



**TRABAJO FIN DE GRADO**  
**GRADO EN SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN + ADE**  
**CURSO 2019-2020**  
**CONVOCATORIA JULIO**

**TÍTULO: LA DIMENSIÓN FRACTAL DE LA BOLSA**

**APELLIDOS/NOMBRE ESTUDIANTE:**

**MORENO GÓMEZ, LAURA**

**APELLIDOS/NOMBRE TUTOR:**

**JIMÉNEZ BARANDALLA, ICÍAR**

Fecha: 30 de abril de 2020

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	3
I. Motivación .....	3
II. Objetivos.....	3
III. Estructura.....	3
IV. Metodología.....	4
V. Aportación original.....	4
MARCO TEÓRICO Y ESTADO DE LA CUESTIÓN .....	5
I. La Bolsa como institución y como mercado financiero.....	5
II. El análisis bursátil.....	6
III. La metodología de las Ondas de Elliott.....	8
IV. La fractalidad en las cotizaciones.....	11
APLICACIÓN PRÁCTICA .....	14
I. Análisis fractal de series temporales bursátiles.....	14
II. Datos utilizados .....	17
III. Ciclos económicos.....	23
IV. Hechos comunes que se identifican en los diferentes índices bursátiles.....	24
V. Contraste.....	24
RESULTADOS OBTENIDOS .....	25
I. Resultados de los cálculos de la autocorrelación .....	25
II. Resultados del cálculo del exponente de Hurst mediante bootstrap.....	27
III. Resultados de la desviación exponente de Hurst mediante bootstrap .....	30
CONCLUSIONES.....	34
BIBLIOGRAFÍA.....	35

## INTRODUCCIÓN

### I. MOTIVACIÓN

El presente Trabajo de Fin de Grado (TFG en adelante) trata sobre el análisis de series temporales bursátiles basándose en la existencia de tendencias. La motivación principal para realizarlo ha sido demostrar la existencia de ciclos existentes en los índices bursátiles con la ayuda de análisis fractales de series temporales.

En el ámbito económico una tendencia es el comportamiento mantenido en el tiempo que siguen los precios de los índices bursátiles que están siendo analizados. Se pueden encontrar tendencias alcistas, en las que los precios suben o, por el contrario, tendencias bajistas, donde los precios bajan. Las tendencias forman parte de uno de los principios del análisis técnico, el cual estudia el comportamiento de los índices de precios mediante gráficos e indicadores.

Un índice bursátil es un indicador que recopila la media de los precios de un conjunto de empresas. Gracias a ellos se puede observar el comportamiento del mercado compuesto por las empresas que forman el índice.

Una serie temporal es una sucesión de valores de una unidad que se quiere medir en un periodo de tiempo determinado. Por lo tanto, una serie temporal bursátil, índice bursátil, es un conjunto de valores, en este caso precios, medidos a lo largo de un periodo de tiempo determinado.

### II. OBJETIVOS

El objetivo principal de este trabajo es defender la existencia de ciclos en la formación de los precios de los distintos índices bursátiles, en concreto en los nueve más representativos, formados de las empresas con más peso de cada país: IBEX 35, AEX, Nikkei 225, NIFTY 50, FTSE 100, DAX, CAC 40, HSI y SSEC. Para ello, se va a contrastar el estudio realizado en mi TFG del Grado de Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación con la hipótesis de dependencia entre las sucesivas variaciones de los precios bursátiles, la cual es la base del análisis técnico.

Para alcanzar este objetivo la herramienta de estudio que se va a utilizar es el análisis fractal de series temporales. Un fractal es una estructura geométrica que presenta un comportamiento autosimilar que se repite en el tiempo, esto significa, que su forma y distribución no varía sea cual sea la escala en la que se observe. Se van a estudiar las series temporales bursátiles a través de métodos fractales debido a que una de las principales características de las series temporales fractales es que tienen memoria a largo plazo, es decir, puntos que están alejados contienen información unos de otros, por tanto, gracias a esto se va a poder realizar la observación del comportamiento de los índices e intentar predecir cómo se van a comportar a lo largo del tiempo.

### III. ESTRUCTURA

En cuanto a la estructura, el TFG comienza con el marco teórico y estado de la cuestión. En este apartado se va a profundizar en el conocimiento del mercado bursátil, realizándose una introducción a los dos análisis bursátiles que han convivido en el tiempo, el análisis técnico y el análisis fundamental, explicando sus principales ventajas y desventajas, prestando especial atención al primero de ellos. Dentro del análisis técnico se va a explicar el concepto de Ondas de Elliott, el cuál es importante para entender el término de fractal. Todo ello será imprescindible para comprender el concepto de análisis fractal que se va a llevar a cabo como herramienta del análisis bursátil. Seguidamente, en el capítulo 2 se lleva a cabo la aplicación práctica y el contraste del estudio con los ciclos económicos; en este capítulo se va a presentar la aplicación práctica del TFG de Telecomunicaciones y se usará esa información para deducir cuáles son los ciclos que se identifican como comunes en los diferentes índices bursátiles y se contrastarán también con los ciclos económicos. Posteriormente, en el capítulo 3 se realiza el análisis de los resultados obtenidos de los índices bursátiles y se deducen las conclusiones del trabajo.

#### IV. METODOLOGÍA

La metodología que se va a utilizar para la realización de este TFG es el análisis fractal aplicado a las series temporales financieras.

Se van a comparar los resultados obtenidos mediante dos métodos fractales diferentes, el primero es el cálculo del Exponente de Hurst ( $H$  en adelante) mediante el análisis de rango re-escalado ( $\frac{R}{S}$ ), introducido también por Hurst, y el segundo método es el cálculo del exponente  $1/f$  que ayudará al cálculo por otra vía del exponente  $H$ .

#### V. APORTACIÓN ORIGINAL

La aportación original para la realización de este trabajo es el estudio que se implementó mediante el cálculo de los dos métodos mencionados anteriormente en el TFG de Telecomunicaciones. Para ello, se realizó una serie de *scripts*<sup>1</sup> en lenguaje de programación *Python* en los cuales se aplicó *bootstrap* para series temporales. *Bootstrap* es un método estadístico que se basa en el remuestreo con la finalidad de caracterizar el cálculo de  $H$  en las series temporales bursátiles estudiadas en este TFG.

Desde el ámbito financiero la aportación original que presenta este TFG es la predicción del comportamiento con las técnicas anteriores para periodos de tiempo que incluyen tendencias alcistas o bajistas sin estar completamente finalizadas o iniciadas y su comparación con la realidad.

---

<sup>1</sup> Estos scripts se pueden encontrar en un repositorio en la plataforma Github: <https://github.com/LauraMorenoGo/TFG>.

## MARCO TEÓRICO Y ESTADO DE LA CUESTIÓN

### I. LA BOLSA COMO INSTITUCIÓN Y COMO MERCADO FINANCIERO

Según la Real Academia Española (RAE en adelante) la Bolsa o Bolsa de valores se define como la “institución económica donde se efectúan transacciones públicas de compra y venta de valores, y otras operaciones análogas”. Se puede considerar la Bolsa como el mercado de valores en el que se realiza la compra y venta de instrumentos financieros como las acciones, los *warrants*, los ETFs y los certificados, que más adelante se definirán.

El término Bolsa tiene origen belga, y concretamente surgió en la ciudad de Brujas en el siglo XIII, durante la Edad Media. En un edificio perteneciente a la familia flamenca Van der Borse, en cuyo escudo se podían distinguir tres bolsas de piel que contenían monedas, se realizaban negociaciones entre mercaderes (Fernández, 2001), las cuales se consideran que fueron las que dieron nombre al término Bolsa. Aunque el nacimiento de la Bolsa como se conoce en la actualidad no tiene lugar hasta el siglo XV, fue en ese momento cuando surgieron las primeras sociedades divididas en acciones. Otras fuentes no reconocen el origen de la actual Bolsa de valores hasta el siglo XVIII, tras la Revolución francesa, cuando la burguesía cambió el sistema económico feudal que había en ese momento por el capitalismo.

