



Universidad
Rey Juan Carlos

**Sistemas Integrables:
Propiedades y Estructuras
Subyacentes**

2012

Juan Manuel Conde Martín

Andrew Pickering y Pilar Ruiz Gordoa, Profesores Titulares del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Rey Juan Carlos, certifican:

Que la presente Memoria, “**Sistemas Integrables: Propiedades y Estructuras Subyacentes**”, ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Rey Juan Carlos por D. Juan Manuel Conde Martín, y constituye su Tesis para optar al grado de doctor por la Universidad Rey Juan Carlos. Hacen constar que la citada Tesis reúne los requisitos necesarios para su defensa y aprobación.

Móstoles, diciembre de 2012

Fdo: Andrew Pickering

Fdo: Pilar Ruiz Gordoa

A mi familia

Quiero agradecer a mis dos directores de tesis, los profesores Andrew Pickering y Pilar Ruiz Gordoa por haberme ofrecido la posibilidad de trabajar con ellos, así como por su constante esfuerzo y ayuda durante estos años.

Índice general

Lista de abreviaturas	5
Introducción	7
1. Sistemas integrables	15
1.1. Integrabilidad de PDEs. Ecuaciones de solitones	15
1.1.1. Ecuación de ondas	15
1.1.1.1. Solitones. Ecuación de KdV	16
1.1.1.2. Interacción entre solitones	18
1.1.2. Estructura algebraica de una ecuación	19
1.1.2.1. Par de Lax	19
1.1.2.2. Simetrías generalizadas y operadores de re- currencia	21
1.1.2.3. Sistemas hamiltonianos	23
1.1.2.4. Transformación de Miura. Factorización de un operador	25
1.1.3. Transformaciones de Bäcklund	27
1.1.4. Propiedad de Painlevé para PDEs. Método de WTC	29
1.1.5. Método de la variedad singular	30
1.1.6. Fórmula de superposición no lineal. Interacción entre solitones	34

1.2.	Simetrías de una ecuación	36
1.3.	Integrabilidad de ODEs	41
1.3.1.	Singularidades de ODEs. La propiedad de Painlevé	41
1.3.2.	El trabajo de Sophie Kovalevskaya	42
1.3.3.	ODEs de segundo orden. Ecuaciones de Painlevé	43
1.3.4.	Algoritmo de ARS	44
1.3.5.	Ecuaciones de Painlevé de orden superior	45
1.3.6.	Jerarquías de Painlevé	45
1.3.7.	Algunos procedimientos para calcular BTs	47
1.3.7.1.	BT utilizando la integración por modificación	48
1.3.7.2.	Cálculo de aBTs utilizando la conservación de la transformación de Miura	52
2.	Dos tipos de aBTs para una nueva PDE	55
2.1.	Introducción	55
2.2.	Obtención de una aBT de tipo ODE	56
2.2.1.	Una PDE completamente integrable	56
2.2.2.	Reducción del orden	59
2.2.3.	Reducción a P_{II}	60
2.2.4.	Una aBT de tipo ODE	60
2.3.	aBTs e integrabilidad	64
2.4.	Una integral primera de KdV6 y de la jerarquía asociada	68
3.	Un sistema relacionado con el flujo inverso de Broer–Kaup	71
3.1.	Introducción	71
3.2.	Transformaciones de Miura	72
3.3.	El primer caso	73
3.4.	Algunas soluciones particulares	77

3.5. El segundo caso	81
3.6. Transformación entre los dos sistemas modificados integrados	85
4. Soluciones exactas de una nueva PDE	89
4.1. Introducción	89
4.2. Soluciones exactas a partir de reducciones de similitud . .	91
4.3. Soluciones exactas a partir de una aBT de tipo ODE	96
4.4. Soluciones exactas a partir de una aBT de tipo PDE	102
4.4.1. Propiedades de integrabilidad	103
4.4.2. Fórmula de superposición no lineal y soluciones soli- tónicas	104
4.4.3. Ejemplos	107
5. BTs para nuevas jerarquías de P_{IV}	111
5.1. Introducción	111
5.2. Jerarquías de P_{IV}	112
5.3. Integración por modificación	121
5.4. aBTs para una jerarquía de P_{IV}	125
5.5. Otras aBTs	128
5.6. Identificación de aBTs	132
Conclusiones	135
Bibliografía	139

Lista de abreviaturas

aBT: Transformación de auto-Bäcklund

ARS: Ablowitz Ramani Segur

BT: Transformación de Bäcklund

DT: Transformación de Darboux

FPU: Fermi, Pasta y Ulam

KdV: Korteweg-de Vries

mKdV: Korteweg-de Vries modificada

ODE: Ecuación diferencial ordinaria

PDE: Ecuación en derivadas parciales

P_I : Painlevé *I*

P_{II} : Painlevé *II*

P_{III} : Painlevé *III*

P_{IV} : Painlevé *IV*

P_V : Painlevé *V*

P_{VI} : Painlevé *VI*

P_{34} : Painlevé 34 (ecuación XXXIV del capítulo 14 de [64])

WTC: Weiss Tabor Carnevale

Introducción

Consideraciones generales

Los sistemas integrables constituyen sin lugar a dudas un tipo especial de ecuaciones en derivadas parciales (PDEs). En realidad existen muchas definiciones de sistema integrable, que consisten en la práctica en una lista de propiedades comunes de este tipo de sistemas (quizás con alguna excepción). Entre estas propiedades podemos citar: solubilidad mediante la Transformada de Scattering Inversa y el problema lineal subyacente asociado (par de Lax) [1] [4] [37] [50] [111]; transformaciones de Darboux [84], transformaciones de Bäcklund y las correspondientes fórmulas de superposición no lineales [77] [98]; la propiedad de Painlevé, tanto para la propia PDE como para sus reducciones a ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) [1]; un número infinito de leyes de conservación [4]; estructura multihamiltoniana, operadores de recurrencia y jerarquías asociadas [42]; así como la forma bilineal de Hirota [62].

Entre las reducciones a ODEs de sistemas integrables se encuentran las llamadas ecuaciones de Painlevé. Estas peculiares ODEs de segundo orden, junto con sus análogos de orden superior, poseen también propiedades en común que las distinguen de otro tipo de ODEs (de nuevo quizás con alguna excepción). Estas propiedades incluyen entre otras: solubilidad mediante la transformada de isomonodromía inversa y problemas lineales asociados [45];

forma bilineal de Hirota; transformaciones de auto-Bäcklund; y estructura hamiltoniana [23].

En esta Tesis Doctoral haremos uso de algunas de estas propiedades. Por ejemplo, utilizaremos el hecho de que las PDEs integrables son miembros de jerarquías de ecuaciones. La ecuación de Korteweg-de Vries modificada, una PDE de tercer orden, es el primer miembro no trivial de una sucesión de ecuaciones de orden impar, generadas de manera sucesiva utilizando el operador de recurrencia. En consecuencia, si extendemos la reducción de similitud de escala a toda la jerarquía, obtenemos una jerarquía de ODEs (cuyos miembros son de orden par), el primer miembro de la cual es la segunda ecuación de Painlevé. Utilizaremos también el concepto de transformación de Bäcklund, es decir, aplicaciones entre las soluciones de ecuaciones diferenciales. En el caso de aplicaciones entre soluciones de la misma ecuación se denominan transformaciones de auto-Bäcklund. Estos y otros conceptos serán expuestos en detalle en el primer capítulo.

Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivo el estudio de algunas estructuras subyacentes de los sistemas integrables, así como de sus propiedades. Estos objetivos se pueden resumir en los siguientes puntos:

- (1) Buscar aBTs para jerarquías de Painlevé y en particular aBTs de tipo ODE.
- (2) Extender los resultados de [94] para jerarquías de Painlevé a ODEs no integrables y a PDEs integrables o no.
- (3) Explorar la relación entre integrabilidad y existencia de aBTs.
- (4) Utilizar las aBTs obtenidas para generar soluciones.

- (5) Definir nuevas jerarquías de P_{IV} .

Hipótesis

La presente Tesis Doctoral parte de las siguientes tres hipótesis:

- (1) Existe un tipo de transformación de auto-Bäcklund (aBT), que denominaremos de tipo ODE (de tipo “ordinary differential equation”), que puede construirse para una gran variedad de ecuaciones diferenciales, ordinarias o en derivadas parciales, integrables o no. La construcción de este tipo de aBT depende exclusivamente de la estructura subyacente de la ecuación diferencial.
- (2) Para el caso de ecuaciones en derivadas parciales, este tipo de transformación nos proporciona un procedimiento adicional de generar soluciones exactas.
- (3) Es posible utilizar la jerarquía de Boussinesq para definir nuevas jerarquías de ODEs basadas en la cuarta ecuación de Painlevé (P_{IV}). Para estas nuevas jerarquías se pueden obtener aBTs. Más aún, es posible extender un método conocido para efectuar una reducción de orden de la correspondiente reducción de similitud de la jerarquía de Boussinesq.

Metodología

La metodología utilizada puede resumirse brevemente en los siguientes tres puntos:

- (1) En [94] se puede encontrar una descripción de un método desarrollado con el fin de encontrar aBTs para jerarquías de Painlevé (aBTs de tipo ODE). En esta Tesis abordamos la aplicación de dicho método a

ciertas ODEs y PDEs, en un intento de extender los resultados desde ODEs integrables a ODEs no integrables, y a PDEs integrables y no integrables.

- (2) Una vez obtenida una aBT, surge de manera natural la posibilidad de utilizarla para generar soluciones. En el caso de ODEs este es un procedimiento conocido. En el caso de PDEs constituirá un nuevo método de generación de soluciones.
- (3) La relación entre jerarquías de PDEs integrables y jerarquías de Painlevé es bien conocida [3] [54] [55] [74] [79]. Dado que la ecuación de Boussinesq tiene a P_{IV} como reducción, es natural pensar en utilizar los métodos desarrollados en [56] para definir jerarquías de ODEs basadas en P_{IV} . Es asimismo lógico pensar que es posible utilizar los métodos desarrollados en [58] para efectuar una reducción de orden de la reducción de similitud de la jerarquía de Boussinesq. Dichos métodos han de ser necesariamente extendidos y modificados. De la misma manera, el procedimiento para encontrar aBTs para las jerarquías basadas en P_{IV} será una extensión del desarrollado en [94].

Estructura de la memoria

La presente memoria se estructura como sigue:

El capítulo 1 está íntegramente dedicado a la exposición de diferentes aspectos y propiedades de los sistemas integrables, tanto en lo que respecta a ecuaciones en derivadas parciales, como a ecuaciones diferenciales ordinarias. Se hace especial énfasis en las relaciones entre ambos desde el punto de vista de la estructura de estos tipos de sistemas.

En el capítulo 2 se ha abordado el estudio de una ecuación en derivadas parciales que, en muchos aspectos, posee propiedades similares a la segunda ecuación de Painlevé. En esta parte del trabajo se han derivado transforma-

ciones de Bäcklund y auto-Bäcklund. Se trata de la primera vez que se han obtenido transformaciones de auto-Bäcklund de tipo ODE para PDEs.

El capítulo 3 se centra, en una línea similar a la del capítulo 2, en el estudio de un sistema relacionado con una extensión no isoespectral del flujo inverso de Broer-Kaup. De nuevo, la estructura subyacente de este conocido sistema ha permitido la derivación de transformaciones de auto-Bäcklund para el sistema en estudio.

El capítulo 4 está íntegramente dedicado a la derivación de soluciones exactas para la ecuación estudiada en el capítulo 2. Se han considerado varios procedimientos que incluyen el uso de las transformaciones de Bäcklund (de tipo ODE y de tipo PDE) y también el método de simetrías de Lie.

En el capítulo 5 se han estudiado varias jerarquías de ecuaciones diferenciales ordinarias, los primeros miembros de las cuales corresponden, en un caso particular, a la cuarta ecuación de Painlevé. Se ha abordado asimismo el problema de la derivación de transformaciones de auto-Bäcklund para dichas jerarquías.

La memoria finaliza con un breve apartado para la exposición de las conclusiones más sobresalientes del trabajo y con otro dedicado a la bibliografía más relevante.

Conclusiones

A grandes rasgos las conclusiones pueden sintetizarse en:

- (1) Hemos encontrado aBTs de tipo ODE para una amplia gama de ODEs y PDEs, tanto integrables como no integrables. En el caso de PDEs integrables, encontramos este tipo de aBT para las modificaciones integradas de extensiones no isoespectrales de los primeros flujos inversos de las ecuaciones de Korteweg–de Vries (KdV) y Broer–Kaup. Estos son los primeros ejemplos de aBTs de tipo ODE para PDEs cono-

cidos en la literatura. Estos resultados nos permiten llegar a conclusiones generales sobre la relación que hay entre la existencia de este tipo de aBT y la integrabilidad de ODEs y PDEs.

- (2) En el caso de la ecuación relacionada con la jerarquía de KdV mostramos que la aBT de tipo ODE encontrada nos proporciona un método alternativo de generar soluciones exactas. Consideramos también otras formas de abordar la obtención de soluciones exactas para esta PDE, como son el uso de simetrías de Lie y correspondientes reducciones de similaridad y el de aBTs de tipo PDE y la fórmula de superposición no lineal asociada.
- (3) Hemos definido nuevas jerarquías de ODEs basadas en P_{IV} , y conseguimos, haciendo uso de una extensión del método expuesto en [58], integrar la reducción de similaridad de la jerarquía de Boussinesq. Otro de los resultados es el uso de una generalización del método desarrollado en [94] para obtener aBTs para las nuevas jerarquías de Painlevé encontradas.

Al final de esta Tesis pueden encontrarse descritas en detalle, tras la exposición pormenorizada de los resultados, las conclusiones de este trabajo.

Publicaciones

Los resultados de esta Tesis Doctoral han dado lugar a las siguientes publicaciones:

- Conde J. M., Gordo P. R. and Pickering A. “*Auto-Bäcklund transformations and integrability of ordinary and partial differential equations*”. J. Math. Phys. **51** 033512 (2010).
- Conde J. M., Gordo P. R. and Pickering A. “*Exact solutions of a*

novel integrable partial differential equation". Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul. **17** 2309–2318 (2012).

- Conde J. M., Gordo P. R. and Pickering A. "A new kind of Bäcklund transformation for partial differential equations". Rep. Math. Phys. **70** 149–161 (2012).
- Conde J. M., Gordo P. R. and Pickering A. "*Bäcklund transformations for new fourth Painlevé hierarchies*". En proceso de redacción.

Capítulo 1

Sistemas integrables

1.1. Integrabilidad de PDEs. Ecuaciones de solitones

1.1.1. Ecuación de ondas

Una ecuación de la forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.1)$$

tiene algunas propiedades interesantes, como son:

- Existencia de ondas viajeras: $u(x, t) = f(x \pm vt)$, de velocidad $v = c$.
- Verificación del principio de superposición lineal: cualquier combinación lineal de dos soluciones sigue siendo solución de la ecuación. Si las dos soluciones son ondas viajeras que viajan a velocidades opuestas, cuando se encuentren se producirá una interacción y tras ese proceso cada una recupera su forma inicial.
- Efectos no dispersivos: la velocidad de propagación es una constante.

En general para una PDE no lineal, no se cumple el principio de superposición lineal y aunque tenga ondas viajeras puede presentar efectos dispersi-

vos. Veremos a continuación un tipo muy especial de ondas viajeras que se denominan solitones.

1.1.1.1. Solitones. Ecuación de KdV

Desde una perspectiva física, la primera constatación documentada de un solitón se remonta al año 1834, cuando el científico e ingeniero John Scott Russell [99] detectó la presencia de un nuevo tipo de ondas en la superficie de un canal y plasmó sus observaciones en los siguientes términos, ya clásicos en la literatura.

I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped – not so the mass of water which it had put in motion: it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded and well defined heap of water which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback. and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation,...

De todos modos, Russell denominaba ondas solitarias a lo que hoy conocemos como solitones, término que no fue introducido hasta 1965 por Zabusky y Kruskal [110]. En realidad un solitón es un tipo de onda solitaria que se propaga sin deformarse tras interactuar con otros solitones en un medio no

lineal. Russell realizó muchos experimentos con solitones y llegó a encontrar empíricamente que la velocidad de propagación c cumplía que

$$c^2 = g(h + a), \quad (1.1.2)$$

siendo g la aceleración de la gravedad, h la profundidad del agua en estado de equilibrio y a la amplitud. De (1.1.2) se deduce que a mayor amplitud mayor velocidad. Así, Russell concluyó que su forma no variaba y que su velocidad de propagación era proporcional a su amplitud en un canal de profundidad constante. Desde el principio, estas observaciones de Russell fueron muy discutidas, produciéndose una gran controversia entre los científicos de la época. Estas discrepancias quedaron resueltas en 1895, cuando aparece la ecuación de Korteweg y de Vries para describir ondas propagándose en un canal poco profundo, que en lo sucesivo denominaremos ecuación de KdV [69]. La expresión matemática de la ecuación de KdV que utilizaremos es

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x. \quad (1.1.3)$$

No obstante existen otras versiones de (1.1.3) donde aparece algún cambio de signo o de escala. Korteweg y de Vries encontraron que (1.1.3) poseía soluciones particulares, que suponían la descripción teórica de lo expuesto por Russell [99]. La solución que proporciona el solitón para (1.1.3) es

$$u = 2k^2 \operatorname{sech}^2 [k(x + 4k^2t + \mu)], \quad (1.1.4)$$

siendo $k \neq 0$ y μ constantes. Así pues, necesariamente la existencia de esta onda solitaria ha de ser consecuencia de la compensación del término no lineal uu_x (que hace que cada punto de la onda se propague con distinta velocidad) con el término u_{xxx} (que proporciona un efecto dispersivo), lo que produce para la ecuación de KdV este tipo de estructuras tan estables.

1.1.1.2. Interacción entre solitones

El propio Russell en 1844 había estudiado interacciones entre dos solitones [100]. En la Fig. (1.1.1) [37] se representa una interacción típica entre dos solitones similar a la descrita por Russell [100].

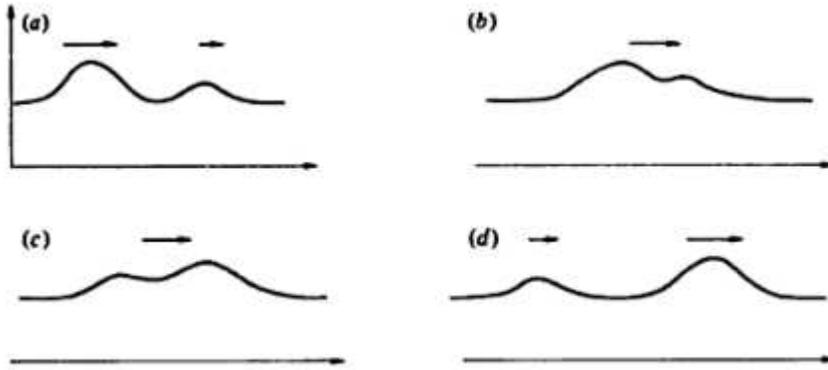


Figura 1.1.1: Interacción típica entre dos solitones, para tiempos respectivos $t_a < t_b < t_c < t_d$

Los experimentos de Russell y la ecuación de KdV quedaron olvidados hasta 1955, cuando Fermi, Pasta y Ulam (FPU) [43] idearon un experimento para estudiar la distribución de la energía de una cadena de osciladores sometidos a una perturbación. Demostraron que aparecían solitones como los que describía Russell [99].

Los resultados anteriores motivaron en 1965 a Zabusky y Kruskal [110] a profundizar en el trabajo de FPU y en el límite continuo obtuvieron como resultado la ecuación de KdV (1.1.3). Zabusky y Kruskal observaron que se formaba un tren de ondas solitarias de distintas alturas (amplitudes) y por tanto de distintas velocidades, donde las más rápidas acababan capturando a las más lentas. Había entonces un tiempo de interacción para posteriormente volver a aparecer la más lenta a la izquierda y la más rápida a la derecha,

con la misma forma y sólo con una pequeña desviación en la fase, como se muestra en Fig. (1.1.1). Este hecho tan sorprendente de interacción como si se tratase de una superposición lineal, donde las ondas se deformaban sólo en la interacción para recuperar su forma original sin deformarse, como si de partículas en un choque elástico se tratara llevó a Zabusky y Kruskal a llamar a estas ondas solitarias “solitones” en concordancia con los nombres de partículas elementales, como fotón o protón, dado que interaccionaban como partículas. No obstante, posteriormente se descubrió que los solitones no sólo interaccionaban como habían pensado Zabusky y Kruskal, sino que en la actualidad se conocen procesos de fusión de solitones (donde al interaccionar dos solitones distintos no emergen por separado, sino que se convierten en uno solo) y de fisión de solitones (donde un solitón se separa en dos solitones) [22] [40] [51] [82] [103].

En la actualidad existe alguna ambigüedad respecto a lo que se denomina solitón. La definición de solitón que utilizaremos es la de una onda localizada que se propaga sin deformarse y que emerge de la interacción con otros solitones sin sufrir ningún cambio en su forma o su velocidad, salvo quizá un cambio de fase.

Tras los resultados de Zabusky y Kruskal se abre una nueva y amplia rama de las matemáticas aplicadas que aún hoy sigue expandiéndose.

1.1.2. Estructura algebraica de una ecuación

1.1.2.1. Par de Lax

Definición (*Par de Lax*)

Dada una PDE en u , un par de Lax para dicha PDE es una pareja de operadores L y P tales que

$$L_t = [P, L] \tag{1.1.5}$$

cuando u verifica esa PDE, donde $[P, L] = PL - LP$ es el conmutador de P

y L . La ecuación (1.1.5) es la condición de compatibilidad de las siguientes ecuaciones

$$L\psi = \lambda\psi, \quad (1.1.6)$$

$$\psi_t = P\psi, \quad (1.1.7)$$

donde la constante λ se denomina parámetro espectral. En general si λ no es constante se tiene un par de Lax no-isoespectral.

Ejemplo

El par de Lax para KdV (1.1.3) viene dado por ¹

$$\psi_{xx} = (\lambda - u)\psi, \quad (1.1.8)$$

$$\psi_t = 2(u + 2\lambda)\psi_x - u_x\psi, \quad (1.1.9)$$

donde la ecuación original (1.1.3) se recupera utilizando la condición de compatibilidad

$$\psi_{xxt} = \psi_{txx}. \quad (1.1.10)$$

Comparando (1.1.6) y (1.1.7) con (1.1.8) y (1.1.9) tenemos que los operadores P y L son

$$L = \partial_x^2 + u, \quad (1.1.11)$$

$$P = 4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x. \quad (1.1.12)$$

En los siguientes apartados se describen otros aspectos de la estructura algebraica de PDEs integrables (ver por ejemplo [47] [81] [90] [91]).

¹Este par de Lax se calcula en la sección 1.1.5, ecuaciones (1.1.88) y (1.1.89).

1.1.2.2. Simetrías generalizadas y operadores de recurrencia

Definición

Se dice que dos ecuaciones de evolución $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$ y $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{P}[\mathbf{u}]$ conmutan si $(\mathbf{u}_\tau)_t = (\mathbf{u}_t)_\tau$, donde por $[\mathbf{u}]$ se denota una dependencia en las componentes de $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ y un número finito de sus derivadas espaciales.

Definición (*Simetría generalizada*)

Una simetría generalizada de $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$ es una solución $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T = \mathbf{L}[\mathbf{u}]$ de la ecuación linealizada

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{K}'[\mathbf{u}]\mathbf{v} \quad \text{módulo } \mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}], \quad (1.1.13)$$

siendo $\mathbf{K}'[\mathbf{u}]$ la derivada Fréchet, cuya acción sobre \mathbf{v} viene dada por

$$\mathbf{K}'[\mathbf{u}]\mathbf{v} = \left(\frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{K}[\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v}] \right)_{\varepsilon=0}. \quad (1.1.14)$$

Si $\mathbf{K}[\mathbf{u}] = (K_1[\mathbf{u}], \dots, K_m[\mathbf{u}])^T$ y $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, entonces la derivada Fréchet es una matriz

$$\mathbf{K}'[\mathbf{u}] = (K'_{ij}[\mathbf{u}]), \quad (1.1.15)$$

donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. El elemento $K'_{ij}[\mathbf{u}]$ se calcula como

$$K'_{ij}[\mathbf{u}] = \frac{\mathbf{D}K_i}{\mathbf{D}u_j} = \sum_{r \geq 0} \frac{\partial K_i[\mathbf{u}]}{\partial u_{j,rx}} \partial^r. \quad (1.1.16)$$

Se verifica que dada una simetría $\mathbf{v} = \mathbf{L}[\mathbf{u}]$ de $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$ entonces las dos ecuaciones

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}], \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{L}[\mathbf{u}] \quad (1.1.18)$$

conmutan, ya que

$$(\mathbf{u}_t)_\tau = \mathbf{K}_\tau = \mathbf{K}'\mathbf{u}_\tau = \mathbf{K}'\mathbf{L} = \mathbf{L}_t = (\mathbf{u}_\tau)_t. \quad (1.1.19)$$

Definición (*Operador de recurrencia*)

Sea Γ un álgebra de funciones suaves de las componentes de \mathbf{u} y un número finito de sus derivadas, y sea \mathcal{R} un operador con coeficientes en Γ . Entonces se dice que $\mathcal{R}[\mathbf{u}]$ es un operador de recurrencia si se verifica que

$$\mathcal{R}_t[\mathbf{u}] = [\mathbf{K}'[\mathbf{u}], \mathcal{R}[\mathbf{u}]] \quad \text{módulo } \mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]. \quad (1.1.20)$$

Se verifica que un operador de recurrencia $\mathcal{R}[\mathbf{u}]$ para $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$, transforma simetrías generalizadas en simetrías generalizadas de esta ecuación, ya que si $\mathbf{v}_t = \mathbf{K}'[\mathbf{u}]\mathbf{v}$ módulo $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$ y $\mathcal{R}_t[\mathbf{u}] = [\mathbf{K}'[\mathbf{u}], \mathcal{R}[\mathbf{u}]]$ módulo $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$, entonces

$$(\mathcal{R}v)_t = \mathcal{R}_t v + \mathcal{R}v_t = [\mathbf{K}', \mathcal{R}]v + \mathcal{R}\mathbf{K}'v = \mathbf{K}'(\mathcal{R}v). \quad (1.1.21)$$

Por tanto, dada una simetría generalizada $\mathbf{v} = \mathbf{L}[\mathbf{u}]$ de (1.1.17), cada una de las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{u}_{\tau_i} = \mathcal{R}^i[\mathbf{u}]\mathbf{L}[\mathbf{u}], \quad i \in \mathbb{N} \quad (1.1.22)$$

conmuta con $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$.

Se cumple que dado un operador recurrencia $\mathcal{R}[\mathbf{u}]$ para $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$, entonces se tienen dos secuencias de ecuaciones

$$\mathbf{u}_{\tau_i} = \mathcal{R}^i[\mathbf{u}]\mathbf{u}_x, \quad (1.1.23)$$

$$\mathbf{u}_{t_j} = \mathcal{R}^j[\mathbf{u}]\mathbf{K}[\mathbf{u}] \quad (1.1.24)$$

que conmutan con el propio sistema $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$.

Definición (*Operador hereditario*)

Sea un operador $\mathcal{R}[\mathbf{u}]$ con coeficientes Γ . Entonces se dice que $\mathcal{R}[\mathbf{u}]$ es un operador hereditario si

$$\mathcal{R}'[\mathbf{u}][\mathcal{R}[\mathbf{u}]\mathbf{v}]\mathbf{w} - \mathcal{R}[\mathbf{u}]\mathcal{R}'[\mathbf{u}]\{\mathbf{v}\}\mathbf{w} \quad (1.1.25)$$

es simétrico en \mathbf{v} y \mathbf{w} , donde $\mathcal{R}'[\mathbf{u}]$ es la derivada Fréchet de $\mathcal{R}[\mathbf{u}]$, cuya acción en \mathbf{v} , aplicado sobre \mathbf{w} , viene definida por

$$\mathcal{R}'[\mathbf{u}]\{\mathbf{v}\}\mathbf{w} = \left(\frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{R}[\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v}]\mathbf{w} \right)_{\varepsilon=0}. \quad (1.1.26)$$

Definición (*Jerarquía de ecuaciones*)

Sea un sistema $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$ y un operador de recurrencia hereditario $\mathcal{R}[\mathbf{u}]$. Se dice que las siguientes secuencias

$$\mathbf{u}_{\tau_i} = \mathcal{R}^i[\mathbf{u}]\mathbf{u}_x, \quad (1.1.27)$$

$$\mathbf{u}_{t_j} = \mathcal{R}^j[\mathbf{u}]\mathbf{K}[\mathbf{u}], \quad (1.1.28)$$

forman una jerarquía de ecuaciones (puede ocurrir que ambas secuencias sean idénticas). El miembro no trivial de orden más bajo es el que da el nombre a toda la jerarquía. Además se verifica que todos los miembros (de cada secuencia y entre ambas secuencias) conmutan.

1.1.2.3. Sistemas hamiltonianos

Definición (*Paréntesis de Poisson y operador hamiltoniano*)

Sean \mathcal{H} y \mathcal{G} dos elementos del espacio cociente $\Gamma/\partial_x\Gamma$ y sea B un operador. Se define el paréntesis de Poisson de \mathcal{H} y \mathcal{G} respecto de B , por

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}_B = (\delta\mathcal{H})^T B(\delta\mathcal{G}) \quad (1.1.29)$$

cumpliendo que

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}_B + \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\}_B = 0 \quad (\text{mód } \text{Im} \partial_x), \quad (1.1.30)$$

$$\{\{\mathcal{G}, \mathcal{H}\}_B, \mathcal{F}\}_B + \{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_B, \mathcal{H}\}_B + \{\{\mathcal{H}, \mathcal{F}\}_B, \mathcal{G}\}_B = 0 \quad (\text{mód } \text{Im} \partial_x), \quad (1.1.31)$$

donde \mathcal{F} es otro elemento de $\Gamma/\partial_x\Gamma$. En las condiciones anteriores se dice que B es un operador hamiltoniano, siendo $\delta\mathcal{H} = (\delta_{u_1}\mathcal{H}, \dots, \delta_{u_n}\mathcal{H})^T$ la derivada variacional que se calcula como

$$\delta_{u_i}\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_i} - \partial \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{i,x}} \right) + \dots + (-1)^r \partial^r \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{i,rx}} \right) + \dots \quad (1.1.32)$$

Definición (*Sistema hamiltoniano y densidad hamiltoniana*)

Se dice que $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$ es un sistema hamiltoniano si existen una función \mathcal{H} de $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \dots)$ y un operador hamiltoniano \mathcal{B} tal que

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{B}(\delta\mathcal{H}). \quad (1.1.33)$$

En tal caso, la función $\mathcal{H} \in \Gamma/\partial_x\Gamma$ se denomina densidad hamiltoniana.

Si existen dos operadores \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 y dos densidades hamiltonianas \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 cumpliendo que

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{B}_1(\delta\mathcal{H}_2) = \mathcal{B}_2(\delta\mathcal{H}_1), \quad (1.1.34)$$

se dice que es un sistema bi-hamiltoniano. En general si hay más de dos operadores y densidades hamiltonianas cumpliendo la condición anterior se habla de sistema multi-hamiltoniano.

Ejemplo

La ecuación de KdV tiene un operador de recurrencia hereditario

$$\mathcal{R}[u] = \partial_x^2 + 4u + 2u_x \partial_x^{-1}. \quad (1.1.35)$$

En este caso las dos secuencias dadas por (1.1.27) y (1.1.28) son idénticas, ya que

$$\mathcal{R}[u]u_x = (\partial_x^2 + 4u + 2u_x\partial_x^{-1})u_x = u_{xxx} + 6uu_x = K[u], \quad (1.1.36)$$

con lo que sería $u_{\tau_1} = u_{t_0}$. La jerarquía se escribe simplemente como

$$u_t = \mathcal{R}^n u_x. \quad (1.1.37)$$

Para $n = 1$ la expresión (1.1.37) proporciona la propia ecuación de KdV (1.1.3). Al tener la ecuación de KdV la derivada espacial más alta u_{xxx} y ser \mathcal{R} de orden dos, al aplicar sucesivas veces \mathcal{R} se obtienen miembros de orden $2n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$, por lo que (1.1.37) se escribe como

$$u_{t_{2n+1}} = \mathcal{R}^n u_x. \quad (1.1.38)$$

La ecuación de KdV tiene una estructura bi-hamiltoniana (1.1.34), donde

$$\mathcal{B}_1 = \partial_x, \quad \mathcal{H}_2 = -\frac{1}{2}u_x^2 + u^3, \quad (1.1.39)$$

$$\mathcal{B}_2 = \partial_x^3 + 4u\partial_x + 2u_x, \quad \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}u^2. \quad (1.1.40)$$

Se nota que (\mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 son compatibles)

$$\mathcal{R}[u] = \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1^{-1} \quad (1.1.41)$$

1.1.2.4. Transformación de Miura. Factorización de un operador

Definición (*Transformación de Miura*)

La aplicación $\mathbf{u} = \mathbf{M}[\mathbf{v}]$ es una transformación de Miura para un operador hamiltoniano $\tilde{\mathbf{B}}$ si

- (i) \mathbf{M} no es invertible.

