z_m, \quad \forall x \in (0, 1).$$

**Demostración: Existencia.** Se obtiene por integración directa. Supongamos que  $C > 0$  (véase (5.40)) en la ecuación del problema  $\mathcal{P}$ . Entonces integrando en  $(0, x)$  y utilizando la condición de contorno,  $Z'(0) = 0$ , se tiene que

$$-|Z'|^{p-2}Z' = Cx, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Se deduce que  $Z' < 0$ ,  $\forall x \in (0, 1)$  y por tanto  $|Z'| = -Z'$  luego ha de resolverse la ecuación

$$(-Z')^{p-1} = Cx, \quad \forall x \in (0, 1),$$

es decir,

$$Z' = -C^{1/(p-1)}x^{1/(p-1)}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Integrando en  $(x, 1)$  y haciendo uso de la condición de contorno  $Z(1) = Z_m$ , se tiene que

$$Z_m - Z(x) = -\frac{p-1}{p} C^{1/(p-1)} + \frac{p-1}{p} C^{1/(p-1)} x^{p/(p-1)}, \quad \forall x \in (0, 1),$$

de donde se deduce que

$$Z(x) = \frac{p-1}{p} C^{1/(p-1)} [1 - x^{p/(p-1)}] + Z_m, \quad \forall x \in (0, 1).$$

**Unicidad.** Sean  $u = u(x)$  y  $v = v(x)$  soluciones del problema  $\mathcal{P}$ . Entonces

$$(|u'|^{p-2}u')' = (|v'|^{p-2}v')'.$$

Integrando la identidad anterior en  $(0, x)$ , se tiene que

$$|u'|^{p-2}(x)u'(x) - |u'|^{p-2}(0)u'(0) = |v'|^{p-2}(x)v'(x) - |v'|^{p-2}(0)v'(0), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Puesto que  $u$  y  $v$  son soluciones del problema  $\mathcal{P}$ , entonces  $u'(0) = v'(0) = 0$  y por tanto,

$$|u'|^{p-2}(x)u'(x) = |v'|^{p-2}(x)v'(x), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Al ser  $u' < 0$  y  $v' < 0$  (por ser  $C > 0$ ), resulta que

$$(-u')^{p-1}(x) = (-v')^{p-1}(x), \quad \forall x \in (0, 1),$$

es decir,  $u'(x) = v'(x)$ ,  $\forall x \in (0, 1)$ , de donde se deduce, tras integrar en  $(x, 1)$  que

$$u(1) - u(x) = v(1) - v(x), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Teniendo en cuenta que por la condición de contorno se verifica que  $u(1) = v(1) = Z_m$ , se tiene que

$$u(x) = v(x), \quad \forall x \in (0, 1),$$

y por tanto, la solución es única.  $\square$

**Teorema 5.1.** Sea  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , con  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_l \cup \Gamma_r \cup \Gamma_m$ . Sean los parámetros  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $\epsilon$ , los exponentes  $r, s \in (0, 1)$ ,  $p > 1$ ,  $n \geq 1$  y  $m = 1 - n/(p-1)$  y las constantes  $h_m > 0$ ,  $N_m > 0$ , de modo que

$$C = -\frac{m|m|^{p-2}}{\epsilon^4} \left( \gamma - \frac{\lambda}{h_m} \right) > 0.$$

Se considera el problema

$$(SE) := \begin{cases} \nabla \cdot (N^{-s/r} |\nabla h^m|^{p-2} \nabla h^m) = 0, & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{N^n} \right) |-\nabla h + \epsilon^2 \nabla N| (-\nabla h + \epsilon^2 \nabla N) \right] = f(h, N), & \text{en } \Omega, \\ h_x = 0, \quad N_x = 0, & \text{en } \Gamma_0, \\ h_y = 0, \quad N_y = 0, & \text{en } \Gamma_l \cup \Gamma_r, \\ h = h_m, \quad N = N_m, & \text{en } \Gamma_m, \end{cases}$$

donde

$$f(h, N) = \gamma + N^{-s/r} h^{(1/r)+1} |\nabla h|^{(1/r)+1} - \frac{\lambda}{h} - \sigma N^{-s/2r} h^{1/2r} |\nabla h|^{1/2r}.$$

Entonces, el par dado por

$$(h(x, y), N(x, y)) = \left( h_m, \left[ \frac{p-1}{p} C^{1/(p-1)} [1 - x^{p/(p-1)}] + N_m^m \right]^{1/m} \right), \quad (x, y) \in \Omega,$$

es solución del problema (SE).

**Demostración:** En las hipótesis del teorema y a partir del **lema** 5.1, se tiene que si el espesor toma el valor constante  $h = h_m$  y se verifica que  $C > 0$ , entonces

$$Z(x) = \frac{p-1}{p} C^{1/(p-1)} [1 - x^{p/(p-1)}] + Z_m, \quad \forall x \in (0, 1),$$

es solución del problema  $\mathcal{P}$ . Como  $Z = N^m$ , en particular, resulta que la presión efectiva  $N$ , viene dada por la expresión

$$N(x) = \left[ \frac{p-1}{p} C^{1/(p-1)} [1 - x^{p/(p-1)}] + N_m^m \right]^{1/m},$$

$\forall x \in (0, 1)$ , tal que  $Z(x) \neq 0$ , obteniéndose por tanto la tesis del teorema.  $\square$

**Observación 5.4.** *Nótese que la solución no depende de la coordenada transversal  $y$ , es decir, sólo depende de la longitudinal  $x$ . Esto sugiere perturbar  $h$  en el margen y analizar la respuesta del sistema en términos de un desarrollo de las soluciones del sistema elíptico. Dejaremos tales consideraciones para investigaciones futuras.*

**Observación 5.5.** *Nótese que el teorema anterior no afirma la unicidad de solución del problema (SE) en las hipótesis consideradas. Este problema queda abierto para futuras investigaciones. Del teorema se deduce que existe una única posible respuesta (distribución) del sistema de drenaje si el espesor es constante (slab model).*

**Observación 5.6.** *Utilizando los valores típicos  $h_m \approx 1$ ,  $\gamma \approx 0,555$ ,  $\lambda \approx 0,551$ ,  $\epsilon \approx 0,18 \cdot 10^{-3}$ ,  $n \approx 3$  y  $r \approx 0,5$ , se tiene que  $p \approx 3$ ,  $m \approx -1/2$  y  $C \approx 0,9525 \cdot 10^{12}$ , resulta la siguiente expresión explícita para la presión efectiva:*

$$N(x) = \frac{9}{[2C^{1/2}(1 - x^{3/2}) + 3N_m^m]^2}, \quad \forall x \in (0, 1),$$

que representamos en la figura 5.1. Nótese, que si  $N_m > 0$ , la función  $N$  es continua en el intervalo  $(0, 1)$ , sin embargo, los valores paramétricos utilizados muestran la existencia de una capa límite en el margen derecho. Por otra parte, si  $N_m = 0$  (condición de flotación) entonces la presión efectiva es singular en el margen derecho.

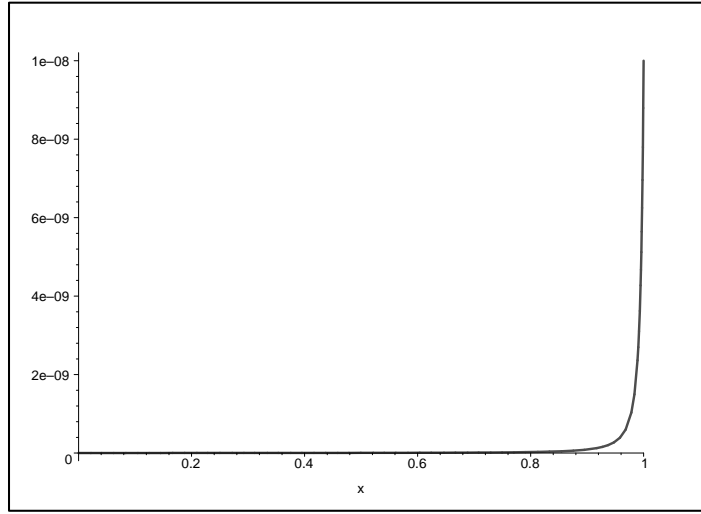


Figura 5.1: Presión efectiva para  $C = 0,9525 \cdot 10^{12} > 0$  y  $Z_m = 10^4$ . Nótese la capa límite en el margen derecho (grounding line) donde  $N_m = Z_m^{1/m} = Z_m^{-2} = 10^{-8}$ .