El estado financiero y societario de las empresas que cotizan en la Bolsa ha de ser público, con la finalidad de que las personas que quieran operar en este mercado sepan los riesgos que pueden llegar a asumir al invertir en ciertas empresas. La Bolsa de valores se caracteriza por tener una gran liquidez, es decir, a corto plazo se pueden comprar y vender activos con gran facilidad. Con relación a la rentabilidad ofrecida por el mercado de valores, la variedad de activos es tan extensa que será el inversor quien decida la rentabilidad que espera obtener, de acuerdo al riesgo que esté dispuesto a soportar. En este sentido, las dos características inherentes a cualquier inversión son el riesgo y la rentabilidad, puesto que ésta es la recompensa al riesgo que ha sido soportado.

La evolución de la Bolsa se representa a través de los índices bursátiles. Un índice bursátil es la media de los precios de las acciones (todas o las de mayor capitalización) que forman parte de un determinado sector empresarial, de la Bolsa de un determinado país o de las de un conjunto de países. Por tanto, se pueden distinguir índices sectoriales, nacionales, mundiales, respectivamente. A nivel nacional el índice bursátil de referencia en España es el IBEX 35 e internacionalmente uno de los índices más influyentes es el Dow Jones en Estados Unidos<sup>2</sup>; en ambos casos estos índices se componen de las compañías de mayor capitalización del mercado.

En España existe una entidad que ordena, inspecciona y supervisa todo el entorno bursátil, llamada Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV en adelante). Se encarga de garantizar la seguridad y la transparencia en todas las operaciones, proteger a los inversores y cerciorarse de que los precios se formen correctamente.

Los inversores, como cualquier ser humano, se comportan sobre la base de unas determinadas pautas de comportamiento, sintiéndose afectados por factores externos e internos, y

---

<sup>2</sup> En este trabajo no se va a aplicar el estudio a este índice debido a que las fechas de inicio de los datos utilizados no encajaban con las de éste.

por el conocimiento que tienen del mercado, cuando operan y toman decisiones en Bolsa. Como factores internos se puede señalar todo lo referente a la parte emocional de la persona, como son, los miedos, debilidades y fortalezas, el exceso de confianza u optimismo, e incluso el estrés y los bajos estados de ánimo. Entre los factores externos se encuentra todo aquello que rodea al inversor como, por ejemplo, la información, las noticias de la actualidad o del pasado y las opiniones de gente cercana sin conocimiento o, por el contrario, de gente cercana con conocimiento.

Uno de los factores que más influye en la conducta de los inversores en Bolsa es el riesgo. El riesgo, o más en concreto la aversión al riesgo que sienten las personas que invierten, está presente en todas las operaciones y si el inversor quiere que sus beneficios sean altos en cierta operación, debe asumir que el riesgo que acompaña a éstos es alto también. Por tanto, estos dos factores son directamente proporcionales. Puede surgir entonces la pregunta de por qué las personas con conocimiento del funcionamiento de la Bolsa y familiaridad con la existencia del riesgo pueden fracasar. La respuesta es que, por muy profesional que sea una persona, siempre existe esa probabilidad de fallar debido a la dificultad de predecir la variabilidad de los precios de los activos.

## **II. EL ANÁLISIS BURSÁTIL**

Para analizar el proceso de toma de decisiones que cualquier inversor realiza antes de operar, hay que distinguir los dos tipos de análisis que han convivido durante muchos años enfrentados y que, poco a poco, se van complementando para estudiar la Bolsa de valores: el análisis fundamental y el análisis técnico.

David Dodd y Benjamin Graham, ambos inversores, introdujeron en 1984 el concepto de análisis fundamental. Se basa en el cálculo del precio teórico de los valores a partir de la información disponible para estimar si el precio del activo está infravalorado o, por el contrario, sobrevalorado. En referencia a la situación de la empresa, se analizan datos como los balances, cuentas de resultados, solvencia, planes de futuro, es decir, información acerca de su salud financiera, información del entorno de la empresa, sus propietarios, etc. La situación del sector de la compañía también es relevante, ya que de esta manera se puede conocer el estado de madurez del mercado en el que se encuentra. Es importante también prestar atención a la información de la situación del país, en concreto, a la situación económica global que informa de si el ciclo evolutivo está en crecimiento o decrecimiento. Además, es importante no centrarse sólo en los últimos datos actuales, sino también en los históricos, para poder crear una opinión que tenga unas bases sólidas. Entre los principales modelos de análisis fundamental destacan el modelo de Sharpe y el modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM en adelante), que dieron lugar al modelo Arbitrage Pricing Theory (APT en adelante), muy utilizado en la práctica. El modelo de Sharpe fue desarrollado por William F. Sharpe para simplificar el modelo de Markowitz, establece que existe una relación entre las rentabilidades de los valores y los índices y de esta relación deriva la correlación positiva que se presenta entre las rentabilidades de los diferentes valores. Derivado del anterior surgió el modelo CAPM, a partir de un valor de riesgo específico permite conocer el activo que proporciona una rentabilidad mayor. Por último, con el modelo APT no hace falta tener en cuenta toda una cartera de valores, en los modelos anteriores sí, se puede tomar un valor individualizado y calcular el retorno que se espera de este con la explicación de variables que están presentes e influyen en éste.

Se pueden extraer ventajas e inconvenientes del análisis fundamental. Como principal ventaja, al ser un análisis que tiene en cuenta un gran número de datos importantes de la empresa y del entorno, se puede obtener el precio real del valor de una forma muy precisa. El principal inconveniente es la necesidad de disponer de la información más reciente y exacta, y de un sofisticado modelo de valoración de la misma.

Respecto al análisis técnico, Charles Henry Dow, periodista y economista, introdujo las bases del concepto de análisis técnico con la creación de la Teoría Dow a finales del siglo XIX en Estados Unidos. Charles Henry Dow y Edward David Jones fundaron el periódico *The Wall Street Journal*, crearon la consultora financiera *Dow Jones & Company*, y fueron los creadores del índice bursátil estadounidense Dow Jones. El análisis técnico se basa en el estudio de la evolución de los valores bursátiles a través de la observación de los gráficos para identificar comportamientos de la Bolsa (Fernández, 2001). En otras palabras, una vez identificados una serie de patrones que se hayan repetido en el tiempo, es posible detectar el comienzo de los mismos y así, suponiendo que la Bolsa estuviera actuando de la misma forma, es fácil adelantarse a su comportamiento durante la tendencia que predomina.

Según Fernández (2001), este análisis tiene seis principios destacables:

1º. El precio lo descuenta todo, es decir, en el precio de cada valor están reflejados todos los instrumentos que afectan al mercado.

2º. El precio se mueve por tendencias, que, como se ha explicado anteriormente, son las que hay que identificar. Hay tres tipos: 1) tendencias alcistas, cuyos precios de cierre son cada vez más altos, y sus máximos y mínimos relativos aumentan a medida que avanza el gráfico; 2) tendencias bajistas, cuyos precios de cierre son cada vez más bajos, es decir, sus máximos y mínimos relativos descienden a medida que avanza el gráfico, y 3) tendencias laterales, cuando los máximos y mínimos se encuentran aproximadamente siempre a la misma altura. Una tendencia se mantendrá hasta que algo de carácter extraordinario haga cambiarla. Estos movimientos tienden a perdurar en el tiempo debido al fenómeno denominado psicología de las masas, que consiste en que, cuando los inversores observan los gráficos y ven el crecimiento que va a tener el valor, son los primeros en comprar; poco a poco esta información se va pasando de amigos a familiares, los cuales no quieren perder la oportunidad de aprovechar esta subida y, como consecuencia, a los que les llega más tarde la información serán los últimos en comprar.