(ii) $\mathbf{B} = \mathbf{M}'[\mathbf{v}]\tilde{\mathbf{B}}[\mathbf{v}](\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger$ se puede expresar sólo en términos de \mathbf{u} , siendo $\mathbf{M}'[\mathbf{v}]$ la derivada Fréchet de $\mathbf{M}[\mathbf{v}]$ y $(\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger$ su adjunto.

En el caso de que un operador tenga la forma

$$\mathcal{F} = \sum_j P_j[\mathbf{u}]\partial_x^j, \quad (1.1.42)$$

su adjunto $(\mathcal{F})^\dagger$ se calcula como

$$(\mathcal{F})^\dagger = \sum_j (-\partial_x)^j (P_j[\mathbf{u}])^T. \quad (1.1.43)$$

Definición (*Sistema modificado*)

Dado un sistema $\mathbf{u}_t = \mathbf{K}[\mathbf{u}]$. Entonces el nuevo sistema que se obtiene al aplicar una transformación de Miura se denomina sistema modificado.

Ejemplo

Para la ecuación de KdV (1.1.3) la transformación de Miura [87] viene dada por

$$u = M[v] = v_x - v^2. \quad (1.1.44)$$

La ecuación que se obtiene al aplicar la transformación (1.1.44) a la ecuación de KdV (1.1.3) proporciona

$$(-2v + \partial_x)(v_t - v_{xxx} + 6v^2v_x) = 0. \quad (1.1.45)$$

Por tanto si v cumple la ecuación

$$v_t = v_{xxx} - 6v^2v_x, \quad (1.1.46)$$

entonces u verifica la ecuación de KdV (1.1.3), aunque el recíproco no es cierto. Esta última ecuación (1.1.46) se conoce como ecuación de mKdV (ecua-

ción de Korteweg de Vries modificada). Por otro lado, de acuerdo a (ii) la factorización del operador \mathcal{B} de la ecuación de KdV sería $\mathcal{B} = M'[\mathbf{v}]\tilde{\mathcal{B}}(M'[\mathbf{v}])^\dagger$, donde

$$\mathcal{B}[u] = \partial_x^3 + 4u\partial_x + 2u_x, \quad (1.1.47)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}[v] = -\partial_x, \quad (1.1.48)$$

$$M'[v] = \partial_x - 2v, \quad (1.1.49)$$

$$(M'[v])^\dagger = -\partial_x - 2v. \quad (1.1.50)$$

1.1.3. Transformaciones de Bäcklund

Estas transformaciones aparecen hacia 1880 en geometría diferencial como una generalización de las transformaciones de contacto. Albert V. Bäcklund en 1883, a partir de la ecuación de Sine–Gordon [5]

$$u_{xt} = \sin u, \quad (1.1.51)$$

que aparece al estudiar una superficie con una curvatura gaussiana negativa constante, obtuvo la siguiente pareja de ecuaciones:

$$\frac{1}{2}(u+v)_x = a \sin\left(\frac{u-v}{2}\right), \quad (1.1.52)$$

$$\frac{1}{2}(u-v)_t = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right), \quad (1.1.53)$$

siendo a un parámetro arbitrario no nulo. De (1.1.52) y (1.1.53) se obtiene que

$$u_{xt} = \sin u, \quad (1.1.54)$$

$$v_{xt} = \sin v. \quad (1.1.55)$$

Por tanto, si u y v cumplen la ecuación de Sine–Gordon (1.1.51), entonces

eligiendo una solución particular v cualquiera de la propia ecuación de Sine–Gordon y utilizando (1.1.52) y (1.1.53) se puede obtener una solución más general u . Este proceso puede iterarse de forma indefinida para obtener así soluciones más generales.

Ejemplo

Eligiendo la solución particular $v(x, t) = 0$ de (1.1.51) las ecuaciones (1.1.52) y (1.1.53) toman la forma

$$\frac{u_x}{2} = a \sin\left(\frac{u}{2}\right), \quad (1.1.56)$$

$$\frac{u_t}{2} = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{u}{2}\right). \quad (1.1.57)$$

La resolución de las ecuaciones anteriores proporciona

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ C \exp\left(ax + \frac{t}{a}\right) \right\}, \quad (1.1.58)$$

donde C es una constante de integración. La ecuación (1.1.58) es una solución más general de (1.1.51) y además, es el solitón para esta ecuación. Procediendo del mismo modo, con la nueva solución $v = 4 \operatorname{arctg} \left\{ C \exp\left(ax + \frac{t}{a}\right) \right\}$ obtendríamos una nueva solución más general de dicha ecuación.

Definición (*Transformación de Bäcklund de tipo PDE*)

Dadas dos PDEs

$$F(x, t, u) = 0, \quad (1.1.59)$$

$$G(x, t, v) = 0, \quad (1.1.60)$$

una transformación de Bäcklund (BT) es una pareja de relaciones

$$R_j(x, t, u, v) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1.1.61)$$

de tal forma que al eliminar u de (1.1.61) se cumple que v verifica (1.1.60) y si se elimina v de (1.1.61) se cumple que u satisface (1.1.59). Si las ecuaciones (1.1.59) y (1.1.60) son idénticas, la primera en u y la segunda en v , entonces se dice que (1.1.61) es una transformación de auto-Bäcklund (aBT).

Definición (*Transformación de Darboux*)

Dado un sistema con un par de Lax cuya autofunción sea ψ , se denomina transformación de Darboux (DT) a la ecuación que relaciona dos soluciones de dicho sistema a través de ψ .

Ejemplo

Para la ecuación de KdV (1.1.3), la DT viene dada por ²

$$u = 2 \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)_x + v, \quad (1.1.62)$$

donde u y v son dos soluciones de la propia ecuación de KdV.

1.1.4. Propiedad de Painlevé para PDEs. Método de WTC

En este apartado utilizaremos conceptos de la sección 1.3, donde hablamos de la integrabilidad de ODEs, dado que la Propiedad de Painlevé para PDEs surge como una generalización de la definición de la Propiedad de Painlevé para ODEs. Diremos que una ODE tiene la PP si sus soluciones no tienen puntos de ramificación móviles (que dependen de las condiciones iniciales).

Una gran diferencia entre funciones analíticas de una y varias variables es que las singularidades de las segundas no son aisladas. Si $F(z_1, \dots, z_n)$ es una función analítica de n variables complejas z_1, \dots, z_n , entonces las singularidades de F se encuentran en variedades de dimensión $2n - 2$, que se denominan

²Esta DT se calcula en la sección 1.1.5, ecuación (1.1.84).

variedades de singularidades definidas por condiciones de la forma

$$\phi(z_1, \dots, z_n) = 0. \quad (1.1.63)$$

Si esta variedad depende de las condiciones iniciales se habla de variedad de singularidades móviles. Weiss, Tabor y Carnevale (WTC) [109] extendieron el algoritmo de ARS (Ablowitz, Ramani y Segur) [6] (ver sección 1.3.4) y enunciaron: una PDE tiene la PP si sus soluciones son univaluadas en un entorno de cualquier variedad de singularidades móviles. Además Weiss, Tabor y Carnevale desarrollaron un procedimiento algorítmico, que conocemos como Método de WTC, para comprobar si una PDE tiene o no la PP, que esencialmente consiste en ver si sus soluciones $u = u(z_1, \dots, z_n)$ se pueden expresar en serie de Laurent generalizada

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j-\alpha}, \quad (1.1.64)$$

donde $u_j = u_j(z_1, \dots, z_n)$ y $\phi = \phi(z_1, \dots, z_n)$ son funciones analíticas de z_j en un entorno de la variedad de singularidades y α es un entero que se denomina índice dominante.

Ejemplo

La ecuación de KdV (1.1.3) admite una solución como desarrollo en serie de Laurent

$$u = -2 \frac{\phi_x^2}{\phi^2} + 2 \frac{\phi_{xx}}{\phi} + \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \phi(x, t)^n \quad (1.1.65)$$

en un entorno de la variedad $\phi(x, t) = 0$.

1.1.5. Método de la variedad singular

Weiss desarrolló un procedimiento que se conoce como el método de la variedad singular [105]–[108]. Si una PDE tiene la PP, entonces existe un

desarrollo en serie de Laurent (1.1.64), de tal forma que truncando a orden constante se tiene que

$$u = u_0\phi^{-\alpha} + u_1\phi^{-\alpha+1} + \dots + u_\alpha. \quad (1.1.66)$$

Imponiendo que u y u_α verifiquen la PDE, obtenemos un sistema de ecuaciones, denominadas ecuaciones de la variedad singular, que suponen una restricción para ϕ . La existencia de (1.1.66) donde u y u_α son dos soluciones de la misma PDE, constituye una aBT para dicha PDE. Estas ideas constituyen la base de un procedimiento denominado método de la truncación, que ha sido aplicado y extendido con éxito a diversas PDEs [30] [38] [39] [52] [89].

Conte [28] introdujo un cambio de notación en el procedimiento desarrollado por Weiss, buscando una expansión en potencias de χ

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \chi^{j-\alpha}, \quad (1.1.67)$$

tal que los coeficientes $u_j = u_j(x)$ son invariantes por una transformación homográfica o transformación de Möbius en ϕ ,

$$\phi \rightarrow \frac{a\phi + b}{c\phi + d} \quad ad - bc \neq 0 \quad (1.1.68)$$

y χ se relaciona con la función ϕ del método WTC por

$$\chi^{-1} = \frac{\phi_x}{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\phi_{xx}}{\phi_x}. \quad (1.1.69)$$

Entonces χ verifica el sistema formado por las dos ecuaciones de Riccati

$$\chi_x = 1 + \frac{1}{2} S \chi^2, \quad (1.1.70)$$

$$\chi_t = -C + C_x \chi - \frac{1}{2} (C_{xx} + CS) \chi^2, \quad (1.1.71)$$

siendo S la derivada Schwarziana de ϕ

$$S = \{\phi, x\} = \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)^2 \quad (1.1.72)$$

y C definida por

$$C = -\frac{\phi_t}{\phi_x}. \quad (1.1.73)$$

Por otro lado de la compatibilidad de (1.1.70) y (1.1.71), $\chi_{xt} = \chi_{tx}$ se tiene que

$$S_t + C_{xxx} + 2SC_x + CS_x = 0. \quad (1.1.74)$$

Observemos que las ecuaciones (1.1.70), (1.1.71) y (1.1.74) son identidades en términos de ϕ . La idea de este método es truncar la expansión (1.1.67) a orden constante y sustituir dicha expansión en la PDE, imponiendo únicamente que los coeficientes de todas las potencias de χ sean cero. Por otro lado, la linealización del sistema de Riccati (1.1.70), (1.1.71), mediante el cambio de variable usual

$$\chi^{-1} = \frac{\psi_x}{\psi} \quad (1.1.75)$$

proporciona

$$\psi_{xx} = -\frac{1}{2}S\psi, \quad (1.1.76)$$

$$\psi_t = -C\psi_x + \frac{1}{2}C_x\psi, \quad (1.1.77)$$

que tiene una estructura de par de Lax (1.1.6), (1.1.7), siendo ψ la autofunción de dicho par de Lax. Pickering [96] partiendo de esta idea ha desarrollado un procedimiento similar truncando a orden superior al constante, para obtener pares de Lax (ver también [30] [38] [39] [52] [89]). Este procedimiento lo aplicaremos en la sección 2.3 a un sistema de PDEs.

Ejemplo

Para KdV (1.1.3) existe una solución truncada a orden constante en potencias de χ de la forma

$$u = u_0\chi^{-2} + u_1\chi^{-1} + u_2. \quad (1.1.78)$$

Sustituyendo (1.1.78) en la propia ecuación de KdV (1.1.3) y utilizando el sistema de ecuaciones (1.1.70), (1.1.71) para eliminar todas las derivadas espaciales y temporales de χ obtenemos una ecuación en potencias de χ . Al igualar a cero los coeficientes de cada potencia de χ , obtenemos que u_0 , u_1 y u_2 han de verificar

$$u_0 = -2, \quad (1.1.79)$$

$$u_1 = 0, \quad (1.1.80)$$

$$u_2 = -\frac{1}{6}(C + 4S), \quad (1.1.81)$$

junto con la restricción

$$C + S + \lambda = 0, \quad (1.1.82)$$

donde λ es una constante de integración. Entonces (1.1.78) se escribe como

$$u = -2\chi^{-2} - \frac{1}{6}(C + 4S). \quad (1.1.83)$$

Utilizando que $-\chi^{-2} - \frac{1}{2}S = (\chi^{-1})_x = \left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)_x$ y $C = -S - \lambda$ en (1.1.83) tenemos que

$$u = 2\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)_x + v, \quad (1.1.84)$$

siendo

$$v = \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{2}S. \quad (1.1.85)$$

Del mismo modo utilizando que $C = -S - \lambda$ en (1.1.74) se llega a

$$S_t = S_{xxx} + 6 \left(\frac{1}{6} \lambda + \frac{1}{2} S \right) S_x, \quad (1.1.86)$$

que al utilizar (1.1.85) se transforma en

$$v_t = v_{xxx} + 6v v_x, \quad (1.1.87)$$

que es precisamente la ecuación de KdV (1.1.3) en términos de v .

Entonces (1.1.84) es una DT para la ecuación de KdV (1.1.3) y su par de Lax (1.1.76), (1.1.77), que al utilizar (1.1.85) para eliminar S se escribe como

$$\psi_{xx} = (\lambda - v) \psi, \quad (1.1.88)$$

$$\psi_t = 2(v + 2\lambda) \psi_x - v_x \psi, \quad (1.1.89)$$

donde hemos reemplazado $\lambda \rightarrow 6\lambda$ para obtener la versión más habitual de este par de Lax y v es solución de KdV. La aBT se puede obtener eliminando ψ entre el par de Lax y la DT

$$(w + \tilde{w})_x = 2\lambda - \frac{1}{2} (\tilde{w} - w)^2, \quad (1.1.90)$$

$$w_t + \tilde{w}_t = -(w - \tilde{w})(w_{xx} - \tilde{w}_{xx}) + 2(w_x^2 + w_x \tilde{w}_x + \tilde{w}_x^2), \quad (1.1.91)$$

donde hemos definido $u = w_x$, $v = \tilde{w}_x$, que constituyen respectivamente la parte espacial y temporal de la aBT para KdV (1.1.3).

1.1.6. Fórmula de superposición no lineal. Interacción entre solitones

Acabamos de ver que la BT nos permite obtener nuevas soluciones de una PDE de forma iterativa a partir de una solución inicial que denominaremos solución semilla. La fórmula no lineal de superposición nos va a permitir obtener una cuarta solución a partir de tres soluciones conocidas. En la

práctica utilizaremos esta fórmula para estudiar procesos de interacción entre dos solitones, donde se podrá comprobar que interaccionan de forma elástica, de acuerdo a lo explicado en la sección 1.1.1.2

Según el teorema de permutabilidad de Bianchi [12], si tenemos una solución cualquiera de una ecuación, w_0 y generamos una primera pareja de soluciones utilizando la BT, w_1 asociada a un parámetro λ_1 y w_2 asociada a un parámetro λ_2 y una segunda pareja de soluciones, w_{12} obtenida introduciendo w_1 con un parámetro λ_2 y w_{21} obtenida introduciendo w_2 con un parámetro λ_1 en la BT, como se representa en la Fig. (1.1.2), entonces $w_{12} = w_{21}$. Esta fórmula permite obtener una nueva solución utilizando tres

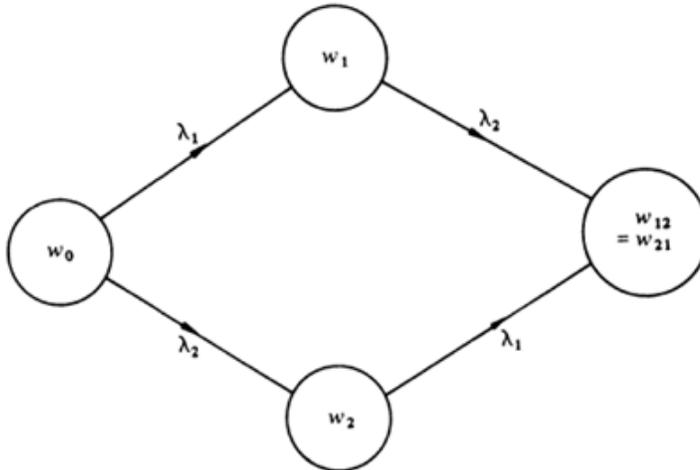


Figura 1.1.2: Esquema del teorema de permutabilidad de Bianchi

soluciones previas: w_0 , w_1 y w_2 . Aplicaremos esta fórmula para estudiar la interacción de dos solitones para así poder obtener la expresión matemática que conduce a representaciones de tipo Fig. (1.1.1) para ciertos valores del tiempo.

Ejemplo

Para la ecuación de KdV (1.1.3) la parte espacial de la BT viene dada por (1.1.90). Las cuatro copias de (1.1.90) son:

$$(w_0 + w_1)_x = 2\lambda_1 - \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2, \quad (1.1.92)$$

$$(w_0 + w_2)_x = 2\lambda_2 - \frac{1}{2}(w_2 - w_0)^2, \quad (1.1.93)$$

$$(w_1 + w_{12})_x = 2\lambda_2 - \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2, \quad (1.1.94)$$

$$(w_2 + w_{21})_x = 2\lambda_1 - \frac{1}{2}(w_{21} - w_2)^2. \quad (1.1.95)$$

Realizando operaciones algebraicas entre estas cuatro ecuaciones y utilizando que $w_{12} = w_{21} \equiv w_3$ llegamos a que

$$w_3 = w_0 + \frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{w_1 - w_2}, \quad (1.1.96)$$

que es la fórmula de superposición no lineal buscada, que en este caso además es algebraica.

1.2. Simetrías de una ecuación

Las ODEs que fueron apareciendo a lo largo de la historia se estudiaron de manera independiente para poder integrarlas y cada una tenía un método distinto aparentemente sin ninguna relación uno con otro. A mediados del siglo XIX Lie estableció que la forma de resolver las ecuaciones diferenciales era consecuencia de que éstas tenían invariancia bajo un grupo continuo de simetría, llamado grupo de Lie, que dependía de un parámetro continuo.

Lie desarrolló una teoría para grupos uniparamétricos basada en un procedimiento totalmente algorítmico, conocido como método clásico de Lie [13] [15] [63] [90] [92] [102]. Sin embargo, el gran problema de este método es encontrar el grupo de simetría, que aunque es metódico, conlleva la resolución

de un sistema de PDEs sobredeterminado que generalmente es bastante costoso de resolver. No obstante, en los últimos años han aparecido programas de cálculo simbólico que hacen posible su aplicabilidad a ecuaciones más complicadas. El método de Lie es aplicable tanto a ODEs como a PDEs, con independencia de que éstas sean o no integrables, aunque las ecuaciones integrables poseen en general un mayor número de simetrías. Si una PDE tiene una simetría, entonces es posible encontrar una reducción de similitud que permite reducir en uno el número de variables independientes. En el caso de una ODE, una simetría significa que va a ser posible integrarla una vez para reducir su orden en uno.

En general para un sistema de PDEs

$$F(x, t, \mathbf{u}) = 0, \quad (1.2.1)$$

una transformación de simetría se basa en aplicar una expansión en las variables dependientes e independientes de la forma

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \varepsilon\xi, \\ t &\rightarrow t + \varepsilon\tau, \\ u_j &\rightarrow u_j + \varepsilon\eta_j, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

donde

$$\xi, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n \quad (1.2.3)$$

son los generadores infinitesimales de la transformación. El generador de la transformación de simetría es

$$\Omega = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + \eta_n \frac{\partial}{\partial u_n}. \quad (1.2.4)$$

Para que exista una simetría ha de cumplirse que el generador prolonga-

do a todas las derivadas actuando sobre la propia ecuación, módulo dicha ecuación sea cero, es decir,

$$\Omega^{(n)}F \Big|_{F=0} = 0, \quad (1.2.5)$$

En este trabajo utilizaremos únicamente simetrías puntuales o simetrías de Lie [13] [15] [63] [90] [92] [102], donde los generadores infinitesimales (1.2.3) dependen sólo de las variables independientes y dependientes, pero no de las derivadas o integrales de las variables dependientes. Existen otro tipo de simetrías diferentes a las anteriores que no consideraremos en este trabajo (ver por ejemplo [14] [17] [27] [49] [80]). Una vez determinados los generadores infinitesimales (1.2.3), las reducciones de similaridad se calculan resolviendo la ecuación de las características

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du_1}{\eta_1} = \dots = \frac{du_n}{\eta_n}. \quad (1.2.6)$$

Ejemplo

Para la ecuación de KdV (1.1.3) los generadores infinitesimales tienen la forma

$$\xi = \alpha x + 6\beta t + \gamma, \quad (1.2.7)$$

$$\tau = 3\alpha t + \delta, \quad (1.2.8)$$

$$\eta = -2\alpha u - \beta. \quad (1.2.9)$$

Entonces la ecuación de las características queda como

$$\frac{dx}{\alpha x + 6\beta t + \gamma} = \frac{dt}{3\alpha t + \delta} = \frac{du}{-2\alpha u - \beta}. \quad (1.2.10)$$

Las distintas reducciones de similaridad proceden de las posibles elecciones para α , β , γ y δ . Así pues, tenemos los siguientes casos:

Caso 1: $\alpha = \beta = 0$. Podemos tomar sin pérdida de generalidad $\delta = 1$.

La ecuación (1.2.10) toma la forma

$$\frac{dx}{\gamma} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}, \quad (1.2.11)$$

de cuya resolución obtenemos la reducción de similaridad que proporciona la solución de onda viajera

$$u(x, t) = w(z), \quad (1.2.12)$$

$$z = x - \gamma t. \quad (1.2.13)$$

Utilizando (1.2.12) y (1.2.13) en la ecuación de KdV (1.1.3) llegamos a la ODE asociada a esta reducción

$$w_{zzz} + 6ww_z + \gamma w_z = 0, \quad (1.2.14)$$

que se puede integrar de forma sencilla dos veces

$$w_z^2 + \gamma w^2 + 2w^3 + 2Aw + B = 0, \quad (1.2.15)$$

siendo A y B las dos constantes de integración. La ecuación (1.2.15) se puede resolver en general en términos de funciones elípticas y para los siguientes valores de las constantes: $A = 0$, $B = 0$ y $\gamma = -4k^2$ proporciona el solitón para KdV (1.1.4).

Caso 2: $\alpha = \gamma = 0$. Entonces podemos elegir $\delta = 1$.

La ecuación (1.2.10) se transforma en

$$\frac{dx}{6\beta t} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{-\beta}, \quad (1.2.16)$$

de donde obtenemos reducción de similaridad que corresponde a la solución

de onda acelerada

$$u(x, t) = w(z) - \beta t, \quad (1.2.17)$$

$$z = x - 3\beta t^2. \quad (1.2.18)$$

Sustituyendo (1.2.17) y (1.2.18) en la ecuación de KdV (1.1.3) obtenemos que la ODE asociada a esta reducción es

$$w_{zzz} + 6ww_z + \beta = 0, \quad (1.2.19)$$

que se integra una vez

$$w_{zz} + 3w^2 + \beta z + \mu = 0, \quad (1.2.20)$$

siendo μ la constante de integración. La ecuación (1.2.20) se puede resolver en términos de la primera ecuación de Painlevé (P_I).

Caso 3: $\delta = \gamma = \beta = 0$. Entonces podemos elegir $\alpha = 1$.

La ecuación (1.2.10) se convierte en

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{3t} = \frac{du}{-2u}, \quad (1.2.21)$$

que permite obtener la reducción de escala

$$u(x, t) = w(z)t^{-\frac{2}{3}}, \quad (1.2.22)$$

$$z = xt^{-\frac{1}{3}}. \quad (1.2.23)$$

Al sustituir en (1.1.3) proporciona la siguiente ODE

$$3w_{zzz} + 18ww_z + zw_z + 2w = 0, \quad (1.2.24)$$

que se puede integrar una vez utilizando el factor integrante $6w + z$. La

ODE de segundo orden que se obtiene es soluble en términos de la segunda ecuación de Painlevé (P_{II}).

Caso 4: $\delta = \gamma = 0$, $\beta \neq 0$. Entonces podemos elegir $\alpha = 1$.

En este caso la ecuación de las características (1.2.10) tiene la forma

$$\frac{dx}{x + 6\beta t} = \frac{dt}{3t} = \frac{du}{-2u - \beta}, \quad (1.2.25)$$

de donde obtenemos la reducción de escala generalizada

$$u(x, t) = w(z)t^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}\beta, \quad (1.2.26)$$

$$z = xt^{-1/3}(x - 3\beta t). \quad (1.2.27)$$

Sustituyendo (1.2.26) y (1.2.27) en la ecuación de KdV (1.1.3) obtenemos la misma ecuación (1.2.24) del caso anterior.

1.3. Integrabilidad de ODEs

1.3.1. Singularidades de ODEs. La propiedad de Painlevé

En el siglo XIX Cauchy [20] buscaba soluciones locales en el plano complejo de las ecuaciones e intentaba extenderlas utilizando la extensión analítica a soluciones globales [36] [61] [64]. Este procedimiento requiere conocer las singularidades de las ecuaciones, que pueden clasificarse en:

- Fijas: Si su localización depende de los coeficientes de la ecuación.
- Móviles: Si su localización depende de las condiciones iniciales (constantes de integración).

Una ODE lineal

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \quad (1.3.1)$$

tiene una solución única en un entorno de cualquier punto regular $x_0 \in \mathbb{C}$ de la ODE, expresable en serie de Taylor en potencias de $(x - x_0)$. Entonces cualquier ODE lineal a lo sumo tiene singularidades fijas.

Las ODEs no lineales pueden presentar en general ambas singularidades simultáneamente. Las singularidades se suelen clasificar también en:

- Univaluadas: Si para cada valor de x le corresponde un único valor de $y(x)$.
- Multivaluadas o puntos de ramificación.

Definición (*Propiedad de Painlevé*)

Se dice que una ODE tiene la Propiedad de Painlevé (PP) si sus soluciones no tienen puntos de ramificación móviles.

1.3.2. El trabajo de Sophie Kovalevskaya

Sophie Kovalevskaya estudió el sólido rígido que gira en torno a un punto fijo a partir de las singularidades de las soluciones en el plano complejo [70] [71]. Las ecuaciones de Euler que describen este problema forman un sistema de seis ODEs de primer orden acopladas. Hasta entonces se conocían de forma general tres integrales primeras, que provenían de la conservación de la energía, el momento angular y una relación geométrica entre los cosenos directores, y además, en tres casos particulares una cuarta integral primera: cuando el centro de gravedad del sólido rígido coincide con el punto fijo, cuando el centro de gravedad esté en el eje z y cuando el sólido es simétrico.

Kovalevskaya observó que los tres casos donde se conocían integrales primeras tenían singularidades móviles univaluadas; en base a este hecho buscó todas las posibles soluciones cuyas singularidades móviles fueran polos, entonces se podrían desarrollar en serie de Laurent. Esto sucedía en cuatro casos: los tres que se conocían y uno nuevo, que se conoce como trompo de Kovalevskaya [70] [71] [72] [104].

1.3.3. ODEs de segundo orden. Ecuaciones de Painlevé

Painlevé buscaba definir nuevas funciones trascendentales que fueran solución de ODEs. Así, clasificó ODEs de primer orden y las de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right), \quad (1.3.2)$$

donde F es una función analítica en x , racional en y y en $\frac{dy}{dx}$, que tuvieran la PP [48] [93]. De estas cincuenta ecuaciones de segundo orden, hay cuarenta y cuatro que pueden integrarse en términos de funciones conocidas o de las seis restantes. Estas seis se denominan ecuaciones de Painlevé [64], que en lo sucesivo denotaremos por P_I, \dots, P_{VI} y cuyas expresiones explícitas respectivas son las siguientes:

$$y_{xx} = 6y^2 + x, \quad (1.3.3)$$

$$y_{xx} = 2y^3 + xy + \alpha, \quad (1.3.4)$$

$$y_{xx} = \frac{y_x^2}{y} - \frac{y_x}{x} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \delta y^3 + \frac{\gamma}{y}, \quad (1.3.5)$$

$$y_{xx} = \frac{y_x^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}, \quad (1.3.6)$$

$$y_{xx} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)y_x^2 - \frac{y_x}{x} + \frac{(y-1)^2\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right)}{x^2} + \frac{\delta y}{x} + \frac{\gamma y(y+1)}{y-1}, \quad (1.3.7)$$

$$y_{xx} = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)\frac{y_x^2}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y_x + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left(\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\delta(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\gamma x(x-1)}{(y-x)^2}\right), \quad (1.3.8)$$

donde α , β , δ y γ son parámetros arbitrarios.

Painlevé sólo encontró las tres primeras ecuaciones: P_I , P_{II} y P_{III} , las tres ecuaciones de Painlevé restantes [64], se atribuyen a discípulos suyos y en particular P_{VI} , que fue descubierta en su forma completa por Fuchs [46], contiene a los cinco primeros como casos límite.

1.3.4. Algoritmo de ARS

El trabajo de Painlevé quedó bastante olvidado hasta finales del siglo XX, cuando Ablowitz, Ramani y Segur (ARS) encontraron que PDEs integrables tenían como reducciones ODEs con la PP, incluso algunas se reducían a las propias ecuaciones de Painlevé [2]. Este hecho llevó a ARS [6] [7] y a Hastings y McLeod [60] a enunciar lo que se denomina conjetura de ARS: “Toda ODE que provenga de una reducción de similaridad de una PDE soluble por IST posee la PP, aunque puede que se necesite un cambio de variable previo”. Sólo se han probado versiones débiles de esta conjetura [6] [86] y no se ha podido encontrar un contraejemplo todavía. Esta conjetura proporciona una condición necesaria de integrabilidad de una PDE, ya que si una de sus reducciones no tiene la PP, entonces dicha PDE no es completamente integrable. De todos modos esta conjetura es poco operativa para verificar la integrabilidad de una PDE, ya que requiere conocer todas las reducciones a ODEs, con las complicaciones que eso conlleva y aún conociendo todas las reducciones, habría que encontrar cambios de variable adecuados a otras ODEs con la PP. Los resultados que proporcionaba la conjetura de ARS, llevaron a Ablowitz, Ramani y Segur a desarrollar un algoritmo, conocido como Algoritmo de Ablowitz, Ramani y Segur basado en la idea de Kovalevskaya, que consiste esencialmente en ver si existe una solución localmente desarrollable en serie de Laurent

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^{j-\alpha} \quad (1.3.9)$$

en un entorno de una singularidad móvil $x = x_0$, siendo a_j constantes.

1.3.5. Ecuaciones de Painlevé de orden superior

Tras los trabajos de Painlevé hasta la actualidad, se han seguido haciendo clasificaciones de ODEs de orden superior a dos con la PP. Chazy [21] clasificó todas las ODEs de tercer orden de la forma

$$y_{xxx} = F(x, y, y_x, y_{xx}), \quad (1.3.10)$$

donde $y = y(x)$ y F es un polinomio en y , y_x e y_{xx} con la PP. La idea de Chazy era buscar ODEs de tercer orden de este tipo que se pudieran resolver en términos de ecuaciones conocidas o bien fueran el análogo a las seis ecuaciones de Painlevé para las ODEs de segundo orden. Chazy [21] y Bureau [18] obtuvieron trece ecuaciones con la PP, que se conocen como Chazy Classes I–XIII. En cualquier caso no se han encontrado nuevas ecuaciones de Painlevé de tercer orden. Algunas de las Chazy Classes siguen siendo objeto de estudio en la actualidad [25] [29] [32].