El teorema anterior tiene una interesante explicación físico-matemática. En efecto, en las hipótesis consideradas dicho teorema afirma la existencia de (al menos) una solución del problema sin variaciones en la dirección transversal al flujo principal. Además, el espesor es constante (*slab model*) e igual a  $h_m$ . En consecuencia, no hay movimiento. Recuérdese que, para los mantos de hielo,  $\nu = 0$ , luego el movimiento viene provocado por las pendientes del perfil de la masa considerada. Como no existe movimiento, no hay disipación viscosa de la energía mecánica (ya que se debe a éste), ni enfriamiento convectivo. El balance de calor es constante y positivo y, para los valores de espesor considerados, la base es temperada (excepto en el margen izquierdo (*divide*)). En esta situación de equilibrio mecánico, la respuesta del sistema hidráulico es lineal en la componente longitudinal del flujo de agua. En efecto, utilizando las ecuaciones del sistema ( $S_a$ ) se deduce la siguiente expresión:

$$Q_{\parallel} = (\epsilon^4 N(1)^{-n} |N_x(1)| N_x(1)) x = - \left( \epsilon^4 N_m^{2-n} \left| \frac{C^{1/(p-1)}}{m} \right| \frac{C^{1/(p-1)}}{m} \right) x, \quad (5.41)$$

luego  $Q_{\parallel}(x) > 0$  para  $x \in (0, 1)$  y  $Q(0) = 0$ . Los valores máximos del flujo de agua y de la presión efectiva se alcanzan en el margen derecho. El gradiente hidráulico, que se concentra en una capa límite (donde crece rápidamente), también alcanza su máximo en esta zona. Creemos que este comportamiento, que aparece en el frente, puede ser el previo al colapso del sistema de drenaje. Los canales están abiertos en todo el dominio, pero la presión se concentra en la región de transición denominada en la bibliografía *ice sheet-ice shelf transition region* (*grounding line*). Se trataría por tanto del mecanismo de inestabilidad en el frente buscado en este proceso de modelado.

Nótese finalmente que (5.41) tiene significado físico ( $Q_{\parallel} \geq 0$ ) sólo si  $m < 0$ . Pero se tiene que (por definición)

$$m = 1 - \frac{n}{p-1} = 1 - \frac{n}{R} = 1 - nr,$$

luego  $m < 0$  sólo si  $nr > 1$ , lo que es consistente con los resultados teóricos y experimentales obtenidos por distintos autores (véanse [46] y [53], por ejemplo). Nuestro criterio proporciona, además, una cota superior para los valores de  $r$  con respecto al exponente de Glen:  $r > 1/n$  es decir, una relación entre la reología de Boulton-Hindmarsh y la ley de flujo no lineal de Glen.

## Balance de calor negativo.

**Lema 5.2.** *Sea el problema  $\mathcal{P}$  con  $p > 1$ . Supongamos que el término de balance de calor, representado por la constante  $C$  es negativo, es decir,  $C < 0$ . Entonces existe una única solución  $Z$  de problema  $\mathcal{P}$  definida por la expresión:*

$$Z(x) = \frac{p-1}{p}(-C)^{1/(p-1)}[x^{p/(p-1)} - 1] + Z_m, \quad \forall x \in (0, 1).$$

**Demostración: Existencia.** Supongamos que  $C < 0$  en la ecuación del problema  $\mathcal{P}$ . Entonces, integrando en  $(0, x)$  y utilizando la condición de contorno  $Z'(0) = 0$ , se tiene que

$$-|Z'|^{p-2}Z' = Cx, \quad \forall x \in (0, 1).$$

De esto se deduce que  $Z' > 0$ ,  $\forall x \in (0, 1)$  y por tanto  $|Z'| = Z'$ , luego ha de resolverse la ecuación

$$(Z')^{p-1} = -Cx, \quad \forall x \in (0, 1),$$

es decir,

$$Z' = (-C)^{1/(p-1)}x^{1/(p-1)}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Integrando en  $(x, 1)$  y haciendo uso de la condición de contorno  $Z(1) = Z_m$ , se tiene que

$$Z_m - Z(x) = \frac{p-1}{p}(-C)^{1/(p-1)} - \frac{p-1}{p}(-C)^{1/(p-1)}x^{p/(p-1)}, \quad \forall x \in (0, 1),$$

de donde se deduce que

$$Z(x) = \frac{p-1}{p}(-C)^{1/(p-1)}[x^{p/(p-1)} - 1] + Z_m, \quad \forall x \in (0, 1).$$

**Unicidad.** Sean  $u = u(x)$  y  $v = v(x)$  soluciones del problema  $\mathcal{P}$ . Entonces

$$(|u'|^{p-2}u')' = (|v'|^{p-2}v')'.$$

Integrando la identidad anterior en  $(0, x)$ , se tiene que

$$|u'|^{p-2}(x)u'(x) - |u'|^{p-2}(0)u'(0) = |v'|^{p-2}(x)v'(x) - |v'|^{p-2}(0)v'(0), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Al ser  $u$  y  $v$  soluciones del problema  $\mathcal{P}$ , entonces  $u'(0) = v'(0) = 0$  y por tanto,

$$|u'|^{p-2}(x)u'(x) = |v'|^{p-2}(x)v'(x), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Puesto que  $u' > 0$  y  $v' > 0$  (por ser  $C < 0$ ), resulta que

$$(u')^{p-1}(x) = (v')^{p-1}(x), \quad \forall x \in (0, 1),$$

es decir,  $u'(x) = v'(x)$ ,  $\forall x \in (0, 1)$ , de donde se deduce, tras integrar en  $(x, 1)$  que

$$u(1) - u(x) = v(1) - v(x), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Teniendo en cuenta que por la condición de contorno, se verifica que  $u(1) = v(1) = Z_m$ , se tiene que

$$u(x) = v(x), \quad \forall x \in (0, 1),$$

y por tanto la solución es única.  $\square$

**Teorema 5.2.** Sea  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , con  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_l \cup \Gamma_r \cup \Gamma_m$ . Sean los parámetros  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $\epsilon$ , los exponentes  $r, s \in (0, 1)$ ,  $p > 1$ ,  $n \geq 1$  y  $m = 1 - n/(p-1)$  y las constantes  $h_m > 0$ ,  $N_m > 0$ , de modo que

$$C = -\frac{m|m|^{p-2}}{\epsilon^4} \left( \gamma - \frac{\lambda}{h_m} \right) < 0.$$

Se considera el problema

$$(SE) := \begin{cases} \nabla \cdot (N^{-s/r} |\nabla h^m|^{p-2} \nabla h^m) = 0, & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{N^n} \right) |-\nabla h + \epsilon^2 \nabla N| (-\nabla h + \epsilon^2 \nabla N) \right] = f(h, N), & \text{en } \Omega, \\ h_x = 0, \quad N_x = 0, & \text{en } \Gamma_0, \\ h_y = 0, \quad N_y = 0, & \text{en } \Gamma_l \cup \Gamma_r, \\ h = h_m, \quad N = N_m, & \text{en } \Gamma_m, \end{cases}$$

donde

$$f(h, N) = \gamma + N^{-s/r} h^{(1/r)+1} |\nabla h|^{(1/r)+1} - \frac{\lambda}{h} - \sigma N^{-s/2r} h^{1/2r} |\nabla h|^{1/2r}.$$

Entonces, el par dado por

$$(h(x, y), N(x, y)) = \left( h_m, \left[ \frac{p-1}{p} (-C)^{1/(p-1)} [x^{p/(p-1)} - 1] + N_m^m \right]^{1/m} \right), (x, y) \in \Omega,$$

es solución del problema (SE).