3º. Existen tres órdenes de tendencias: primarias, secundarias y terciarias. Las denominadas tendencias primarias tienen duración mayor a un año y son tendencias dominantes. Por otro lado, las tendencias secundarias son aquellas que se oponen a la tendencia dominante o primaria, es decir, son las conocidas como correcciones o reacciones técnicas, y tienen una duración menor de tres meses; las correcciones son movimientos a la baja que aparecen en las tendencias primarias al alza, y las reacciones o recuperaciones son movimientos al alza que se observan cuando el movimiento dominante es a la baja. Cuando la tendencia secundaria termina, vuelve a aparecer la tendencia primaria. Por último, hay movimientos al alza o a la baja, que duran pocos días y se pueden diferenciar en las tendencias secundarias, a los que se denomina tendencias terciarias.

4º. El volumen de los valores negociados tiene que ser coherente con la tendencia del momento, de manera que, si la tendencia es alcista, cuando los precios suban, el volumen debe ser fuerte, en cambio, cuando se produzcan disminuciones en el precio los volúmenes tienen que sufrir dicha disminución. Si la tendencia es bajista, cuando los precios caigan el volumen debe ser fuerte para consolidar la tendencia, mientras que debería debilitarse cuando los precios se recuperan.

5°. Los índices deben compararse entre sí para evitar equivocaciones, es decir, no se tendrá la confirmación de un cambio de tendencia, hasta que varios índices representativos del mercado así lo indiquen.

6°. La historia se repite es el último principio, por eso da importancia al estudio de los comportamientos anteriores que ha tenido la Bolsa, debido a que en un futuro se prevé que los agentes actúen de la misma forma que lo hicieron en el pasado.

El análisis técnico se subdivide en dos tipos, según las herramientas que utilice para realizar las observaciones. En primer lugar, el análisis chartista, el cual únicamente hace uso de los gráficos para estudiar el comportamiento del mercado. En segundo lugar, el análisis técnico estricto, que, además de analizar los gráficos, emplea indicadores estadísticos de mercado.

Al igual que en el análisis fundamental, en el técnico se encuentran aspectos que demuestran que su uso es ventajoso y aspectos que demuestran lo opuesto. La principal ventaja, frente al análisis fundamental, es que tiene en cuenta la irracionalidad o emocionalidad de las personas para llevar a cabo su estudio, pues considera que los agentes que operan en la Bolsa son seres humanos que no siempre se comportan de manera racional. Se pueden aplicar sus técnicas en el corto, medio y largo plazo, y detecta los cambios de tendencia de forma más rápida que el fundamental. Como principal desventaja se puede señalar que, al ser una técnica conocida y utilizada por muchos inversores, se presupone que todos ellos podrían operar de la misma forma y el mercado se movería entonces de la forma prevista, lo cual haría que el análisis perdiera efectividad. Sin embargo, el patrón buscado no siempre se repite de la misma manera, y, por tanto, a pesar de la subjetividad del análisis, no se produciría esa confluencia de decisiones por parte de los inversores.

Dado que hay pros y contras en ambas técnicas de estudio del mercado, lo más recomendable es combinarlas y usar una para complementar la otra. Se debe operar en valores de empresas con buena salud financiera, de las que se prevé que continúen estando bien valoradas en un futuro, y en los que su crecimiento estimado sea igual a movimientos del pasado con la esperanza de que se vuelvan a repetir. Se suele decir que el análisis técnico determina en qué momento hay que invertir en un título y el análisis fundamental indica el valor en el que operar.

### III. LA METODOLOGÍA DE LAS ONDAS DE ELLIOTT

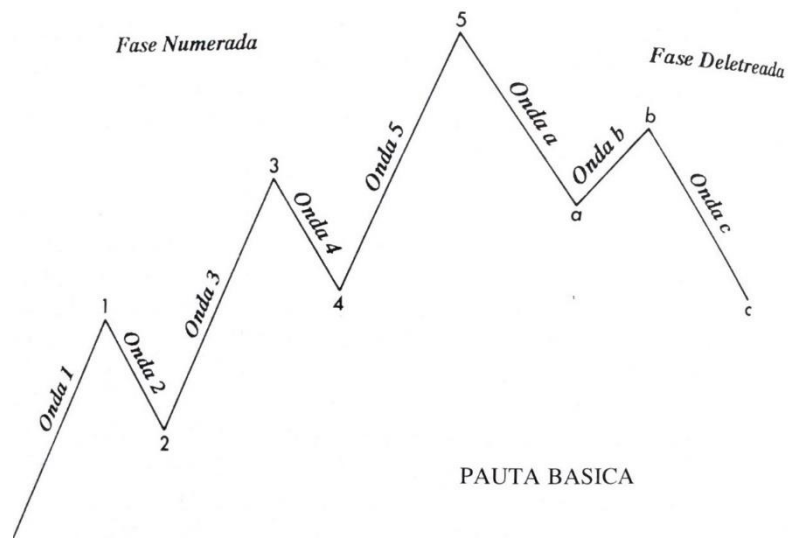
Dentro del análisis técnico, como se ha mencionado anteriormente, hay comportamientos y patrones que se han repetido a lo largo del tiempo. Uno de esos patrones se denomina ondas de Elliott. La teoría de las ondas de Elliott es un método de análisis del mercado de valores creado por Ralph Nelson Elliott en 1934. R. N. Elliott era un contable estadounidense que, en 1927 mientras trabajaba en América Central, cayó enfermo y pudo dedicar todo su tiempo al estudio de las ondas, analizando el mercado bursátil de Estados Unidos y las fluctuaciones que se producían en los precios del índice Dow Jones. Gracias a esta investigación, descubrió que el mercado se desplazaba siguiendo unos patrones de impulsos u ondas que se repetían a lo largo de toda la serie de precios analizada. Jiménez (2001) señala que en 1934 un miembro de la comunidad financiera llamado Charles J. Collins envió a Elliott cierta información que le permitió dar una base matemática al patrón descubierto por él, al descubrir que reflejaba la secuencia Fibonacci. Collins decidió colaborar con Elliott en la distribución de su primer libro "*The Wave Principle*", publicado en 1938.



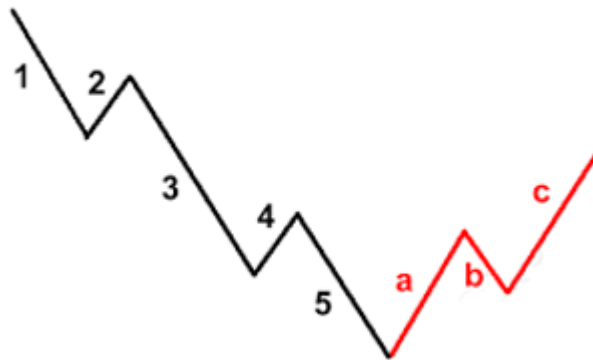
En 1946 Elliott publicó “*Nature’s Law – The Secret of the Universe*”, en el cual daba una visión más detallada y completa de la teoría, con formas y patrones.

Elliott afirma que el mercado evoluciona en ciclos completos de ocho ondas. Esta evolución se produce en cinco ondas al alza y tres ondas a la baja, que corrigen a las primeras, cuando la tendencia es alcista (Figura 1), y por cinco ondas a la baja y tres al alza, cuando la tendencia es bajista (Figura 2); es decir, el mercado sigue un movimiento de cinco ondas cuando desarrolla la tendencia principal y de tres cuando la corrige. Por tanto, en la Figura 3 de un mercado alcista, se observa que en la secuencia alcista de ondas (1)-(2)-(3)-(4)-(5) las ondas (1), (3) y (5) están formadas por cinco movimientos 1, 2, 3, 4, 5, puesto que se mueven en la dirección de la tendencia principal, y las ondas 2 y 4 por tres, a, b, c, al estar corrigiendo a la tendencia principal; sin embargo, en la secuencia bajista de ondas (a)-(b)-(c) las ondas (a) y (c) están formadas por cinco ondas a la baja, 1, 2, 3, 4, 5 y la onda (b) por tres ondas al alza a, b, c, puesto que la dirección principal de esta secuencia es bajista (Frost y Prechter, 1978). Lo más importante en la Figura 3 es detectar que las diferentes dimensiones de ondas mantendrían la misma estructura y, por consiguiente, generan un fractal; es decir, en este mercado primario la onda (1) y la onda 1 (insertada en un círculo) avanzan en 5 movimientos de los cuales las ondas 1, 3 y 5 son alcistas y las ondas 2 y 4 son bajistas, mientras que las ondas (2) y 2 (insertada en un círculo) descienden en 3 movimientos, de los que las ondas a y c son bajistas, y la onda b es alcista. Por tanto, si pudiera verse con mayor detalle la primera onda 1, ésta igualmente se desarrollaría en 5 ondas al alza 1-2-3-4-5, y si se continuara el desarrollo de las ondas 1, 2, 3, 4, 5 (insertadas en círculos), éstas acabarían generando una onda 1 de mayor dimensión aún, manteniéndose la misma estructura.