Existen trabajos parciales de clasificación de ODEs de cuarto orden con la PP: Chazy [21], Bureau [18] [19], Exton [41], Martinov [83], Harada y Oishi [59], Cosgrove [33], Muğan y Jrad [88], Kudryashov [73].

Respecto a ODEs de orden cinco hay algunos trabajos de clasificación hechos por Chazy [21] y Cosgrove [33] [34].

Cosgrove ha realizado más trabajos sobre clasificaciones ODEs de segundo orden y de segundo grado con la PP [35] y de tercer grado o superior con la PP [31].

1.3.6. Jerarquías de Painlevé

Definición (*Jerarquía de Painlevé*).

Una jerarquía de Painlevé es una secuencia de ODEs con la PP de orden

creciente, cuyo primer miembro con frecuencia es una de las ecuaciones de Painlevé. No obstante, aunque el primer miembro no sea una de las ecuaciones de Painlevé también se las llama jerarquías de Painlevé.

Ejemplo: Jerarquía de P_{II}

La ecuación

$$(\partial_x + 2y) \left(M_n[y_x - y^2] - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} - \lambda = 0, \quad (1.3.11)$$

con $M_n[w]$ definido de forma recurrente por la relación de Lenard

$$\partial M_{n+1} = (\partial_x^3 + 4w\partial_x + 2w_x)M_n, \quad (1.3.12)$$

$$M_0 = \frac{1}{2}, \quad (1.3.13)$$

donde $w = y_x - y^2$ define una jerarquía de Painlevé. Veamos los dos primeros miembros.

$$\partial M_1 = w_x, \quad (1.3.14)$$

$$M_1 = w, \quad (1.3.15)$$

$$\partial M_2 = w_{xxx} + 6ww_x, \quad (1.3.16)$$

$$M_2 = w_{xx} + 3w^2, \quad (1.3.17)$$

donde se han tomado cero las constantes de integración. Para $n = 1$ tenemos,

$$(\partial_x + 2y) \left(M_1[y_x - y^2] - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} - \lambda = 0, \quad (1.3.18)$$

que operando nos conduce a

$$y_{xx} = 2y^3 + xy + \lambda, \quad (1.3.19)$$

que es precisamente P_{II} (1.3.4). Para $n = 2$ sería

$$(\partial_x + 2y) \left(M_2[y_x - y^2] - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} - \lambda = 0, \quad (1.3.20)$$

de donde llegamos a que

$$y_{xxxx} = 10yy_x^2 + 10y^2y_{xx} - 6y^5 + xy + \lambda, \quad (1.3.21)$$

que es el segundo miembro de la jerarquía de P_{II} .

1.3.7. Algunos procedimientos para calcular BTs

Veremos a continuación dos procedimientos para calcular BTs de ODEs, que se aplicarán a lo largo de este trabajo. En primer lugar hay que tener claro que una BT para una PDE y para una ODE son diferentes.

Definición (BT *de tipo* ODE).

Dadas dos ODEs, una en $y(x)$, con parámetros α_j apareciendo como coeficientes y la otra en $\tilde{y}(x)$ con parámetros $\tilde{\alpha}_i$ apareciendo como coeficientes, una BT de tipo ODE consiste en una relación

$$y = y(x, \tilde{y}, \tilde{y}_x, \tilde{y}_{xx}, \dots; \tilde{\alpha}_i), \quad \alpha_j = \alpha_j(\tilde{\alpha}_i). \quad (1.3.22)$$

Si ambas ecuaciones coinciden hablaríamos de una aBT. Entonces si tenemos una ODE en $y(x)$, digamos de orden n , una aBT consiste en una aplicación de una solución \tilde{y} de la ecuación con valores $\tilde{\alpha}_i$ de los parámetros apareciendo como coeficientes, en otra solución y con parámetros α_i , que también aparecen como coeficientes;

$$y = y(x, \tilde{y}, \tilde{y}_x, \dots, \tilde{y}_{(n-1)x}; \tilde{\alpha}_i), \quad \alpha_j = \alpha_j(\tilde{\alpha}_i) \quad (1.3.23)$$

Entonces dos diferencias entre aBTs de ODEs y de PDEs son: en primer lugar, en una aBT de tipo PDE las dos soluciones están relacionadas a través

de un parámetro libre (parámetro espectral), de tal modo que por iteración se pueden obtener nuevas soluciones; en segundo lugar en aBTs de tipo ODE se permiten cambios en los parámetros que aparecen como coeficientes de la ecuación.

1.3.7.1. BT utilizando la integración por modificación

Consideremos un sistema de ODEs de la forma

$$\mathbf{B}[\mathbf{u}]\mathbf{L}[\mathbf{u}] = 0. \quad (1.3.24)$$

Si $\mathbf{B}[\mathbf{u}]$ es un operador hamiltoniano de la forma $\mathbf{A}\partial_x$, donde \mathbf{A} es una matriz no singular formada por constantes, entonces (1.3.24) se puede integrar trivialmente y se tiene que una integral primera de (1.3.24) tiene la forma

$$\mathbf{L}[\mathbf{u}] + \gamma = 0. \quad (1.3.25)$$

Esta idea es la base del siguiente método de integración, desarrollado por Gordoá, Pickering y Prada [58], que veremos en detalle a continuación, ya que existen sistemas donde el operador $\mathbf{B}[\mathbf{u}]$ factoriza utilizando la transformación de Miura como

$$\mathbf{B}[\mathbf{u}] \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{M}[\mathbf{v}]} = \mathbf{M}'[\mathbf{v}]\tilde{\mathbf{B}}[\mathbf{v}](\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger, \quad (1.3.26)$$

siendo el operador $\tilde{\mathbf{B}}[\mathbf{v}]$ de la forma $\mathbf{A}\partial_x$, donde \mathbf{A} es una matriz no singular formada por constantes. Utilizando (1.3.26) en (1.3.24) se tiene que el sistema modificado se escribe como

$$\tilde{\mathbf{B}}[\mathbf{v}](\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger \mathbf{L}[\mathbf{u}] = 0. \quad (1.3.27)$$

En las condiciones anteriores (1.3.27) se puede integrar una vez, para obtener

$$(\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger \mathbf{L}[\mathbf{u}] + \gamma = 0, \quad (1.3.28)$$

donde γ es la constante de integración. En la Fig. (1.3.1) se representa un esquema de la integración de una ODE por modificación. No obstante en este trabajo necesitaremos extender este resultado a PDEs. Además la integración por modificación que hemos visto, proporciona un método para calcular BTs, que se basa en el siguiente teorema [58].

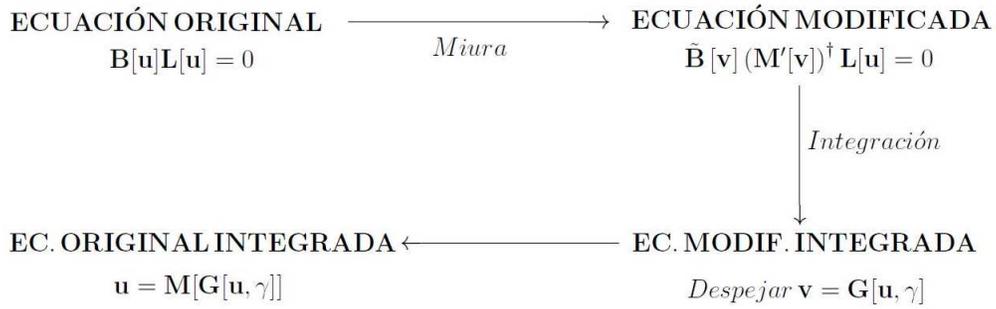


Figura 1.3.1: Esquema de la integración por modificación

Teorema.

Sea el sistema de ODEs $\mathbf{B}[\mathbf{u}]\mathbf{L}[\mathbf{u}] = 0$, siendo \mathbf{B} un operador hamiltoniano. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{M}[\mathbf{v}]$, con $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{n-1})^T$ la transformación de Miura tal que

a) $\mathbf{B}[\mathbf{u}]|_{\mathbf{u}=\mathbf{M}[\mathbf{v}]} = \mathbf{M}'[\mathbf{v}]\tilde{\mathbf{B}}[\mathbf{v}](\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger$, donde $\mathbf{M}'[\mathbf{v}]$ es la derivada Fréchet de $\mathbf{M}[\mathbf{v}]$, $(\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger$ es su adjunto y $\tilde{\mathbf{B}}[\mathbf{v}] = \mathbf{A}\partial_x$ donde \mathbf{A} es una matriz no singular formada por constantes.

b) $(\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger \mathbf{L}[\mathbf{u}] + \gamma = 0$, con $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})^T$ constante, es un sistema lineal en las variables modificadas $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{n-1})^T$, para el cual hay una única solución $\mathbf{v} = \mathbf{G}[\mathbf{u}, \gamma]$.

Entonces la pareja de relaciones

$$(\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger L[\mathbf{u}] + \gamma = 0, \quad (1.3.29)$$

$$\mathbf{u} = M[\mathbf{v}], \quad (1.3.30)$$

define una BT entre los dos sistemas integrados

$$(\mathbf{M}'[\mathbf{v}])^\dagger \mathbf{L}[M[\mathbf{v}]] + \gamma = 0, \quad (1.3.31)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{M}[\mathbf{G}[\mathbf{u}, \gamma]] = 0, \quad (1.3.32)$$

y además $\mathbf{u} - \mathbf{M}[\mathbf{G}[\mathbf{u}, \gamma]] = 0$ es una versión integrada del sistema original $\mathbf{B}[\mathbf{u}]\mathbf{L}[\mathbf{u}] = 0$.

Ejemplo

Consideremos la ecuación

$$\mathcal{B}[u]L[u] = 0, \quad (1.3.33)$$

donde

$$\mathcal{B}[u] = (\partial_x^3 + 4u\partial_x + 2u_x), \quad (1.3.34)$$

y

$$L[u] = u - \frac{1}{2}x. \quad (1.3.35)$$

Observemos que al utilizar (1.3.34) y (1.3.35) en (1.3.33) se obtiene

$$u_{xxx} + 6uu_x - 2u - xu_x = 0. \quad (1.3.36)$$

Sea el operador

$$\tilde{\mathcal{B}}[v] = -\partial_x \quad (1.3.37)$$

y la transformación de Miura

$$u = M[v] = v_x - v^2. \quad (1.3.38)$$

Entonces la derivada Fréchet es

$$M'[v] = \partial_x - 2v, \quad (1.3.39)$$

y su adjunto

$$(M'[v])^\dagger = -\partial_x - 2v. \quad (1.3.40)$$

Se verifica que

$$M'[v]\tilde{\mathcal{B}}[v](M'[v])^\dagger \quad (1.3.41)$$

$$= (\partial_x - 2v)(-\partial_x)(-\partial_x - 2v) \quad (1.3.42)$$

$$= \partial_x^3 + 4u\partial_x + 2u_x \quad (1.3.43)$$

$$= \mathcal{B}[u], \quad (1.3.44)$$

por tanto, la ecuación modificada tiene la forma

$$\left. (-\partial_x)(-\partial_x - 2v)L[u] \right|_{u=M[v]} = 0, \quad (1.3.45)$$

que se puede integrar una vez para proporcionar

$$\left. (-\partial_x - 2v)L[u] \right|_{u=M[v]} = -\alpha + \frac{1}{2}, \quad (1.3.46)$$

donde por motivos de conveniencia hemos tomado como constante de integración $-\alpha + \frac{1}{2}$, para que (1.3.46) tenga la misma forma de P_{II} (1.3.4), que en términos de v se escribe como

$$v'' = 2v^3 + xv + \alpha. \quad (1.3.47)$$

De (1.3.46) podemos despejar v en función de $L[u]$,

$$v = \frac{-(L[u])_x + \alpha - \frac{1}{2}}{2L[u]}. \quad (1.3.48)$$

La sustitución en la transformación de Miura $u = M[v] = v_x - v^2$ proporciona

$$u = \left(\frac{-(L[u])_x + \alpha - \frac{1}{2}}{2L[u]} \right)_x - \left(\frac{-(L[u])_x + \alpha - \frac{1}{2}}{2L[u]} \right)^2, \quad (1.3.49)$$

que es una integral primera de (1.3.33) ó (1.3.36). Sustituyendo $L[u] = u - \frac{1}{2}x$ en la ecuación anterior obtenemos

$$(-2u + x)u_{xx} + u_x^2 - u_x - 4u^3 + 4xu^2 - x^2u + \alpha - \alpha^2 = 0, \quad (1.3.50)$$

que es P_{34} en su forma más habitual.

Por otro lado según el teorema anterior la pareja de ecuaciones

$$v = \frac{-(L[u])_x + \alpha - \frac{1}{2}}{2L[u]}, \quad (1.3.51)$$

$$u = v_x - v^2, \quad (1.3.52)$$

constituye una BT entre P_{II} y P_{34} .

1.3.7.2. Cálculo de aBTs utilizando la conservación de la transformación de Miura

Consideremos la jerarquía de P_{II} (1.3.11) donde reemplazaremos $\lambda \rightarrow \lambda_n$ para remarcar que λ puede ser distinto para cada miembro de la jerarquía

$$(\partial_x + 2y) \left(M_n[y_x - y^2] - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} - \lambda_n = 0, \quad (1.3.53)$$

donde M_n viene dado por la relación de recurrencia de Lenard (1.3.12), (1.3.13). Utilizando el método originalmente desarrollado por Weiss [107] para PDEs y adaptado para ODEs en [26] [56], buscaremos una expansión truncada de Painlevé

$$y = -\frac{\varphi_x}{\varphi} + \tilde{y}, \quad (1.3.54)$$

siendo

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}. \quad (1.3.55)$$

Entonces se verifica que

$$y_x - y^2 = \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi} + \tilde{y} \right)_x - \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi} + \tilde{y} \right)^2 = \tilde{y}_x - \tilde{y}^2. \quad (1.3.56)$$

Recordemos que la transformación de Miura para esta ecuación era precisamente $y_x - y^2$, con lo que $M_n[y_x - y^2]$ es invariante bajo esta transformación.

En base a estos resultados en [94] se procede al revés, esto es, se supone que existe una transformación de Miura invariante bajo aBTs. Ilustraremos este procedimiento mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Para la jerarquía de P_{II} (1.3.11) buscaremos una aBT de la forma

$$y = \varphi + w, \quad (1.3.57)$$

tal que la transformación de Miura se conserva, esto es,

$$y_x - y^2 = w_x - w^2. \quad (1.3.58)$$

Sustituyendo (1.3.57) en (1.3.58) tenemos que

$$\varphi_x - \varphi^2 - 2\varphi w = 0 \quad (1.3.59)$$

es una ecuación de Riccati para φ . Por otro lado tenemos dos copias de (1.3.11), una en la variable y con λ_n y otra en w para $\tilde{\lambda}_n$

$$(\partial_x + 2y) \left(M_n[y_x - y^2] - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} - \lambda_n = 0, \quad (1.3.60)$$

$$(\partial_x + 2w) \left(M_n[w_x - w^2] - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} - \tilde{\lambda}_n = 0. \quad (1.3.61)$$

Utilizando (1.3.57) en (1.3.60), e imponiendo que $M_n[y_x - y^2] = M_n[w_x - w^2]$ obtenemos que

$$(\partial_x + 2w + 2\varphi) \left(M_n[w_x - w^2] - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} - \lambda_n = 0. \quad (1.3.62)$$

Operando entre (1.3.61) y (1.3.62) llegamos a

$$2\varphi \left(M_n[w_x - w^2] - \frac{1}{2}x \right) + \tilde{\lambda}_n - \lambda_n = 0, \quad (1.3.63)$$

de donde podemos despejar φ

$$\varphi = \frac{\lambda_n - \tilde{\lambda}_n}{2M_n[w_x - w^2] - x}. \quad (1.3.64)$$

Recordemos que φ verifica la ecuación de Riccati (1.3.59), con lo que obtenemos la siguiente relación entre λ_n y $\tilde{\lambda}_n$:

$$\lambda_n + \tilde{\lambda}_n = 1, \quad (1.3.65)$$

donde se ha tenido en cuenta que w verifica (1.3.61). Utilizando (1.3.64) y (1.3.65) en (1.3.59) llegamos a que la aBT para toda la jerarquía de P_{II} es

$$y = \frac{1 - 2\tilde{\lambda}_n}{2M_n[w_x - w^2] - x} + w, \quad (1.3.66)$$

junto con la relación dada por (1.3.65).

Capítulo 2

Dos tipos de aBTs para una nueva PDE

2.1. Introducción

En este capítulo trabajaremos con una PDE completamente integrable, cuya estructura en muchos aspectos imita a la de P_{II} (1.3.4). Encontraremos una aBT de tipo ODE, esto es, una nueva solución expresada en términos de una solución antigua y sus derivadas permitiendo cambios en las funciones que son coeficientes. Creemos que se trata de la primera vez que una aBT de tipo ODE ha sido encontrada para una PDE. También obtendremos una aBT de tipo PDE para esta ecuación.

La motivación del capítulo actual se debe al interés en el desarrollo de métodos para obtener jerarquías de Painlevé, así como en la investigación de sus propiedades y estructuras subyacentes. En particular, hay un gran interés en el estudio de la conexión entre las estructuras que normalmente se entienden como características de la completa integrabilidad de jerarquías de PDEs, así como de las propiedades de las jerarquías de Painlevé relacionadas. Por ejemplo, aplicaremos lo expuesto en la sección 1.3.7.1. Así,

comprobaremos cómo los operadores hamiltonianos y transformaciones de Miura permiten realizar una reducción del orden de jerarquías de Painlevé [53] [58] [95] y también como la invariancia bajo las transformaciones de Miura se puede utilizar para obtener aBTs de jerarquías de Painlevé [94] de acuerdo a lo visto en dicha sección 1.3.7.1. En el presente capítulo se muestran, en el contexto de una PDE particular, que estas ideas también pueden tener ramificaciones en el ámbito de los sistemas completamente integrables, es decir, extenderemos los métodos desarrollados para jerarquías de Painlevé al nivel de las PDEs. La PDE que utilizaremos para este propósito tiene una estructura que imita, en muchos aspectos a la de P_{II} . Sin embargo, nuestro análisis es lo suficientemente general para extraer algunas conclusiones generales sobre la conexión entre aBT e integrabilidad.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la sección 2.2 introduciremos la PDE que sirve como ejemplo de lo expuesto anteriormente, donde veremos cómo se puede utilizar para reducir el orden de una ecuación relacionada. Además mostraremos que contiene a P_{II} como una reducción, y obtendremos una aBT de tipo de ODE. En la sección 2.3 se discuten las implicaciones de nuestros resultados para la conexión entre aBTs e integrabilidad. En la sección 2.4 aplicaremos nuestros resultados para obtener una reducción del orden de una jerarquía de PDEs basada en una ecuación recientemente aparecida y que ha generado bastante interés.

2.2. Obtención de una aBT de tipo ODE

2.2.1. Una PDE completamente integrable

Comencemos con una versión generalizada de la ecuación inversa de KdV, o ecuación de Ablowitz–Kaup–Newell–Segur (AKNS) [5]

$$\mathcal{R}u_t + 2\varepsilon u_x + g(t)\mathcal{R}1 = 0, \quad (2.2.1)$$

donde $\mathcal{R} = \mathcal{B}\partial_x^{-1}$ es el operador de recurrencia para la jerarquía de KdV [91] y

$$\mathcal{B} = \partial_x^3 + 4u\partial_x + 2u_x, \quad (2.2.2)$$

así

$$\mathcal{R} = \partial_x^2 + 4u + 2u_x\partial_x^{-1}, \quad (2.2.3)$$

donde $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ y $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Además si en lugar de tomar el coeficiente de u_x como una constante (2ε) lo tomáramos como una función arbitraria del tiempo ($f(t)$) el cambio de variable

$$u(x, t) = v(x, \tau), \quad \tau = k(t), \quad (2.2.4)$$

que implica

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = v_\tau k_t(t), \quad (2.2.5)$$

transformaría esta ecuación en

$$\mathcal{R}(v_\tau k_t(t)) + f(t)v_x + g(t)\mathcal{R}1 = 0. \quad (2.2.6)$$

Dado que \mathcal{R} sólo contiene derivaciones e integraciones espaciales conmuta con $k(t)$ y por tanto

$$k_t(t)\mathcal{R}v_\tau + f(t)v_x + g(t)\mathcal{R}1 = 0, \quad (2.2.7)$$

que se transforma al dividir todo por $k_t(t)$ en

$$\mathcal{R}v_\tau + \frac{f(t)}{k_t(t)}v_x + \frac{g(t)}{k_t(t)}\mathcal{R}1 = 0. \quad (2.2.8)$$

Renombrando los coeficientes y eligiendo

$$\frac{f(t)}{k_t(t)} = 2\varepsilon, \quad (2.2.9)$$

se obtiene la ecuación de la que partiremos

$$\mathcal{R}u_t + 2\varepsilon u_x + g(t)\mathcal{R}1 = 0. \quad (2.2.10)$$

Los términos no autónomos introducidos por la acción de \mathcal{R} sobre 1 provienen de una extensión no isoespectral (ver por ejemplo [54]). Introduciendo una función potencial U a través de $u = U_x$ y utilizando (2.2.3) podemos escribir (2.2.10) en forma local como

$$U_{xxxt} + 4U_x U_{xt} + 2U_{xx} U_t + 2\varepsilon U_{xx} + 2g(t)(2U_x + xU_{xx}) = 0. \quad (2.2.11)$$

Nuestro interés en este capítulo es obtener una versión integrada de la modificación de la extensión no isoespectral de la ecuación AKNS. Esperamos obtener una versión integrada similar a P_{II} , ya que en realidad P_{II} aparece al integrar la modificación de una reducción de escala de KdV (1.1.3). Podemos escribir (2.2.10) como

$$\mathcal{B}L[u] = 0, \quad (2.2.12)$$

donde

$$L[u] = \partial_x^{-1} u_t + \varepsilon + g(t)x. \quad (2.2.13)$$

Recordemos que bajo la transformación de Miura $u = M[v] = v_x - v^2$ el operador hamiltoniano B factoriza como

$$\mathbf{B}[\mathbf{u}] \Big|_{\mathbf{u}=M[v]} = \mathbf{M}'[v] \tilde{\mathbf{B}}[v] (\mathbf{M}'[v])^\dagger, \quad (2.2.14)$$

siendo $\tilde{\mathbf{B}} = -\partial_x$, $M'[v]$ la derivada Fréchet de $M[v]$ y $(M'[v])^\dagger$ su adjunto. Entonces obtenemos la ecuación modificada de (2.2.12) (de forma similar a la de mKdV), que tiene la forma

$$\partial_x(\partial_x + 2v)L[M[v]] = 0, \quad (2.2.15)$$

siendo

$$L[M[v]] = \partial_x^{-1} \partial_t (v_x - v^2) + \varepsilon + g(t)x. \quad (2.2.16)$$

La ecuación (2.2.15) se integra trivialmente, con lo que obtenemos la ecuación modificada integrada

$$(\partial_x + 2v)L[M[v]] - g(t) - h(t) = 0, \quad (2.2.17)$$

donde hemos tomado $g(t) + h(t)$ como función arbitraria de integración.

2.2.2. Reducción del orden

Hagamos un breve comentario sobre como se puede reducir el orden de (2.2.11). Para ello extenderemos los resultados expuestos en la sección 1.3.7.1 para ODEs a una PDE completamente integrable. Partiremos de (2.2.17), con $M[v]$ reemplazado por u , junto con la transformación de Miura $u = M[v]$. Así, podemos construir la BT

$$v = \frac{g(t) + h(t) - (L[u])_x}{2L[u]}, \quad (2.2.18)$$

$$u = v_x - v^2. \quad (2.2.19)$$

Sustituyendo (2.2.18) en (2.2.19) obtenemos

$$L[u](L[u])_{xx} - \frac{1}{2}((L[u])_x)^2 + 2u(L[u])^2 + \frac{1}{2}(g(t) + h(t))^2 = 0, \quad (2.2.20)$$

y utilizando (2.2.13) para reemplazar $L[u]$, en términos de U tenemos una versión integrada de (2.2.11)

$$(U_t + \varepsilon + g(t)x)U_{xxt} - \frac{1}{2}(U_{xt} + g(t))^2 + 2U_x(U_t + \varepsilon + g(t)x)^2 + \frac{1}{2}(g(t) + h(t))^2 = 0, \quad (2.2.21)$$

la cual, extendiendo nuestra analogía con P_{II} , corresponde a una versión de PDE análoga a P_{34} .

2.2.3. Reducción a P_{II}

Si sustituimos $L[M[v]]$ dado por (2.2.13) en (2.2.17) tenemos que

$$(\partial_x + 2v) \left\{ \partial_x^{-1} \partial_t (v_x - v^2) + \varepsilon + g(t)x \right\} - g(t) - h(t) = 0 \quad (2.2.22)$$

o equivalentemente

$$v_{xt} - 2v \partial_x^{-1} \partial_t (v^2) + 2\varepsilon v + 2g(t)xv - h(t) = 0, \quad (2.2.23)$$

que con el cambio $v^2 = y_x$ se puede escribir de forma local como

$$v^2 - y_x = 0, \quad (2.2.24)$$

$$v_{xt} - 2vy_t + 2\varepsilon v + 2g(t)xv - h(t) = 0. \quad (2.2.25)$$

Eligiendo $\partial_t = \partial_x$, $\varepsilon = 0$, $g(t) = -\frac{1}{2}$ y $h(t) = \lambda$, una constante arbitraria, obtenemos que (2.2.22) y (2.2.23) llevan respectivamente a

$$(\partial_x + 2v) \left(v_x - v^2 - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} - \lambda = 0 \quad (2.2.26)$$

y

$$v_{xx} - 2v^3 - xv - \lambda = 0. \quad (2.2.27)$$

La ecuación (2.2.26) es P_{II} expresada en la forma más útil para obtener una aBT. Observemos que en realidad no es necesario expresar (2.2.23) en forma local para luego tomar la reducción $\partial_t = \partial_x$, $\varepsilon = 0$, $g(t) = -\frac{1}{2}$ y $h(t) = \lambda$, ya que al ser $\partial_t = \partial_x$ de (2.2.23) se deduce directamente (2.2.27).

2.2.4. Una aBT de tipo ODE

Volvamos a la ecuación modificada integrada (2.2.17)

$$(\partial_x + 2v)L[M[v]] - g(t) - h(t) = 0. \quad (2.2.28)$$

Procederemos a aplicar el método descrito en la sección 1.3.7.2 para obtener una aBT, de forma análoga a lo que se hizo para la jerarquía de P_{II} , donde $h(t)$ jugará el papel de λ , con lo cual debemos de permitir cambios en $h(t)$ a $\tilde{h}(t)$. Busquemos entonces una transformación

$$v = \varphi + w, \quad (2.2.29)$$

donde v es solución de (2.2.28) para $h(t)$ y w solución de una copia de (2.2.28) para $\tilde{h}(t)$, esto es,

$$(\partial_x + 2w)L[M[w]] - g(t) - \tilde{h}(t) = 0. \quad (2.2.30)$$

Si imponemos que la transformación de Miura sea invariante bajo (2.2.29), esto es,

$$L[M[v]] = v_x - v^2 = w_x - w^2 = L[M[w]], \quad (2.2.31)$$

al sustituir v de (2.2.29) en (2.2.31) obtenemos que φ ha de satisfacer

$$\varphi_x - \varphi^2 - 2w\varphi = 0. \quad (2.2.32)$$

Introduciendo v de (2.2.29) en (2.2.28) llegamos a

$$(\partial_x + 2w + 2\varphi)L[M[w]] - g(t) - h(t) = 0. \quad (2.2.33)$$

Restando (2.2.33) y (2.2.30) llegamos a que

$$2\varphi L[M[w]] - h(t) + \tilde{h}(t) = 0, \quad (2.2.34)$$

de donde obtenemos que

$$\varphi = \frac{h(t) - \tilde{h}(t)}{2L[M[w]]}. \quad (2.2.35)$$

Recordemos que φ verifica (2.2.32), con lo que, o bien se tiene la transformación identidad $h(t) = \tilde{h}(t)$, o bien se verifica que

$$(\partial_x + 2w)L[M[w]] + \frac{1}{2}(h(t) - \tilde{h}(t)) = 0, \quad (2.2.36)$$

que ha de ser compatible con (2.2.30), obteniendo así la relación

$$h(t) + \tilde{h}(t) + 2g(t) = 0. \quad (2.2.37)$$

Entonces obtenemos la versión definitiva de la aBT de tipo ODE para la PDE (2.2.28)

$$v = w + \frac{h(t) - \tilde{h}(t)}{2L[M[w]]}, \quad (2.2.38)$$

$$h(t) = -\tilde{h}(t) - 2g(t). \quad (2.2.39)$$

Observemos la modificación en los valores del coeficiente variable $h(t)$ bajo la acción de esta aBT, lo que creemos que es una característica nueva para una aBT de una PDE. Por otro lado notemos la ausencia de un parámetro arbitrario en esta aBT. Estas razones son las que nos han llevado a referirnos a esta Transformación de Bäcklund como aBT de tipo ODE. En la próxima sección obtendremos una aBT para esta misma ecuación de tipo PDE.

Obviamente hemos de tener en cuenta la naturaleza no local de (2.2.23). Comprobemos que nuestros resultados son compatibles con las ecuaciones escritas en forma local, esto es, que nos dan una transformación de

$$w^2 - z_x = 0, \quad (2.2.40)$$

$$w_{xt} - 2wz_t + 2\varepsilon w + 2g(t)xw - \tilde{h}(t) = 0, \quad (2.2.41)$$

a

$$v^2 - y_x = 0, \quad (2.2.42)$$

$$v_{xt} - 2vy_t + 2\varepsilon v + 2g(t)xv - h(t) = 0. \quad (2.2.43)$$

Antes de escribir la aBT obtenida arriba como una transformación de (2.2.40), (2.2.41) a (2.2.42), (2.2.43) observemos que hay dos transformaciones triviales

$$v = -w, \quad (2.2.44)$$

$$y = z, \quad (2.2.45)$$

$$h(t) = -\tilde{h}(t), \quad (2.2.46)$$

que corresponde a la invariancia $(v, h(t)) \rightarrow (-v, -h(t))$ de (2.2.23) y

$$v = w, \quad (2.2.47)$$

$$y = z + C, \quad (2.2.48)$$

$$h(t) = \tilde{h}(t), \quad (2.2.49)$$

siendo C una constante arbitraria, que incluye la transformación identidad cuando $C = 0$. Una sustitución directa en (2.2.38), (2.2.39), proporciona

$$v = w + \frac{h(t) - \tilde{h}(t)}{2(w_t - z_t + \varepsilon + g(t)x)}, \quad (2.2.50)$$

$$y = z + \frac{h(t) - \tilde{h}(t)}{2(w_t - z_t + \varepsilon + g(t)x)}, \quad (2.2.51)$$

$$h(t) = -\tilde{h}(t) - 2g(t), \quad (2.2.52)$$

donde hemos utilizado la transformación (2.2.47)–(2.2.49) para eliminar la constante de integración aditiva de (2.2.51). Particularizando a la reducción que proporcionaba P_{II} (2.2.27), la aBT (2.2.38), (2.2.39) se escribe como

$$v = w + \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{2w_x - 2w^2 - x}, \quad (2.2.53)$$

$$\lambda = -\tilde{\lambda} + 1, \quad (2.2.54)$$

siendo w una solución de P_{II} correspondiente a un parámetro $\tilde{\lambda}$,

$$w_{xx} - 2w^3 - xw - \tilde{\lambda} = 0. \quad (2.2.55)$$

Esta aBT junto con la versión trivial dada por (2.2.44)–(2.2.46)

$$v = -w, \quad (2.2.56)$$

$$\lambda = -\tilde{\lambda}, \quad (2.2.57)$$

nos va a permitir generar secuencias de soluciones para P_{II} . Dada una solución semilla \hat{y} de P_{II} para un parámetro $\hat{\lambda}$, soluciones de la forma $\pm\hat{\lambda} + n$, donde $n \in \mathbb{Z}$, se pueden generar a partir de estas dos aBTs. Casos particulares de este resultado son secuencias de soluciones racionales para valores enteros del parámetro, y la secuencia de soluciones definida por integrales especiales para valores semienteros del parámetro.