**Demostración:** En las hipótesis del teorema y a partir del **lema 5.2**, se tiene que si el espesor toma el valor constante  $h = h_m$  y se verifica que  $C < 0$ , entonces,

$$Z(x) = \frac{p-1}{p} (-C)^{1/(p-1)} [x^{p/(p-1)} - 1] + Z_m, \quad \forall x \in (0, 1)$$

es solución del problema  $\mathcal{P}$ . Como  $Z = N^m$ , en particular, resulta que la presión efectiva  $N$ , viene dada por la expresión

$$N(x) = \left[ \frac{p-1}{p} (-C)^{1/(p-1)} [x^{p/(p-1)} - 1] + N_m^m \right]^{1/m},$$

en  $x \in (0, 1)$  tal que  $Z(x) \neq 0$ , obteniéndose por tanto la tesis del teorema.  $\square$

**Observación 5.7.** *Nótese que la solución no depende de la coordenada transversal,  $y$ , es decir, sólo depende de la longitudinal  $x$ .*

**Observación 5.8.** *Nótese que el teorema anterior no afirma la unicidad de solución del problema (SE) en las hipótesis consideradas. Este problema queda abierto para investigaciones futuras.*

**Observación 5.9.** *Utilizando los valores típicos  $h_m \approx 0,8$ ,  $\gamma \approx 0,555$ ,  $\lambda \approx 0,551$ ,  $\epsilon \approx 0,18 \cdot 10^{-3}$ ,  $n \approx 3$  y  $r \approx 0,5$ , se tiene que  $p \approx 3$ ,  $m \approx -1/2$  y  $C \approx -0,318 \cdot 10^{14}$ , resulta la siguiente expresión explícita para la presión efectiva:*

$$N(x) = \frac{9}{[2(-C)^{1/2}(x^{3/2} - 1) + 3N_m^m]^2}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

*Nótese que el denominador que aparece en la expresión de  $N(x)$  se anula para el valor de  $x$  dado por*

$$x = \left( 1 - \frac{p}{p-1} (-C)^{-1/(p-1)} Z_m \right)^{p/(p-1)},$$

*y se deduce que  $x \in [0, 1]$  siempre que*

$$0 \leq Z_m \leq \frac{p-1}{p} (-C)^{1/(p-1)} = Z_C. \quad (5.42)$$

*Por tanto, si se verifica (5.42), la presión efectiva,  $N$ , presenta una singularidad en  $(0, 1)$ , de lo contrario, es una función continua en dicho intervalo. En la figura 5.2, aparecen representados ambos casos.*



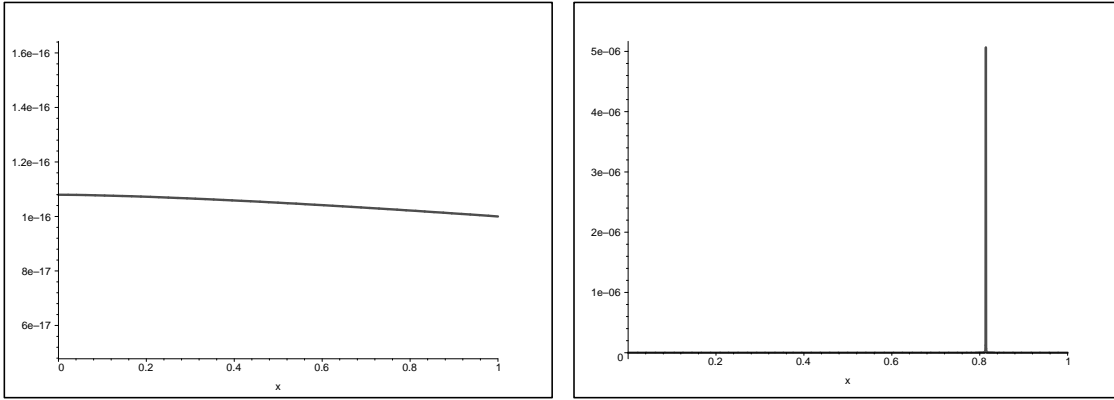


Figura 5.2: Para la obtención de la figura de la izquierda se ha utilizado  $N_m \approx 10^{-16}$ , es decir,  $Z_m \approx 10^8$ . Puesto que  $C \approx -0,318 \cdot 10^{14}$  y  $Z_C = [(p-1)/p](-C)^{1/(p-1)} \approx 0,376 \cdot 10^7$ , al ser  $Z_m \approx 10^8 > 0,376 \cdot 10^7$ , no se da singularidad. Para la obtención de la figura de la derecha se ha utilizado  $N_m \approx 10^{-12}$ , es decir,  $Z_m \approx 10^6$ . En este caso, como  $10^6 \approx Z_m < Z_C \approx 0,376 \cdot 10^7$ ,  $N(x)$  presenta una singularidad en el intervalo  $(0, 1)$ .

### Balace de calor nulo.

En tal caso se da la condición de compatibilidad  $\gamma = \lambda/h_m$  y  $(h(x, y), N(x, y)) = (h_m, N_m)$  es solución del sistema. En efecto,

**Lema 5.3.** *Sea el problema  $\mathcal{P}$ , con  $p > 1$ . Supongamos que el término de balance de calor, representado por la constante  $C$  es nulo, es decir,  $C = 0$  (véase (5.40)). Entonces existe una única solución para el problema  $\mathcal{P}$ , dada por  $Z(x) = Z_m, \forall x \in [0, 1]$ .*

**Demostración:** Supongamos que  $C = 0$ . Integrando en  $(0, x)$  y utilizando la condición de contorno de tipo Neumann homogénea  $Z' = 0$ , se tiene que

$$-|Z'|^{p-2}Z' = \theta,$$

donde  $\theta \in \mathbb{R}$  es una constante arbitraria.

1. Si  $\theta > 0$  entonces,  $Z' < 0$ , por tanto  $|Z'| = -Z'$  y tenemos que resolver la ecuación

$$(-Z')^{p-1} = \theta,$$

es decir,

$$Z' = -\theta^{1/(p-1)}.$$

Integrando en  $(x, 1)$  y utilizando la condición de contorno  $Z(1) = Z_m \geq 0$ , se tiene que

$$Z_m - Z(x) = -\theta^{1/(p-1)} + \theta^{1/(p-1)}x, \quad \forall x \in (0, 1),$$

de donde se deduce que

$$Z(x) = \theta^{1/(p-1)}[1 - x] + Z_m, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Utilizando la segunda condición de contorno,  $Z'(0) = 0$ , se tiene que  $\theta = 0$ , y en consecuencia, la tesis.

2. Si  $\theta < 0$ , entonces  $Z' > 0$ , por tanto  $|Z'| = Z'$  y tenemos que resolver

$$-(Z')^{p-1} = \theta,$$

es decir,

$$Z' = (-\theta)^{1/(p-1)}.$$

Integrando en  $(x, 1)$  y utilizando la condición de contorno  $Z(1) = Z_m \geq 0$ , se tiene que

$$Z_m - Z(x) = (-\theta)^{1/(p-1)} - (-\theta)^{1/(p-1)}x, \quad \forall x \in (0, 1),$$

de donde se deduce que

$$Z(x) = (-\theta)^{1/(p-1)}[x - 1] + Z_m, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Utilizando la segunda condición de contorno,  $Z'(0) = 0$ , se tiene que  $\theta = 0$ , y por tanto, la tesis.  $\square$

**Teorema 5.3.** *Sea  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , con  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_l \cup \Gamma_r \cup \Gamma_m$ . Sean los parámetros  $\lambda, \gamma$  y  $\epsilon$ , los exponentes  $r, s \in (0, 1)$ ,  $p > 1$ ,  $n \geq 1$  y  $m = 1 - n/(p - 1)$  y las constantes  $h_m > 0$ ,  $N_m > 0$ , de modo que*

$$C = -\frac{m|m|^{p-2}}{\epsilon^4} \left( \gamma - \frac{\lambda}{h_m} \right) = 0.$$

Se considera el problema

$$(SE) := \begin{cases} \nabla \cdot (N^{-s/r} |\nabla h^m|^{p-2} \nabla h^m) = 0, & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{N^n} \right) |-\nabla h + \epsilon^2 \nabla N| (-\nabla h + \epsilon^2 \nabla N) \right] = f(h, N), & \text{en } \Omega, \\ h_x = 0, \quad N_x = 0, & \text{en } \Gamma_0, \\ h_y = 0, \quad N_y = 0, & \text{en } \Gamma_l \cup \Gamma_r, \\ h = h_m, \quad N = N_m, & \text{en } \Gamma_m, \end{cases}$$

donde  $f(h, N) = \gamma + N^{-s/r} h^{(1/r)+1} |\nabla h|^{(1/r)+1} - \frac{\lambda}{h} - \sigma N^{-s/2r} h^{1/2r} |\nabla h|^{1/2r}$ .