Figura 1: Pauta tendencia alcista de Elliott



Fuente: El principio de la onda de Elliott, p.20

*Figura 2: Pauta tendencia bajista Elliott*

Existen unas reglas que ayudan a la identificación y medición de las ondas:

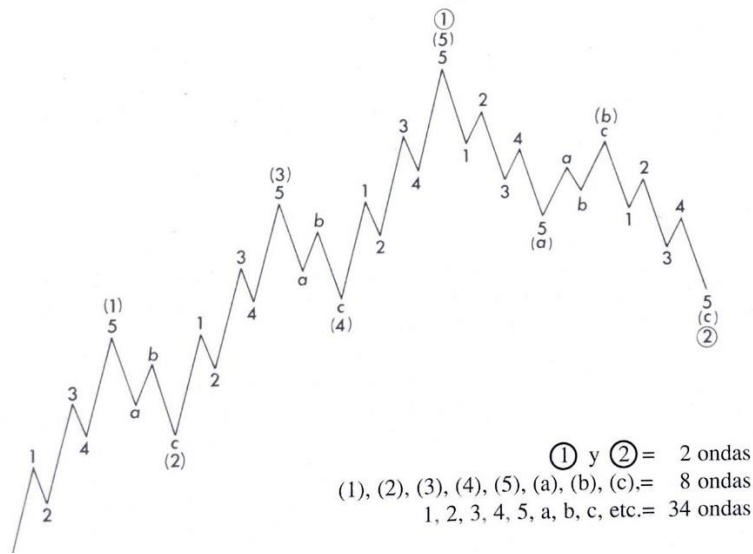
1ª. En el caso de una tendencia alcista, cuando la onda 2 termina, su precio no puede estar por debajo del precio con el que se inició la onda 1. Es decir, la onda 2 no retrocederá por debajo del punto inicial de la onda 1. Por el contrario, si la situación es una tendencia bajista la onda 2 no puede subir nunca por encima del precio con el que se inició la onda 1.

2ª. En un impulso alcista la onda 3 suele ser la más larga y nunca la más corta. Siempre termina por encima del final de la onda 1.

3ª. Como regla general, en un impulso alcista la onda 4 no se puede solapar con el precio final de la onda 1, es decir, no puede retroceder más allá de un 100% de la onda 3.

Los patrones que identifica Elliott en los gráficos tienen lugar en varios marcos temporales, intradiarios, diarios, semanales, mensuales y anuales. De esta manera se puede dividir cada onda en ondas más pequeñas y así sucesivamente, como se ha explicado anteriormente. En consecuencia, cada onda está compuesta de patrones con ondas de menor tamaño cada vez. La Figura 3 muestra un ejemplo de esta división (Frost y Prechter, 1978).

Figura 3: División de una onda en ondas más pequeñas



Fuente: El principio de la onda de Elliott, p.21.

#### IV. LA FRACTALIDAD EN LAS COTIZACIONES

En la actualidad la expresión que se utiliza para determinar lo que Elliott observó es fractal. El término fractal proviene del latín *fractus* que significa quebrado, y este neologismo fue usado por el francés Benoît Mandelbrot en 1975. Según la RAE un fractal es una estructura iterativa que tiene la propiedad de que su aspecto y distribución estadística no cambian cualquiera que sea la escala con la que se observe. Es decir, un fractal es una figura espacial o plana cuyo patrón se repite sea cual sea la escala en la que se esté observando y la orientación. Se pueden encontrar fractales creados por el ser humano (Figura 4) como, por ejemplo, representaciones artísticas, el fractal de Newton, o el conjunto de Mandelbrot; o fractales naturales (Figura 5) como los copos de nieve, las hojas de los helechos, las caracolas, etc. Las propiedades de los fractales se pueden resumir en cuatro. En primer lugar, la dimensión que muestran no es entera, suele ser un número irracional. En segundo lugar, la estructura de la que se componen es compleja sea cual sea la escala a la que se esté observando. Otra propiedad es que son infinitos. Por último, la autosimilitud que presentan, el todo está compuesto por partes más pequeñas similares al todo (Mandelbrot, 1984).

*Figura 4: Representación artística de un fractal**Figura 5: Fractal en la naturaleza*

En cuanto a la autosimilitud que se observa en ellos, Mandelbrot definió tres tipos. Una de ellas es la autosimilitud exacta, en la que se aprecia que el fractal es idéntico sea cual sea la escala de observación. La autosimilitud estadística es aquella que conserva las dimensiones estadísticas o de número de la estructura del fractal a cualquier escala. Por último, la cuasiautosimilitud, a medida que varía la escala la estructura es similar, pero no igual (Mandelbrot, 1984).

Existen varios estudios de fractales en la Bolsa como, por ejemplo, el del propio Mandelbrot y Hudson (2004 y 2006), en sus libros *“The (Mis)Behaviour of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin and Reward”* y *“Fractales y finanzas: Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar”* afirman que el comportamiento del mercado bursátil es turbulento y pretenden explicar que los análisis clásicos que se utilizaban hasta el momento para el estudio de las series temporales financieras son insuficientes. La manera más precisa para analizar su comportamiento es mediante fractales y la teoría del caos. Afirman que al observar series temporales de precios se observa una geometría fractal sea cual sea la escala de observación. Esto implica que el mercado es mucho más complejo de lo que se creía y, por tanto, no es predecible mediante el modelo estándar. En su estudio realizan una simulación del mercado mediante el modelo estándar y otra mediante el modelo fractal, el cual parece asemejarse más al original.

Otro estudio es el de Miranda y Ramos (2012), en el cual se muestra la realización de un análisis de la concatenación fractal aplicado al límite de los precios de cotización de las acciones

en la Bolsa de Valores de Londres. Realizaron esta investigación ya que detectaron que el comportamiento de la Bolsa en Londres presentaba autocorrelación a largo plazo y sus fluctuaciones eran anómalas colectivas. La autocorrelación es la dependencia que muestra a lo largo del tiempo la señal bursátil consigo misma, por tanto, la autocorrelación a largo plazo significa que en valores de tiempo muy alejados la señal presenta esta autodependencia.

$$R_{xx}(\tau) = \int x(t)x(t+\tau)dt$$

Esto ayuda a identificar eventos que no se pueden detectar con distribuciones normales, como es el caso de las burbujas financieras.

Por otro lado, Iturriaga y Jovanovich (2014) analizan las posibles aplicaciones de la geometría fractal en campos como la economía y la empresa. Si se aplican estos conceptos al campo de la administración y de la dirección de empresas se puede observar un crecimiento en su adaptabilidad al entorno cambiante y en su flexibilidad. En su trabajo ellos hablan de “Fábrica Fractal” para referirse a una empresa y a sus subconjuntos como “Oficinas Fractales”, en cada uno de ellos se observan las características principales que presentan los fractales como son la auto-similitud, la “Fábrica Fractal” presenta características que se pueden encontrar de la misma manera en los subconjuntos que la forman; la auto-organización en la cual las diferentes partes de una empresa tienen cierto grado de libertad en la toma de sus decisiones y son capaces de coordinarse para llegar a cumplir un fin común de acuerdo a la demanda cambiante que existe, para ello, deben ser capaces de adaptarse al medio de forma rápida; por último, la auto-optimización, como el medio es cambiante y la organización tiene que adaptarse rápidamente para alcanzar la decisión óptima, esto se puede conseguir ajustando la estructura fractal.