2.3. aBTs e integrabilidad

Volvamos a la relación entre la existencia de aBTs y la integrabilidad de ODEs y PDEs. Comencemos observando que en la obtención de la aBT (2.2.38), (2.2.39) para la PDE (2.2.28) no se ha hecho en ningún momento uso de la forma explícita de $L[M[v]]$ (2.2.16). Esto significa que esta aBT es válida para cualquier PDE de la forma (2.2.28) independientemente de la forma de $L[M[v]]$: para cualquier $L[u]$ (teniendo cuidado con la forma no local de las ecuaciones) la correspondiente PDE tiene una aBT. En particular una PDE no integrable podría tener una aBT de tipo ODE. Esto nos lleva a la conclusión de que el hecho de que exista una aBT de tipo ODE para una PDE no es garantía suficiente de integrabilidad.

Sin embargo la conexión entre aBTs de tipo PDE y la integrabilidad de las propias PDEs está naturalmente bien entendida. Utilizaremos la expansión truncada generalizada de Painlevé [96] de acuerdo a lo explicado en la sección 1.1.5 para obtener una aBT del tipo PDE. Partiremos de la siguiente pareja de ecuaciones

$$v^2 - y_x = 0, \quad (2.3.1)$$

$$v_{xt} - 2vy_t + 2\varepsilon v + 2g(t)xv - h(t) = 0, \quad (2.3.2)$$

y buscaremos una solución del tipo

$$v = w + (\log(\chi))_x = w + \frac{\chi_x}{\chi}, \quad (2.3.3)$$

$$y = \frac{y_0}{\chi} + z + y_1\chi, \quad (2.3.4)$$

donde w y z son funciones de x y t , al igual que los coeficientes y_0 e y_1 , y χ verifica el siguiente sistema de Riccati:

$$\chi_x = 1 - A\chi - B\chi^2, \quad (2.3.5)$$

$$\chi_t = -C + (AC + C_x)\chi - (D - BC)\chi^2, \quad (2.3.6)$$

siendo A , B , C y D funciones de x y t . Sustituyendo (2.3.3), (2.3.4) en la pareja de ecuaciones (2.3.1), (2.3.2) y utilizando el sistema (2.3.5), (2.3.6) para eliminar todas las derivadas espaciales y temporales de χ obtenemos una ecuación en potencias de χ . Al igualar a cero los coeficientes de cada potencia anterior, obtenemos que se verifican las siguientes relaciones

$$A = 2w, \quad (2.3.7)$$

$$B = \lambda(t), \quad (2.3.8)$$

$$C = \frac{1}{2\lambda(t)} (\varepsilon + xg(t) + w_t - z_t), \quad (2.3.9)$$

$$D = w_t, \quad (2.3.10)$$

$$y_0 = -1, \quad (2.3.11)$$

$$y_1 = -\lambda(t), \quad (2.3.12)$$

$$\lambda_t(t) = -g(t), \quad (2.3.13)$$

donde se ha utilizado la condición de compatibilidad entre (2.3.5), (2.3.6) ($\chi_{xt} = \chi_{tx}$) y además z y w satisfacen el siguiente sistema

$$w^2 - z_x = 0, \quad (2.3.14)$$

$$w_{xt} - 2wz_t + 2\varepsilon w + 2g(t)xw - h(t) = 0. \quad (2.3.15)$$

Entonces las ecuaciones (2.3.3), (2.3.4) transforman soluciones de (2.3.1), (2.3.2) en soluciones a través de χ . Por tanto, si se linealiza el sistema de Riccati (2.3.5), (2.3.6) (que se transformará en un par de Lax), mediante el cambio de variable usual $\chi^{-1} = \frac{\psi_x}{\psi}$, dicha transformación será una DT. Además al eliminar ψ entre el par de Lax y la DT encontraríamos una aBT. No obstante, observemos que no es necesario linealizar el sistema de Riccati para obtener una aBT, ya que se puede eliminar χ directamente sin necesidad de introducir ψ ; definiendo unas nuevas variables $\tilde{v}_x = v$ y $\tilde{w}_x = w$ de (2.3.3) tenemos que

$$\chi = e^{\tilde{v} - \tilde{w}}. \quad (2.3.16)$$

Introduciendo (2.3.16) en el sistema de Riccati (2.3.5), (2.3.6) y en (2.3.4) obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x + \tilde{w}_x &= e^{-(\tilde{v} - \tilde{w})} - \lambda(t)e^{\tilde{v} - \tilde{w}} \\ \tilde{v}_t - \tilde{w}_t &= \frac{1}{2\lambda(t)}(2\tilde{w}_x - e^{-(\tilde{v} - \tilde{w})})(\varepsilon + g(t)x + \tilde{w}_{xt} - z_t) \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda(t)}(g(t) + h(t) - 2\varepsilon\tilde{w}_x - 2g(t)x\tilde{w}_x + 2\tilde{w}_x z_t) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

$$-2\tilde{w}_x\tilde{w}_{xt}) - \frac{1}{2}(\tilde{w}_{xt} - \varepsilon - g(t)x + z_t)e^{\tilde{v}-\tilde{w}}, \quad (2.3.18)$$

$$y = -e^{-(\tilde{v}-\tilde{w})} + z - \lambda(t)e^{\tilde{v}-\tilde{w}}, \quad (2.3.19)$$

donde se han utilizado las ecuaciones (2.3.7)–(2.3.13) para reemplazar los coeficientes A , B , C , D , y_0 e y_1 . Está claro que la obtención de soluciones a través de esta aBT es diferente a la de la aBT (2.2.50)–(2.2.52) (sin embargo, no podemos excluir la posibilidad de obtener esta última de la primera).

Volviendo a las consideraciones sobre ODEs. Hagamos la misma observación que en la obtención de la aBT (2.2.38), (2.2.39); para la PDE (2.2.28) no se ha hecho en ningún momento uso de la forma explícita de $L[M[v]]$ (2.2.16). En caso de que hubiera sido una ODE (donde $h(t)$ y $g(t)$ serían constantes) para cualquier $L[u]$ (de nuevo siendo cuidadoso con las formas locales de las ecuaciones) dicha ODE tendría una aBT. Por tanto existen ODEs no integrables con aBT, de lo que deducimos que el hecho de que una ODE tenga una aBT no garantiza en absoluto su integrabilidad. No obstante, se afirma con asiduidad que una ODE con una aBT es integrable. Todo parece indicar que esa afirmación habrá que precisarla. Por ejemplo, podría ser que el conjunto de valores que toman los parámetros por iteración de las aBTs de tipo ODE deba de tenerse en cuenta para decidir si una ODE es integrable o no. En la aBT del tipo ODE (2.2.38), (2.2.39) no podemos obtener infinitas soluciones por iteración, ya que al ser $h(t) = -\tilde{h}(t) - 2g(t)$. Entonces si tenemos una nueva solución asociada a otro parámetro $k(t)$, esto es,

$$k(t) = -h(t) - 2g(t) = -\left[-\tilde{h}(t) - 2g(t)\right] - 2g(t) = \tilde{h}(t), \quad (2.3.20)$$

volvemos al parámetro de partida.

Finalmente, recordemos otra afirmación extendida sobre aBTs de ODEs. Como ya dijimos antes, no se conoce ninguna aBT para P_I (1.3.3)

$$y_{xx} = 6y^2 + x. \quad (2.3.21)$$

Normalmente este hecho se asocia a que P_I (a diferencia del resto de ecuaciones de Painlevé $P_{II}-P_{VI}$) es la única ecuación que no tiene un parámetro libre. Sin embargo, veremos que esta afirmación es falsa. Como contraejemplo consideremos la derivada de P_{II}

$$v_{xxx} - 6v^2v_x - xv_x - v = 0, \quad (2.3.22)$$

que no contiene ningún parámetro libre. Por otro lado, sustituyendo λ y $\tilde{\lambda}$ en (2.2.53) de (2.2.54) y (2.2.55) tenemos que

$$v = w + \frac{1 - 2(w_{xx} - 2w^3 - xw)}{2w_x - 2w^2 - x} \quad (2.3.23)$$

nos proporciona una aBT entre la derivada de P_{II} en w

$$w_{xxx} - 6w^2w_x - xw_x - w = 0 \quad (2.3.24)$$

y la propia derivada de P_{II} en v (2.3.22). Este es un ejemplo de ODE sin parámetro libre que posee una aBT.

2.4. Una integral primera de KdV6 y de la jerarquía asociada

En un artículo reciente Karasu–Kalkanlı et al. [68] encontraron una nueva PDE integrable de sexto orden, que corresponde a una deformación no holonómica de la ecuación de KdV (1.1.3), a la que se refieren como KdV6. Posteriormente Kupersmidt [75] escribió la correspondiente jerarquía de PDEs como

$$u_t = \partial_x \delta \mathcal{H}_{n+1} - \partial_x w = \mathcal{B} \delta \mathcal{H}_n - \partial_x w, \quad (2.4.1)$$

$$Bw = 0, \quad (2.4.2)$$

donde B está definido en (2.2.2), δ es la derivada variacional (1.1.32) y \mathcal{H}_n , $n = 1, 2, \dots$, son los miembros de la secuencia de densidades hamiltonianas de la jerarquía de KdV

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}u, \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}u^2, \quad \mathcal{H}_3 = u^3 - \frac{1}{2}u_x^2, \quad (2.4.3)$$

Llamando $u = U_x$ y $w = -U_t + \widehat{\delta\mathcal{H}}_{n+1}$, donde hemos utilizado $\widehat{}$ para denotar que se ha hecho la sustitución $u = U_x$, obtenemos

$$\widehat{\mathcal{B}}(U_t - \widehat{\delta\mathcal{H}}_{n+1}) = 0. \quad (2.4.4)$$

El sistema (2.4.1), (2.4.2) y la ecuación (2.4.4) son ambos de orden $2n + 2$. Para $n = 2$, tenemos que

$$w = U_t - \widehat{\delta\mathcal{H}}_3 = U_t - \delta \left[u^3 - \frac{1}{2}u_x^2 \right] = U_t - U_{xxx} - 3U_x^2, \quad (2.4.5)$$

con lo que el sistema (2.4.1), (2.4.2) y la ecuación (2.4.4) se escriben como

$$u_t = u_{xxx} + 6uw_x - w_x, \quad (2.4.6)$$

$$w_{xxx} + 4ww_x + 2u_xw = 0 \quad (2.4.7)$$

y

$$(\partial_x^3 + 4U_x\partial_x + 2U_{xx})(U_t - U_{xxx} - 3U_x^2) = 0 \quad (2.4.8)$$

respectivamente, que son versiones redefinidas de KdV6 dadas en [68]. Ahora bien, a todos los miembros de la jerarquía de KdV6 y por tanto la propia ecuación KdV6 se les puede reducir en uno su orden. Recordemos que (2.2.20) es una integral primera de (2.2.12). Así que simplemente reemplazando $L[u]$ por w en (2.2.12) obtenemos directamente una integral primera

para (2.4.2). Esto significa que podemos escribir el sistema (2.4.1), (2.4.2) en la forma

$$u_t = \partial_x \delta \mathcal{H}_{n+1} - \partial_x w = \mathcal{B} \delta \mathcal{H}_n - \partial_x w, \quad (2.4.9)$$

$$w w_{xx} - \frac{1}{2} w_x^2 + 2uw^2 = C(t), \quad (2.4.10)$$

donde $C(t) = -\frac{1}{2}(g(t) + h(t))^2$ es la constante de integración renombrada. De forma análoga la ecuación (2.4.4) se escribe como

$$\begin{aligned} & \left(U_t - \widehat{\delta \mathcal{H}}_{n+1} \right) \left(U_t - \widehat{\delta \mathcal{H}}_{n+1} \right)_{xx} - \frac{1}{2} \left[\left(U_t - \widehat{\delta \mathcal{H}}_{n+1} \right)_x \right]^2 \\ & + 2U_x \left(U_t - \widehat{\delta \mathcal{H}}_{n+1} \right)^2 = C(t). \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Para $n = 2$ el sistema (2.4.9) y (2.4.10) se escribe como

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x - w_x, \quad (2.4.12)$$

$$w w_{xx} - \frac{1}{2} w_x^2 + 2uw^2 = C(t), \quad (2.4.13)$$

mientras que la ecuación (2.4.11) toma la forma

$$\begin{aligned} & \left(U_t - U_{xxx} - 3U_x^2 \right) \left(U_t - U_{xxx} - 3U_x^2 \right)_{xx} - \frac{1}{2} \left[\left(U_t - U_{xxx} - 3U_x^2 \right)_x \right]^2 \\ & + 2U_x \left(U_t - U_{xxx} - 3U_x^2 \right)^2 = C(t). \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Así, cada miembro de la jerarquía puede integrarse una vez y reducir su orden inicial de $2n + 2$ a $2n + 1$. En particular la propia ecuación KdV6 se reduce a una ecuación de orden cinco.

Capítulo 3

Un sistema relacionado con el flujo inverso de Broer–Kaup

3.1. Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de un sistema que representa una versión integrada de la modificación de una extensión no isoespectral del flujo inverso de Broer–Kaup. Construiremos dos aBTs de tipo ODE y además una relación entre ambas. Cada una de ellas puede proporcionar una aBT de P_{IV} (1.3.6), con las reducciones apropiadas. Entonces las PDEs que utilizaremos pueden entenderse como extensiones de P_{IV} , mucho más que las que simplemente tienen una reducción de similaridad a P_{IV} . Al igual que en el capítulo anterior, las técnicas que utilizaremos son bastante generales y de hecho son aplicables a cualquier ODE o PDE (integrables o no) con una estructura adecuada.

La estructura del presente capítulo es la que sigue. En la sección 3.2 recordaremos las transformaciones de Miura del sistema de Broer–Kaup, que tendrán aplicación para las ecuaciones consideradas. En las secciones 3.3, 3.4 y 3.5 encontraremos aBTs de tipo ODE y soluciones exactas. Por

último en la sección 3.6 relacionaremos las aBTs anteriores.

3.2. Transformaciones de Miura

Consideremos el siguiente sistema acoplado de PDEs en $\mathbf{u} = (u, v)^T$,

$$\mathcal{R}\mathbf{u}_t + \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{u}_x + g(t)\mathcal{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

que corresponde a una extensión no isopectral de sistema inverso de Broer–Kaup (observemos el parecido de este sistema con la ecuación (2.2.10)). Aquí \mathcal{R} es el operador de recurrencia de la jerarquía de ondas de agua dispersivas (DWW) [9] [16] [65] [66] [67] [76] [85] [101],

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_x u \partial_x^{-1} - \partial_x & 2 \\ 2v + v_x \partial_x^{-1} & u + \partial_x \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Este sistema se puede escribir de forma alternativa como

$$B_2 \mathbf{K}[\mathbf{u}] = 0, \quad (3.2.3)$$

donde

$$\mathbf{K}[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} \partial_x^{-1} v_t \\ \partial_x^{-1} u_t \end{pmatrix} + g(t) \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

y B_2 es uno de los tres operadores hamiltonianos de la jerarquía DWW,

$$B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_x & \partial_x u - \partial_x^2 \\ u\partial_x + \partial_x^2 & v\partial_x + \partial_x v \end{pmatrix}. \quad (3.2.5)$$

La jerarquía DWW tiene las siguientes de transformaciones de Miura [76], que representaremos en el siguiente diagrama

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} \phi \\ p \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \psi \\ s \end{pmatrix} \end{array}. \quad (3.2.6)$$

La primera de las transformaciones de Miura viene dada por $\mathbf{u} = \mathbf{F}[\mathbf{U}]$, donde $\mathbf{U} = (U, V)^T$ y

$$\mathbf{F}[\mathbf{U}] = \begin{pmatrix} U \\ UV - V^2 + V_x \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Existen dos segundas transformaciones de Miura, que denominaremos Φ y Ψ respectivamente. La primera de ellas está dada por $\mathbf{U} = \Phi[\phi]$, donde $\phi = (\phi, p)^T$ y

$$\Phi[\phi] = \begin{pmatrix} \phi + 2p \\ p \end{pmatrix}, \quad (3.2.8)$$

y la segunda por $\mathbf{U} = \Psi[\psi]$, donde $\psi = (\psi, s)^T$ y

$$\Psi[\psi] = \begin{pmatrix} \psi - 2s \\ -s \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

3.3. El primer caso

Si definimos una función para la composición $\mathbf{H} = \mathbf{F} \circ \Phi$, el operador hamiltoniano B_2 factoriza como

$$B_2 \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{H}[\phi]} = \mathbf{H}'[\phi] C (\mathbf{H}'[\phi])^\dagger \quad (3.3.1)$$

siendo

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\partial_x & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

y $\mathbf{H}'[\phi]$ la derivada Fréchet de la transformación de Miura, $\mathbf{u} = \mathbf{H}[\phi]$ y $(\mathbf{H}'[\phi])^\dagger$ su adjunto. Esta factorización del operador hamiltoniano B_2 permite obtener un sistema modificado de (3.2.3), que puede integrarse para proporcionar

$$(\mathbf{H}'[\phi])^\dagger \mathbf{K}[\mathbf{H}[\phi]] + (e(t), f(t))^T = 0, \quad (3.3.3)$$

donde $e(t)$ y $f(t)$ son dos funciones arbitrarias del tiempo. Dado que la transformación de Miura $\mathbf{u} = \mathbf{H}[\phi]$ viene dada por

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}[\phi] = \begin{pmatrix} \phi + 2p \\ \phi p + p^2 + p_x \end{pmatrix}, \quad (3.3.4)$$

tenemos que el sistema (3.3.3) se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & \phi + 2p - \partial_x \end{pmatrix} \mathbf{K}[\mathbf{H}[\phi]] + \begin{pmatrix} e(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Procedamos ahora a obtener una aBT para este sistema (3.3.5). Según lo expuesto en la sección 1.3.7.2 buscaremos una transformación de la forma

$$\phi = \tilde{\phi} + S, \quad p = \tilde{p} + R, \quad (3.3.6)$$

entre dos soluciones de (3.3.5), una en $(\phi, p, e(t), f(t))$ y otra en $(\tilde{\phi}, \tilde{p}, \tilde{e}(t), \tilde{f}(t))$.

Es decir, también se cumple que

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{p} \\ 2 & \tilde{\phi} + 2\tilde{p} - \partial_x \end{pmatrix} \mathbf{K}[\mathbf{H}[\tilde{\phi}]] + \begin{pmatrix} \tilde{e}(t) \\ \tilde{f}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.7)$$

Impondremos que la transformación de Miura (3.3.4) quede invariante bajo la aBT (3.3.6), esto es,

$$\mathbf{H}[\phi] = \mathbf{H}[\tilde{\phi}] \quad (3.3.8)$$

o equivalentemente

$$\phi + 2p = \tilde{\phi} + 2\tilde{p}, \quad (3.3.9)$$

$$\phi p + p^2 + p_x = \tilde{\phi}\tilde{p} + \tilde{p}^2 + \tilde{p}_x. \quad (3.3.10)$$

Esta invariancia fija relaciones entre las funciones S y R de la forma

$$S + 2R = 0, \quad (3.3.11)$$

$$R_x - R^2 + \tilde{\phi}R = 0. \quad (3.3.12)$$

Utilizando (3.3.11) en (3.3.6) tenemos que

$$\phi = \tilde{\phi} - 2R, \quad p = \tilde{p} + R. \quad (3.3.13)$$

Por otra parte, sustituyendo (3.3.13) en (3.3.5) se obtiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{p} + R \\ 2 & \tilde{\phi} + 2\tilde{p} - \partial_x \end{pmatrix} \mathbf{K}[\mathbf{H}[\tilde{\phi}]] + \begin{pmatrix} e(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.14)$$

Entre (3.3.7) y (3.3.14) llegamos directamente a que

$$R = \frac{\tilde{e}(t) - e(t)}{L[\mathbf{H}[\tilde{\phi}]]}, \quad (3.3.15)$$

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad (3.3.16)$$

donde se ha utilizado la invariancia de la transformación de Miura, $\mathbf{H}[\phi] = \mathbf{H}[\tilde{\phi}]$ y $\mathbf{K} = (K, L)^T$. Por último utilizando el hecho de que R verifica la ecuación de Riccati (3.3.12) junto con (3.3.7) llegamos a que $\tilde{e}(t) = \tilde{f}(t) - e(t)$ o $\tilde{e}(t) = e(t)$ (que constituye la transformación identidad). Entonces tenemos que la aBT para (3.3.5) tiene la forma

$$\phi = \tilde{\phi} - 2 \frac{\tilde{e}(t) - e(t)}{L[\mathbf{H}[\tilde{\phi}]]}, \quad (3.3.17)$$

$$p = \tilde{p} + \frac{\tilde{e}(t) - e(t)}{L[\mathbf{H}[\tilde{\phi}]]}, \quad (3.3.18)$$

$$\tilde{e}(t) = \tilde{f}(t) - e(t), \quad (3.3.19)$$

$$\tilde{f}(t) = f(t). \quad (3.3.20)$$

Para expresar los resultados anteriores en forma local, hay que utilizar la forma explícita de $\mathbf{K}[\mathbf{u}]$, siendo $\mathbf{u} = \mathbf{H}[\tilde{\phi}]$. Para ello introduciremos las variables auxiliares P, Q y \tilde{P}, \tilde{Q} definidas por

$$P_x = \phi + 2p, \quad (3.3.21)$$

$$Q_x = \phi p + p^2 + p_x \quad (3.3.22)$$

y

$$\tilde{P}_x = \tilde{\phi} + 2\tilde{p}, \quad (3.3.23)$$

$$\tilde{Q}_x = \tilde{\phi}\tilde{p} + \tilde{p}^2 + \tilde{p}_x. \quad (3.3.24)$$

Utilizando estas nuevas variables en (3.2.4) tenemos que

$$\mathbf{K}[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} Q_t \\ P_t + xg(t) + \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (3.3.25)$$

Entonces el sistema (3.3.5) se escribe en forma local como

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & P_x - \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_t \\ P_t + xg(t) + \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.26)$$

o equivalentemente como

$$Q_t + pP_t + g(t)xp + \varepsilon p + e(t) = 0, \quad (3.3.27)$$

$$2Q_t + P_x P_t - P_{xt} + g(t)xP_x - g(t) + \varepsilon P_x + f(t) = 0. \quad (3.3.28)$$

Y la aBT (3.3.17)–(3.3.20) se transforma en

$$P = \tilde{P} \quad (3.3.29)$$

$$Q = \tilde{Q} \quad (3.3.30)$$

$$\phi = \tilde{\phi} - 2 \frac{2\tilde{e}(t) - \tilde{f}(t)}{\tilde{P}_t + g(t)x + \varepsilon}, \quad (3.3.31)$$

$$p = \tilde{p} + \frac{2\tilde{e}(t) - \tilde{f}(t)}{\tilde{P}_t + g(t)x + \varepsilon}, \quad (3.3.32)$$

$$\tilde{e}(t) = \tilde{f}(t) - e(t), \quad (3.3.33)$$

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad (3.3.34)$$

entre una solución $(p, \phi, P, Q, e(t), f(t))$ de (3.3.27), (3.3.28) junto con (3.3.21), (3.3.22) y otra solución $(\tilde{p}, \tilde{\phi}, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{e}(t), \tilde{f}(t))$ de

$$\tilde{Q}_t + \tilde{p}\tilde{P}_t + g(t)x\tilde{p} + \varepsilon\tilde{p} + \tilde{e}(t) = 0, \quad (3.3.35)$$

$$2\tilde{Q}_t + \tilde{P}_x\tilde{P}_t - \tilde{P}_{xt} + g(t)x\tilde{P}_x - g(t) + \varepsilon\tilde{P}_x + \tilde{f}(t) = 0. \quad (3.3.36)$$

junto con (3.3.23), (3.3.24). Observemos que se ha utilizado la aBT adicional $P = \tilde{P} + c$, $Q = \tilde{Q} + d$, $p = \tilde{p}$, $\phi = \tilde{\phi}$, $e(t) = \tilde{e}(t)$, $f(t) = \tilde{f}(t)$, donde c y d son constantes arbitrarias, para eliminar las constantes aditivas de (3.3.29) y (3.3.30).

3.4. Algunas soluciones particulares

Mostraremos brevemente como construir soluciones explícitas para el sistema (3.3.21), (3.3.22), (3.3.27), (3.3.28). Para ello, comenzaremos con una solución del sistema (3.3.23), (3.3.24), (3.3.35), (3.3.36). Aplicando el método de WTC [109] (ver sección 1.1.4) tenemos que

$$\tilde{P} = \log(\xi) + r, \quad (3.4.1)$$

$$\tilde{Q} = \frac{\xi_x}{\xi} + r_x + h(t), \quad (3.4.2)$$

$$\tilde{\phi} = -\frac{\xi_x}{\xi} - r_x, \quad (3.4.3)$$

$$\tilde{p} = \frac{\xi_x}{\xi} + r_x \quad (3.4.4)$$

es una solución del sistema (3.3.23), (3.3.24), (3.3.35), (3.3.36) siempre que $\xi = \xi(x, t)$ y $r = r(x, t)$ verifiquen las ecuaciones

$$r_{xt} + (r_t + g(t)x + \varepsilon)r_x + g(t) + 2\tilde{e}(t) - \tilde{f}(t) = 0, \quad (3.4.5)$$

$$\xi_{xt} + (r_t + g(t)x + \varepsilon)\xi_x + r_x\xi_t = 0, \quad (3.4.6)$$

y

$$h'(t) = g(t) + \tilde{e}(t) - \tilde{f}(t), \quad (3.4.7)$$

donde ' denota la derivada con respecto a t . En particular, podemos elegir

$$r = n(t), \quad (3.4.8)$$

$$\xi = B - \frac{A}{\int g(t)dt} e^{-\varepsilon t - n(t) - x \int g(t)dt}, \quad (3.4.9)$$

donde A y B son constantes arbitrarias, lo que obliga a que

$$g(t) = \tilde{f}(t) - 2\tilde{e}(t). \quad (3.4.10)$$

La sustitución en (3.4.1)–(3.4.4) proporciona una solución del sistema (3.3.23), (3.3.24), (3.3.35), (3.3.36) para el valor de $g(t)$ dado por la ecuación de arriba; esta solución puede utilizarse como solución semilla en la aBT (3.3.29)–(3.3.34). Entonces obtenemos una solución del sistema (3.3.21), (3.3.22), (3.3.27), (3.3.28) :

$$P = \log(\xi) + n(t), \quad (3.4.11)$$

$$Q = \frac{\xi_x}{\xi} + h(t), \quad (3.4.12)$$

$$\phi = -\frac{\xi_x}{\xi} - 2\frac{(f(t) - 2e(t))\xi}{\xi_t + (n'(t) + g(t)x + \varepsilon)\xi}, \quad (3.4.13)$$

$$p = \frac{\xi_x}{\xi} + \frac{(f(t) - 2e(t))\xi}{\xi_t + (n'(t) + g(t)x + \varepsilon)\xi}, \quad (3.4.14)$$

donde ξ viene dada por (3.4.9) y

$$g(t) = 2e(t) - f(t), \quad (3.4.15)$$

$$h'(t) = e(t) - f(t). \quad (3.4.16)$$

Hagamos dos observaciones. En primer lugar, nuestra solución semilla es de hecho solución de la reducción $\tilde{Q} = \tilde{p} + h(t)$, $\tilde{\phi} = -\tilde{p}$ del sistema (3.3.23), (3.3.24), (3.3.35), (3.3.36). Sin embargo, la solución obtenida tras aplicar nuestra aBT, esto es, (3.4.11)–(3.4.14), ya no es solución de esta reducción de nuestro sistema. Este hecho ilustra la utilidad de nuestra aBT. La segunda observación es que podemos obtener nuevas soluciones (3.4.11)–(3.4.14) claramente diferentes a la solución semilla de partida, como se pone de manifiesto en el hecho de que la nueva solución que hemos obtenido tiene términos racionales en x , mientras que la solución semilla no los tiene.

Destaquemos por otro lado, que la aBT que acabamos de obtener arriba para el sistema (3.3.21), (3.3.22), (3.3.27), (3.3.28) imita en cierto modo a la de P_{IV} (1.3.6). Si elegimos $\partial_t = \partial_x$, $\varepsilon = 0$, $g(t) = 2$, $e(t) = e_1$ y $f(t) = f_1$ (e_1 y f_1 son constantes arbitrarias) en el sistema (3.3.21), (3.3.22), (3.3.27), (3.3.28) obtenemos el siguiente sistema de ODEs

$$p_x + 2\phi p + 3p^2 + 2xp + e_1 = 0, \quad (3.4.17)$$

$$\phi_x - 6\phi p - 6p^2 - \phi^2 - 2x(\phi + 2p) + 2 - f_1 = 0, \quad (3.4.18)$$

de tal forma que al eliminar ϕ entre ambas ecuaciones y tomando

$$e_1 = B_1, \quad (3.4.19)$$

$$f_1 = \frac{1}{2}(2A_1 + 3B_1 + 2), \quad (3.4.20)$$

se obtiene

$$p_{xx} = \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{p} + \frac{3}{2} p^3 + 4xp^2 + 2[x^2 - A_1]p - \frac{1}{2} \frac{B_1^2}{p}, \quad (3.4.21)$$

que salvo un cambio en la notación, es la propia ecuación P_{IV} (1.3.6). Por otro lado aplicando la misma reducción a la aBT (3.3.29)–(3.3.34) llegamos a que

$$\phi = \tilde{\phi} - 2 \frac{2\tilde{e}_1 - \tilde{f}_1}{\tilde{\phi} + 2\tilde{p} + 2x}, \quad (3.4.22)$$

$$p = \tilde{p} + \frac{2\tilde{e}_1 - \tilde{f}_1}{\tilde{\phi} + 2\tilde{p} + 2x}, \quad (3.4.23)$$

$$\tilde{e}_1 = \tilde{f}_1 - e_1, \quad (3.4.24)$$

$$\tilde{f}_1 = f_1, \quad (3.4.25)$$

donde \tilde{p} y $\tilde{\phi}$ son soluciones del mismo sistema para valores de los parámetros \tilde{e}_1 y \tilde{f}_1 ($\tilde{e}(t) = \tilde{e}_1$, $\tilde{f}(t) = \tilde{f}_1$),

$$\tilde{p}_x + 2\tilde{\phi}\tilde{p} + 3\tilde{p}^2 + 2x\tilde{p} + \tilde{e}_1 = 0, \quad (3.4.26)$$

$$\tilde{\phi}_x - 6\tilde{\phi}\tilde{p} - 6\tilde{p}^2 - \tilde{\phi}^2 - 2x(\tilde{\phi} + 2\tilde{p}) + 2 - \tilde{f}_1 = 0. \quad (3.4.27)$$

Por otro lado para la propia ecuación P_{IV} (3.4.21) obtenemos la aBT

$$p = \tilde{p} + \frac{(B_1 - 2A_1 - 2)\tilde{p}}{\tilde{p}_x - \tilde{p}^2 - 2x\tilde{p} + B_1/2 + A_1 + 1}, \quad (3.4.28)$$

donde \tilde{p} verifica la cuarta ecuación de Painlevé, para los siguientes valores de los parámetros \tilde{A}_1, \tilde{B}_1 dados por

$$\tilde{e}_1 = \tilde{B}_1, \quad (3.4.29)$$

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{2}(2\tilde{A}_1 + 3\tilde{B}_1 + 2). \quad (3.4.30)$$

Para la ecuación de P_{IV} las variaciones en los parámetros (3.4.24), (3.4.25) se escriben como

$$\tilde{A}_1 = -\frac{1}{4}(2A_1 - 3B_1 + 6), \quad (3.4.31)$$

$$\tilde{B}_1 = \frac{1}{2}(2A_1 + B_1 + 2). \quad (3.4.32)$$

Esta aBT para la ecuación P_{IV} , junto con las variaciones en los parámetros (3.4.31), (3.4.32), se suele denominar frecuentemente como “double dagger” (ver por ejemplo [11] [56] [57]).