Entonces, existe (al menos) una solución del problema (SE), definida por

$$(h(x, y), N(x, y)) = (h_m, N_m), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

**Demostración:** En las hipótesis del teorema y a partir del **lema** 5.3, se tiene que si el espesor toma el valor constante  $h = h_m$  y se verifica que  $C = 0$ , entonces la única solución del problema  $\mathcal{P}$  viene dada por  $Z(x) = Z_m, \forall x \in [0, 1]$ . Como  $Z = N^m$ , en particular, resulta que la presión efectiva  $N$ , viene dada por  $N(x, y) = N_m, \forall (x, y) \in \Omega$ .  $\square$



# Capítulo 6

## Conclusiones

En este capítulo y a modo de balance final de la tesis doctoral, se resumen y ordenan las conclusiones que se pueden extraer de los resultados obtenidos en los distintos capítulos de la memoria.

### Conclusiones relativas al modelo de Fowler y Johnson

Se puede concluir que el modelo de Fowler y Johnson se muestra cualitativamente coherente con los fenómenos observados en la Siple Coast aunque evidencia importantes limitaciones:

- Los resultados no son muy precisos desde el punto de vista cuantitativo.
- Los resultados muestran que muy probablemente las soluciones no sean clásicas, sino débiles y, por lo tanto, el método de diferencias finitas no sea el más adecuado para resolver el modelo.
- Se ha observado que los resultados que se obtienen varían notablemente en función de los datos iniciales y de los valores paramétricos prescritos.
- También se observa que con ciertos valores paramétricos, con los cuales se generan corrientes, el flujo  $Q$  toma en ciertos nodos valores negativos. Esto significa que pueden obtenerse soluciones no físicamente admisibles ( $Q(x, y) < 0$ ), ya que  $Q$  representa el flujo de agua y por tanto sólo tienen sentido físico soluciones no negativas.
- Otra de las limitaciones (de carácter físico) que se ha detectado en el modelo consiste en no considerar las variaciones del espesor de hielo  $h$  respecto de la

coordenada transversal  $y$ , y en consecuencia, tampoco tenerla en cuenta para  $\tau$ . Este hecho hace que con las soluciones obtenidas al resolver el modelo de Fowler y Johnson no se simule adecuadamente el efecto de los fuertes gradientes de cizalla en la dirección transversal.

### Conclusiones relativas al modelo multívoco

El hecho de que con el modelo de Fowler y Johnson se puedan obtener valores de flujo negativo sugiere una reformulación del modelo en términos de operadores multívocos, según la cual, sólo se considerarían soluciones físicamente admisibles, es decir, no negativas ( $Q(x, y) \geq 0$ ). El análisis matemático del nuevo modelo concluye lo siguiente:

- Existe (al menos) una solución del sistema de ecuaciones ( $S$ ), que describe el modelo multívoco. Aunque ha sido demostrada la unicidad de solución para cada uno de los problemas ( $S_j$ ), asociados al esquema de desacoplamiento iterativo, la unicidad de solución para el problema límite, es decir, ( $S$ ), queda pendiente, dado su alto grado de complejidad, para estudios y análisis futuros.
- La regularidad de las soluciones del sistema ( $S$ ), obtenida mediante el análisis matemático, permite deducir interesantes propiedades de las magnitudes físicas que intervienen en el modelo, las cuales recordamos brevemente a continuación.

El flujo de agua, es una variable no negativa y acotada que es continua respecto de la coordenada longitudinal, pero que puede presentar discontinuidades respecto de la coordenada transversal. El espesor de hielo es una función continua, positiva, decreciente y sólo depende de la variable longitudinal,  $t$ . Su pendiente está acotada. La variable  $\xi$ , velocidad acumulada, es una función continua, positiva y monótona creciente respecto de la coordenada longitudinal. La cizalla (esfuerzos viscosos), es una función que sólo varía en la dirección principal de flujo, es positiva y acotada. La parte del término de balance de calor que sólo depende de la coordenada longitudinal, y que engloba al flujo de calor geotérmico y al enfriamiento conductivo, es un término continuo y decreciente. Su signo dependerá de los valores de los parámetros  $\gamma$ ,  $\delta$  y del valor prescrito para el espesor de hielo en el *ice divide*. La parte del término de balance de calor, que depende de ambas coordenadas (la longitudinal y la transversal) y que engloba al calor de fricción (disipación viscosa) y al enfriamiento convectivo, es un término acotado y sin signo predefinido. Hacemos notar que una de las diferencias fundamentales entre las zonas de flujo rápido

y las de lento, radica, precisamente, en el valor de los términos de enfriamiento convectivo y calor de fricción.

- La variedad de técnicas y resultados de análisis funcional que han sido empleados a lo largo del capítulo tercero para el tratamiento de problemas de obstáculo y e.d.p.'s, constituyen un marco general en el cual analizar los distintos problemas y modelos que han aparecido y están siendo desarrollados en varios centros de investigación nacionales y extranjeros. La dificultad principal radica en el modelado, análisis y descripción de las fronteras libres asociadas a los problemas que nacen en el contexto de la glaciología. El estudio de las interfases (hielo/atmósfera, hielo/sedimentos, hielo/océano) marca un hito en el acoplamiento de los modelos que describen la dinámica de las grandes masas de hielo polar y su interacción con el clima de la Tierra.

Para la resolución numérica del modelo multívoco se han utilizado cuatro métodos distintos: Gauss-Seidel con proyección, un algoritmo de dualidad con un multiplicador, un algoritmo de dualidad con un multiplicador ensamblado con el método de Newton y un algoritmo de dualidad con dos multiplicadores. De los resultados obtenidos se puede concluir lo siguiente:

- Los resultados numéricos muestran que el modelo considerado permite reproducir cualitativa y cuantitativamente de forma satisfactoria el fenómeno de las corrientes de hielo rápidas (*ice streams*) de la Siple Coast. En los resultados mostrados en el capítulo 4 se aprecia claramente la existencia de una zona de colapso del sistema de drenaje, localizada aproximadamente en el kilómetro 470 en la dirección principal de flujo, a partir de la cual se produce la generación de las corrientes. También se ha constatado que la zona de inicio de las corrientes depende críticamente de los valores paramétricos  $\gamma$  (calor geotérmico escalado) y  $\delta$  (enfriamiento conductivo escalado).
- Los resultados que aparecen en las figuras 4.2 y 4.3 relativas a  $Q$ ,  $u$  y  $\tau$ , ilustran la existencia de oscilaciones transversales en el flujo de agua y en el campo de velocidades, debidas al balance de fuerzas  $(4.18)_1$  y a la ley de deslizamiento  $(4.18)_2$ , pues para un mismo valor de la cizalla,  $\tau$ , son posibles los dos regímenes de flujo: el lento, en el cual los valores del flujo de agua,  $Q$ , y de la velocidad,  $u$ , son pequeños, y el rápido, para el cual, tanto  $Q$  como  $u$ , toman valores elevados.
- En los resultados obtenidos para la cizalla  $\tau$ , se aprecia la existencia de una gran pendiente (gradiente) en la zona de colapso del sistema de drenaje, que

quizá sea responsable, entre otros factores, de la transición de un régimen de flujo lento (localizado antes de llegar a la zona de colapso) a un régimen de flujo rápido (localizado en la zona posterior a la de colapso), hecho que refleja la existencia de un mecanismo de inestabilidad en la dirección principal de flujo.

- En la figura 4.4, correspondiente a la presión efectiva (medida en bares), se aprecia como a partir del lugar, en el cual los sedimentos saturados con agua se congelan y se produce el colapso del sistema de drenaje, surgen unas zonas en las cuales se abren canales (serán las zonas donde aparecen las corrientes) y otras en las que se cierran.
- En la zona de colapso del sistema de drenaje, los valores del flujo de agua son prácticamente nulos y sin aparentes oscilaciones. Las oscilaciones iniciales del flujo de agua en el *ice divide* ( $t=0$ ), prescritas en el dato inicial  $Q_0$ , son homogeneizadas casi en su totalidad en la zona inmediatamente anterior a la de colapso del sistema de drenaje. Sin embargo, en la zona previa a la de colapso, oscilaciones del orden de  $10^{-12}$ , son suficientes para que se manifieste el fenómeno. Este hecho ilustra el grado de sensibilidad del mecanismo a pequeñas variaciones de los datos y valores paramétricos.
- Por otro lado, el hecho de que aparezca una única corriente dominante sobre el resto contrasta y valida, en cierto modo, la conjetura mencionada en algunas de las recientes teorías que cuentan con mayor aceptación por parte de la comunidad científica (mencionadas en el capítulo primero), acerca de la competencia existente entre las corrientes. La conjetura a la que se hace referencia consiste en explicar la inactividad de la corriente  $C$ , frente a la gran actividad de la  $B$  mediante un fenómeno denominado en la bibliografía *water piracy*, consistente, básicamente, en la apropiación por parte de la corriente  $B$  del agua basal existente en corrientes adyacentes.
- Del análisis de los resultados relativos al balance entre calentamiento basal y enfriamiento basal se deduce la existencia de una correspondencia entre la zona en la cual se produce un cambio de signo del balance, pasando de valores negativos a positivos y la zona de inicio de la corriente B o de Whillans. Este hecho es justificable físicamente, ya que, por un lado, el aumento de la temperatura basal puede hacer que el hielo de la base alcance su temperatura de fusión a la presión local y en consecuencia aparezca agua en la base, aumentando el valor del flujo basal de agua y el de la velocidad del hielo debido al efecto lubricante del agua. Por otro lado, al aumentar la velocidad, aumenta



la disipación viscosa (calor de fricción, representado por el término  $\tau u$ ) y en consecuencia crece el valor de la temperatura basal.