Otro de los estudios es el de Soto (2018) en su documento calcula la dimensión fractal de 15 índices bursátiles globales caracterizando los diferentes *crashes*. Soto afirma que los *crashes* son necesarios, puesto que el mercado necesita aprender a adaptarse a este tipo de cambio para su evolución y desarrollo, e impredecibles ya que están causados por efectos que se producen debido a la especulación que los inversores realizan como resultado de su conocimiento y de la información diaria que les llega. En su trabajo usó dos métodos que no se habían relacionado hasta el momento para confirmar que los *crashes* se caracterizan con la geometría fractal. Los dos métodos de los que habla Soto son la geometría fractal y el método zig-zag, el cual tiene sus bases en los estudios de Mandelbrot, el Exponente de Hurst, la ley de potencia y las ondas de Elliott.

Por último, Díaz Mata (1996 y 2008) desmantela los supuestos que afirman que los índices bursátiles son independientes y siguen una distribución normal. En su estudio se demuestra que los índices presentan geometría fractal y que para demostrar la dependencia que hay entre muestras separadas en el tiempo se puede utilizar una técnica fractal llamada rango de re-escalado. De esta manera se realizarán mejores predicciones acerca del mercado.

## APLICACIÓN PRÁCTICA

### I. ANÁLISIS FRACTAL DE SERIES TEMPORALES BURSÁTILES

Como se ha mencionado anteriormente, los índices bursátiles se pueden clasificar como series temporales bursátiles. Son series que se rigen por el caos y presentan unas características fractales estadísticamente auto similares como se puede observar cuando se analiza su ley de potencia, su autocorrelación, su invariancia temporal o la dependencia a largo plazo que presentan.

Para describir las series temporales financieras se utiliza el modelo Browniano fraccionario el cual encaja perfectamente con el análisis estadístico de éstas. El modelo Browniano queda definido por la variable  $H$ , explicada anteriormente y en el que se va a profundizar a continuación.

El movimiento Browniano fraccionario (mBf en adelante) fue introducido en 1827 por Robert Brown, botánico inglés, que investigó el movimiento de unas partículas de polen en una solución acuosa dependiendo de la temperatura a la que estaba sometido el experimento. De este modo contempló que con presencia de calor esas micropartículas se movían con mayor rapidez que sometidas a ambientes más fríos puesto que la disolución se convertía en más viscosa. Más tarde, Einstein y Smoluchowski ofrecieron el primer modelo matemático que fue seguido por diferentes físicos. Kolmogorov, Wiener y Lévy ayudaron al desarrollo de la teoría.

El mBf se utiliza en diferentes campos de investigación, gracias al economista Bachelier (1900) fue aplicado en el ámbito de la economía para estudiar las fluctuaciones que se producían en la Bolsa.

A continuación, se va a realizar un desarrollo matemático para explicar el concepto de mBf (Barquero, 2008). Para una variable aleatoria cualquiera  $X$  existen dos valores que las caracterizan, la media  $E(X)$  y la varianza  $Var(X)$ , ambos parámetros se definen de la siguiente manera:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x m_x(dx)$$

$$Var(X) = \int_{\Omega} (X - E(X))^2 dP = \int_{\mathbb{R}} (X - E(X))^2 m_x(dx)$$

$m_x$ : es la medida en  $\mathbb{R}$ , siendo  $\mathbb{R}$  el conjunto de números reales.

El mBf deriva del movimiento Browniano estándar, es un proceso de naturaleza gaussiana, estocástico, no estacionario de media  $m = 0$  y se denota con  $B_H(t)$ .

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right\}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$$

$$B_H(0) = b_0 \text{ para } t = 0.$$

$$t > 0.$$

$B(t)$  es un movimiento Browniano estándar.

$\Gamma$  es la función Gamma.

El mBf tiene las siguientes características:

- Su covarianza se presenta de la siguiente forma. Como no depende solo de  $t - s$  se puede determinar su varianza de la forma en la que sigue:

$$E\{B_H(t)B_H(s)\} = \frac{\sigma_H^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H})$$

Donde  $\sigma_H^2 = \Gamma(1 - 2H) \frac{\cos(\pi H)}{\pi H}$ .

$$Var\{B_H(t)\} = \frac{\sigma_H^2}{2} (|t|^{2H} + |t|^{2H} - 0) = \sigma_H^2 |t|^{2H}$$

- Es estadísticamente autosimilar, se cumple:

$$B_H(ct) = c^H B_H(t)$$

$c$  es una constante si los dos miembros presentan la misma distribución.

- Es un proceso estacionario gaussiano con  $m = 0$  y la siguiente varianza:

$$E\{|B_H(t) - B_H(s)|^2\} = \sigma_H^2 |t - s|^{2H}$$

Como se puede observar el coeficiente de Hurst está presente en la ecuación del mBf, va a ser uno de los métodos de análisis que se use para realizar el análisis de los índices bursátiles en este trabajo. Harold Edwin Hurst fue un ingeniero e hidrólogo que logró crear una presa óptima para evitar el desbordamiento del río Nilo. Para su estudio creó el Exponente de Hurst ( $H$ ), el cual es una medida que da información sobre la persistencia que muestra una serie temporal, de esta manera permite conocer el grado de dependencia que muestran los datos históricos contenidos en ella. Matemáticamente se desarrolla siguiendo el análisis de rango re-escalado ( $R/S$ ) que diseñó Hurst:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n = cnH$$

$$\ln\left(\frac{R}{S}\right)_n = \ln(cnH)$$

$$\ln\left(\frac{R}{S}\right)_n = \ln(c) + H\ln(n)$$

$n$ : número de datos por intervalo.

$c$ : constante de proporcionalidad.

Según Mandelbrot,  $H$  toma valores que pueden ir desde 0 hasta 1 y según el valor que tenga la serie temporal será de un tipo u otro. Para  $H = 1$ , la serie temporal presenta ruido negro, es determinística. Se asemeja a procesos cíclicos a largo plazo, series temporales bursátiles. En segundo lugar, para valores  $1 \geq H \geq 1/2$  la serie temporal presenta ruido negro, es persistente y

muestra correlación entre muestras. La tendencia se mantiene. Para  $H = 1/2$  la serie presenta ruido blanco, los movimientos son aleatorios y no muestran dependencia unos con otros, es decir, no existe correlación. Por último, para valores  $1/2 \geq H \geq 0$  presenta ruido rosa, las series temporales son anti correlacionales, es decir, la tendencia que estaba presente hasta el momento cambia para convertirse en la tendencia opuesta.

El valor del exponente de Hurst está estrechamente relacionado con la dimensión fractal.

$$D = d + 1 - H$$

$$D = 2 - H$$

Donde  $d$  es la dimensión euclídea que toma valor 1 ya que es el que corresponde a las líneas. Los valores que toma la dimensión fractal van de 1 a 2 y caracterizan a las señales financieras de la siguiente forma, cuando el valor que toma  $D$  es más cercano a 1 las señales temporales son más tendenciales, por el contrario, si está más cerca de 2 la señal financiera será menos tendencial.

Por otro lado, el segundo método para el análisis de series temporales que va a estar presente en este TFG es el exponente  $1/f$  o exponente espectral  $\beta$ , el cual mide la pendiente del espectro de potencia y la variabilidad de la serie temporal estudiada. Todas las señales temporales bursátiles que están asociadas a este parámetro van a estar caracterizados por ser auto similares, es decir, van a presentar geometría fractal. Se relaciona con el exponente de Hurst de la siguiente manera:

$$H = \frac{\beta - 1}{2}$$

El rango de valores que puede tomar  $\beta$  para que exista coherencia con los valores de  $H$  va de  $1 < \beta < 3$ . De este modo si  $\beta = 1$  el comportamiento que va a mostrar la señal cambia, es muy típico encontrarlo en fluctuaciones que se producen en economía, la serie temporal presenta ruido rosa. Si  $\beta > 2$ , la serie temporal presenta ruido negro, la señal cambia su tendencia repentinamente, como cuando se producen caídas en la Bolsa.