3.5. El segundo caso

Consideremos la ecuación que surge al utilizar la segunda modificación dada por

$$\Psi[\boldsymbol{\psi}] = \begin{pmatrix} \psi - 2s \\ -s \end{pmatrix}. \quad (3.5.1)$$

En este caso existe una función $\mathbf{I} = \mathbf{F} \circ \Psi$, que permite una factorización del operador hamiltoniano B_2 (3.2.5) como

$$B_2 \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{I}[\boldsymbol{\psi}]} = \mathbf{I}'[\boldsymbol{\psi}] D (\mathbf{I}'[\boldsymbol{\psi}])^\dagger, \quad (3.5.2)$$

con

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\partial_x & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.3)$$

La forma explícita de la transformación de Miura viene dada por

$$\mathbf{u} = \mathbf{I}[\boldsymbol{\psi}] = \begin{pmatrix} \psi - 2s \\ -\psi s + s^2 - s_x \end{pmatrix}. \quad (3.5.4)$$

Podemos obtener una integral primera del sistema modificado

$$(\mathbf{I}'[\boldsymbol{\psi}])^\dagger \mathbf{K}[\mathbf{I}[\boldsymbol{\psi}]] + (l(t), m(t))^T = 0, \quad (3.5.5)$$

donde $l(t)$ y $m(t)$ son dos funciones arbitrarias del tiempo. Calculando la derivada Fréchet de (3.5.4) podemos escribir este sistema (3.5.5) como

$$\begin{pmatrix} 1 & -s \\ -2 & -\psi + 2s + \partial_x \end{pmatrix} \mathbf{K}[\mathbf{I}[\boldsymbol{\psi}]] + \begin{pmatrix} l(t) \\ m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.6)$$

Busquemos una aBT para (3.5.6) de la forma

$$\psi = \tilde{\psi} + A, \quad s = \tilde{s} + B \quad (3.5.7)$$

entre dos soluciones de sistema (3.5.6), una en $(\psi, s, l(t), m(t))$ y la otra en $(\tilde{\psi}, \tilde{s}, \tilde{l}(t), \tilde{m}(t))$. Entonces se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s} \\ -2 & -\tilde{\psi} + 2\tilde{s} + \partial_x \end{pmatrix} \mathbf{K}[\mathbf{I}[\tilde{\boldsymbol{\psi}}]] + \begin{pmatrix} \tilde{l}(t) \\ \tilde{m}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.8)$$

Impondremos de nuevo que la transformación de Miura (3.5.4) permanezca invariante por esta aBT (3.5.7), es decir,

$$\mathbf{I}[\boldsymbol{\psi}] = \mathbf{I}[\tilde{\boldsymbol{\psi}}] \quad (3.5.9)$$

o de forma equivalente

$$\psi - 2s = \tilde{\psi} - 2\tilde{s}, \quad (3.5.10)$$

$$-\psi s + s^2 - s_x = -\tilde{\psi} \tilde{s} + \tilde{s}^2 - \tilde{s}_x. \quad (3.5.11)$$

Las ecuaciones de arriba establecen una relación entre las funciones A y B de la forma

$$A - 2B = 0, \quad (3.5.12)$$

$$B_x + B^2 + \psi_x \tilde{B} = 0 \quad (3.5.13)$$

Al utilizar (3.5.12) en (3.5.7) tenemos que

$$\psi = \tilde{\psi} + 2B, \quad s = \tilde{s} + B. \quad (3.5.14)$$

Por otro lado sustituyendo (3.5.14) en (3.5.6) obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s} - B \\ -2 & -\tilde{\psi} + 2\tilde{s} + \partial_x \end{pmatrix} \mathbf{K}[\mathbf{I}[\tilde{\psi}]] + \begin{pmatrix} l(t) \\ m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.15)$$

Entre (3.5.8) y (3.5.15) llegamos fácilmente a que

$$B = \frac{l(t) - \tilde{l}(t)}{L[\mathbf{I}[\tilde{\psi}]]}, \quad (3.5.16)$$

$$\tilde{m}(t) = m(t), \quad (3.5.17)$$

donde hemos utilizado la invariancia de la transformación de Miura $\mathbf{I}[\psi] = \mathbf{I}[\tilde{\psi}]$ y $\mathbf{K} = (K, L)^T$. Por último, utilizando el hecho de que B verifica la ecuación de Riccati (3.5.13) junto con (3.5.8) llegamos a que $\tilde{l}(t) = -\tilde{m}(t) - l(t)$ o $\tilde{l}(t) = l(t)$ (que constituye la transformación identidad). Entonces tenemos que la aBT en forma no local para (3.5.6) tiene la forma

$$\psi = \tilde{\psi} + 2 \frac{l(t) - \tilde{l}(t)}{L[\mathbf{I}[\tilde{\psi}]]}, \quad (3.5.18)$$

$$s = \tilde{s} + \frac{l(t) - \tilde{l}(t)}{L[\mathbf{I}[\tilde{\psi}]]}, \quad (3.5.19)$$

$$\tilde{l}(t) = -\tilde{m}(t) - l(t), \quad (3.5.20)$$

$$\tilde{m}(t) = m(t). \quad (3.5.21)$$

Para extender los resultados anteriores a la forma local hay que utilizar la expresión explícita de $\mathbf{K}[\mathbf{u}]$, siendo $\mathbf{u} = \mathbf{I}[\tilde{\boldsymbol{\psi}}]$ dada por (3.5.4). Definiendo las siguientes variables auxiliares M, N y \tilde{M}, \tilde{N} por

$$M_x = \psi - 2s, \quad (3.5.22)$$

$$N_x = -\psi s + s^2 - s_x, \quad (3.5.23)$$

y

$$\tilde{M}_x = \tilde{\psi} - 2\tilde{s}, \quad (3.5.24)$$

$$\tilde{N}_x = -\tilde{\psi}\tilde{s} + \tilde{s}^2 - \tilde{s}_x, \quad (3.5.25)$$

tenemos que el sistema (3.5.6) se escribe como

$$\begin{pmatrix} 1 & -s \\ -2 & -M_x + \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_t \\ M_t + xg(t) + \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l(t) \\ m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5.26)$$

o equivalentemente como

$$N_t - sM_t - g(t)xs - \varepsilon s + l(t) = 0, \quad (3.5.27)$$

$$2N_t + M_x M_t - M_{xt} + g(t)xM_x - g(t) + \varepsilon M_x - m(t) = 0. \quad (3.5.28)$$

Y la aBT (3.5.18)–(3.5.21) toma la forma

$$M = \tilde{M} \quad (3.5.29)$$

$$N = \tilde{N} \quad (3.5.30)$$

$$\psi = \tilde{\psi} - 2 \frac{2\tilde{l}(t) + \tilde{m}(t)}{\tilde{M}_t + g(t)x + \varepsilon} \quad (3.5.31)$$

$$s = \tilde{s} - \frac{2\tilde{l}(t) + \tilde{m}(t)}{\tilde{M}_t + g(t)x + \varepsilon}, \quad (3.5.32)$$

$$\tilde{l}(t) = -\tilde{m}(t) - l(t), \quad (3.5.33)$$

$$\tilde{m}(t) = m(t), \quad (3.5.34)$$

entre una solución $(s, \psi, M, N, l(t), m(t))$ de (3.5.27), (3.5.28) junto con las ecuaciones (3.5.22), (3.5.23) y una solución $(\tilde{s}, \tilde{\psi}, \tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{l}(t), \tilde{m}(t))$ de

$$\tilde{N}_t - s\tilde{M}_t - g(t)x\tilde{s} - \varepsilon\tilde{s} + \tilde{l}(t) = 0, \quad (3.5.35)$$

$$\tilde{N}_t + \tilde{M}_x\tilde{M}_t - \tilde{M}_{xt} + g(t)x\tilde{M}_x - g(t) + \varepsilon\tilde{M}_x - \tilde{m}(t) = 0, \quad (3.5.36)$$

junto con (3.5.24), (3.5.25).

Al igual que en la sección 3.3, hemos aplicado una aBT adicional, utilizando el mismo razonamiento para llegar a (3.5.29)–(3.5.34), que el que hicimos para la aBT (3.3.29)–(3.3.34) respecto a las constantes arbitrarias que volverían a aparecer en (3.5.29) y (3.5.30).

Destaquemos que la aBT (3.5.18)–(3.5.21) se puede deducir directamente de (3.3.17)–(3.3.20) con la transformación $(\phi, p, e_n, f_n) \rightarrow (\psi, -s, l_n, -m_n)$, que además transforma el sistema (3.3.5) en (3.5.6). No obstante, esta transformación no deja invariante la ecuación de base P_{IV} , ya que existe un cambio de signo en $g(t)$ entre ambas versiones de P_{IV} [56]. En la próxima sección quedará más claro este hecho.

3.6. Transformación entre los dos sistemas modificados integrados

Construiremos una aplicación entre los dos sistemas modificados integrados, esto es, entre (3.3.21), (3.3.22), (3.3.27), (3.3.28)

$$P_x = \phi + 2p, \quad (3.6.1)$$

$$Q_x = \phi p + p^2 + p_x, \quad (3.6.2)$$

$$Q_t + pP_t + g(t)xp + \varepsilon p + e(t) = 0, \quad (3.6.3)$$

$$2Q_t + P_x P_t - P_{xt} + g(t)xP_x - g(t) + \varepsilon P_x + f(t) = 0 \quad (3.6.4)$$

y

$$M_\xi = \psi - 2s \quad (3.6.5)$$

$$N_\xi = -\psi s + s^2 - s_\xi, \quad (3.6.6)$$

$$N_\tau - sM_\tau - G(\tau)\xi s - \sigma s + l(\tau) = 0, \quad (3.6.7)$$

$$2N_\tau + M_\xi M_\tau - M_{\xi\tau} + G(\tau)\xi M_\xi - G(\tau) + \sigma M_\xi - m(\tau) = 0 \quad (3.6.8)$$

donde estas cuatro últimas ecuaciones son en realidad el sistema (3.5.22), (3.5.23), (3.5.27), (3.5.28), en el que se han renombrado las variables.

Consideremos la transformación

$$\begin{aligned} P &= M, & Q &= -iN, & p &= is, & \phi &= -i\psi, & x &= i\xi, \\ t &= i\tau, & g(t) &= -G(\tau), & \varepsilon &= -i\sigma, \\ e(t) &= -l(\tau), & f(t) &= m(\tau), \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

que induce un cambio en las derivadas de las funciones en la forma

$$\partial_x = -i\partial_\xi, \quad \partial_t = -i\partial_\tau, \quad \partial_x^{-1} = i\partial_\xi^{-1}, \quad \partial_t^{-1} = i\partial_\tau^{-1}. \quad (3.6.10)$$

Destaquemos que $g(t) = -G(\tau)$, que refleja el cambio de signo del que hablamos al final del apartado anterior. Es una simple comprobación que la transformación anterior convierte el sistema (3.6.1)–(3.6.4) en el sistema (3.6.5)–(3.6.8) y también la aBT (3.3.29)–(3.3.34) en la aBT (3.5.29)–(3.5.34).

La transformación (3.6.9) es una extensión a nuestra PDE de la que aparece en [56], que permitía concluir que P_{IV} tiene una única aBT fundamental.

Como esta última observación indica, hemos construido una PDE, que puede entenderse como una generalización de P_{IV} , dado que imita su com-

portamiento y las aBTs que acabamos de obtener permiten reducciones a las aBTs de P_{IV} . Destaquemos que este tipo de aBTs (que venimos denominando aBTs de tipo ODE) pueden obtenerse de ODEs y PDEs que no sean integrables; por ejemplo la aBT (3.3.17)–(3.3.20) del sistema (3.3.5) existe sin haber especificado $L[\mathbf{H}[\tilde{\phi}]]$, así que si se elige de tal forma que dicho sistema (3.3.5) sea no integrable, igualmente tendría esta aBT.

Capítulo 4

Soluciones exactas de una nueva PDE

4.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a la obtención de soluciones exactas del sistema integrable (2.3.1), (2.3.2) estudiado en el capítulo 2 escrito en forma escalar. Recordemos que dicho sistema tiene la forma

$$v^2 - y_x = 0, \tag{4.1.1}$$

$$v_{xt} - 2vy_t + 2\varepsilon v + 2g(t)xv - h(t) = 0. \tag{4.1.2}$$

Como ya sabemos este sistema muestra algunas propiedades que se asemejan a las de P_{II} . En particular, para este sistema hemos encontrado una aBT de tipo ODE (2.2.50)–(2.2.52) que refleja la de P_{II} . La existencia de esta aBT de tipo ODE, es una novedad en el campo de las PDEs integrables.

En el presente capítulo trabajaremos con una versión escalar del sistema anterior, del que podemos eliminar fácilmente la variable y , para obtener la siguiente PDE

$$vv_{xxt} - 4v^3v_t + 2g(t)v^2 - v_xv_{xt} + h(t)v_x = 0, \quad (4.1.3)$$

de la que encontraremos soluciones exactas.

Como ya hemos dicho procederemos a aplicar tres métodos diferentes para obtener soluciones exactas.

– El primero de ellos consistirá en buscar reducciones de similitud de (4.1.3) a ODEs. De esta manera encontraremos una gran variedad de soluciones, expresadas en términos del segundo trascendente de Painlevé, así como de funciones elípticas, hiperbólicas y otras.

– Una segunda técnica de obtención de soluciones exactas se basará en la utilización de una aBT de tipo ODE. Destaquemos que esta es la primera vez que una aBT de este tipo se utiliza para generar soluciones de una PDE. Encontraremos que posibles soluciones semilla se pueden obtener de la resolución de una ODE lineal de segundo orden

$$\psi_{xx} - (G(t) + F(x))\psi = 0, \quad (4.1.4)$$

donde $dG/dt = g(t)$, siendo $g(t)$ el coeficiente de (4.1.3) y $v = -\psi_x/\psi$. Para iterar soluciones necesitaremos que $G(t)$ sea no constante. Mostraremos dos ejemplos de aplicación: el primero donde la solución semilla tiene la forma de una función de tipo tangente hiperbólica y el segundo donde se expresa en términos de funciones de Bessel. También resaltemos que independientemente de iteraciones, podemos encontrar nuevas soluciones de nuestra PDE (4.1.3) utilizando funciones especiales definidas por cualquier ODE de segundo orden. Este hecho es una segunda característica novedosa de esta PDE (4.1.3). Como un ejemplo más de iteración utilizando esta aBT de tipo ODE, generaremos soluciones racionales en x .

– El tercer procedimiento para obtener soluciones exactas se basará en la aplicación de una aBT de tipo PDE. Recordemos que una aBT de tipo PDE para el sistema (4.1.1), (4.1.2) viene expresada por (2.3.17)–(2.3.19).

En este capítulo también utilizaremos esta misma aBT para generar soluciones del sistema escrito en forma escalar (4.1.3). Además, a partir de la DT obtendremos la solución de un solitón y al utilizar ésta en la fórmula de superposición no lineal, estudiaremos la interacción entre dos solitones. La presencia de funciones de t en los solitones proporcionarán un amplio abanico de comportamientos interesantes.

El diseño de este capítulo es el siguiente. En la sección 4.2 encontraremos soluciones exactas a partir de reducciones de similaridad. En la sección 4.3 obtendremos soluciones exactas utilizando una aBT de tipo ODE. En la sección 4.4 encontraremos soluciones exactas a partir de una aBT de tipo PDE.

4.2. Soluciones exactas a partir de reducciones de similaridad

Procederemos a encontrar las simetrías de Lie, según lo explicado en la sección 1.2. La ecuación (4.1.3) admite una transformación de la forma (1.2.2) en las variables (x, t, v, g, h) dada por

$$x \rightarrow x + \epsilon \xi(x, t, v, g, h) + O(\epsilon^2), \quad (4.2.1)$$

$$t \rightarrow t + \epsilon \tau(x, t, v, g, h) + O(\epsilon^2), \quad (4.2.2)$$

$$v \rightarrow v + \epsilon \phi_1(x, t, v, g, h) + O(\epsilon^2), \quad (4.2.3)$$

$$g \rightarrow g + \epsilon \phi_2(x, t, v, g, h) + O(\epsilon^2), \quad (4.2.4)$$

$$h \rightarrow h + \epsilon \phi_3(x, t, v, g, h) + O(\epsilon^2), \quad (4.2.5)$$

donde ϵ es el parámetro del grupo. Observemos que hay que considerar como variables dependientes a $v(x, t)$, $g(t)$ y $h(t)$ a la hora de construir las simetrías. La condición de que la transformación de arriba deje invariante la PDE que estamos considerando, en este caso (4.1.3), proporciona un sistema

sobredeterminado

$$\xi_g = 0, \quad (4.2.6)$$

$$\xi_h = 0, \quad (4.2.7)$$

$$\xi_v = 0, \quad (4.2.8)$$

$$\xi_t = 0, \quad (4.2.9)$$

$$\xi_{xx} = 0, \quad (4.2.10)$$

$$\tau_g = 0, \quad (4.2.11)$$

$$\tau_h = 0, \quad (4.2.12)$$

$$\tau_v = 0, \quad (4.2.13)$$

$$\tau_x = 0, \quad (4.2.14)$$

$$\phi_1 = -v\xi_x, \quad (4.2.15)$$

$$\phi_2 = -g(\tau_t + 2\xi_x), \quad (4.2.16)$$

$$\phi_3 = -h(\tau_t + 2\xi_x), \quad (4.2.17)$$

de cuya resolución obtenemos que los generadores infinitesimales para la ecuación (4.1.3) vienen dados por

$$\xi = c_1x + c_2, \quad (4.2.18)$$

$$\tau = F(t), \quad (4.2.19)$$

$$\phi_1 = -c_1v, \quad (4.2.20)$$

$$\phi_2 = -g(2c_1 + F_t), \quad (4.2.21)$$

$$\phi_3 = -h(2c_1 + F_t), \quad (4.2.22)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y $F(t)$ es una función arbitraria de t . El álgebra de Lie asociada a esta transformación consiste en un campo vectorial de la forma

$$\mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial v} + \phi_2 \frac{\partial}{\partial g} + \phi_3 \frac{\partial}{\partial h} \quad (4.2.23)$$

y las variables de las simetrías para cada reducción se pueden encontrar al resolver la ecuación de las características

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{dv}{\phi_1} = \frac{dg}{\phi_2} = \frac{dh}{\phi_3}. \quad (4.2.24)$$

Los generadores infinitesimales van a proporcionar dos simetrías no triviales dependiendo de si la constante c_1 es cero o distinta de cero; comenzaremos con un estudio detallado de ambos casos

Caso 1: $c_1 = 0$. Podemos tomar, sin pérdida de generalidad $c_2 = 1$.

Resolviendo la ecuación de las características (4.2.24) encontramos la reducción de similaridad de onda viajera generalizada

$$v(x, t) = P(z), \quad g(t) = g_0 f_t, \quad h(t) = h_0 f_t, \quad z = x - f(t), \quad (4.2.25)$$

donde g_0 y h_0 son constantes arbitrarias y $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo definida en términos de $F(t)$ a través de $f_t = 1/F(t)$. La ODE resultante de sustituir (4.2.25) en (4.1.3) tiene la forma

$$-PP_{zzz} + P_z P_{zz} + h_0 P_z + 4P^3 P_z + 2g_0 P^2 = 0, \quad (4.2.26)$$

que admite el factor integrante $1/P^2$, con el que podemos integrarla una vez y obtener así

$$P_{zz} = 2P^3 + 2g_0 z P - AP - h_0, \quad (4.2.27)$$

siendo A una constante de integración arbitraria. Observemos que para el caso en que $g_0 \neq 0$ una traslación en z permite elegir sin pérdida de generalidad $A = 0$ y por lo tanto obtener precisamente P_{II}

$$P_{zz} = 2P^3 + 2g_0zP - h_0. \quad (4.2.28)$$

En el caso particular $g_0 = 0$ la ecuación (4.2.27) se puede integrar una vez para proporcionar

$$P_z^2 = P^4 - 2h_0P - AP^2 + B, \quad (4.2.29)$$

siendo B una segunda constante de integración cualquiera y cuya solución general puede expresarse en términos de funciones elípticas. Sin embargo para algunos valores particulares de las constantes de integración podemos encontrar las siguientes soluciones especiales. Para $A^3 = (27/2)h_0^2$ y $B = -(A^2/12)$ encontramos la solución racional

$$P(z) = a \left(1 + \frac{4}{4a^2(z - z_0)^2 - 1} \right), \quad (4.2.30)$$

donde $a^2 = A/6$ y z_0 es una nueva constante de integración arbitraria. También es posible encontrar la siguiente solución en términos de funciones hiperbólicas

$$P(z) = a + \frac{(a - b)(3a + b)}{(a + b) \cosh[\sqrt{(a - b)(3a + b)}(z - z_0)] - 2a}, \quad (4.2.31)$$

donde a y b verifican que $B = a(a^3 + h_0)$, $aA + h_0 - 2a^3 = 0$ y $A = b^2 + 2ab + 3a^2$.

Caso 2: $c_1 \neq 0$. Podemos elegir, sin pérdida de generalidad $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$.

Al resolver la ecuación de las características (4.2.24) encontramos la reducción de escala

$$v(x, t) = f(t)P(z), \quad g(t) = g_0ff_t, \quad h(t) = h_0ff_t, \quad z = xf(t), \quad (4.2.32)$$

siendo g_0 y h_0 dos constantes arbitrarias y $f(t)$ una función arbitraria del

tiempo definida en términos de $F(t)$ por $f_t/f = -1/F(t)$. La ODE que se obtiene al sustituir (4.2.32) en (4.1.3) es ahora

$$zPP_{zzz} + 3PP_{zz} - 4zP^3P_z - 4P^4 - zP_zP_{zz} - 2P_z^2 + 2g_0P^2 + h_0P_z = 0, \quad (4.2.33)$$

que se puede escribir de forma más compacta como

$$\left(z \frac{P_{zz}}{P} + 2 \frac{P_z}{P} - h_0 \frac{1}{P} + 2g_0z \right)_z = 4(zPP_z + P^2). \quad (4.2.34)$$

La ecuación anterior, en general, no tiene simetrías de Lie. Sin embargo, en el caso particular donde $g_0 = h_0 = 0$

$$zPP_{zzz} + 3PP_{zz} - 4zP^3P_z - 4P^4 - zP_zP_{zz} - 2P_z^2 = 0 \quad (4.2.35)$$

tiene un simetría puntual, que permite reducir su orden en una unidad con el siguiente cambio de variable no trivial

$$P(z) = \zeta e^{\int u(\zeta) d\zeta}, \quad (4.2.36)$$

$$z = e^{-\int u(\zeta) d\zeta}. \quad (4.2.37)$$

Así, la ecuación (4.2.35) se transforma en

$$u_{\zeta\zeta} = 3 \frac{u_{\zeta}^2}{u} + \left(\frac{1}{\zeta} - 2u \right) u_{\zeta} + (1 - 4\zeta^2)u^3 - \frac{u^2}{\zeta}. \quad (4.2.38)$$

Esta ecuación no tiene más simetrías puntuales para efectuar una nueva integración. No obstante, podemos encontrar una solución particular de (4.2.38)

$$u = \frac{1}{\sigma - \zeta + \zeta^2}, \quad (4.2.39)$$

siendo σ una constante arbitraria. Deshaciendo el cambio de variable llegamos a que una solución particular para (4.2.35) es de la forma

$$P(z) = \frac{1}{2z} \left[1 + k \tanh \left(\frac{k}{2} \log(z) \right) \right], \quad (4.2.40)$$

donde k es una constante definida en términos de σ por $k^2 = 1 - 4\sigma$. Utilizando las variables de la reducción de similaridad para esta reducción de escala (4.2.32), obtenemos que una solución particular para la PDE original (4.1.3) para el caso especial de $g(t) = h(t) = 0$ viene dada por

$$v(x, t) = \frac{1}{2x} \left[1 + k \frac{(xf(t))^k - 1}{(xf(t))^k + 1} \right], \quad (4.2.41)$$

o bien, renombrando $(f(t))^k = c(t)$,

$$v(x, t) = \frac{(1 - k) + (k + 1)c(t)x^k}{2x(1 + c(t)x^k)}. \quad (4.2.42)$$

4.3. Soluciones exactas a partir de una aBT de tipo ODE

Recordemos que en el capítulo 2, habíamos obtenido una aBT de tipo ODE para el sistema (4.1.1), (4.1.2) dada por (2.2.50)–(2.2.52)

$$v = w + \frac{h(t) - \tilde{h}(t)}{2(w_t - z_t + \varepsilon + g(t)x)}, \quad (4.3.1)$$

$$y = z + \frac{h(t) - \tilde{h}(t)}{2(w_t - z_t + \varepsilon + g(t)x)}, \quad (4.3.2)$$

$$h(t) = -\tilde{h}(t) - 2g(t), \quad (4.3.3)$$

donde (v, y) y (w, z) son dos soluciones diferentes del sistema para distintos coeficientes $h(t)$ y $\tilde{h}(t)$ respectivamente. Esta variación en los coeficientes del sistema es una reminiscencia de las variaciones de los parámetros que aparecen en las aBTs para las ecuaciones de Painlevé. Para nuestra ecuación escalar (4.1.3) esta aBT se puede escribir como

$$v = w + \frac{[h(t) - \tilde{h}(t)]w}{2ww_t - w_{xt} + \tilde{h}(t)}, \quad (4.3.4)$$

$$h(t) = -\tilde{h}(t) - 2g(t), \quad (4.3.5)$$

que permite obtener una nueva solución v de (4.1.3) a partir de una solución w de

$$ww_{xxt} - 4w^3w_t + 2g(t)w^2 - w_xw_{xt} + \tilde{h}(t)w_x = 0. \quad (4.3.6)$$

Utilizaremos esta aBT para generar soluciones de la ecuación (4.1.3). Para ello necesitamos una solución de partida. Con este fin, observemos primero que el sistema (4.1.1), (4.1.2) se puede escribir en la forma (2.2.22) como

$$(\partial_x + 2v) \left\{ \partial_x^{-1} \partial_t (v_x - v^2) + \varepsilon + g(t)x \right\} - g(t) - h(t) = 0. \quad (4.3.7)$$

Para el caso particular en el que $h(t) = -g(t)$ la ecuación anterior se transforma en

$$\partial_x^{-1} \partial_t (v_x - v^2) + \varepsilon + g(t)x = 0. \quad (4.3.8)$$

Derivando con respecto a x tenemos que

$$\partial_t (v_x - v^2) + g(t) = 0, \quad (4.3.9)$$

e integrando ahora respecto a t llegamos a

$$v_x - v^2 + G(t) + F(x) = 0, \quad (4.3.10)$$

donde $\frac{dG}{dt} = g(t)$ y $F(x)$ es una función arbitraria de x . Entonces una solución de

$$w_x - w^2 + G(t) + F(x) = 0 \quad (4.3.11)$$

es solución de (4.3.6) para la elección $\tilde{h}(t) = -g(t)$. Esta ecuación de Riccati, junto con la elección de la función $\tilde{h}(t)$, es el análogo para nuestra PDE

(4.3.6) de una integral especial de una ecuación de Painlevé para valores restringidos de los parámetros. Ahora procederemos a obtener nuevas soluciones de la PDE inicial (4.1.3) a partir de soluciones de (4.3.11) utilizando la aBT (4.3.4), (4.3.5). No obstante antes de comenzar hemos de observar un par de detalles. El primero es que si $\tilde{h}(t) = -g(t)$, entonces de (4.3.5) tenemos que $h(t) = \tilde{h}(t)$, que es precisamente un factor del numerador de (4.3.4) y segundo: si derivamos (4.3.11) con respecto a t llegamos a

$$w_{xt} - 2ww_t + g(t) = 0, \quad (4.3.12)$$

que al sustituir $\tilde{h}(t) = -g(t)$ se transforma en

$$2ww_t - w_{xt} + \tilde{h}(t) = 0, \quad (4.3.13)$$

que es precisamente el denominador de (4.3.4). Entonces el numerador y denominador de (4.3.4) son ambos cero y por lo tanto no es viable proceder de esta manera para encontrar nuevas soluciones. No obstante, la ecuación (4.3.6) tiene una simetría discreta $(w, \tilde{h}(t)) \rightarrow (-w, -\tilde{h}(t))$. Al aplicar esta transformación a la aBT (4.3.4), (4.3.5) llegamos a que

$$v = -w - \frac{[h(t) + \tilde{h}(t)]w}{2ww_t + w_{xt} - \tilde{h}(t)}, \quad (4.3.14)$$

$$h(t) = \tilde{h}(t) - 2g(t). \quad (4.3.15)$$

Entonces partiremos de esta aBT de (4.3.6) en lugar de la otra, para encontrar soluciones de dicha ecuación. Observemos que esta aBT, comenzando con una solución w para $\tilde{h}(t) = -g(t)$, proporciona una secuencia de soluciones v para $h(t) = -(2n + 1)g(t)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (podríamos utilizar la simetría $(v, h(t)) \rightarrow (-v, -h(t))$ y obtener soluciones para $h(t) = (2n + 1)g(t)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Veamos casos de la primera iteración comenzando con una solución w de (4.3.11) para $\tilde{h}(t) = -g(t)$. De (4.3.15)

se tiene que $h(t) = -3g(t)$ y de (4.3.13) que $w_{xt} = 2ww_t - g(t)$, con lo que utilizando la aBT (4.3.14), (4.3.15) obtenemos una nueva solución v en términos de w ,

$$v = -w + \frac{g(t)}{w_t} \quad (4.3.16)$$

de (4.1.3) para $h(t) = -3g(t)$.

Destaquemos que cualquier solución de (4.3.11) define soluciones de la ecuación integrable (4.3.6), lo que incluye todas las funciones especiales que surgen como solución de ODEs lineales de segundo orden, ya que (4.3.11) es linealizable con el cambio de variable $w = -\psi_x/\psi$ en

$$\psi_{xx} - (G(t) + F(x))\psi = 0. \quad (4.3.17)$$

Recordemos dentro de este contexto que una ODE lineal de segundo orden cualquiera

$$\varphi_{xx} + q(x, t)\varphi_x + r(x, t)\varphi = 0 \quad (4.3.18)$$

se puede transformar en

$$\psi_{xx} + \left(r - \frac{1}{2}q_x - \frac{1}{4}q^2 \right) \psi = 0 \quad (4.3.19)$$

con el cambio de variable $\varphi = \psi e^{-\frac{1}{2} \int^x q(\tau, t) d\tau}$.

Por último recordemos que para iterar de forma no trivial es necesario que $G(t)$ sea no constante, ya que si $dG/dt = 0$ entonces $g(t) = 0$ y $\tilde{h}(t) = -g(t) = 0$, con lo que de la primera iteración (4.3.16) se obtiene que $v = -w$ para $h(t) = -3g(t) = 0$. Esto sucede por ejemplo para la elección $G(t) = 0$ y $F(x) = (k^2 - 1)/(4x^2)$; la solución general de (4.3.11) es entonces

$$w = \frac{(k-1) - (k+1)c(t)x^k}{2x(1+c(t)x^k)}, \quad (4.3.20)$$

donde $c(t)$ es una función arbitraria de t . Observemos que la iteración pro-

porciona $v = -w$, es decir, la solución (4.2.42) encontrada como solución particular aplicando las simetrías. Respecto a la ecuación (4.3.20), podemos observar que si $c(t)$ es una constante entonces $w_t = 0$, así w dada por (4.3.20) es trivialmente una solución de (4.3.6) para $g(t) = \tilde{h}(t) = 0$; este hecho es cierto en general para cualquier solución de (4.3.6) obtenida a partir de (4.3.11) en el caso $G(t)$ constante.