- El análisis de los resultados obtenidos a lo largo de dos secciones longitudinales (una según una corriente rápida y otra según una corriente lenta) confirma las relaciones multívocas que existen entre algunas de las variables. Estas relaciones multívocas ilustran la existencia de un avance rápido de masas de hielo en la dirección principal de flujo, en la sección en la que, tras pasar por la zona de colapso del sistema de drenaje, surge una corriente de hielo rápida.
- En cuanto a comparación de los resultados obtenidos por los diferentes métodos, cabe señalar, en primer lugar, que la diferencia entre los resultados obtenidos con cada uno de ellos es muy pequeña, lo cual es un indicador más de la bondad de los resultados. Conviene, en cualquier caso, hacer las siguientes consideraciones:
  - Cuando se utiliza un método de dualidad y el aspecto de la solución no es conocido a priori, el problema se resuelve primero por el método de Gauss Seidel con proyección, que no depende de parámetros asociados a la computación, para saber de que naturaleza es el resultado. Una vez conocido el aspecto de la solución, el valor del parámetro se varía hasta conseguir un valor para el cual el resultado sea tanto cualitativa como cuantitativamente similar al obtenido mediante Gauss Seidel. El valor del parámetro también señala qué términos compiten (es decir, son del mismo orden) en el problema. En este caso se deduce que el factor de mayor peso en la ecuación (4.10) es el término que proviene del término parabólico (derivada temporal).
  - Como se ha comentado antes, los resultados son prácticamente idénticos para *casi todas* las variables. Hay una excepción, la presión efectiva. En el caso de  $N$ , presión efectiva, se aprecian notables diferencias tanto cualitativas como cuantitativas, en los resultados obtenidos con los diferentes métodos. La explicación a tales diferencias se basa en la propia definición de la variable presión efectiva. Se recuerda que la expresión de  $N$  en función de la variable flujo de agua en el sistema de drenaje es  $N = (Q + \bar{Q})^{-1/3}$ , y por tanto, variaciones del orden de  $10^{-6}$  o de  $10^{-11}$  en la variable  $Q$  se traducen en variaciones de los valores obtenidos por los distintos métodos para  $N$  del orden de  $10^2$  y  $10^4$  (recuérdese que  $\bar{Q} = 7,2 \cdot 10^{-12}$ ).

Como problemas abiertos, en lo que respecta al modelo multívoco, se pueden señalar:

- La resolución numérica revela la gran dependencia del comportamiento cualitativo y cuantitativo de los resultados respecto de los valores paramétricos y de los datos iniciales. Con el objeto estudiar esta dependencia y actuar en consecuencia, mejorando el modelo, se deja para investigaciones futuras el estudio, desde los puntos de vista analítico y numérico, de las dos cuestiones siguientes:
  - Simetría del problema.
  - Las implicaciones que puedan tener en los resultados obtenidos, el empleo de una ley de conservación de la masa de tipo integral. Nos referimos, concretamente, a la presencia del término integral no local que aparece en  $(S)_4$  (ecuación de conservación de la masa). Los resultados numéricos obtenidos nos inducen a pensar que el hecho de que sólo aparezca una corriente, incluso en el caso de que las perturbaciones sean simétricas y tomen los mismos valores, se debe precisamente a dicho término integral.
- Otra de las líneas de trabajo futuras, consiste en el modelado del flujo de hielo en la zona denominada en la bibliografía *ice sheet/ice shelf transition*, es decir, la zona en la cual el hielo deja de deslizarse sobre el lecho de sedimentos y pasa a flotar en el agua del mar. Este problema, al igual que el de las corrientes de hielo, es un problema de obstáculo (o de frontera libre, pero en este caso, asociada al espesor de hielo), para el cual esperamos plantear un modelo, y posteriormente, resolverlo numéricamente.

### Conclusiones relativas al sistema elíptico

El modelo *completamente bidimensional*, propuesto en el capítulo 5 representa el punto de partida de una teoría del drenaje basal que generaliza la teoría unidimensional de Fowler y Walder ([111]). Para tener en consideración una conjetura de Fowler y Schiavi ([55]), que sugiere la existencia de un mecanismo de propagación retrógrada, en el cual, la inestabilidad del sistema de drenaje (*hydraulic runaway*) tiene su origen en el margen derecho (*grounding line*), hemos tenido en cuenta las variaciones laterales en el espesor de la masa de hielo.

Una de las consecuencias de incluir las variaciones del espesor en la dirección transversal a la dirección principal de flujo, en el proceso de modelado, es que la ecuación de conservación de la masa de hielo va a venir dada por una e.d.p. elíptica, degenerada y no lineal. El acoplamiento de esta ecuación con la ecuación de conservación de la presión efectiva es fuertemente no lineal, ya que dicho acoplamiento tiene lugar en

el término de difusión de la ecuación para el espesor, dado por  $N^{-s/r}|\nabla h^m|^{p-2}\nabla h^m$ . Nótese, que en el caso límite  $s = 0$  (en la reología de Boulton e Hindmarsh, [15]), se recupera el modelo propuesto por Fowler en [49], modificado (mediante una reformulación en términos de operadores multívocos) y estudiado en [55] y resuelto numéricamente en [27]. Este hecho, hace del modelo totalmente bidimensional, presentado en el capítulo 5, una generalización natural del modelo isoterma al caso termo-hidráulico.

La estructura del acoplamiento permite conjeturar que el sistema elíptico pueda ser estudiado mediante técnicas propias de la teoría de homogeneización, complementadas con técnicas de perturbación singular.

El análisis matemático del sistema elíptico y su resolución numérica son problemas abiertos en los que se pretende trabajar en proyectos de investigación futuros.

## Conclusiones generales

Otras posibles extensiones de este trabajo, radican en considerar los modelos evolutivos naturalmente asociados a los modelos estacionarios considerados en esta memoria y analizar la interacción de las distintas escalas temporales: la escala considerada al modelar los mecanismos del sistema de drenaje y la escala adecuada para el modelado de la parte cinemática de la dinámica del flujo del hielo. En este sentido, el estudio iniciado en el caso del modelo totalmente bidimensional, supone una continuación natural de las tesis de E. Schiavi ([100]) y N. Calvo ([23]), representando un paso adelante más, hacia la comprensión, modelado y predicción de la dinámica no lineal del flujo del hielo.

En los capítulos 1 y 2, al hacer alusión a la ley de drenaje y a la ley de deslizamiento consideradas en los modelos que aparecen en esta memoria, se comentó que una de las líneas de investigación a seguir en trabajos futuros consistirá en estudiar el modelado del fenómeno de las corrientes de hielo rápidas, partiendo de leyes de drenaje y de deslizamiento alternativas. Es bien sabido, que existe gran controversia acerca de si el hielo y los sedimentos subglaciares deben ser modelados como fluidos altamente viscosos o por el contrario deben ser considerados como materiales plásticos. En la ley de deslizamiento que aquí se ha utilizado (dada por  $(S_F)_4$ ), se ha considerado que el hielo presenta un flujo de tipo viscoso no lineal y se han empleado los exponentes de la reología de Boulton e Hindmarsh ( $r, s \in (0, 1)$ ). La ley de drenaje unidimensional de Fowler y Walder (de la cual se deduce la ley de drenaje empleada en los modelos estudiados en esta memoria, y que aparece comentada en el capítulo 2), se basa en la hipótesis de considerar al hielo y a los sedimentos subglaciares como fluidos viscosos

no newtonianos.