Por último, se va a explicar más detalladamente el concepto de autocorrelación ( $R_{xx}(\tau)$ ), introducido anteriormente en el marco teórico, y se va a visualizar la relación que guarda con la densidad espectral de potencia. La autocorrelación mide la semejanza que presenta una señal consigo misma desplazada a lo largo del tiempo. Como se ha citado anteriormente la autocorrelación a largo plazo es una de las características que presentan las señales temporales financieras y, por tanto, esto acabaría con la teoría de mercados eficientes la cual habla de la existencia de independencia en los precios.

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau)dt$$

$x(t)$  es la señal continua en un instante de tiempo  $t$  y  $\tau$  es el desplazamiento al que la serie temporal financiera va a ser sometida. Una vez definida la autocorrelación se puede expresar la densidad espectral de potencia ( $S(\omega)$ ) de la siguiente manera:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$



Si consideramos  $X(t)$  como un proceso aleatorio estacionario autosimilar estadísticamente, la expresión anterior en términos de dominio de frecuencia, quedaría como una ley de potencia:

$$S_X(\omega) \propto f^{-\beta}$$

Aquí se observa la relación que guarda con el exponente espectral  $\beta$ , debido a esto se considera como un criterio de autosimilaridad. La densidad espectral de potencia del mBf, al no ser estacionario, se calcularía:

$$S_{BH}(\omega) = \frac{\sigma_H^2}{|\omega|^\beta} = \frac{\sigma_H^2}{|\omega|^{2H+1}}$$

## II. DATOS UTILIZADOS

Los datos utilizados para este trabajo son los mismos que han sido utilizados en el TFG del grado de Telecomunicaciones (Moreno, 2019). A continuación, se van a presentar brevemente los índices bursátiles estudiados y sus gráficos con las fechas que abarca el estudio. Los precios de cierre diarios de cada índice bursátil se han extraído de la página web *Investing*.

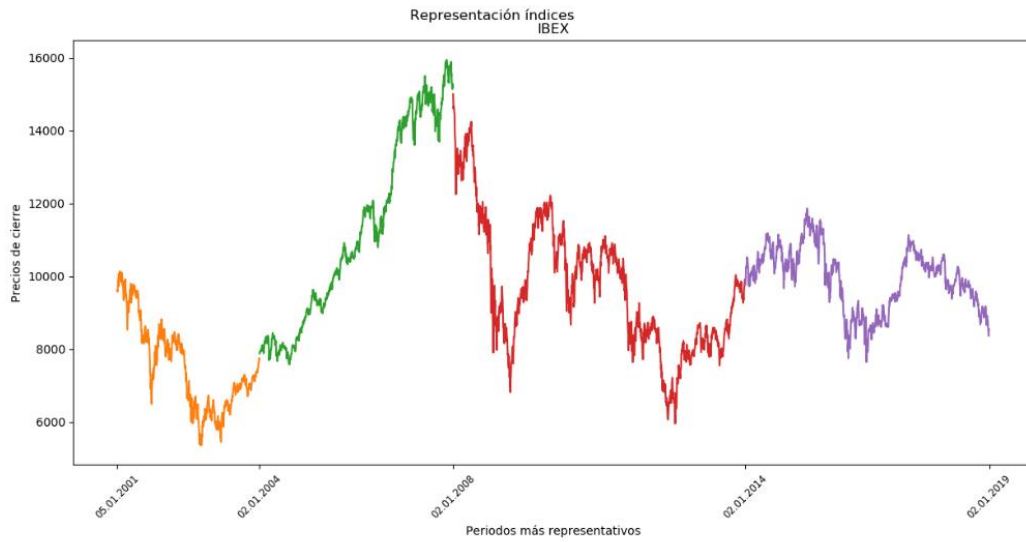
Los índices han sido elegidos de entre los más importantes y sus datos históricos han sido divididos en cuatro periodos considerados como más representativos. Entre los índices que se utilizaron para el TFG de Telecomunicaciones no se encuentra ningún índice de la Bolsa estadounidense como puede ser el Dow Jones, el Nasdaq 100 o el S&P 500 debido a que la obtención de datos de precios para ese índice en formato .csv estaba incompleta para las fechas de inicio que se escogieron para realizar dicho trabajo.

El primer periodo va desde el 5 de enero de 2001 hasta el 2 de enero de 2004 (se observa en color naranja en cada índice), el segundo periodo abarca desde el 2 de enero de 2004 hasta el 2 de enero de 2008 (color verde), el tercer bloque empieza el 2 de enero de 2008 y termina el 2 de enero de 2014 (color rojo), por último, el periodo final va desde el 2 de enero de 2014 y el 2 de enero de 2019 (color morado). En cuanto a la elección de las fechas de cada periodo no se incluyeron la totalidad de tendencias alcistas o bajistas en cada uno de ellos para ver si la previsión de la evolución de las mismas con las herramientas utilizadas en el TFG de Telecomunicaciones se cumplía con la realidad, haciendo de esta manera un contraste entre la predicción y el fin de la tendencia real.

El no haber elegido índices estadounidenses conlleva la limitación de no comparar los datos históricos de la principal potencia económica mundial. Por otro lado, el hecho de no aparecer en los periodos tendencias bajistas o alcistas de inicio a fin trae otra gran limitación, ya que es fundamental para el análisis bursátil que éstas estén completas.

En primer lugar, el IBEX 35 (proviene de la unión de iberia e index) es el índice bursátil más representativo en España y está formado por las 35 empresas que presentan mayor capitalización bursátil en las cuatro Bolsas del país. Entre las empresas que lo forman se encuentran Inditex, Telefónica, Banco Santander e Iberdrola.

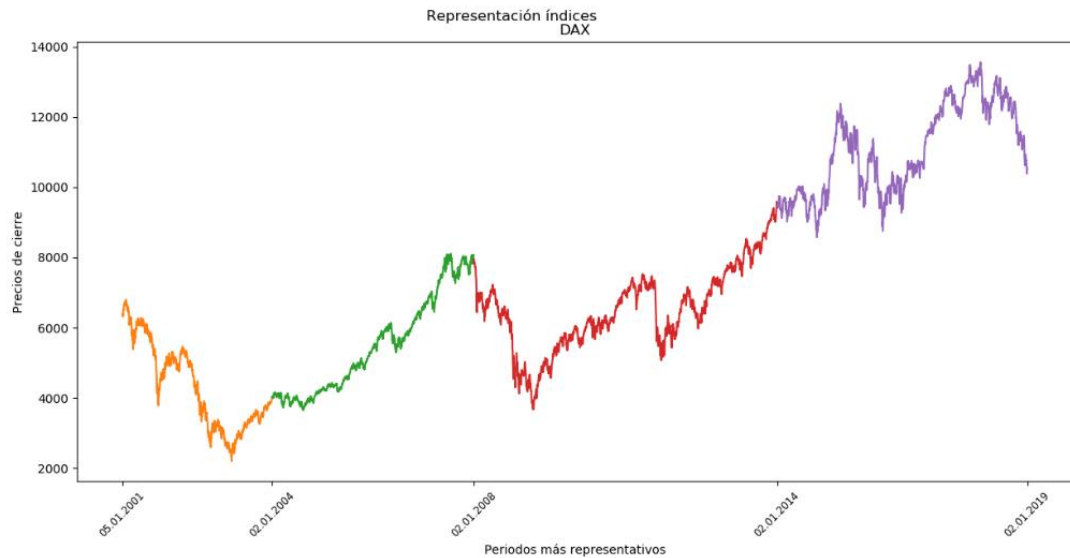
Figura 6: Evolución histórica IBEX 35



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

En segundo lugar, el índice alemán DAX (*Deutscher Aktienindex*), formado por las 30 empresas con mayor peso en Alemania que cotizan en la Bolsa de Frankfurt como son SAP, Bayer o Deutsche Bank.