Consideraremos dos casos de soluciones de (4.3.11) cuando $dG/dt \neq 0$.

a) Si $F(x) = 0$. La solución general de (4.3.11) es

$$w = -\sqrt{G(t)} \tanh(\sqrt{G(t)}(x + x_0(t))), \quad (4.3.21)$$

donde $x_0(t)$ es una función arbitraria de t . Esto proporciona una solución de (4.3.6) para $\tilde{h}(t) = -g(t)$. Observemos que (4.3.21) para $x_0 = 0$ se correspondería con la solución $P(z) = -\tanh(z)$ de (4.2.33) cuando $g_0 = -h_0 = -2$. Volviendo a la aBT, tenemos que sustituyendo (4.3.21) en (4.3.16), obtenemos una nueva solución v de (4.1.3) para $h(t) = -3g(t)$: observemos que aparte de la dependencia en x a través de funciones hiperbólicas, esta solución es racional en x . Más iteraciones utilizando la aBT proporcionan nuevas soluciones, no obstante, no nos extenderemos más en este caso.

b) Si $G(t) = -\tilde{G}(t)$ y tomamos $F(x) = (\nu^2 - (1/4))/x^2$, siendo ν una constante cualquiera, entonces la ecuación (4.3.17) se transforma en

$$\psi_{xx} + \left(\tilde{G}(t) - \frac{\nu^2}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} \right) \psi = 0, \quad (4.3.22)$$

o equivalentemente (4.3.18) con $q(x, t) = 1/x, r(x, t) = \tilde{G}(t) - (\nu^2/x^2)$, se convierte en

$$\varphi_{xx} + \frac{1}{x} \varphi_x + \left(\tilde{G}(t) - \frac{\nu^2}{x^2} \right) \varphi = 0, \quad (4.3.23)$$

siendo $\varphi = x^{-1/2} \psi$. Aplicando el cambio de variable $y = x\sqrt{\tilde{G}(t)}$ a (4.3.23)

llegamos a

$$\varphi_{yy} + \frac{1}{y}\varphi_y + \left(1 - \frac{\nu^2}{y^2}\right)\varphi = 0, \quad (4.3.24)$$

que es precisamente la ecuación de Bessel. Por ejemplo, para $\nu = 1/3$ tenemos que la solución general de (4.3.22) tiene la forma

$$\psi = x^{1/2} \left(a(t)J_{-1/3} \left(x\sqrt{\tilde{G}(t)} \right) + b(t)J_{1/3} \left(x\sqrt{\tilde{G}(t)} \right) \right), \quad (4.3.25)$$

con $a(t)$ y $b(t)$ dos funciones arbitrarias de t . Así, la solución general de (4.3.11) es

$$w = -\frac{\psi_x}{\psi} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} \left[x^{1/2}J_{-1/3} \left(x\sqrt{\tilde{G}(t)} \right) + c(t)x^{1/2}J_{1/3} \left(x\sqrt{\tilde{G}(t)} \right) \right]}{x^{1/2}J_{-1/3} \left(x\sqrt{\tilde{G}(t)} \right) + c(t)x^{1/2}J_{1/3} \left(x\sqrt{\tilde{G}(t)} \right)}, \quad (4.3.26)$$

donde $c(t) = b(t)/a(t)$. Tenemos así otra solución de (4.3.6) para $\tilde{h}(t) = -g(t)$. De nuevo la sustitución de (4.3.26) en (4.3.16) nos permite obtener una nueva solución de la PDE inicial (4.1.3) para $h(t) = -3g(t)$. Iteraciones adicionales aplicando este procedimiento con la misma aBT proporcionan nuevas soluciones.

Sabemos que para otras funciones especiales definidas por ODEs lineales de segundo orden, siempre conducen a soluciones de (4.3.11) para elecciones apropiadas de $G(t)$ y $F(x)$. Si tomamos $G(t)$ constante, entonces debemos incluir una constante de integración que sea una función, $c(t)$, en la solución general de (4.3.11) para asegurar que (4.3.6) proporciona una solución no trivial. Sin embargo, en el caso $G(t)$ constante, la iteración utilizando nuestra aBT es trivial y conduce a la solución $v = -w$. Por otro lado, merece la pena enfatizar que podemos definir soluciones semilla e iterar de forma no trivial comenzando con la solución general de cualquier ecuación de la forma (4.3.17) que tenga $G(t)$ no constante.

Como ejemplo final de iteración utilizando esta aBT de tipo ODE, consideraremos la generación de soluciones a partir de una función racional en x . Comencemos observando que

$$w = -\frac{1}{x + x_0(t)} \quad (4.3.27)$$

es solución de (4.3.6) para cualquier $x_0(t)$, donde $\tilde{h}(t) = -2g(t)$. Podríamos utilizar la aBT (4.3.14), (4.3.15) para obtener soluciones racionales de (4.1.3) con $h(t) = -(2n + 2)g(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (soluciones para $h(t) = (2n + 2)g(t)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ se pueden obtener utilizando la simetría $(v, h(t)) \rightarrow (-v, -h(t))$ de (4.1.3)).

Utilizando la solución (4.3.27) en (4.3.14), (4.3.15) tenemos que

$$v = \frac{1}{x + x_0(t)} - \frac{3g(t)(x + x_0(t))^2}{g(t)(x + x_0(t))^3 - 2(x_0(t))_t} \quad (4.3.28)$$

es otra solución de (4.1.3) para $h(t) = -4g(t)$. El proceso de iteración para obtener nuevas soluciones racionales en x es similar al que se utiliza para obtener soluciones racionales para P_{II} . Observemos que la solución que falta en esta cadena de soluciones racionales en x , para $h(t) = 0$, se obtiene de (4.3.27) para $\tilde{h}(t) = -2g(t)$ en (4.3.4), (4.3.5), que proporciona la solución $v = 0$ para $h(t) = 0$.

4.4. Soluciones exactas a partir de una aBT de tipo PDE

En esta sección utilizaremos una aBT en la forma estándar, esto es, una aBT de tipo PDE para iterar soluciones. En primera instancia, consideremos las propiedades de integrabilidad de nuestra PDE (4.1.3), que nos permitirán obtener una fórmula de superposición no lineal, que utilizaremos para obtener soluciones solitónicas.

4.4.1. Propiedades de integrabilidad

La ecuación (4.1.3) se puede obtener de la compatibilidad del siguiente par de Lax

$$\psi_{xx} = (w^2 - w_x + \lambda) \psi, \quad (4.4.1)$$

$$\psi_t = \frac{1}{2}P_x\psi - P\psi_x, \quad (4.4.2)$$

donde P viene dado por

$$P = \frac{1}{2\lambda} \left[w_t + \frac{1}{2w} (h(t) - w_{xt}) \right] \quad (4.4.3)$$

y $\lambda = \lambda(t)$, el “parámetro espectral”, verifica la condición no isoespectral $\lambda_t = -g(t)$. La condición de compatibilidad de las ecuaciones (4.4.1) y (4.4.2) permite obtener, por supuesto, la ecuación (4.1.3) en w (y en $h(t)$). Por otro lado, la DT relaciona dos soluciones w y v , que para nuestra PDE viene dada por

$$v = w - \left[\log \left(\frac{\psi_x}{\psi} + w \right) \right]_x. \quad (4.4.4)$$

El procedimiento estándar para iterar soluciones utilizando el par de Lax y la DT implica resolver ecuaciones diferenciales para la autofunción del par de Lax ψ en cada paso. No obstante, de forma alternativa, se puede construir una aBT eliminando la autofunción ψ entre el par de Lax y la DT. Recordemos que la aBT para el sistema original (4.1.1), (4.1.2) fue calculada en el capítulo 2, obteniéndose las ecuaciones (2.3.17)–(2.3.19). La versión de dicha aBT para la ecuación escalar resulta ser

$$\tilde{v}_x + \tilde{w}_x = e^{-(\tilde{v}-\tilde{w})} - \lambda(t)e^{\tilde{v}-\tilde{w}}, \quad (4.4.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t - \tilde{w}_t &= (2\tilde{w}_x - e^{-(\tilde{v}-\tilde{w})})P + \frac{1}{2\lambda(t)}(g(t) - 2\tilde{w}_x\tilde{w}_{xt} + \tilde{w}_{xxt}) \\ &\quad + (\lambda(t)P - \tilde{w}_{xt})e^{\tilde{v}-\tilde{w}}, \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

donde $v = \tilde{v}_x$ y $w = \tilde{w}_x$. Eliminando \tilde{v} o \tilde{w} entre (4.4.5) y (4.4.6) se obtiene la ecuación (4.1.3) en w o en v respectivamente. Una vez obtenida la aBT, la aplicación del teorema de permutabilidad de Bianchi (ver sección 1.1.6) permite obtener una fórmula de superposición, que en este caso resulta ser algebraica.

4.4.2. Fórmula de superposición no lineal y soluciones solitónicas

Con el objeto de construir la fórmula de superposición no lineal para la ecuación (4.1.3), consideraremos la parte espacial de la BT dada por (4.4.5). Supongamos que generamos dos soluciones $\tilde{v}_{j,1}$ y $\tilde{v}_{j,2}$ de la ecuación (4.1.3) comenzando con la misma solución inicial \tilde{v}_{j-1} pero con diferentes parámetros espectrales λ_1 y λ_2 respectivamente. Entonces tenemos dos copias diferentes de la ecuación (4.4.5): una con $\tilde{v} = \tilde{v}_{j,1}$, $\tilde{w} = \tilde{v}_{j-1}$ y $\lambda(t) = \lambda_1(t)$ y la otra con $\tilde{v} = \tilde{v}_{j,2}$, $\tilde{w} = \tilde{v}_{j-1}$ y $\lambda(t) = \lambda_2(t)$

$$(\tilde{v}_{j,1})_x + (\tilde{v}_{j-1})_x = e^{-(\tilde{v}_{j,1}-\tilde{v}_{j-1})} - \lambda_1(t)e^{\tilde{v}_{j,1}-\tilde{v}_{j-1}}, \quad (4.4.7)$$

$$(\tilde{v}_{j,2})_x + (\tilde{v}_{j-1})_x = e^{-(\tilde{v}_{j,2}-\tilde{v}_{j-1})} - \lambda_2(t)e^{\tilde{v}_{j,2}-\tilde{v}_{j-1}}. \quad (4.4.8)$$

Supongamos ahora que construimos una nueva solución $\tilde{v}_{j+1,12}$ comenzando con $\tilde{v}_{j,1}$ para un parámetro espectral $\lambda_2(t)$ y otra solución $\tilde{v}_{j+1,21}$ empezando con $\tilde{v}_{j,2}$ para un parámetro espectral $\lambda_1(t)$. De esta forma podemos escribir como antes dos copias de la ecuación (4.4.5): una con $\tilde{v} = \tilde{v}_{j+1,12}$, $\tilde{w} = \tilde{v}_{j,1}$ y $\lambda(t) = \lambda_2(t)$ y la segunda con $\tilde{v} = \tilde{v}_{j+1,21}$, $\tilde{w} = \tilde{v}_{j,2}$ y $\lambda(t) = \lambda_1(t)$

$$(\tilde{v}_{j+1,12})_x + (\tilde{v}_{j,1})_x = e^{-(\tilde{v}_{j+1,12}-\tilde{v}_{j,1})} - \lambda_2(t)e^{\tilde{v}_{j+1,12}-\tilde{v}_{j,1}}, \quad (4.4.9)$$

$$(\tilde{v}_{j+1,21})_x + (\tilde{v}_{j,2})_x = e^{-(\tilde{v}_{j+1,21}-\tilde{v}_{j,2})} - \lambda_1(t)e^{\tilde{v}_{j+1,21}-\tilde{v}_{j,2}}. \quad (4.4.10)$$

Si ahora utilizamos el teorema de permutabilidad de Bianchi, según el cual si $\tilde{v}_{j+1,21} = \tilde{v}_{j+1,12}$ (en lo sucesivo denotaremos $\tilde{v}_{j+1,21} = \tilde{v}_{j+1,12} = \tilde{v}_{j+1}$ por

motivos de simplicidad), podemos combinar las cuatro ecuaciones anteriores para eliminar todas las derivadas, y así obtener

$$\tilde{v}_{j+1} = \tilde{v}_{j-1} + \log \left[\frac{e^{\tilde{v}_{j,2}} - e^{\tilde{v}_{j,1}}}{\lambda_1(t) e^{\tilde{v}_{j,1}} - \lambda_2(t) e^{\tilde{v}_{j,2}}} \right]. \quad (4.4.11)$$

Esta ecuación nos permitirá generar directamente una cuarta solución de (4.1.3) a partir de tres soluciones conocidas. El proceso de iteración permitirá generar la solución con N -solitones. A modo de ejemplo, veremos la solución con dos solitones; para ello, en primer lugar necesitamos obtener la solución con un solitón a partir del par de Lax y la DT.

Como solución semilla de (4.1.3) comencemos con $v_0 = w(t)$, una función únicamente de t , lo cual implica que $g(t) = 2ww_t$. Al ser $\lambda_t(t) = -g(t)$ entonces $\lambda(t) = k^2 - w^2$, donde k es una constante de integración arbitraria. Con esta solución de partida la ecuación (4.4.1) toma la forma

$$\psi_{xx} = k^2\psi. \quad (4.4.12)$$

Al cumplirse que

$$\left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)_x = \frac{\psi_{xx}}{\psi} - \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)^2 = k^2 - \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)^2, \quad (4.4.13)$$

entonces se verifica que

$$\frac{\psi_x}{\psi} = k \tanh [k(x + \theta(t))], \quad (4.4.14)$$

donde la función $\theta(t)$ viene dada por

$$\theta_t = -\frac{g(t) + h(t)}{4\lambda(t)w(t)}. \quad (4.4.15)$$

Obtenemos así, utilizando la DT (4.4.4), que la solución con un solitón es

$$v = w(t) - k^2 \frac{\operatorname{sech}^2 [k(x + \theta(t))]}{w(t) + k \tanh [k(x + \theta(t))]} \quad (4.4.16)$$

Volvamos al problema de construir la solución con dos solitones para la ecuación (4.1.3) utilizando la fórmula de superposición no lineal (4.4.11). Tomemos $j = 1$ y consideremos el caso particular en el que $v_{1,1} = (\tilde{v}_{1,1})_x$ y $v_{1,2} = (\tilde{v}_{1,2})_x$ son dos copias diferentes de la solución con un solitón. Comencemos con la misma solución semilla $w(t)$ de la ecuación (4.1.3) y construyamos dos copias de la solución con un solitón dada por (4.4.16), $v_{1,1}$ y $v_{1,2}$ para dos valores diferentes del parámetro espectral ($\lambda_1(t) = k_1^2 - w^2$ y $\lambda_2(t) = k_2^2 - w^2$ respectivamente). Estas dos copias son

$$v_{1,i} = w(t) - k_i^2 \frac{\operatorname{sech}^2 [k_i(x + \theta_i(t))]}{w(t) + k_i \tanh [k_i(x + \theta_i(t))]} \quad (4.4.17)$$

con

$$(\theta_i)_t = -\frac{g(t) + h(t)}{4\lambda_i(t)w(t)}, \quad (4.4.18)$$

para $i = 1, 2$. Teniendo en cuenta que $\tilde{v}_x = v$ para todas las soluciones, obtenemos de la fórmula de superposición no lineal una expresión para la solución con dos solitones

$$v_2 = w - \left[\log \left(\frac{\phi_x}{\phi} + w^2 \right) \right]_x, \quad (4.4.19)$$

donde $v_2 = (\tilde{v}_2)_x$ y

$$\frac{\phi_x}{\phi} = \frac{B_0 + B_1 e^{\eta_1} + B_2 e^{\eta_2} + B_3 e^{\eta_1 + \eta_2}}{1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + \left(\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \right)^2 e^{\eta_1 + \eta_2}}, \quad (4.4.20)$$

donde

$$\eta_i = 2k_i(x + \theta_i), \quad (4.4.21)$$

y los coeficientes $B_i = B_i(t)$ son

$$B_0 = k_1 k_2 - w(k_1 + k_2), \quad (4.4.22)$$

$$B_1 = -k_1 k_2 - w(k_2 - k_1), \quad (4.4.23)$$

$$B_2 = -k_1 k_2 + w(k_2 - k_1), \quad (4.4.24)$$

$$B_3 = [k_1 k_2 + w(k_1 + k_2)] \left(\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \right)^2. \quad (4.4.25)$$

Veremos ejemplos de la solución de (4.1.3) con uno y dos solitones.

La presencia de dos funciones arbitrarias del tiempo $g(t)$ y $h(t)$ en los argumentos de las soluciones con uno y dos solitones (4.4.16) y (4.4.19) permite una rica variedad de comportamientos.

4.4.3. Ejemplos

En primer lugar consideremos un ejemplo de la solución de un solitón (4.4.16) construida a partir de una solución semilla $w(t)$ para la elección $h(t) = k^2 - w^2 - 2ww_t$. Bajo esta condición, teniendo en cuenta que $g(t) = 2ww_t$

$$\theta = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{w(t)} \quad (4.4.26)$$

La Fig. 4.4.1 representa la solución con un solitón para una elección concreta de $w(t)$. Este solitón es una onda que viaja hacia la derecha con un comportamiento asintótico no nulo (para x grande); este comportamiento asintótico aumenta y disminuye según el tiempo cambia de valores negativos a positivos.

La solución con dos solitones dada por la ecuación (4.4.19) está representada en las restantes figuras. La Fig. 4.4.2 corresponde a la elección $h(t) = w - 2ww_t$, con una solución semilla $w(t) = k_1 + k_2 + \frac{10k_1 k_2}{10+t^2}$ para $k_1 = 0,5$ y $k_2 = 0,4$. Esta solución representa la interacción de dos solitones moviéndose hacia la izquierda, donde el solitón más grande atrapa al pequeño y lo sobrepasa sin que exista deformación tras la interacción. Las Fig. 4.4.3 y 4.4.4 muestran la forma y posición de estos dos solitones antes

y después de la interacción. Finalmente la Fig. 4.4.5 representa de nuevo la solución con dos solitones cuando $g(t) = 0$ y w es constante para una elección concreta de $h(t)$; en este caso ambos solitones se mueven hacia la derecha, de nuevo el más grande con mayor rapidez que el pequeño y ambos con una velocidad variable debido a la forma de $h(t)$. Si se tuviera en cuenta otras formas de las funciones $h(t)$ y $w(t)$ (esta última relacionada con $g(t)$) se obtendría una amplia variedad de comportamientos interesantes.

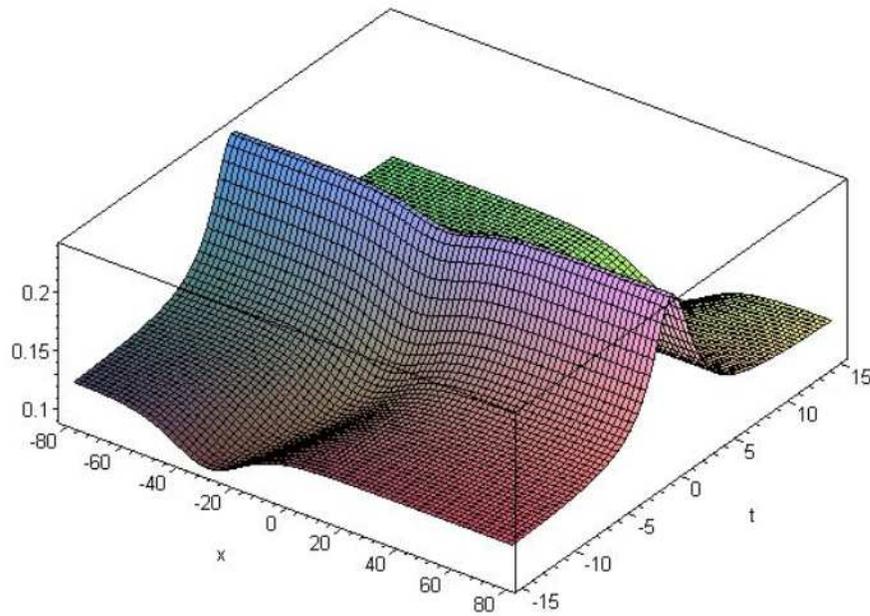


Figura 4.4.1: Solución con un solitón para la elección de las constantes $h(t) = k^2 - w^2 - 2ww_t$, $w(t) = 2k + \frac{10k}{t^2+5}$ y $k = 0,06$

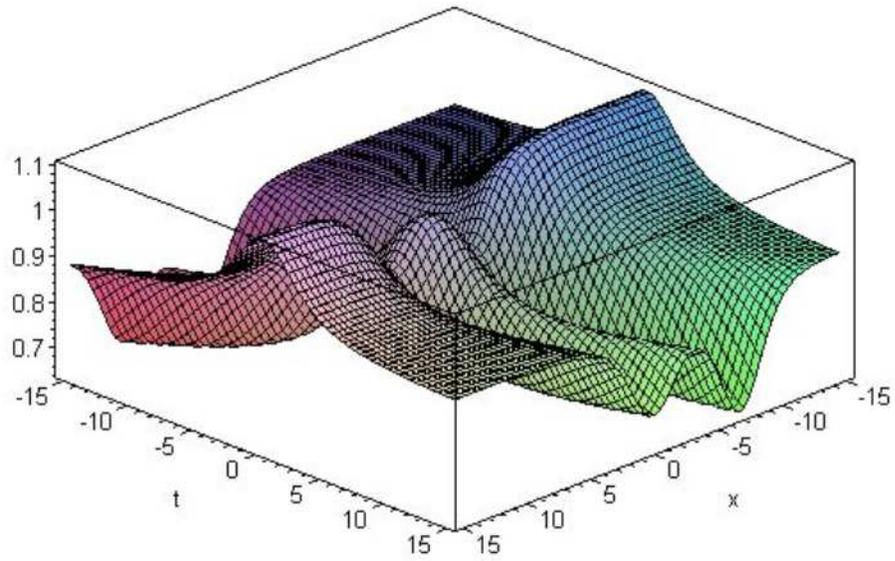


Figura 4.4.2: Solución con dos solitones para $h(t) = w - 2ww_t$, $w(t) = k_1 + k_2 + \frac{10k_1k_2}{10+t^2}$, $k_1 = 0,5$ y $k_2 = 0,4$

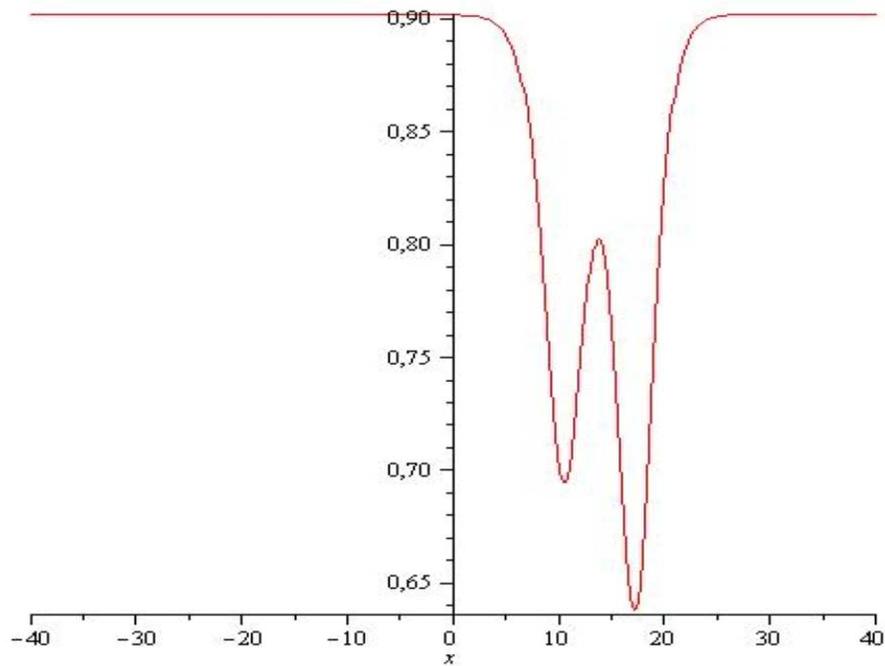


Figura 4.4.3: Solución con dos solitones antes de la interacción ($t = -30$)

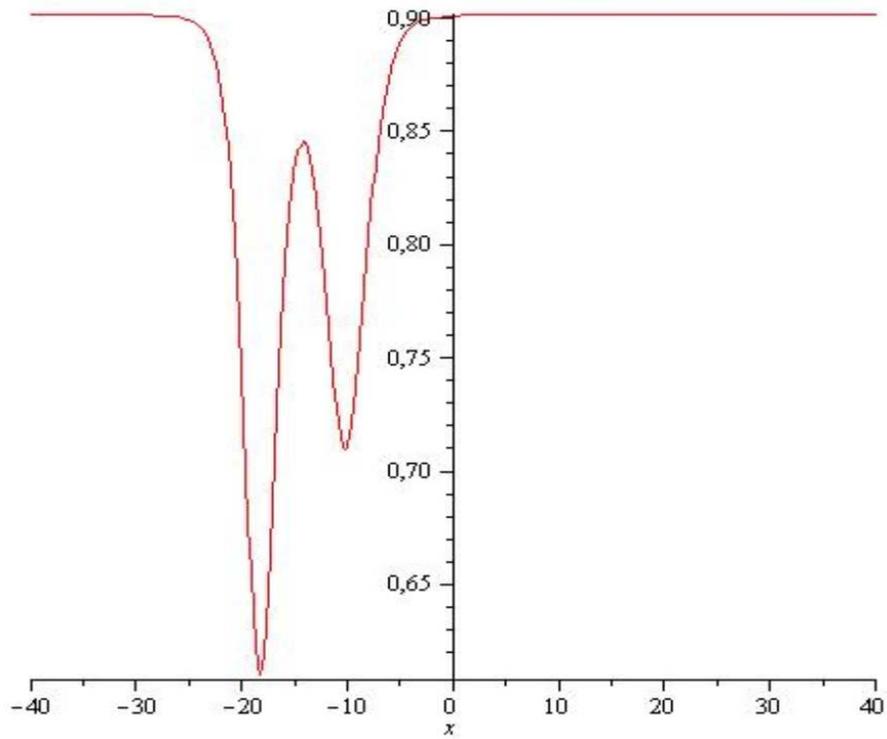


Figura 4.4.4: Solución con dos solitones tras la interacción ($t = 40$)

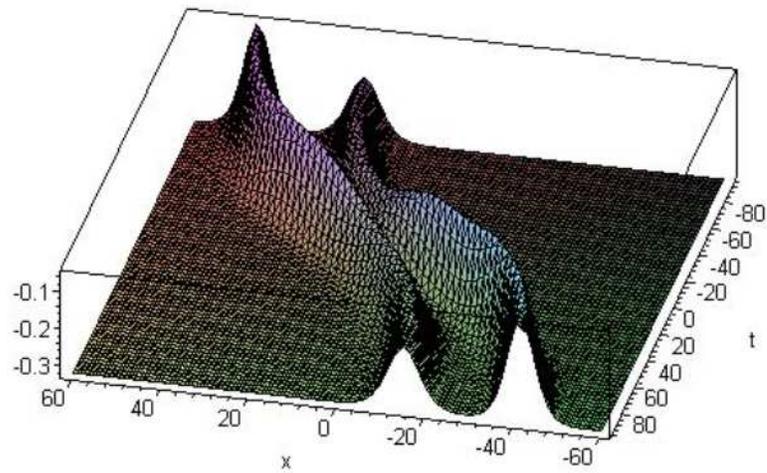


Figura 4.4.5: Solución con dos solitones para la elección $g(t) = 0$, $w(t) = 0,33$, $h(t) = (2/55) \operatorname{sech}^2(t/55)$, $k_1 = 0,22$ y $k_2 = 0,27$

Capítulo 5

BTs para nuevas jerarquías de P_{IV}

5.1. Introducción

En este capítulo comenzaremos con un sistema de la forma $J_0\mathbf{K}_n[\mathbf{U}] = 0$, donde J_0 será uno de los operadores hamiltonianos de la jerarquía de Boussinesq. Consideraremos dos modificaciones sucesivas de dicho sistema, para cada una de las cuales es posible reducir su orden en dos. Obtendremos BTs entre una versión integrada del sistema original y una versión integrada de la primera modificación. También obtendremos BTs entre las versiones integradas de la primera y segunda modificación, así como aBTs para cada una de ellas.

Para una elección particular del operador $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$ encontraremos que nuestros tres sistemas (el original y los dos modificados) integrados se corresponden con jerarquías generalizadas de P_{IV} (esto significa que la propia ecuación de P_{IV} es un caso particular de nuestro sistema). Nuestros resultados sobre la reducción del orden permiten una integración de la reducción de similitud de escala de la jerarquía de Boussinesq, y en particular para el primer

miembro de dicha jerarquía: estos resultados suponen una novedad incluso para la reducción de la propia ecuación de Boussinesq. También obtendremos aBTs para cada miembro de las dos jerarquías de P_{IV} correspondientes a las versiones integradas de la primera y segunda modificación para esta elección particular de $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$; para el caso particular de P_{IV} recuperaremos aBTs conocidas.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la sección 5.2 introduciremos las jerarquías generalizadas de P_{IV} : dos de ellas (jerarquías modificadas) las obtendremos aplicando una transformación de Miura a la primera (jerarquía original). En esta misma sección procederemos a la integración de estas dos jerarquías modificadas y reduciremos su orden en dos. En la sección 5.3 integraremos la jerarquía original y reduciremos su orden en dos utilizando los resultados obtenidos en la sección anterior. En la sección 5.4 encontraremos aBTs para la primera de las jerarquías modificadas integradas. En la sección 5.5 calcularemos aBTs para la segunda de las jerarquías modificadas integradas a partir de los resultados obtenidos en la sección anterior. Por último en la sección 5.6 mostraremos que un caso particular de las aBTs obtenidas proporciona la conocida aBT “dagger” para la propia ecuación P_{IV} .

5.2. Jerarquías de P_{IV}

Como ya comentamos en la introducción consideraremos un sistema del tipo $J_0\mathbf{K}_n[\mathbf{U}] = 0$ y dos modificaciones del mismo, donde J_0 será uno de los operadores hamiltonianos de la jerarquía de Boussinesq, con el fin de estudiar jerarquías de P_{IV} , así como aBTs para estas jerarquías y BTs entre ellas. Comenzaremos (ver [54]) con la secuencia de ODEs acopladas en $\mathbf{U} = (U, V)^T$,

$$\sum_{k=0}^n \gamma_k \mathcal{R}^k \mathbf{U}_x + \sum_{k=1}^n \delta_k \mathcal{R}^{k-1} J_0 M_1[\mathbf{U}] + \mathcal{R} \mathbf{G}_{n-1} + \mathbf{G}_n = 0, \quad (5.2.1)$$

donde $\mathbf{G}_{n-1} = (0, g_{n-1})^T$, $\mathbf{G}_n = (0, g_n)^T$, $M_1[\mathbf{U}] = (0, 1)^T$, y γ_k, δ_k, g_n y g_{n-1} , son constantes arbitrarias. Pares de Lax de este sistema se pueden encontrar en [54]. Supondremos que $g_0 \neq 0$, ya que en este caso podremos obtener jerarquías de P_{IV} . Observemos que en el caso $g_{n-1} \neq 0$, si se realiza una traslación en V y en x entonces se puede elegir, sin pérdida de generalidad, $g_n = \gamma_0 = 0$. Entonces tenemos que

$$\sum_{k=1}^n (\gamma_k \mathcal{R}^k \mathbf{U}_x + \delta_k \mathcal{R}^{k-1} J_0 M_1[\mathbf{U}]) + \mathcal{R} \mathbf{G}_{n-1} = 0. \quad (5.2.2)$$

Aquí \mathcal{R} es el operador de recurrencia de la jerarquía de Boussinesq

$$\mathcal{R} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -(\partial_x^4 + \partial_x^2 U - 3\partial_x V + V_x)\partial_x^{-1} & (2\partial_x^3 + 2U\partial_x + U_x)\partial_x^{-1} \\ -\frac{1}{3}[2\partial_x^5 + 2(U\partial_x^3 + \partial_x^3 U)] & (\partial_x^4 + U\partial_x^2 + 3V\partial_x \\ +(U^2 - 3V_x)\partial_x + \partial_x(U^2 - 3V_x)]\partial_x^{-1} & +V_x)\partial_x^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.2.3)$$

Este operador de recurrencia se puede escribir como [8] [10] [44] [78] [106] en la forma

$$\mathcal{R} = J_0 J_1^{-1}, \quad (5.2.4)$$

donde los operadores hamiltonianos J_0 y J_1 están definidos (con la elección de coordenadas utilizada en [10]) por

$$J_0 = \begin{pmatrix} 2\partial_x^3 + 2U\partial_x + U_x & -\partial_x^4 - \partial_x^2 U + 3\partial_x V - V_x \\ \partial_x^4 + U\partial_x^2 + 3V\partial_x + V_x & -\frac{1}{3}[2\partial_x^5 + 2(U\partial_x^3 + \partial_x^3 U) + (U^2 - 3V_x)\partial_x \\ +\partial_x(U^2 - 3V_x)] \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

y

$$J_1 = 3 \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.6)$$

La jerarquía de ecuaciones (5.2.2) se puede escribir de forma alternativa como

$$J_0 \mathbf{K}_n[\mathbf{U}] = 0, \quad (5.2.7)$$

donde $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}] = (K_n, L_n)^T$ viene dado por

$$\mathbf{K}_n[\mathbf{U}] = \sum_{k=1}^n (\gamma_k J_1^{-1} \mathcal{R}^{k-1} \mathbf{U}_x + \delta_k J_1^{-1} \mathcal{R}^{k-2} J_0 M_1[\mathbf{U}]) + \frac{g_{n-1}}{3} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.8)$$

Nos centraremos directamente en la ecuación (5.2.7) y dejaremos a un lado la forma explícita de $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$, que realmente sólo es importante a la hora de particularizar a las jerarquías de P_{IV} , o al caso especial de la propia ecuación de P_{IV} .