Existen otras teorías (véase por ejemplo [69], [70], [71], [107], [108],...), en las cuales se asume que el hielo y la capa de sedimentos se comportan con materiales plásticos. La diferencia fundamental entre considerar un comportamiento del tipo fluido viscoso o uno de tipo plástico, es que mientras en el primer caso, la tasa de deformación (*shear*) está siempre ligada a las tensiones (*stress*), ya sea de forma lineal (fluido newtoniano) o no lineal (fluido no newtoniano), en el segundo, existe un valor de la tensión (denominado umbral de resistencia del material), por encima del cual, la deformación deja de estar ligada a las tensiones. Por tanto, cuando en el fenómeno que se pretende modelar intervienen procesos de deformación debidos a tensiones, resulta fundamental saber qué tipo de reología presentan los materiales que en él intervienen.

Podría decirse que existen dos tipos de flujo de hielo extremos, uno de ellos es el que tiene lugar cuando el hielo se encuentra flotando sobre el mar y el otro, cuando el hielo y la base se encuentran perfectamente acoplados. En el primer caso, no hay tensiones basales, y por tanto, la presión ejercida por la masa del hielo da lugar a tensiones longitudinales y laterales (denominadas en la bibliografía *marginal stresses*) que hacen que el hielo se deforme fundamentalmente en los laterales. Sin embargo, en el segundo caso, la presión ejercida por la masa del hielo es soportada principalmente por la base, lugar donde se concentra la deformación (*basal shear*). Según Tulaczyk ([108]), que asume un comportamiento de tipo plástico para el sedimento subglaciar, el hecho de que la corriente de hielo de Whillans presente una capa de sedimentos deformables en su base, hace que su flujo sea de un tipo intermedio entre los dos tipos extremos mencionados anteriormente. Cuanto más fácil de deformar sea el sedimento, mayor será la velocidad del flujo del hielo.

La tasa de deformación de los sedimentos glaciares depende de su porosidad, y ésta depende de la presión efectiva  $N$  (definida como la diferencia entre la presión de la masa de hielo y la presión del agua basal). Por tanto, como la tasa de deformación del sedimento depende de la cantidad de agua en la base (procedente de la fusión de hielo basal), se dice que la deformación de los sedimentos está controlada térmicamente. De los modelos en los cuales los sedimentos son considerados como un material plástico, se deduce que la deformación del sedimento se concentra en una pequeña capa, de escasamente 3 cm, localizada en la parte superior de la capa de sedimentos. Este hecho es consistente con las observaciones llevadas a cabo por Kamb y Engelhardt ([40]) en la corriente de Whillans. Además, experimentos y análisis realizados en laboratorios, sugieren que para el caso de la corriente de Whillans, es más probable que la capa de sedimentos presente un comportamiento

de tipo plástico que de tipo fluido viscoso, ya que el umbral de resistencia de los sedimentos (de 1 a 2 kPa) parece ser bastante inferior a las presiones medidas en la base (de 20 a 30 kPa).

La principal dificultad que presenta el hecho de considerar a los sedimentos como un material plástico en el proceso de modelado de las corrientes de hielo, está relacionado con el tema de las escalas (temporales y espaciales)<sup>1</sup>, pues las escalas que debieran utilizarse para modelar la parte cinemática de la dinámica de la capa de sedimentos (sistema de drenaje), difiere de las escalas típicas utilizadas para modelar la dinámica del hielo. Según Hindmarsh ([64]), si bien parece ser que a pequeñas escalas los sedimentos se comportan como un material plástico (localmente se darían como pequeñas dislocaciones), a grandes escalas, el comportamiento es más parecido al de un fluido viscoso, no newtoniano (la suma de muchas dislocaciones individuales da lugar a un comportamiento de tipo fluido viscoso). La idea de Hindmarsh vendría justificar el hecho de considerar al hielo y a los sedimentos como de fluidos viscosos en los modelos (estacionarios) presentados en esta memoria, pues en el proceso de modelado se asumieron escalas espaciales (grandes, es decir, del orden de kilómetros) típicas en el modelado del flujo del hielo.

Las consideraciones anteriores, nos lleva a plantearnos una nueva línea de investigación en la que estudiar el modelado del flujo del hielo de las corrientes para el caso en el cual se supone que el hielo y/o la capa de sedimentos presentan comportamiento de tipo plástico. Para ello, por un lado consideraremos dicho comportamiento como el comportamiento límite obtenido tomando  $n \rightarrow \infty$  en la ley de flujo de Glen y  $r \rightarrow 0$  en la ley de deslizamiento, que habían sido consideradas para el caso de flujo viscoso (véanse [69] y los comentarios que aparecen en [53] (capítulo 2, *Ice dynamics* y capítulo 3, *Basal sliding and subglacial hydrology*), acerca de dichos valores límites). Y por otro lado, estudiaremos la interacción de las distintas escalas temporales y espaciales, es decir, la escala adecuada para modelar los mecanismos del sistema de drenaje (comportamiento de la capa de sedimentos) y la escala adecuada para el modelado de la parte cinemática de la dinámica del flujo del hielo.

---

<sup>1</sup>Para considerar un comportamiento de tipo plástico debieran utilizarse escalas temporales del orden de horas o días, y escalas espaciales del orden de decímetros, frente a las utilizadas típicamente en el modelado de la parte cinemática del flujo del hielo, que son del orden de años y kilómetros.



# Bibliografía

- [1] Adams, R.A., (1980): *Sobolev spaces*. Academic Press, New York.
- [2] Alley, R.B., (1989): *Water pressure coupling of sliding and bed deformation. 1. Water system*. J. Glaciol., No 35, pg 108–118.
- [3] Alt, H.W. and Luckhaus, S., (1983): *Quasilinear Elliptic-Parabolic Differential Equations*. Mat. Z., Vol 183, pg 311–341.
- [4] Andrews, J.T., Tedesco, K., (1992): *Detrital carbonate-rich sediments, north-western Labrador Sea: implications for the ice sheet dynamics and iceberg rafting (Heinrich) events in the North Atlantic*. Geology., No 20, pg 1087–1090.
- [5] Anandakrishnan, S., Alley, R.B., (1997): *Stagnation of Ice Stream C, West Antarctica, observed far inland*. Geophysical Research Letters, No 24, pg 265–268.
- [6] Barnett, T.P., Latif, M., Grahon, N., Flügel, M., Pazan, S., White, W., (1993): ENSO and ENSO-related predictability. Part I: *Prediction of equatorial Pacific sea surface temperature with a hybrid coupled ocean-atmosphere model*. J. Climate, No 6, pg 1316–1345.
- [7] Benilan, P., (1972): *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*. Thèse, Orsay.
- [8] Benilan, P., (1981): *Evolution equations and accretive operators*. Lecture Notes, Univ. of Kentucky.
- [9] Bennett, M.R., (2002): *Ice Streams as the arteries of an ice sheet: their mechanics, stability and significance*. Earth Science Reviews., No 1273, pg 1–31.
- [10] Bentley, R.C., (1987): *Antarctic Ice Streams: a review*. Journal of Geophysical Research., No 92, pg 8843–8858.

- [11] Bermúdez, A., Moreno, C., (1981): *Duality methods for solving variational inequalities*. Comp. Math. with Appl., Vol 7, pg 43–58.
- [12] Bindschadler, R., (1983): *The importance of pressurised subglacial water in separation and sliding at the glacier bed*. J. Glaciol. Vol 29, pg 3–19.
- [13] Bindschadler, R., (1997): *Actively surging West Antarctic Ice Streams and their response characteristics*. Annals of Glaciology, No 24, pg 409–414.
- [14] Bond, G.C., Broecker, W.S., Johnsen, S., McManus, J., Labeyrie, L., Jouzel, J., Bonai, G., (1993): *Correlations between climate records from North Atlantic sediments and Greenland ice*. Nature., No 365, pg 143–147.
- [15] Boulton, G.S., Hindmarsh, R.C.A., (1987): *Sediment deformation beneath glaciers; rheology and geological consequences*. J. Geophys. Res, Vol 89, pg 9059–9082.
- [16] Boulton, G.S., Jones, A.S., (1979): *Stability of temperate ice caps and ice sheets resting on beds of deformable sediment*. J. Glaciol., No 24, pg 29–43.
- [17] Borrelli, M., Ughi, M., (1994): *The fast diffusion equation with strong absorption: The instantaneous shrinking phenomenon*. Rendiconti dell’Istituto di Matematica dell’Universita de Trieste, XXVI, pg 109–140.
- [18] Brezis, H., (1972): *Problemes unilateraux*. J. Math. pures and appl., Vol 51, pg 1–168.
- [19] Brezis, H., (1973): *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North Holland, Amsterdam.
- [20] Brezis, H., (1983): *Analyse Fonctionnelle*. Mason. Paris.
- [21] Budyko, M.I., (1969): *The effect of solar radiation variations on the climate of the Earth*. Tellus, No 21, pg 611–619.
- [22] Burden, R.L., Faires, J.D., (1998): *Análisis Numérico*. International Thomson Editors.
- [23] Calvo, N., (1999): *Análisis y resolución numérica de algunos modelos matemáticos de frontera libre en glaciología*. Tesis doctoral. Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Vigo.
- [24] Calvo, N., Durany, J., Vázquez, C., (1997): *Resolución numérica de un problema de frontera libre en glaciares politérmicos*. Actas del XV CEDYA/V CMA. Colecc. Congresos. Universidad de Vigo, pg 617–622.