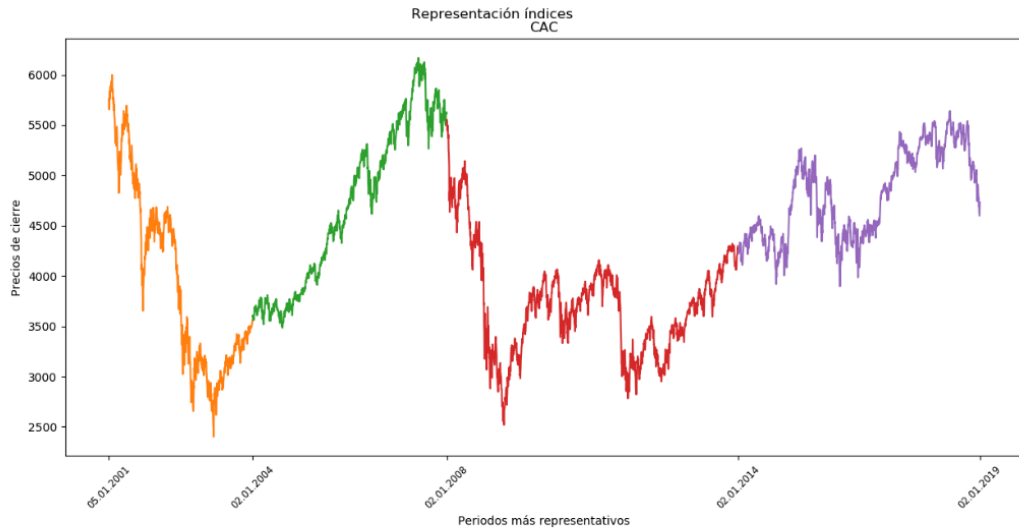
Figura 7: Evolución histórica DAX



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

En tercer lugar, el índice bursátil CAC 40 (*Cotation Assistée en Continu*) es el índice de referencia en Francia y está formado por las empresas más grandes del país como son Orange, Louis Vuitton y Peugeot.

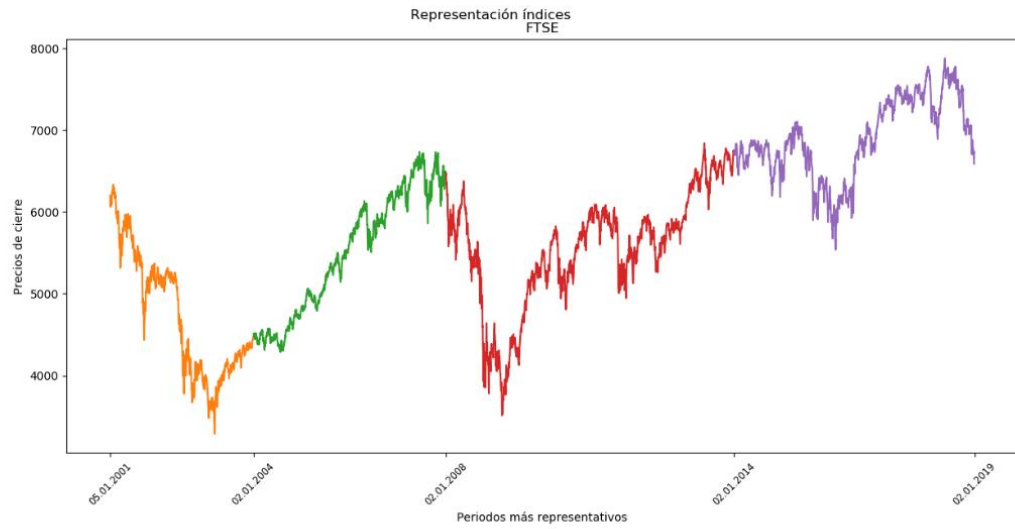
Figura 8: Evolución histórica CAC 40



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Por otro lado, el FTSE 100 (*Financial Times Stock Exchange*) es el índice bursátil más importante de Reino Unido y reúne a las 100 empresas que tienen mayor capitalización como son Aviva, BP, EasyJet o Morrison Supermark.

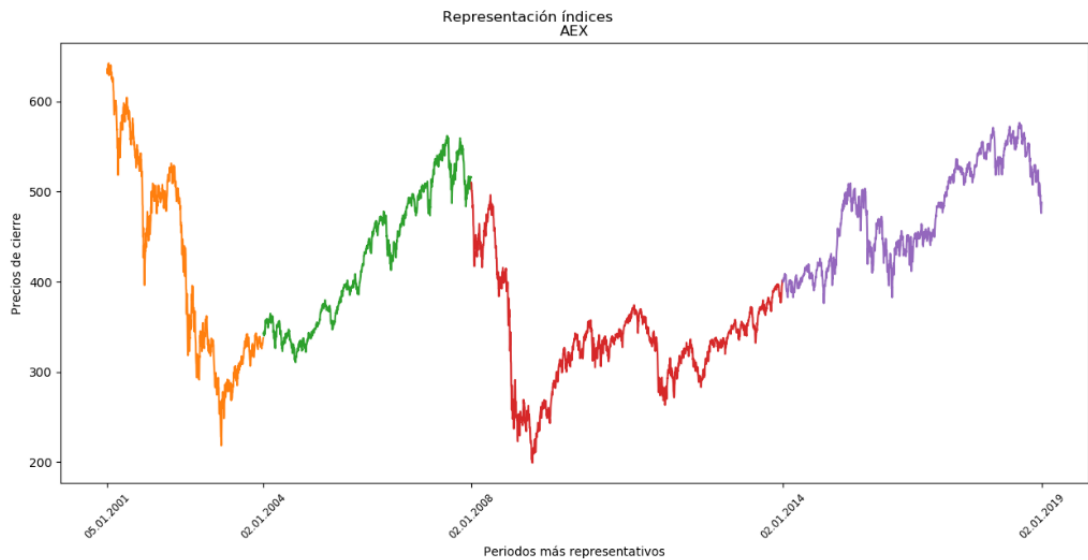
Figura 9: Evolución histórica FTSE 100



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

El quinto índice que se va a estudiar es el AEX (*Amsterdam Exchange Index*), que es el índice con más peso de Países Bajos y está formado por 25 empresas entre las cuales se encuentran Heineken, ING Group y Aegon.

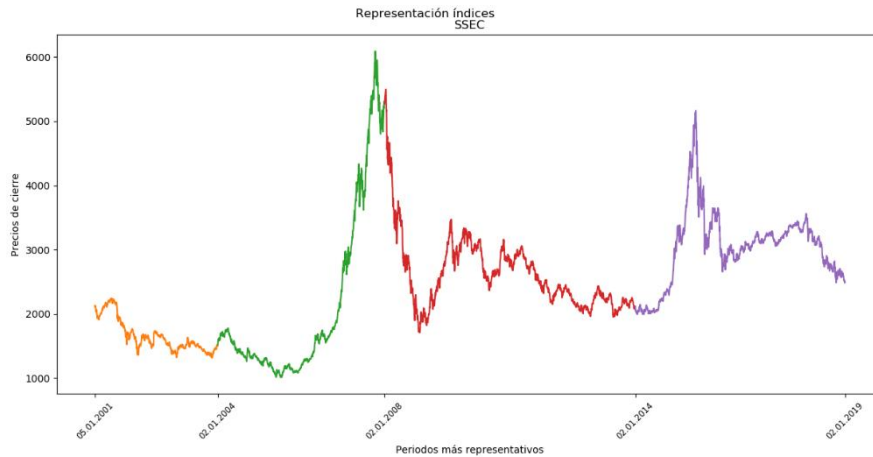
Figura 10: Evolución histórica AEX



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

En sexto lugar, el índice SSEC (*Shanghai Stock Exchange Composite*) es el más representativo de la Bolsa de Shanghai. Se compone de las 50 empresas con mayor capitalización entre las cuales están Hua Xia Bank, Air China y China Life Insurance.