Consideremos ahora la construcción de dos sistemas diferentes (o jerarquías de P_{IV} si tomamos $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$ dado por (5.2.8)) a partir de (5.2.7). Para ello comencemos recordando las transformaciones de Miura para la jerarquía de Boussinesq, de nuevo con la elección de coordenadas utilizadas en [10]. La primera de ellas está dada por $\mathbf{U} = \mathbf{M}[\mathbf{Q}]$, siendo $\mathbf{Q} = (Q, R)^T$ y

$$\mathbf{M}[\mathbf{Q}] = \begin{pmatrix} Q - 2R_x - 4R^2 \\ Q_x + 2RQ \end{pmatrix}. \quad (5.2.9)$$

La segunda transformación de Miura viene dada por $\mathbf{Q} = \mathbf{N}[\mathbf{q}]$, donde $\mathbf{q} = (q, r)^T$ y

$$\mathbf{N}[\mathbf{q}] = \begin{pmatrix} q_x - r_x - q^2 + r^2 \\ r \end{pmatrix}. \quad (5.2.10)$$

Esto significa que tenemos la siguiente secuencia de transformaciones de

Miura

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}, \quad (5.2.11)$$

y por lo tanto, tenemos que la composición de las dos transformaciones de Miura $\mathbf{H} = \mathbf{M} \circ \mathbf{N}$ se expresa como

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}[\mathbf{q}] = \begin{pmatrix} q_x - 3r_x - q^2 - 3r^2 \\ q_{xx} - r_{xx} - 2qq_x + 2rq_x - 2rq^2 + 2r^3 \end{pmatrix}. \quad (5.2.12)$$

Consideremos la primera de las dos transformaciones de Miura. Es conocido que bajo esta transformación de Miura \mathbf{M} , el operador hamiltoniano J_0 factoriza como

$$J_0 \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{M}[\mathbf{Q}]} = \mathbf{M}'[\mathbf{Q}]B(\mathbf{M}'[\mathbf{Q}])^\dagger, \quad (5.2.13)$$

donde B es el operador hamiltoniano de la primera jerarquía modificada de Boussinesq,

$$B = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4\partial_x^3 - 12Q\partial_x - 6Q_x - 16(R_x - R^2)\partial_x & -\partial_x^2 + 2R\partial_x \\ -8(R_x - R^2)_x & \\ \partial_x^2 + 2\partial_x R & \partial_x \end{pmatrix}, \quad (5.2.14)$$

y donde $\mathbf{M}'[\mathbf{Q}]$ es la derivada Fréchet de esta transformación de Miura y $(\mathbf{M}'[\mathbf{Q}])^\dagger$ es su adjunto, cuyas expresiones explícitas son

$$\mathbf{M}'[\mathbf{Q}] = \begin{pmatrix} 1 & -2\partial_x - 8R \\ \partial_x + 2R & 2Q \end{pmatrix}, \quad (5.2.15)$$

y

$$(\mathbf{M}'[\mathbf{Q}])^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -\partial_x + 2R \\ 2\partial_x - 8R & 2Q \end{pmatrix} \quad (5.2.16)$$

respectivamente. La primera versión modificada de la jerarquía (5.2.7) se puede escribir, utilizando (5.2.13) como

$$B(\mathbf{M}'[\mathbf{Q}])^\dagger \mathbf{K}_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] = 0, \quad (5.2.17)$$

que se puede integrar como sigue. En primer lugar introduciremos las funciones auxiliares S y T como

$$(\mathbf{M}'[\mathbf{Q}])^\dagger \mathbf{K}_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] = \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}. \quad (5.2.18)$$

Expandiendo la expresión anterior tenemos que S y T se pueden expresar en términos de K_n y L_n en la forma

$$S = K_n - L_{n,x} + 2RL_n, \quad (5.2.19)$$

$$T = 2K_{n,x} - 8RK_n + 2QL_n. \quad (5.2.20)$$

De esta forma la jerarquía modificada (5.2.17) se puede escribir como el sistema

$$4S_{xxx} + 12QS_x + 6Q_xS + 16(R_x - R^2)S_x + 8S(R_x - R^2)_x + T_{xx} - 2RT_x = 0, \quad (5.2.21)$$

$$S_{xx} + 2(RS)_x + T_x = 0, \quad (5.2.22)$$

que se puede integrar para proporcionar

$$3ST_x + \frac{3}{2}T^2 - 3c_nT - 6QS^2 + 2c_n^2 - d_n = 0, \quad (5.2.23)$$

$$S_x + 2RS + T - c_n = 0, \quad (5.2.24)$$

donde c_n y d_n son dos constantes de integración arbitrarias y además hemos utilizado la segunda ecuación para eliminar todas las derivadas de S de la primera.

Consideremos ahora la construcción del segundo sistema modificado. Del mismo modo que antes, dado que bajo la composición $\mathbf{H} = \mathbf{M} \circ \mathbf{N}$ el operador hamiltoniano J_0 factoriza como

$$J_0 \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{H}[\mathbf{q}]} = \mathbf{H}'[\mathbf{q}] \tilde{B} (\mathbf{H}'[\mathbf{q}])^\dagger, \quad (5.2.25)$$

podemos escribir la segunda versión modificada de la jerarquía (5.2.7) en la forma

$$\tilde{B} (\mathbf{H}'[\mathbf{q}])^\dagger \mathbf{K}_n[\mathbf{H}[\mathbf{q}]] = 0. \quad (5.2.26)$$

En la ecuación de arriba, \tilde{B} , $\mathbf{H}'[\mathbf{q}]$ y $(\mathbf{H}'[\mathbf{q}])^\dagger$ son, respectivamente, el operador hamiltoniano de la segunda jerarquía modificada, la derivada Fréchet de la composición de Miura \mathbf{H} y el adjunto de esta última. Sus correspondientes expresiones explícitas son

$$\tilde{B} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3\partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix}, \quad (5.2.27)$$

$$\mathbf{H}'[\mathbf{q}] = \begin{pmatrix} \partial_x - 2q & -3\partial_x - 6r \\ \partial_x^2 + 2r\partial_x - 2q\partial_x - 2q_x - 4qr & -\partial_x^2 + 2q_x - 2q^2 + 6r^2 \end{pmatrix}, \quad (5.2.28)$$

y

$$(\mathbf{H}'[\mathbf{q}])^\dagger = \begin{pmatrix} -\partial_x - 2q & \partial_x^2 - 2r_x - 2r\partial_x + 2q\partial_x - 4qr \\ 3\partial_x - 6r & -\partial_x^2 + 2q_x - 2q^2 + 6r^2 \end{pmatrix}. \quad (5.2.29)$$

Debido a la forma tan sencilla de \tilde{B} se puede integrar fácilmente la jerarquía modificada (5.2.26) y obtener así

$$(\mathbf{H}'[\mathbf{q}])^\dagger \mathbf{K}_n[\mathbf{H}[\mathbf{q}]] + (a_n, b_n)^T = 0, \quad (5.2.30)$$

donde a_n y b_n son dos constantes de integración arbitrarias.

Ahora podemos establecer una relación entre las constantes de integración de las dos jerarquías modificadas integradas, es decir, entre (c_n, d_n) y (a_n, b_n) . Para ello, observemos que al ser $\mathbf{H} = \mathbf{M} \circ \mathbf{N}$, entonces se verifica que $(\mathbf{H}'[\mathbf{q}])^\dagger = (\mathbf{N}'[\mathbf{q}])^\dagger (\mathbf{M}'[\mathbf{N}[\mathbf{q}]])^\dagger$, siendo

$$(\mathbf{N}'[\mathbf{q}])^\dagger = \begin{pmatrix} -\partial_x - 2q & 0 \\ \partial_x + 2r & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.31)$$

Entonces la ecuación (5.2.30) se puede escribir como

$$(\mathbf{N}'[\mathbf{q}])^\dagger (\mathbf{M}'[\mathbf{N}[\mathbf{q}]])^\dagger \mathbf{K}_n[\mathbf{H}[\mathbf{q}]] + (a_n, b_n)^T = 0, \quad (5.2.32)$$

o de forma alternativa, utilizando la ecuación (5.2.18), en términos de S y T como

$$S_x + 2qS - a_n = 0, \quad (5.2.33)$$

$$S_x + 2rS + T + b_n = 0. \quad (5.2.34)$$

Eliminando q y r entre (5.2.33), (5.2.34) y la transformación de Miura $\mathbf{Q} = \mathbf{N}[\mathbf{q}]$ dada por (5.2.10), se obtienen precisamente las ecuaciones (5.2.23) y (5.2.24) con

$$c_n = -b_n, \quad (5.2.35)$$

$$d_n = \frac{1}{2}(b_n^2 + 3a_n^2). \quad (5.2.36)$$

Resumamos los resultados obtenidos hasta ahora. Comenzando con el sistema de ODEs (5.2.7) hemos encontrado dos sistemas modificados integra-

dos dados por (5.2.23), (5.2.24) y (5.2.30) en las variables (Q, R, c_n, d_n) y (q, r, a_n, b_n) respectivamente. Las parejas de constantes de integración arbitrarias están relacionadas a través de (5.2.35), (5.2.36).

Observemos que los resultados obtenidos son válidos para cualquier $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$. Procederemos ahora a mostrar en que sentido nuestros tres sistemas, para una elección concreta de $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$, dado por (5.2.8), se pueden considerar jerarquías de P_{IV} . Consideremos la jerarquía original (5.2.7) y las dos jerarquías modificadas integradas (5.2.23), (5.2.24) y (5.2.30). En el caso $n = 1$ tenemos de (5.2.8) que

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ L_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\gamma_1 \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}g_0x \\ \delta_1 \end{pmatrix} \quad (5.2.37)$$

y por tanto el sistema de ecuaciones (5.2.7) para este caso particular toma la forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\gamma_1 (2V_{xx} - U_{xxx} + 4VU - 2UU_x)_x + \delta_1 (2V - U_x)_x \\ & + \frac{1}{3}g_0 (2U + xU_x) = 0, \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\gamma_1 \left(V_{xxx} - \frac{2}{3}U_{xxxx} - 2UU_{xx} + 2UV_x - U_x^2 + 2V^2 - \frac{4}{9}U^3 \right)_x \\ & - \frac{1}{3}\delta_1 (2U_{xx} - 3V_x + U^2)_x + \frac{1}{3}g_0 (3V + xV_x) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

En el caso $\gamma_1 = 0$ el sistema que acabamos de obtener es una extensión no-autónoma del propio flujo estacionario de Boussinesq. En el caso $g_0 \neq 0$, la eliminación de V entre ambas ecuaciones proporciona (suponiendo además de $\gamma_1 = 0$, que $\delta_1 \neq 0$ y tomando $\delta_1 = 1$) una ODE de cuarto orden en U ,

$$(U_{xx} + 2U^2)_{xx} + \frac{1}{3}g_0^2(x^2U_{xx} + 7xU_x + 8U) = 0. \quad (5.2.40)$$

Por otro lado, para este mismo caso $n = 1$, con $\gamma_1 = 0$ y $\delta_1 = 1$, de (5.2.23), (5.2.24), donde S y T vienen dados por (5.2.19), (5.2.20) podemos despejar

fácilmente Q y obtener así una única ecuación en la variable R de segundo orden. De forma similar podemos proceder con el caso $n = 1$ del sistema (5.2.30) y eliminar la variable q para obtener una única ecuación para r . Las dos ecuaciones en R y en r , como cabía esperar son iguales, dado que de la segunda transformación de Miura (5.2.10) tenemos que $R = r$. Si aplicamos el cambio de variable

$$R(x) = r(x) = Y(z) - \frac{1}{6}g_0x, \quad z = 2x, \quad (5.2.41)$$

a ambas ecuaciones, obtenemos para la elección $g_0 = -8$, precisamente la ecuación P_{IV}

$$Y_{zz} = \frac{1}{2} \frac{Y_z^2}{Y} + \frac{3}{2} Y^3 + 4zY^2 + 2(z^2 - \alpha)Y - \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{Y}, \quad (5.2.42)$$

donde los parámetros α y β están expresados en términos de a_1 y b_1 por

$$\alpha = 1 - (b_1/8), \quad \beta^2 = (a_1/4)^2 \quad (5.2.43)$$

o, en términos de c_1 y d_1 por

$$\alpha = 1 + (c_1/8), \quad \beta^2 = \frac{1}{48}(2d_1 - c_1^2). \quad (5.2.44)$$

Entonces las dos jerarquías modificadas integradas (5.2.23), (5.2.24) y (5.2.30), con $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$ dado por (5.2.8) y $g_{n-1} \neq 0$, son por tanto jerarquías de P_{IV} generalizadas, ya que en el caso particular anterior el primer miembro corresponde, tras el cambio de variable trivial (5.2.41), a la propia ecuación de P_{IV} (5.2.42). En la siguiente sección procederemos a la integración de (5.2.7), que para el caso $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$ dado por (5.2.8), con $g_{n-1} \neq 0$, proporcionará una jerarquía equivalente bajo una BT a estas jerarquías generalizadas de P_{IV} ; esta jerarquía, de hecho, podríamos decir que es también otra jerarquía de P_{IV} generalizada.

5.3. Integración por modificación

En esta sección trataremos el problema de integrar el sistema original (5.2.7). Para ello utilizaremos un procedimiento basado en el expuesto en la sección 1.3.7.1, esto es, en primer lugar pasando a un sistema modificado, que es más sencillo de integrar y posteriormente encontrando una BT entre el sistema modificado integrado y una versión del sistema original (no modificado) integrado. Sin embargo, en este caso, es necesario extender estas ideas.

Recordemos que hemos integrado directamente el primero de los dos sistemas modificados (5.2.23), (5.2.24). Dicho sistema se puede escribir en términos de K_n y L_n , utilizando la forma explícita de S y T expresados por (5.2.19), (5.2.20)

$$3K_{n,x} - L_{n,xx} - 6RK_n + 2(R_x + 2R^2 + Q)L_n - c_n = 0, \quad (5.3.1)$$

$$\begin{aligned} & (K_n + 2RL_n - L_{n,x})K_{n,xx} + (K_{n,x})^2 - 2Q(L_{n,x})^2 \\ & + (2QL_n - 8R^2L_n - 12RK_n - c_n)K_{n,x} \\ & + (6RQL_n + 3QK_n + 4R_xK_n - Q_xL_n)L_{n,x} \\ & + 4RL_{n,x}K_{n,x} + (16R^2 - Q - 4R_x)K_n^2 \\ & + (Q^2 + 2RQ_x - 4QR^2)L_n^2 + (Q_x - 8RR_x - 12RQ)K_nL_n \\ & - c_nQL_n + 4c_nRK_n + \frac{1}{6}(2c_n^2 - d_n) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Por otra parte la transformación de Miura para la primera modificación viene dada por (5.2.9)

$$U = Q - 2R_x - 4R^2, \quad (5.3.3)$$

$$V = Q_x + 2RQ. \quad (5.3.4)$$

Entre las cuatro últimas ecuaciones es posible obtener las siguientes expre-

siones explícitas para las variables modificadas Q y R en términos de K_n y L_n

$$\begin{aligned}
Q = \frac{1}{3\Upsilon_n} & \left[-3K_n L_{n,xxx} + (L_{n,xx})^2 - 3K_{n,x} L_{n,xx} \right. \\
& + 2U L_n L_{n,xx} + 2c_n L_{n,xx} + 9K_n K_{n,xx} - 3U K_n L_{n,x} \\
& - 3U L_n K_{n,x} - 3c_n K_{n,x} + U^2 L_n^2 + 9U K_n^2 \\
& \left. + 3(3V - U_x) L_n K_n + 2c_n U L_n + c_n^2 \right], \tag{5.3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R = \frac{1}{2\Upsilon_n} & \left[-L_n L_{n,xxx} + L_{n,x} L_{n,xx} - K_n L_{n,xx} \right. \\
& + 3L_n K_{n,xx} - 3K_{n,x} L_{n,x} + 3K_n K_{n,x} + c_n L_{n,x} \\
& \left. + (3V - U_x) L_n^2 + 2U K_n L_n - c_n K_n \right], \tag{5.3.6}
\end{aligned}$$

donde Υ_n viene dada por la expresión

$$\Upsilon_n = L_n L_{n,xx} - 3K_n L_{n,x} + 3K_n^2 + U L_n^2 + c_n L_n. \tag{5.3.7}$$

Si sustituimos las expresiones de Q y R que acabamos de obtener en las ecuaciones (5.3.1)–(5.3.4), tenemos que sólo dos de ellas son independientes; digamos (5.3.2) y (5.3.3), que constituyen una versión del sistema original (5.2.7) integrada dos veces expresada en términos de sus variables originales U y V . Observemos que si reemplazamos Q y R dados por (5.3.5) y (5.3.6) en el sistema original (5.2.7) obtenemos un sistema de orden ocho en K_n y L_n , mientras que si hacemos lo propio con la versión integrada de este sistema (5.3.2) y (5.3.3) se obtiene uno de orden seis en K_n y L_n . Por tanto a cada miembro del sistema se le puede reducir su orden en dos, siendo c_n y d_n constantes arbitrarias de integración.

Por otro lado, las ecuaciones (5.3.1) y (5.3.2), con K_n y L_n expresados en términos de U y de V junto con (5.3.3) y (5.3.4), constituyen una aBT entre este sistema modificado integrado y una versión del sistema original integrado.

Veamos ahora un ejemplo explícito. Utilizando $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$ dado por (5.2.8), con $g_{n-1} \neq 0$, $n = 1$ y la elección de las constantes $\gamma_1 = 0$, $\delta_1 = 1$ y $\gamma_0 \neq 0$ sabemos que el sistema (5.2.7) se puede expresar como una ecuación escalar de cuarto orden (5.2.40). Una versión integrada dos veces de este sistema viene dado por (5.3.2) y (5.3.3), tras sustituir Q y R de (5.3.5) y (5.3.6). En este caso particular se escribe explícitamente como

$$\begin{aligned} & V_x - g_0 x V - \frac{1}{3} U_{xx}^2 + \frac{2}{3} g_0 x U_x + \frac{1}{3} U^2 - \frac{1}{9} g_0^2 x^2 U \\ & + \frac{1}{3} g_0 U + \frac{1}{9} g_0^2 - \frac{1}{6} d_1 = 0, \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

$$\begin{aligned} & -27V^2 + (27U_x - 18g_0xU - 2g_0^3x^3) V - 6U_x^2 + 9g_0xUU_x \\ & + g_0^2x(1 + g_0x^2)U_x + U^3 - 2g_0^2x^2U^2 - \frac{1}{3}g_0^4x^4U \\ & - \frac{3}{2}d_1U + \frac{1}{3}g_0^4x^2 - \frac{1}{2}g_0^2x^2d_1 + c_1^3 - \frac{3}{2}d_1c_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

En este caso es posible eliminar V entre ambas ecuaciones y obtener el sistema anterior en forma escalar

$$\begin{aligned} & (U_{xx})^2 + 4U^2U_{xx} + \frac{8}{3}g_0^2x^2UU_{xx} + \frac{4}{9} \left(g_0^4x^4 + 3g_0^2 - \frac{9}{2}d_1 \right) U_{xx} \\ & - g_0^2x^2U_x^2 - \frac{4}{3}g_0^4x^3U_x + 4U^4 + 4g_0^2x^2U^3 \\ & + \frac{4}{3} \left(g_0^4x^4 + 2g_0^2 - 3d_1 \right) U^2 \\ & + \frac{4}{27}g_0^2x^2 \left(g_0^4x^4 + 12g_0^2 - \frac{9}{2}d_1 \right) U + \frac{4}{9}g_0^4 - \frac{4}{3}g_0^2d_1 + d_1^2 \\ & - \frac{4}{27}g_0^2x^2 \left(g_0^4x^2 - \frac{3}{2}g_0^2x^2d_1 + 9c_1^3 - \frac{27}{2}d_1c_1 \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

que constituye una versión integrada dos veces de (5.2.40). El orden del sistema en U y V (o de la ecuación escalar en U) se ha reducido por tanto en dos.

Una vez obtenida (5.3.10), procederemos ahora a efectuar una integración directa de (5.2.40), esto es, sin utilizar el método de integración por

modificación. La ecuación (5.2.40) se puede escribir como

$$3xU_{xxxx} + 12xUU_{xx} + g_0^2x^3U_{xx} + 12xU_x^2 + 7g_0^2x^2U_x + 8g_0^2xU = 0, \quad (5.3.11)$$

donde se ha multiplicado a toda la ecuación por $3x$, dado que x es un factor integrante para esta ecuación. Así, podemos integrar directamente (5.3.11) para obtener

$$3xU_{xxx} - 3U_{xx} + 12xUU_x + g_0^2x^3U_x - 6U^2 + 4g_0^2x^2U + 3d_1 = 0, \quad (5.3.12)$$

siendo d_1 una constante de integración arbitraria. Esta ecuación de tercer orden admite un factor integrante no trivial

$$\frac{9U_{xx} + 18U^2 + 12g_0^2x^2U + 2g_0^4x^4 + 6g_0^2 - 9d_1}{x^3}, \quad (5.3.13)$$

que permite efectuar una nueva integración, de la que se obtiene precisamente la ecuación (5.3.10) (salvo un factor multiplicativo), donde los dos últimos términos se corresponden con la constante de integración.

Observemos que esta es la primera vez que la ecuación (5.2.40), que corresponde a una reducción de similaridad de escala de la ecuación de Boussinesq, ha sido integrada dos veces. Además, es la primera vez que una BT entre una versión integrada dos veces de la reducción de similaridad de escala de la ecuación de Boussinesq y P_{IV} ha sido encontrada. Esta BT consiste en las ecuaciones (5.3.1)–(5.3.4), con K_1 y L_1 expresados en términos de U y V , junto con la posterior transformación (5.2.41), todo para este caso particular y con la elección de $g_0 = -8$. Recordemos que las reducciones de similaridad de de la ecuación de Boussinesq y otras ecuaciones relacionadas se pueden encontrar en [24] [97].

5.4. aBTs para una jerarquía de P_{IV}

Procederemos a encontrar aBTs para la versión integrada del primer sistema modificado integrado dos veces (5.2.23), (5.2.24), con S y T dados por (5.2.19) y (5.2.20). Como acabamos de ver en la sección 5.2, para una elección concreta de $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$ el sistema (5.2.23), (5.2.24) constituye una jerarquía de P_{IV} generalizada. Comenzaremos pues con el sistema

$$3ST_x + \frac{3}{2}T^2 - 3c_nT - 6QS^2 + 2c_n^2 - d_n = 0, \quad (5.4.1)$$

$$S_x + 2RS + T - c_n = 0, \quad (5.4.2)$$

donde S y T vienen expresados mediante (5.2.19), (5.2.20)

$$S = K_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] - L_{n,x}[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] + 2RL_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]], \quad (5.4.3)$$

$$T = 2K_{n,x}[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] - 8RK_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] + 2QL_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]], \quad (5.4.4)$$

donde se ha utilizado la primera transformación de Miura $\mathbf{U} = \mathbf{M}[\mathbf{Q}]$, así K_n y L_n se escriben en términos de Q y R . Aplicaremos el método expuesto en la sección 1.3.7.2 para buscar aBTs, esto es, buscaremos una transformación de la forma

$$Q = \tilde{Q} + E, \quad R = \tilde{R} + F, \quad (5.4.5)$$

entre dos soluciones del sistema (5.4.1), (5.4.2), la primera de ellas en las variables (Q, R, S, T) con parámetros (c_n, d_n) y otra en las variables $(\tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T})$ con parámetros $(\tilde{c}_n, \tilde{d}_n)$. Esto significa que tenemos una segunda copia de (5.4.1), (5.4.2) dada por

$$3\tilde{S}\tilde{T}_x + \frac{3}{2}\tilde{T}^2 - 3\tilde{c}_n\tilde{T} - 6\tilde{Q}\tilde{S}^2 + 2\tilde{c}_n^2 - \tilde{d}_n = 0, \quad (5.4.6)$$

$$\tilde{S}_x + 2\tilde{R}\tilde{S} + \tilde{T} - \tilde{c}_n = 0, \quad (5.4.7)$$

con

$$\tilde{S} = K_n[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]] - L_{n,x}[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]] + 2\tilde{R}L_n[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]], \quad (5.4.8)$$

$$\tilde{T} = 2K_{n,x}[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]] - 8\tilde{R}K_n[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]] + 2\tilde{Q}L_n[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]]. \quad (5.4.9)$$

Impondremos ahora que la transformación de Miura (5.2.9) permanezca invariante bajo (5.4.5), esto es

$$Q - 2R_x - 4R^2 = \tilde{Q} - 2\tilde{R}_x - 4\tilde{R}^2, \quad (5.4.10)$$

$$Q_x + 2RQ = \tilde{Q}_x + 2\tilde{R}\tilde{Q}. \quad (5.4.11)$$

Utilizando (5.4.5) en las ecuaciones de arriba obtenemos que las funciones E y F han de satisfacer

$$2F_x + 4F^2 + 8\tilde{R}F - E = 0, \quad (5.4.12)$$

$$E_x + 2EF + 2\tilde{Q}F + 2\tilde{R}E = 0. \quad (5.4.13)$$

Tenemos que sustituir la transformación (5.4.5) en el sistema original (5.4.1), (5.4.2) y utilizar el hecho de que $(\tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T})$ también satisface el sistema (5.4.6), (5.4.7) pero con diferentes parámetros $(\tilde{c}_n, \tilde{d}_n)$. Además, hay que tener en cuenta que esta aBT (5.4.5) es invariante bajo la transformación de Miura $\mathbf{U} = \mathbf{M}[\mathbf{Q}]$, con lo que también se cumple que $K_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] = K_n[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]]$ y $L_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] = L_n[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]]$. Entonces llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$2L_nF_x - 6K_nF + 4L_nF^2 + 8\tilde{R}L_nF + 2L_nE - c_n + \tilde{c}_n = 0, \quad (5.4.14)$$

$$\begin{aligned} & -12EL_{n,x}^2 + 36L_{n,x} \left[\frac{2}{3}K_nF_x + \frac{1}{2}K_nE + \frac{2}{3}K_{n,x}F \right. \\ & \left. + L_n \left(-\frac{1}{6}E_x + EF + \tilde{R}E + \tilde{Q}F \right) \right] + 12K_{n,xx}L_nF \\ & + 6K_{n,x} \left(-16L_nF\tilde{R} - 12K_nF + 2EL_n - 8F^2L_n + \tilde{c}_n - c_n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6 \left(2L_n \tilde{R} + 2L_n F + K_n \right) (L_n E_x - 4K_n F_x) + 6K_n^2 \left(32\tilde{R}F - E + 16F^2 \right) \\
& + 24K_n \left[-3L_n \left(F\tilde{Q} + E\tilde{R} + EF \right) - 2L_n F \tilde{R}_x + c_n \tilde{R} - \tilde{c}_n \tilde{R} + c_n F \right] \\
& + 6L_n^2 \left[-4F^2 \left(\tilde{Q} + E \right) + 2F \left(\tilde{Q}_x - 4\tilde{R}E - 4\tilde{R}\tilde{Q} \right) + E \left(2\tilde{Q} + E - 4\tilde{R}^2 \right) \right] \\
& + 6L_n \left(\tilde{c}_n \tilde{Q} - c_n \tilde{Q} - c_n E \right) - d_n + \tilde{d}_n + 2c_n^2 - 2\tilde{c}_n^2 = 0, \tag{5.4.15}
\end{aligned}$$

donde K_n y L_n están expresados en términos de \tilde{Q} y \tilde{R} . De la compatibilidad entre las cuatro últimas ecuaciones, llegamos a que, aparte de la transformación identidad (que ocurre cuando $\tilde{c}_n = c_n$, $\tilde{d}_n = d_n$, $E = 0$ y $F = 0$) las funciones E y F satisfacen

$$E = \frac{-(\tilde{c}_n - c_n) \left(\tilde{c}_n - c_n - 3K_{n,x} + 12\tilde{R}K_n - 3\tilde{Q}L_n \right)}{3\Theta_n}, \tag{5.4.16}$$

$$F = \frac{-(\tilde{c}_n - c_n) \left(2\tilde{R}L_n + K_n - L_{n,x} \right)}{2\Theta_n}, \tag{5.4.17}$$

junto con la relación entre los parámetros $2\tilde{c}_n^2 + 2c_n^2 - 3\tilde{d}_n + 2\tilde{c}_n c_n = 0$ y $\tilde{d}_n - d_n = 0$. En la expresión anterior, para aligerar la notación hemos definido

$$\Theta_n = 3L_{n,x}K_n - 3L_nK_{n,x} - 3K_n^2 - 3\tilde{Q}L_n^2 + 6\tilde{R}L_nK_n + (\tilde{c}_n - c_n)L_n \tag{5.4.18}$$

Entonces de (5.4.5) tenemos que la aBT tiene la forma

$$Q = \tilde{Q} - \frac{(\tilde{c}_n - c_n) \left(\tilde{c}_n - c_n - 3K_{n,x} + 12\tilde{R}K_n - 3\tilde{Q}L_n \right)}{3\Theta_n}, \tag{5.4.19}$$

$$R = \tilde{R} - \frac{(\tilde{c}_n - c_n) \left(2\tilde{R}L_n + K_n - L_{n,x} \right)}{2\Theta_n}, \tag{5.4.20}$$

$$\tilde{d}_n = d_n, \tag{5.4.21}$$

$$d_n = \frac{2}{3}(\tilde{c}_n^2 + c_n\tilde{c}_n + c_n^2). \tag{5.4.22}$$

Las ecuaciones (5.4.19)–(5.4.22) constituyen una aBT para el primer sistema modificado integrado dos veces (5.2.23), (5.2.24). Para el caso particular en que $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$ viene dado por (5.2.8), obtenemos una aBT para nuestra jerarquía de P_{IV} generalizada. Más tarde volveremos a esta aBT para el caso especial de la propia ecuación de P_{IV} .

5.5. Otras aBTs

Estudiaremos el problema de la obtención de aBTs para el segundo sistema modificado integrado dos veces (5.2.30) a partir de la aBT (5.4.19)–(5.4.22) que acabamos de obtener para el primer sistema modificado integrado dos veces (5.2.23), (5.2.24).

Para proceder a ello, escribiremos la jerarquía (5.2.30) como el sistema de ecuaciones

$$L_{n,xx} - 3K_{n,x} + 6rK_n - 2(q_x - q^2 + 3r^2)L_n - b_n = 0, \quad (5.5.1)$$

$$L_{n,xx} - K_{n,x} + 2(q - r)L_{n,x} - 2qK_n - 2(r_x + 2qr)L_n + a_n = 0, \quad (5.5.2)$$

una vez que se utilicen las dos transformaciones de Miura (5.2.9) y (5.2.10) para que L_n y K_n se escriban en términos de las variables q y r .