- [25] Calvo, N., Durany, J., Vázquez, C., (1999): *Numerical approach of temperature distribution in a free boundary polythermal ice sheet*. Numer. Math., Vol 83, pg 557–580.
- [26] Calvo, N., Durany, J., Vázquez, C., (2000): *Numerical computation of ice sheet profiles with approach free boundary models*. Applied Numerical Mathematics, Vol 35(2), pg 111-128.
- [27] Calvo, N., Díaz, J.I., Durany, J., Schiavi, E., Vázquez, C., (2002): *On a doubly nonlinear parabolic obstacle problem modelling ice sheet dynamics*. SIAM, J. Appl. Math., Vol 63, pg 683–707.
- [28] Charlock, T.P., Sellers, W.D., (1980): *Aerosol effect on climate: Calculations with time-dependent and steady-state radiative-convective model*. J. Atmos. Sci., No 38, pg 1327–1341.
- [29] Clarke, G.K.C., (1991): *Length, width and slope influence on glacier surging*. J. Glaciol., No 37, pg 236–246.
- [30] Coddington, E.A., Levinson, N., (1955): *Theory of ordinary differential equations*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill Book Company.
- [31] Díaz, J.I., (1985): *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*. Vol 1. Pitman.
- [32] Díaz, J.I., (1992): *Mathematical treatment of some simple climate models*. Apéndice del libro *La Planete Terre* de J.L. Lions.
- [33] Díaz, J.I., Lions, J.L., (1993): *Mathematics, Climate and Environment*. Masson.
- [34] Díaz, J.I., (1994): *Control hability and Obstruction for some non linear parabolic problems in Climatology*. *Modelado de Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias Medio-Ambientales. Aspectos Matemáticos y Numéricos*. Editado por A. Valle y C. Parés. Grupo de Análisis y Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga.
- [35] Díaz, J.I., Padial, J.F., (1996): *Uniqueness and existence of solutions in the  $BV_t(Q)$  space to a doubly nonlinear parabolic problem*. Publicacions Matemàtiques, Vol 40, pg 527–560.
- [36] Díaz, J.I., Schiavi, E., (1999): *On a degenerate parabolic/hyperbolic system in glaciology giving rise to a free boundary*. Nonlinear Analysis., Vol 38, pg 787–814.

- [37] Duvaut, G., Lions, J.L., (1972): *Les inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunot, Paris.
- [38] Elliot, C. M., Ockendon, J. R., (1982): *Weak and variational methods for moving boundary problems*. Pitman.
- [39] <http://igloo.gsfc.nasa.gov/wais>.
- [40] Engelhardt, H., Kamb, B., (1997): *Basal hydraulic system of a West Antarctic ice stream: constraints from borehole observations*. J. Glaciol., No 44, pg 223–230.
- [41] Evans, L.C., Knerr, B.F., (1979): *Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities*. Illinois J. Math., Vol 23, n.1, March 1979.
- [42] Fahnestock, M.A., Bindschadler, R., Kwok, R., Jezek, K., (1993): *Greenland ice sheet surface properties and ice dynamics from ERS-1 SAR imagery*. Science, No 262, pg 1530–1534.
- [43] Fourier, J., (1824): *Rapport sur la température du Globe Terrestre et sur les espaces planétaires*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'institut de France, Vol. VII, pg 590–604.
- [44] Fowler, A.C., (1979): *A mathematical approach to the theory of glacier sliding*. J. Glaciol. , No 23, pg 131–141.
- [45] Fowler, A.C., (1981): *A theoretical treatment of the sliding of glaciers in the absence of cavitation*. Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A. 298, pg 637–681.
- [46] Fowler, A.C., (1987): *Sliding with cavity formation*. J. Glaciol. Vol 33, pg 255–267.
- [47] Fowler, A.C., (1987): *A theory of glacier surges*. J. Geophys. Res. Vol 92, pg 9111–9120.
- [48] Fowler, A.C., (1989): *Secondary frost heave in freezing soils*. SIAM. J. Appl. Math., Vol 49, pg 361–382.
- [49] Fowler, A.C., (1992): *Modelling ice sheet dynamics*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn, Vol 63, pg 29–65.
- [50] Fowler, A.C., (1997): *Mathematical Models in the Applied Sciences*. Cambridge University Press.

- [51] Fowler, A.C., Johnson, C., (1995): *Hydraulic runaway: a mechanism for thermally regulated surges of ice sheets*. J. of Glaciol., Vol. 41, pg 554–561.
- [52] Fowler, A.C., (1995): *Ice sheet surging and ice stream formation*. Annals of Glaciol., Vol. 23, pg 68–73.
- [53] Johnson, C., (1996): *The Mathematical and Numerical Modelling of Antarctic Ice Streams*. Ph. Thesis. University of Oxford.
- [54] Fowler, A.C., Ng, F.S.L., (1996): *The role of the sediment transport in the mechanics of jökulhlaps*. Ann. Glaciol. Vol 22, pg 255–259.
- [55] Fowler, A.C. and Schiavi, E., (1998): *A theory of ice sheet surges*. J. Glaciol., Vol. 44, No. 146, pg 104–118.
- [56] Fowler, A.C., Walder, J.S., (1993): *Creep closure of channels in deforming subglacial till*. Proc. R. Soc. London, Ser. A., 441, pg 17–31.
- [57] Galaktionov, A., Vázquez, J.L., (1995): *Necessary and sufficient conditions for complete blow-up and extinction for one-dimensional quasilinear heat equation*. Arc. Rational Mech. Annal., 1291, pg 225–244.
- [58] Ghil, M., (1994): *Cryothermodynamics: The chaotic dynamics of paleoclimate*. Physica D., No 77, pg 130–159.
- [59] Ghil, M., (1995): *Atmospheric Modeling, in Natural Climate Variability on Decade-to-Centenary Time Scales*. National Academy Press, Washington DC, pg 164–168.
- [60] Ghil, M., Childress, S., (1987): *Topics in Geophysical Fluid Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*. Springer-Verlag. New York, No 485.
- [61] Glen, J.W., (1958): *The flow law of ice: a discussion of the assumptions made in glacier theory, their experimental foundations and consequences*. IASH, 47, pg 171–183.
- [62] Glowinski, R., (1984): *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag New York Inc.
- [63] Heinrich, H., (1988): *Origin and consequences of cyclic ice rafting in the north-east Atlantic Ocean during the past 130,000 years*. Quat. Res. Vol 29, No 2, pg 143–152.
- [64] Hindmarsh, R.C.A., (1997): *Deforming beds: viscous and plastic scales of deformation*. Quaternary Science Reviews., No 16, pg 1039–1056.

- [65] Houghton, J.T., Meira Filho, L.G., Callander, B.A., Harris, N., Kattenberg, A., Maskell, K. (ed). *IPCC, 1996. Climate Change 1995, The Science of Climate Change*. Cambridge University Press., No 572.
- [66] Hutter, K., (1981): *Theoretical Glaciology*. Reidel, Dordrecht.
- [67] Iken, A., (1981): *The effect of subglacial water pressure on the sliding velocity of a glacier in a idealized numerical model*. J. Glaciol. No 27, pg 407–421.
- [68] Kačur, J., (1994): *Solution of some free boundary problems by relaxation schemes*. Comenius University, Faculty of Mathematics and Physics.
- [69] Kamb, B., (1970): *Sliding motion of glaciers. Theory and observation*. Reviews of Geophysics and Space Physics., No 8, pg 673–728.
- [70] Kamb, B., (1987): *Glacier surge mechanism based on linked cavity configuration of the basal water conduit system*. J. Geophys. Res, 89 (B9), pg 9083–9100.
- [71] Kamb, B., (1991): *Rheological nonlinearity and flow instability in the deforming bed mechanism of ice stream motion*. J. Geophys. Res., Vol 98, pg 16585–16595.
- [72] Kin Min Hui, (1992): *Nonnegative solutions of the fast diffusion equation with strong reaction term*. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications. Vol 19, No 12, pg 1155–1178.
- [73] Krauss, E., Turner, J., (1967): *A one-dimensional model of the seasonal thermohaline*. Tellus, Vol 19, pg 98–105.
- [74] Lions, J.L., (1969): *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod. Paris.
- [75] Lions, J.L., (1990): *El planeta Tierra: El papel de las matemáticas y de los ordenadores*. Instituto de España, Espasa Calpe, No. 8.
- [76] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'ceva, N.N., (1986): *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Providence Rhode Island, American Mathematical Society.
- [77] Le Meur, E., Hindmarsh, R.C.A., (2001): *Coupled marine-ice-sheet/Earth dynamics using a dynamically consistent ice sheet model and a self-gravitating viscous Earth Model*. Journal of Glaciology., No 47, pg 258–270.
- [78] Lliboutry, L.A., (1964): *Traité de Glaciologie*. Vo 1, Masson. Paris

- [79] Lliboutry, L.A., (1976): *Physical processes in temperate glaciers*. J. Glaciol., No 16, pg 151–158.
- [80] Lliboutry, L.A., (1975): *Loi de glissement d'un glacier sans cavitation*. J. Glaciol., No 16, pg 151–158.
- [81] Lliboutry, L.A., (1979): *Local friction laws for glaciers: a critical review and new openings*. J. Glaciol., No 23, pg 67–95.
- [82] Lorentz, E.N., (1964): *The problem of deducing the climate from the governing equations*. Tellus, Vo 16, pg 1–11.
- [83] MacAyeal, D., (1993): *Binge/purge oscillations of the Laurentide ice sheet as a cause of the North Atlantic's Heinrich events*. Paleoceanography, Vol 8, No 6, pg 775–784.
- [84] Marshall, S.J., Clarke, G.K.C., (1997): *A continuum mixture model of ice stream thermodynamics in the Laurentide ice sheet: 2. Application to the Hudson Strait Ice Stream*. Journal of Geophysic Research, No 102 (B9), pg 20615–20637.
- [85] McWilliams, J.C., (1996): *Modeling the oceanic general circulation*. Annu. Rev. Fluid. Mech., No 28, pg 215–248.
- [86] Muñoz, A.I., Schiavi, E., Kindelán, U., (2001): *Modelado de las corrientes de hielo rápidas de la Siple Coast (Mar de Ross, Antártida)*. Electronic proceedings of the XVII C.E.D.Y.A./VII CMA. En CD-Rom. Editors: L.Ferragut and A. Santos. Salamanca, 24-28 Septiembre 2001.
- [87] Muñoz, A.I., Schiavi, E., Kindelán, U., (2002): *Mecanismos de inestabilidad en las dinámicas no lineales del flujo de hielo*. Electronic proceedings of the V Congress of numerical methods in Engineering (SEMNI/APMTAC). En CD-Rom. Editors: J.M.Goicolea, C.A. Mota Soares, M.Pastor and G.Bugeda. Madrid, 3-6 Junio 2002. ISBN: 84-95999-03-X; Dep.legal: B-21918-2002.
- [88] Muñoz, A.I., Schiavi, E., Kindelán, U., (2002): *Non linear phenomena in Glaciology: ice-surging and streaming*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A: Matemáticas. Racsam, vol. 95., 2002. Clave A.
- [89] Muñoz, A.I., Calvo, N., Durany, J., Schiavi, E., Vázquez, C., (2003): *Algoritmos de resolución numérica de un problema termohidráulico con frontera libre*. Glaciología. CEDYA XVIII (Congreso de ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones), VIII Congreso de Matemática Aplicada. Actas de Congreso.

- [90] North, G.R., Cahalan, R.F., Coakley, J.A., (1981): *Energy Balance Climate Models*. Rev. Geoph. Space Physics., No 19, 91–121.
- [91] Nye, J.F., (1969): *Glacier sliding without cavitation in a linear viscous approximation*. Proc. R. Soc. London Ser. A, 315, pg 381–403.
- [92] Nye, J.F., (1970): *A calculation on the sliding of ice over a wavy surface using a Newtonian viscous approximation*. Proc. R. Soc. London Ser. A, 311, pg 445–467.
- [93] Pablo, A. de., Vázquez, J.L., (1990): *The balance between strong reaction and slow diffusion*. Commu. In Partial Differential Equations, Vol 15829, pg 159–183.
- [94] Paterson, W.S.B., (1969): *The Physics of Glaciers*. Pergamon Press. Oxford. New York.
- [95] Pfeffer, R.L. (ed.) (1960): *Dynamics of climate*. Pergamon Press, New York, Vo 137.
- [96] Robertson, A.W., Ma, C.C., Mechoso, C.R., Ghil, M. (1995): *Simulation of the Tropical-Pacific climate with a coupled ocean-atmosphere general circulation model. Part I: The seasonal climate*. J. Climate., No 8, pg 1178–1198
- [97] Robertson, A.W., Ma, C.C., Mechoso, C.R., Ghil, M., (1995): *Simulation of the Tropical-Pacific climate with a coupled ocean-atmosphere general circulation model. Part II: Interannual variability*. J. Climate., No 8, pg 1199–1216.
- [98] Rodrigues, J. F., (1987): *Obstacle problems in mathematical physics*. North Holland.
- [99] Röthlisberger, H., (1972): *Water pressure in intra- and subglacial channels*. J. Glaciol., No 11, pg 177-203.
- [100] Schiavi, E., (1996): *Sobre algunas ecuaciones en derivadas parciales cuasilineales que aparecen en glaciología*. Tesis doctoral. Facultad de CCM. Universidad Complutense de Madrid.
- [101] Sellers, W.D., (1969): *A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system*. Journal of Applied Meteor., No 8, pg 392–400.
- [102] Simon, J., (1987): *Compacts sets in the space  $L^p(0, t; B)$* . Ann. Mat. Pura. Appl. (4), CXLVI, pg 65–96.
- [103] Swithinbank, C.W.M., (1954): *Ice streams*. Polar record, No 7, pg 185–186.

- [104] Taylor, M.E., (1996) *Partial differential equations I*. Applied Mathematical Sciences 115. Springer.
- [105] Thomas, R.M., Stephenson, S.N., Bindschadler, R.A., Shabtaie, S., Bentley, C.R., (1998): *Thinning and grounding-line retreat on Ross Ice Shelf, Antarctica*. Annals of Glaciology, No 11, pg 165–172.
- [106] Tello, L., (1996): *Tratamiento matemático de algunos modelos no-lineales en climatología*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.
- [107] Tulaczyk, S.M., (1999): *Ice sliding over weak, fine grained tills: dependence of ice-till interactions on till granulometry*. In: Mickelson, D.M., Attig, J.W. (eds.), *Glacial Processes: Past and Present*. Geological Society of America Special Papers, No 137, pg 159–177.
- [108] Tulaczyk, S.M., Kamb, B., Engelhart, H., (2000): *Basal mechanics of ice stream B: I. Till mechanics*. Journal of Geophysical Research, No 105, pg 483–494.
- [109] Vaughan, D.G. Doake, C.S.M., (1996): *Recent atmospheric warming and retreat of ice shelves of the Antarctic Peninsula*. Nature, No 379, pg 328–330.
- [110] Vrabie, I.I., (1987): *Compactness methods for Nonlinear Evolutions*. Pitman Monograph and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol 32.
- [111] Walder, J.S., Fowler, A.C., (1994): *Channelised subglacial drainage over a deformable bed*. J. Glaciol., Vol 40, No 134, pg 3–15.
- [112] Weertman, J. (1957): *On the sliding of glaciers*. J. Glaciol., No 3, pg 33–38.
- [113] Whillans, I.M., Bentley, C.R., van der Veen, C.J., (2001): *Ice streams B and C*. In: Alley, R.D., Bindschadler, R. (Eds), *The West Antarctic Ice Sheet: Behaviour and Environment*. Antarctic Research Series, Vol 77. American Geophysical Union, Washington, DC, pg 257–281.
- [114] Zeidler, E., (1995): *Applied functional analysis (applications to mathematical physics)*. Applied Mathematical Sciences 108. Springer.