Recordemos que la transformación de Miura (5.2.10) relaciona las variables Q y R con q y r por medio de las relaciones

$$Q = q_x - r_x - q^2 + r^2, \quad (5.5.3)$$

$$R = r. \quad (5.5.4)$$

De las ecuaciones (5.2.33), (5.2.34) tenemos que

$$q = \frac{1}{2} \frac{-S_x + a_n}{S}, \quad (5.5.5)$$

$$r = -\frac{1}{2} \frac{S_x + T + b_n}{S}. \quad (5.5.6)$$

Utilizando ahora (5.2.19), (5.2.20) para eliminar S y T respectivamente y teniendo en cuenta que L_n y K_n están expresados en términos de Q y R llegamos a

$$q = \frac{1}{2} \frac{L_{n,xx} - 2RL_{n,x} - K_{n,x} - 2R_x L_n + a_n}{K_n - L_{n,x} + 2RL_n}, \quad (5.5.7)$$

$$r = \frac{1}{2} \frac{L_{n,xx} - 3K_{n,x} - 2RL_{n,x} + 8RK_n - 2(Q + R_x)L_n - b_n}{K_n - L_{n,x} + 2RL_n}, \quad (5.5.8)$$

que es la transformación inversa de (5.5.3), (5.5.4). Hagamos una copia del sistema (5.5.1), (5.5.2) en las variables \tilde{q} y \tilde{r} , para unos parámetros \tilde{a}_n y \tilde{b}_n ,

$$L_{n,xx} - 3K_{n,x} + 6\tilde{r}K_n - 2(\tilde{q}_x - \tilde{q}^2 + 3\tilde{r}^2)L_n - \tilde{b}_n = 0, \quad (5.5.9)$$

$$L_{n,xx} - K_{n,x} + 2(\tilde{q} - \tilde{r})L_{n,x} - 2\tilde{q}K_n - 2(\tilde{r}_x + 2\tilde{q}\tilde{r})L_n + \tilde{a}_n = 0, \quad (5.5.10)$$

donde, de nuevo al ser invariante la transformación de Miura $\mathbf{U} = \mathbf{M}[\mathbf{Q}]$, se cumple que $K_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] = K_n[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]]$ y $L_n[\mathbf{M}[\mathbf{Q}]] = L_n[\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{Q}}]]$. Introduciendo la aBT que obtuvimos para el primer sistema modificado integrado (5.4.19)–(5.4.22) en (5.5.7) y (5.5.8) y utilizando posteriormente la transformación de Miura en las variables con tilde

$$\tilde{Q} = \tilde{q}_x - \tilde{r}_x - \tilde{q}^2 + \tilde{r}^2, \quad (5.5.11)$$

$$\tilde{R} = \tilde{r}, \quad (5.5.12)$$

obtenemos cuatro aBTs diferentes entre soluciones del sistema (5.5.1), (5.5.2)

y (5.5.9), (5.5.10). Para escribirlas de forma explícita definiremos las siguientes variables auxiliares

$$\Delta_n = K_n + (\tilde{q} - \tilde{r})L_n, \quad (5.5.13)$$

$$\Omega_n = K_n - L_{n,x} + 2\tilde{r}L_n, \quad (5.5.14)$$

$$\Sigma_n = 2\tilde{q}L_n - L_{n,x} + 3K_n \quad (5.5.15)$$

$$B_n = 2b_n + \tilde{b}_n \quad (5.5.16)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_n = & [L_{n,x} + 3K_n + (4\tilde{q} - 6\tilde{r})L_n] L_n b_n + 2 [L_{n,x} + 2(\tilde{q} - 3\tilde{r})L_n] L_n \tilde{b}_n \\ & - 3\Omega_n \Delta_n [L_{n,x} + K_n + (2\tilde{q} - 4\tilde{r})L_n], \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

En términos de Δ_n , Ω_n , Σ_n , B_n y Γ_n estas nuevas cuatro aBTs vienen dadas por los siguientes grupos de relaciones

$$q = \tilde{q} + \frac{b_n - \tilde{b}_n}{6\Delta_n}, \quad (5.5.18)$$

$$r = \tilde{r} + \frac{b_n - \tilde{b}_n}{6\Delta_n}, \quad (5.5.19)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n), \quad (5.5.20)$$

$$\tilde{b}_n = -\frac{1}{2}(3a_n + b_n); \quad (5.5.21)$$

$$q = \tilde{q} + \frac{3\Delta_n \left[[(4\tilde{q} - 6\tilde{r})L_n + L_{n,x} + 3K_n]\tilde{b}_n + \Sigma_n b_n \right] + (\tilde{b}_n - b_n)^2 L_n}{6\Delta_n \left[3\Delta_n \Omega_n + (b_n - \tilde{b}_n)L_n \right]}, \quad (5.5.22)$$

$$r = \tilde{r} + \frac{b_n - \tilde{b}_n}{6\Delta_n}, \quad (5.5.23)$$

$$\tilde{a}_n = -\frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad (5.5.24)$$

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{2}(3a_n - b_n); \quad (5.5.25)$$

$$q = \tilde{q} + \frac{3\Omega_n \left[\Sigma_n \tilde{b}_n - [(6\tilde{r} - 4\tilde{q})L_n - L_{n,x} - 3K_n]b_n \right] - 2B_n^2 L_n}{6\Omega_n [-3\Omega_n \Delta_n + B_n L_n]}, \quad (5.5.26)$$

$$r = \tilde{r} + \frac{1}{2} \frac{(b_n - \tilde{b}_n)\Omega_n}{3(\tilde{r} + \tilde{q})K_n L_n - 3\Delta_n L_{n,x} + 6\tilde{r}(\tilde{q} - \tilde{r})L_n^2 + 3K_n^2 - B_n L_n}, \quad (5.5.27)$$

$$\tilde{a}_n = -\frac{1}{2}(a_n - b_n), \quad (5.5.28)$$

$$\tilde{b}_n = -\frac{1}{2}(3a_n + b_n); \quad (5.5.29)$$

y

$$q = \tilde{q} + (b_n - \tilde{b}_n) \frac{\Gamma_n}{18\Delta_n^2 \Omega_n^2 - 18(b_n + \tilde{b}_n)\Delta_n \Omega_n L_n + 2(b_n + 2\tilde{b}_n)B_n L_n^2},$$

$$r = \tilde{r} + \frac{1}{2} \frac{(b_n - \tilde{b}_n)\Omega_n}{3(\tilde{r} + \tilde{q})K_n L_n - 3\Delta_n L_{n,x} + 6\tilde{r}(\tilde{q} - \tilde{r})L_n^2 + 3K_n^2 - B_n L_n}, \quad (5.5.30)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad (5.5.31)$$

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{2}(3a_n - b_n). \quad (5.5.32)$$

De la ecuación (5.5.10) tenemos que

$$\tilde{q} = \frac{L_{n,xx} - K_{n,x} - 2(\tilde{r}_x L_n + \tilde{r} L_{n,x}) + \tilde{a}_n}{2\Omega_n}. \quad (5.5.33)$$

Utilizando esta expresión para \tilde{q} , junto con las correspondientes variaciones en los parámetros de cada caso se puede comprobar fácilmente que en las cuatro aBTs de arriba, la ecuación para r es la misma. No obstante, en las cuatro, la ecuación para q sigue siendo distinta, con lo que de hecho tenemos cuatro aBTs diferentes para el segundo sistema modificado integrado dos veces (5.5.1), (5.5.2). En el caso particular donde tenemos nuestra jerarquía de P_{IV} generalizada, que ocurre cuando $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$ viene dado por (5.2.8),

obtenemos entonces aBTs correspondientes a dicha jerarquía.

5.6. Identificación de aBTs

Procederemos a identificar las aBTs (5.4.19)–(5.4.22) del sistema (5.2.23), (5.2.24) en el caso particular de nuestra jerarquía de P_{IV} . Para ello consideraremos la propia ecuación P_{IV} (5.2.42). Como ya vimos en la sección 5.2, este ejemplo se corresponde con el caso en que $n = 1$, $K_1 = \frac{1}{3}g_0x$, $L_1 = 1$ y $g_0 = -8$, al que hay que aplicar el cambio de variable (5.2.41) y elegir de forma apropiada los parámetros según la relación (5.2.44).

Observemos que si sustituimos \tilde{S} y \tilde{T} dados por (5.4.8) y (5.4.9) en (5.4.7), tenemos para cada miembro de la jerarquía que

$$\tilde{Q} = -\frac{3K_{n,x} - L_{n,xx} + 2\tilde{R}_xL_n - 6\tilde{R}K_n + 4\tilde{R}^2L_n - \tilde{c}_n}{2L_n}. \quad (5.6.1)$$

Volviendo a nuestro caso especial de la ecuación P_{IV} , tenemos que la ecuación (5.4.20) toma la forma

$$R = \tilde{R} - \frac{(\tilde{c}_1 - c_1)(2\tilde{R} - \frac{8}{3}x)}{6\tilde{R}_x + 12\tilde{R}^2 + 16x\tilde{R} - \frac{128}{3}x^2 - \tilde{c}_1 - 2c_1 - 8}. \quad (5.6.2)$$

En la variable $Y(z)$ que verifica la propia ecuación P_{IV} (5.2.42) para los parámetros α y β (relacionados con c_1 y d_1 a través de (5.2.44)) esta aBT se escribe como

$$Y = \tilde{Y} + \frac{8(\alpha - \tilde{\alpha})\tilde{Y}}{6\tilde{Y}_z + 6\tilde{Y}^2 + 12z\tilde{Y} - 4\tilde{\alpha} - 8\alpha + 12}. \quad (5.6.3)$$

Esta ecuación relaciona dos soluciones $Y(z)$ e $\tilde{Y}(z)$ de la propia ecuación P_{IV} (5.2.42) para diferentes valores de los parámetros (α, β) y $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ respectivamente. Utilizando (5.2.44) en las variaciones de los parámetros (5.4.21), (5.4.22) obtenemos la aBT

$$Y = \tilde{Y} + \frac{(2\alpha - 2 \pm \beta)\tilde{Y}}{\tilde{Y}_z + \tilde{Y}^2 + 2z\tilde{Y} - \alpha + 1 \pm \beta/2}, \quad (5.6.4)$$

$$\tilde{\alpha} = -\frac{1}{4}(2\alpha - 6 \pm 3\beta), \quad (5.6.5)$$

$$\tilde{\beta}^2 = (\alpha - 1 \mp \beta/2)^2, \quad (5.6.6)$$

que es precisamente la conocida aBT “dagger” para P_{IV} , que puede encontrarse, por ejemplo en [11] [56] [57].

Concluimos por tanto que al ser $R = r$ las cuatro aBTs encontradas en la sección 5.5 constituyen también extensiones a una jerarquía generalizada de P_{IV} de la aBT “dagger”.

Conclusiones

El trabajo llevado a cabo en la presente Tesis Doctoral se centra en el estudio de propiedades y estructuras subyacentes de ciertas ecuaciones integrales. En particular, hemos mostrado que, para sistemas con una determinada forma definidos a través de estructuras hamiltonianas y transformaciones de Miura de PDEs integrables, es posible obtener aBTs. Estas ideas son también aplicables a ciertos sistemas no integrables.

A continuación escribiremos las conclusiones de cada capítulo de forma más detallada.

Capítulo 2

En este capítulo hemos introducido una PDE que tiene una estructura muy similar a la de P_{II} . Para esta ecuación, hemos encontrado aBTs de tipo ODE y de tipo PDE, además de efectuar una reducción del orden de una ecuación relacionada con esta PDE.

Respecto a la aBT de tipo ODE que hemos construido, nos permite afirmar que existen PDEs (y en general sistemas) no integrables que poseen aBTs (de tipo ODE). Este hecho, hace que sea necesario precisar la idea que se tenía hasta ahora de la relación entre la integrabilidad completa de un sistema y la existencia de aBTs, que por supuesto para aBTs (de tipo PDE) sigue siendo bien entendida.

Para encontrar la aBT de tipo ODE, así como para efectuar una integra-

ción de esta PDE hemos tenido que extender el teorema de integración por modificación a las PDEs.

Por otro lado hemos comprobado que la afirmación de que P_I no tiene aBT porque no tiene un parámetro libre es falsa, ya que hemos encontrado una ODE sin parámetro libre con una aBT.

Finalmente hemos estudiado una PDE integrable de sexto orden, que corresponde a una deformación no holonómica de la ecuación de KdV, que recientemente han encontrado Karasu–Kalkanlı et al. [68] a la que se refieren como KdV6. Hemos podido integrar una vez dicha ecuación y además toda la jerarquía asociada a ella, con lo que hemos reducido su orden a $2n + 1$ y en particular KdV6 a una PDE de orden cinco.

Capítulo 3

Este capítulo está dedicado al estudio de un sistema que representa una versión integrada de la modificación de una extensión no isoespectral del flujo inverso de Broer–Kaup.

Hemos encontrado dos aBTs de tipo ODE a partir de la factorización del operador hamiltoniano, aplicando el teorema de integración por modificación, suponiendo invariante la transformación de Miura. Cada una de dichas aBTs proviene de utilizar una secuencia de transformaciones de Miura diferente en cada caso. De nuevo como sucedía en el capítulo anterior estas aBTs de tipo ODE existen para sistemas no integrables.

Finalmente hemos comprobado que esas dos aBTs están relacionadas entre sí, al igual que sucede para la propia P_{IV} que tiene una única aBT fundamental.

Capítulo 4

En este capítulo hemos encontrado soluciones exactas del sistema completamente integrable de PDEs estudiado en el capítulo 2 utilizando tres métodos

diferentes.

En primer lugar hemos utilizado el método clásico de Lie para obtener reducciones de similitud a ODEs. Hemos encontrado reducciones de escala y de ondas viajeras, que proporcionan una amplia gama de soluciones, en términos de funciones racionales, funciones elípticas e hiperbólicas, definidas en términos de la ecuación de P_{II} y otras funciones. Respecto a este sistema de PDEs habíamos encontrado en el capítulo 2 que posee tanto aBTs de tipo ODE como de tipo PDE.

En segundo lugar hemos utilizado la aBT de tipo ODE obtenida en el capítulo 2 para generar soluciones de esta PDE. Hemos utilizado varios tipos de solución semilla, una definida por una función tangente hiperbólica, otra definida en términos de funciones de Bessel y por último una función racional en x . La utilización de un tipo concreto de función solución semilla permite generar secuencias de dichas funciones. La iteración de la aBT para generar soluciones involucra variaciones en la función que aparece como coeficiente $h(t)$. Por otro lado, hemos puesto de manifiesto que es posible encontrar soluciones para la PDE a partir de soluciones de cualquier ODE lineal de segundo orden; creemos que este hecho es una novedad para nuestra PDE. Finalmente hemos de resaltar que esta es la primera vez que una aBT de tipo ODE se utiliza para generar soluciones de una PDE.

En tercer lugar hemos aplicado un procedimiento más estándar para PDEs integrables. Utilizando la DT y la fórmula de superposición no lineal hemos construido soluciones con uno y dos solitones para esta PDE. Ambas soluciones contienen funciones que dependen de t , lo que proporciona una gran variedad de comportamientos interesantes. Algunos de ellos se han representado gráficamente.

Capítulo 5

En el último capítulo de este trabajo, hemos partido de un sistema de la

forma $J_0\mathbf{K}_n[\mathbf{U}] = 0$, así como de dos modificaciones sucesivas del mismo. Hemos integrado los tres sistemas, reduciendo su orden en dos y además hemos encontrado BTs entre los sistemas integrados. También hemos calculado aBTs para los sistemas integrados dos veces de la primera y segunda modificación.

Para una elección particular de $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$ hemos encontrado que nuestros tres sistemas se corresponden con jerarquías generalizadas de P_{IV} . Estos resultados proporcionan aBTs para cualquier miembro de las jerarquías de P_{IV} , correspondientes a versiones integradas de los sistemas obtenidos con la primera y segunda modificación para esta elección concreta de $\mathbf{K}_n[\mathbf{U}]$; para el caso especial de P_{IV} , recuperamos aBTs conocidas. Nuestros resultados sobre la reducción del orden permiten efectuar una integración de la reducción de escala de la jerarquía de Boussinesq, y en particular de la reducción de escala de la propia ecuación de Boussinesq. Creemos que esta última integración, junto con la BT entre la ecuación integrada y P_{IV} no se había encontrado hasta ahora.

Bibliografía

- [1] Ablowitz M. J. and Clarkson P.A “*Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*”. Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [2] Ablowitz M. J. and Segur H. “*Exact linearization of a Painleve transcendent*”. Phys. Rev. Lett. **38** 1103–1106 (1977).
- [3] Airault H. “*Rational solutions of Painlevé equations*”. Stud. Appl. Math. **61** 31–53 (1979).
- [4] Ablowitz M. J. and Segur H. “*Solitons and the inverse Scattering Transform*”. SIAM, Philadelphia (1981).
- [5] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C. and Segur H. “*The inverse scattering transform. Fourier analysis for nonlinear problems*”. Stud. Appl. Math. **53** 249–315 (1974).
- [6] Ablowitz M. J., Ramani A. and Segur H. “*A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I and II*”. J. Math. Phys. **21** 715–721; 1006–1015 (1980).
- [7] Ablowitz M. J., Ramani A. and Segur H. “*Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type*”. Lett. Nuovo Cim. **23** 333–338 (1978).

- [8] Adler M. “*On the Backlund transformation for the Gel’fand–Dickey equations*”. Commun. Math. Phys. **80** 517–527 (1981).
- [9] Alonso L. M. “*Schrödinger spectral problems with energy–dependent potentials as sources of nonlinear hamiltonian evolution equations*”. J. Math. Phys. **21** 2342–2349 (1980).
- [10] Antonowicz M., Fordy A. P. and Liu Q. P. “*Energy–dependent third–order Lax operators*”. Nonlinearity **4** 669–684 (1991).
- [11] Bassom A. P., Clarkson P. A. and Hicks A. C. “*Bäcklund transformations and solution hierarchies for the fourth Painlevé equation*”. Stud. Appl. Math. **95** 1–71 (1995).
- [12] Bianchi L. “*Sulla trasformazione di Bäcklund perle superficie pseudosferica*”. Rend. Lincei **5** 3–12 (1892).
- [13] Bluman G. W. and Cole J. D. “*Similarity Methods for Differential Equations*”. Appl. Math. Sci. **18** Springer–Verlag, Berlin (1974).
- [14] Bluman G. W. and Cole J. D. “*The general similarity solution of the heat equation*”. J. Math. Mech. **18** 1025–1042 (1969).
- [15] Bluman G. W. and Kumei S. “*Symmetries and Differential equations*”. Springer–Verlag, Berlin (1989).
- [16] Broer L. J. F. “*Approximate equations for long wave equations*”. Appl. Sci. Res. **31** 377–395 (1975).
- [17] Bruzón M. S., Gandarias M. L. and Senthilvelan M. “*Nonlocal symmetries of Riccati and Abel chains and their similarities reductions*” J. Math. Phys. **53** 023512 (2012).
- [18] Bureau F. J. “*Differential equations with fixed critical points*”. Annali di Matematica Pura ed Applicata **66** 1–116 (1964).

- [19] Bureau F. J. “*Sur les équations différentielles du quatrième ordre dont l’intégrale générale est à points critiques fixes*”. Comptes rendus de l’Académie des Sciences **258** 38–40, Paris (1964).
- [20] Cauchy “*Memoire sur l’intégration des équations différentielles*”. Praga (1835).
- [21] Chazy J. “*Sur les équations différentielles du troisième ordre et d’ordre supérieur dont l’intégrale générale a ses points critiques fixes*”. Acta Math. **34** 317–385 (1911).
- [22] Chun–Long Z. and Li–Qun C. “*Solitons with fission and fusion behaviors in a variable coefficient Broer–Kaup system*”. Chaos, Solitons and Fractals **24** 1347–1351 (2005).
- [23] Clarkson P.A. “*Painlevé transcendents*”, 723–740, in NIST Handbook of Mathematical Functions, eds. F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert and C.W. Clark. Cambridge University Press, (2010).
- [24] Clarkson P. A. and Kruskal M. D. “*New similarity reductions of the Boussinesq equation*”. J. Math. Phys. **30** 2201–2213 (1989).
- [25] Clarkson P. A. and Olver P. J. “*Symmetry and the Chazy equation*”. Journal of Differential Equations **124** 225–246 (1996).
- [26] Clarkson P. A., Joshi N., and Pickering A. “*Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach*”. Inverse Problems **15** 175–187 (1999).
- [27] Clarkson P. A. and Winternitz P. “*Nonclassical symmetry reductions for the Kadomtsev–Petviashvili equation*”. Physica D **49** 257–272 (1991).
- [28] Conte R. “*Invariant Painlevé Analysis of Partial Differential Equations*”. Phys. Lett. A **140** 383–390 (1989).

- [29] Conte R., Fordy A. P. and Pickering A. “*A perturbative Painlevé approach to nonlinear differential equations*”. *Physica D* **69** 33–58 (1993).
- [30] Conte R., Musette M., and Pickering A. “*The two-singular manifold method: II classical Boussinesq system*”. *J. Phys. A: Math and General* **28** 179–187 (1995).
- [31] Cosgrove C. M. “*All binomial-type Painlevé equations of the second order and degree three or higher*”. *Stud. Appl. Math.* **90** 119–187 (1993).
- [32] Cosgrove C. M. “*Chazy classes IX–XI of third-order differential equations*”. *Studies in Applied Mathematics* **104** 171–228 (2000).
- [33] Cosgrove C. M. “*Higher Order Painlevé Equations in the Polynomial Class 1, Bureau Symbol P2*”. *Stud. Appl. Math.* **104** 1–65 (2000).
- [34] Cosgrove C. M. “*Higher-Order Painlevé Equations in the Polynomial Class II, Bureau Symbol P1*”. *Stud. Appl. Math.* **116** 321–413 (2006).
- [35] Cosgrove C. M. “*Scoufis G. Painlevé classification of a class of differential equations of the second order and second degree*”. *Stud. Appl. Math.* **88** 25–87 (1993).
- [36] Davis H. “*Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*”. Dover., New York (1962).
- [37] Drazin P. G. and Johnson. R. S. “*Solitons: an Introduction*”. Cambridge University Press, Cambridge (1989).
- [38] Estévez P. G. and Gordoá P. R. “*Darboux transformations via Painlevé analysis*”. *Inverse Problems* **13** 939–957 (1997).
- [39] Estévez P. G., Gordoá P. R., Martínez Alonso L. and Reus E. M. “*Modified singular manifold expansion: application to the Boussinesq*”

- and Mikhailov–Shabbat systems*”. J. Phys. A: Math. and General **26** 1915–1925 (1993).
- [40] Estévez P. G., Gordoá P. R., Martínez Alonso L. and Reus E. M. “*On the characterization of a new soliton sector in the classical Boussinesq system*”. Inverse Problems **10** L23–L27 (1994).
- [41] Exton H. “*On nonlinear ordinary differential equations with fixed critical points*”. Rendiconti di Matematica **4** 385–448 (1971).
- [42] Fordy A. P. (editor) “*Soliton theory: a survey of results*”. Manchester University Press, Manchester (1990).
- [43] Fermi E., Pasta J. and Ulam S. “*Studies in nonlinear problems I*”. Los Alamos report LA 1940 (1955).
- [44] Fokas A. S. and Anderson R. L. “*On the use of isospectral eigenvalue problems for obtaining hereditary symmetries for hamiltonian systems*”. J. Math. Phys. **23** 1066–1073 (1982).
- [45] Fokas A. S., Its A. R., Kapaev A. A. and Novokshenov V. Yu. “*Painlevé Transcendents: The Riemann–Hilbert Approach*”. AMS, Rhode Island (2006).
- [46] Fuchs R. “*Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre*”. C. R. Acad. Sci. Paris **141** 555–558 (1905).
- [47] Fuchssteiner B., Fokas A. S. “*Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries*”. Physica D **4** 47–66 (1981).
- [48] Gambier B. “*Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l’intégrale générale est à points critiques fixes*”. Acta Math. **33** 1–55 (1910).

- [49] Gandarias M. L. “*New potential symmetries for some evolution equations*” *Physica A* **387** 2234–2242 (2008).
- [50] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D. and Miura R. M. “*Methods for solving the Korteweg–de Vries equation*”. *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095–1097 (1967).
- [51] Gordoa P. R. and Conde J. M. “*A linear algebraic nonlinear superposition formula*”. *Phys. Lett. A.* **295** 287–298 (2002).
- [52] Gordoa P. R. and Estévez P. G. “*Double singular manifold method for the mKdV equation*”. *Teor. Matem. Fizika* **99** 370–376 (1994).
- [53] Gordoa P. R. and Pickering A. “*A method of reduction of order for discrete systems*”. *J. Math. Phys.* **50** 053513 (2009).
- [54] Gordoa P. R. and Pickering A. “*Nonisospectral scattering problems: A key to integrable hierarchies*”. *J. Math. Phys.* **40** 5749–5786 (1999).
- [55] Gordoa P. R. and Pickering A. “*On a new non-isospectral variant of the Boussinesq hierarchy*”. *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 557–567 (2000).
- [56] Gordoa P. R., Joshi N. and Pickering A. “*Bäcklund transformations for fourth order Painlevé hierarchies*”. *J. Diff. Eq.* **217** 124–153 (2005).
- [57] Gordoa P. R., Joshi N. and Pickering A. “*Mapping preserving locations of movable poles: a new extension of the truncation method to ordinary differential equations*”. *Nonlinearity* **12** 955–968 (1999).
- [58] Gordoa P. R., Pickering A. and Prada J. “*Integration via modification: a method of reduction of order for systems of ordinary differential equations*”. *Publ. Res. I. Math. Sci.* **42** 9–26, Kyoto (2006).
- [59] Harada H., Oishi S. “*A new approach to completely integrable partial differential equations by means of the singularity analysis*”. *J. Phys. Soc. Japan* **54** 51–56 (1985).

- [60] Hasting S. P. and McLeod J. B. “*A boundary value problem associated with the second Painleve transcendent and the Korteweg–de Vries equation*”. Arch. Rat. Mech. Anal. **73** 31–53 (1980).
- [61] Hille E. “*Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*”. Wiley, New York (1976).
- [62] Hirota R. “*The direct method in soliton theory*”. Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [63] Ibragimov N. H. “*Lie Group Analysis of Differential Equations. I. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*”. CRC Press, Boca Raton (1994).
- [64] Ince E. L. “*Ordinary Differential Equations*”. Dover, New York (1956).
- [65] Jaulent M. and Miodoek I. “*Nonlinear evolution equations associated with energy-dependent Schrödinger potentials*”. Lett. Math. Phys. **3** 243–250 (1976).
- [66] Kaup D. J. “*A Higher-Order Water Wave Equation and Its Method of Solution*”. Prog. Theor. Phys. **54** 396–408 (1975).
- [67] Kaup D. J. “*Finding Eigenvalue Problems for Solving Nonlinear Evolution Equations*”. Prog. Theor. Phys. **54** 72–78 (1975).
- [68] Karasu–Kalkantli A., Karasu A. , Sakovich A. , Sakovich S. and Turhan R. “*A new integrable generalization of the Korteweg–de Vries equation*”. J. Math. Phys. **49** 073516 (2008).
- [69] Korteweg D. J. and de Vries G. “*On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves*”. Philosophical Magazine **39** 422–443 (1895).

- [70] Kovalevsky S. “*Sur Le Probleme De La Rotation D’Un Corps Solide Autour D’Un Point Fixe*”. Acta Math **12** 177–232 (1889).
- [71] Kovalevsky S. “*Sur une propriété du système d’équations différentielles qui définit la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe*”. Acta Math **14** 81–93 (1890).
- [72] Kruskal M. D. and Clarkson P. A. “*The Painlevé–Kowalevski and poly–Painlevé tests for integrability*”. Stud. Appl. Math. **86** 87–165 (1992).
- [73] Kudryashov N. A. “*Fourth–order analogies to the Painlevé equations*”. J. Phys. A **35** 4617–4632 (2002).
- [74] Kudryashov N. A. “*The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them*”. Phys. Lett. A **224** 353–360 (1997).
- [75] Kupershmidt B. A. “*KdV6: An integrable system*”. Phys. Lett. A **372** 2634–2639 (2008).
- [76] Kupershmidt B. A. “*Mathematics of dispersive water waves*”. Commun. Math. Phys. **99–1** 51–73 (1985).
- [77] Lamb G.L. “*Elements of soliton theory*”. Wiley, New York (1980).
- [78] Levi D. and Ragnisco O. “*Non–isospectral deformations and Darboux transformations for the third order spectral problem*”. Inverse Problems **4** 815–828 (1988).
- [79] Levi D., Ragnisco O. and Rodríguez M. A. “*On nonisospectral flows, Painlevé equations, and symmetries of differential and difference equations*”. Theor. Math. Phys. **93** 1409–1414 (1993).

- [80] Levi D. and Winternitz P. “*Nonclassical symmetries reduction: example of the Boussinesq equation*”. J. Phys. A.: Math. Gen. **22** 2915–2924 (1989).
- [81] Magri F. “*A simple model of the integrable hamiltonian equation*”. J.Math. Phys. **5** 1156–1162 (1978).
- [82] Martínez Alonso L. and Medina Reus E. “*Soliton interaction with change of form in the classical Boussinesq system*” Phys. Lett. A. **167** 370–376 (1992).
- [83] Martynov I. P. “*Differential Equations with Stationary Critical Singularities*” Diff. eqs. **9** 1368–1376 (1973).
- [84] Matveev V. B. and Salle M. A. “*Darboux transformations and solitons*”. Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer–Verlag (1991).
- [85] Matveev V. B. and Yavor M. I. “*Solutions presque périodiques et N -solitons de l’équation hydrodynamique non linéaire de Kaup*”. Annales de l’Institut Henri Poincaré **31** 25–41 (1979).
- [86] McLeod J. B. and Olver P.J. “*The connection between partial differential equations soluble by inverse scattering and ordinary differential equations of Painleve type*”. SIAM J.Math.Anal. **14** 488–506 (1983).
- [87] Miura R. M. “*Korteweg-de Vries equation and generalizations I. A remarkable explicit nonlinear transformation*”. J. Math. Phys. **9** 1201–1204 (1968).
- [88] Muğan U. and Jrad F. “*Painlevé test and the first Painlevé Hierarchy*”. J. Phys. A **32** 7933–7952 (1999).
- [89] Musette M. and Conte R. “*The two-singular manifold method: I modified KdV and sine–Gordon equations*”. J.Phys. A: Math and General **27** 3895–3913 (1994).

- [90] Olver P. J. “*Applications of Lie Groups to Differential equations*”. Springer–Verlag, New York (1993).
- [91] Olver P. J. “*Evolution equations possessing infinitely many symmetries*”. J. Math. Phys. **18** 1212–1215 (1977).
- [92] Ovsianikov L. V. “*Group Analysis of Differential Equations*”. Academic Press, New York (1982).
- [93] Painlevé P. “*Sur les équations différentielles du second ordre et d’ordre supérieur dont l’intégrale générale est uniforme*”. Acta Math. **25** 1–85 (1902).
- [94] Pickering A. “*Bäcklund transformations for a discrete second Painlevé hierarchy*”. J. Math. Phys. **50** 013507 (2009).
- [95] Pickering A. “*Painlevé hierarchies and the Painlevé test*”. Teoret. Mat. Fiz **137** 445–456, 1733–1742 (2003).
- [96] Pickering A. “*The singular manifold method revisited*”. J. Math. Phys. **37** 1894–1927 (1996).
- [97] Quispel G. R., Nijhoff F. W. and Capel H. W. “*Linearization of the Boussinesq equation and the modified Boussinesq equation*”. Phys. Lett. A. **91** 143–145 (1982).
- [98] Rogers C. and Shadwick W. F. “*Backlund transformations and their applications*”. Academic Press, New York–London (1982).
- [99] Russell J. S. “*Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*”. John Murray, London (1844).
- [100] Russell J. S. “*Report on waves*”. Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci. 311–390, York (1844).

- [101] Sachs R. L. “*On the integrable variant of the Boussinesq system: Painlevé property, rational solutions, a related many-body system, and equivalence with the AKNS hierarchy*”. *Physica D* **30** 1–27 (1988).
- [102] Stephani H. “*Differential equations: their solutions using symmetries*”. Cambridge University Press (1989).
- [103] Song W., Xiao-yan T. and Sen-Yue L. “*Soliton fission and fusion: Burgers equation and Sharma–Tasso–Olver equation*”. *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 231–23 (2004).
- [104] Tabor M. “*Chaos and Integrability in nonlinear dynamics*”. John Wiley and Sons (1989).
- [105] Weiss J. “*On classes of integrable systems and the Painleve property*”. *J.Math.Phys.* **25** 13–24 (1984).
- [106] Weiss J. “*The Painleve property and Backlund transformations for the sequence of Boussinesq equations*”. *J.Math.Phys.* **26** 258–269 (1985).
- [107] Weiss J. “*The Painlevé property for partial differential equations II. Bäcklund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative*”. *J. Math. Phys.* **24** 1405–1413 (1983).
- [108] Weiss J. “*The Sine–Gordon equations: Complete and partial integrability*”. *J.Math.Phys.* **25** 2226–2235 (1984).
- [109] Weiss, J., Tabor M. and Carnevale G. “*The Painlevé Property for Partial Differential Equations*”. *J. Math. Phys.* **24** 522–526 (1983).
- [110] Zabusky N. J. and Kruskal M. D. “*Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States*”. *Phys. Rev. Lett.* **15** 240–243 (1965).

Bibliografia

- [111] Zakharov V. E. and Shabat A. B. “*Exact theory of the two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*”. Sov. Phys. JETP **34** 62–69 (1972).