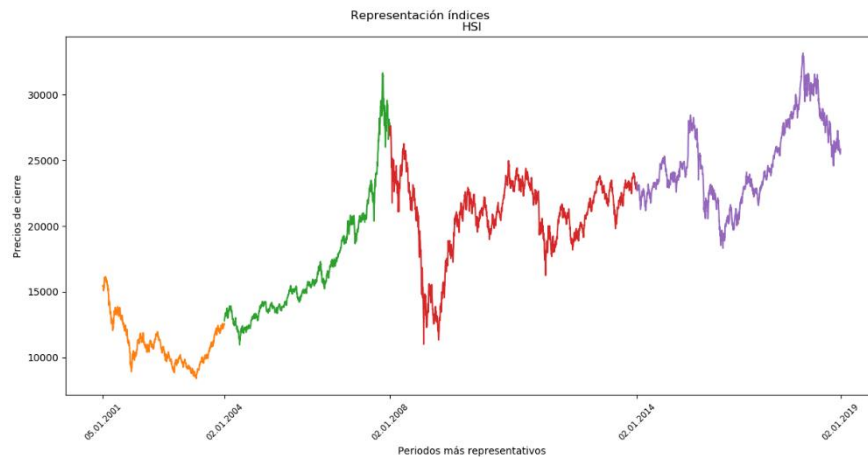
*Figura 11: Evolución histórica SSEC*



*Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)*

Como séptimo índice a estudiar se encuentra el HSI (*Hang Seng Index*), principal índice bursátil chino formado por 33 compañías de *Hong Kong Stock Exchange* como China Mobile, AIA Group y PetroChina H.

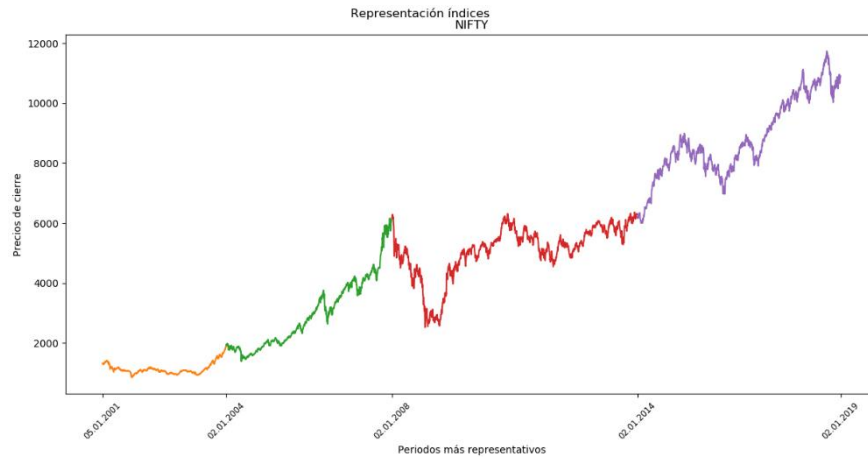
*Figura 12: Evolución histórica HSI*



*Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)*

NIFTY 50 es el octavo índice bursátil, es el más representativo en la Bolsa de Valores de India (NSE). Está formado por 50 empresas y entre ellas se puede encontrar Indian Oil, Nestle India y Cipla.

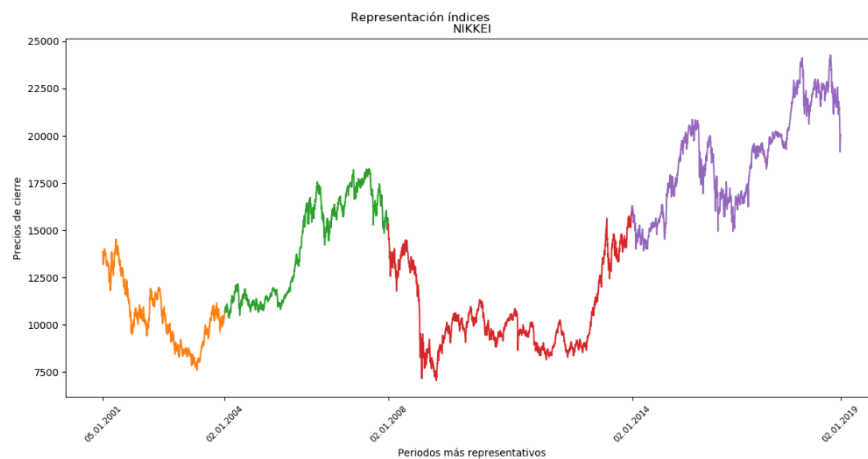
*Figura 13: Evolución histórica NIFTY 50*



*Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)*

Por último, el índice bursátil NIKKEI 225 (*Nikkei Heikin Kabuka*) está formado por los 225 valores más líquidos de la Bolsa de Tokio. Es el índice más representativo de Japón y entre sus empresas se observa Canon, Casio Computer y Honda Motor.

*Figura 14: Evolución histórica NIKKEI 225*



*Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)*

### III. CICLOS ECONÓMICOS

Un ciclo económico son las diferentes etapas que se pueden distinguir en una determinada economía en un periodo de tiempo. Se puede conocer también con el nombre de fluctuación cíclica. En un ciclo económico se distinguen varias fases diferentes que se producen una tras otra (Burns y Mitchell, 1946): auge, recesión, depresión y recuperación y expansión. Cada ciclo termina cuando empieza el siguiente, es decir, en cada depresión.

La fase de recuperación es la fase que sigue a la depresión, como su nombre indica en esta fase la economía experimenta una reactivación con el ascenso de la curva, lo cual significa un aumento en producción, ventas, inversión y empleo, se produce una expansión, la curva sigue en aumento hasta llegar a la cima en la que se produce el auge, donde la economía se encuentra en su momento máximo de prosperidad. Cuando la producción se estanca aparece una fase de recesión en la cual la actividad económica disminuye hasta llegar a una situación de depresión o crisis donde las consecuencias económicas y sociales son graves y la actividad económica mínima. Aquí comienza un nuevo ciclo. La duración de cada ciclo puede ser corta, 3 o 4 años, se denominan ciclos de Kitchin (Kitchin, 1923, en Schumpeter, 2002), media, aproximadamente 8 años, también llamados ciclos Juglar (Juglar, 1889, en Schumpeter, 2002) quien ayudó a desarrollar la teoría del ciclo económico, o larga, 54 años también llamados ciclos Kondratieff (Kondratieff, 1995, en Schumpeter, 2002).

Elliott (1938) desarrolló, con su teoría de ondas al analizar las fluctuaciones de la Bolsa, las ocho ondas que se observan en los ciclos económicos y que han sido mencionadas en el apartado de marco teórico.

La economía mundial ha sufrido desde el año 2000 varias crisis (Libertad Digital, 2010). Empezando en el año 2000 se encuentra la crisis de las puntocom, la llegada de las empresas cuyos negocios se realizaban a través de Internet, la gran mayoría eran empresas tecnológicas o relacionadas con el ámbito de las telecomunicaciones que aprovecharon el momento de avance tecnológico y globalización de la economía para aumentar su cuota de mercado. Todo el mundo quería sumarse al auge que estaba sucediendo en ese momento, en un inicio las empresas no generaban beneficios y usaban el capital de riesgo para afrontar sus pérdidas. El capital de riesgo consiste en la inversión en empresas que a pesar de su breve vida presentan un gran potencial. Esto hizo que el precio de las acciones de estas compañías en Bolsa se incrementase de forma muy rápida. Esta burbuja explotó el 13 de marzo de 2000 llegando a su punto más alto y desplomándose con caídas del índice Nasdaq de hasta el 9%.

En el año 2001-2002 tuvieron lugar dos crisis, una debida a los atentados terroristas que ocurrieron el 11 de septiembre de 2001 en Estados Unidos lo cual produjo grandes descensos en las Bolsas de todo el mundo. Esto supuso un periodo de inestabilidad y los tipos de interés de los créditos bajaron con el fin de reactivar la economía. La segunda destacable es la crisis de Argentina, fue una crisis económica, social, institucional y política que se desarrolló a raíz de que el gobierno restringiese la extracción de dinero de bancos, también llamado “Corralito”. Esto trajo consigo el incremento de situaciones de delincuencia y protestas en el país.

De 2007 a 2010 tuvo lugar la Gran Recesión, una de las mayores crisis financieras mundiales que se inició con el estallido de la burbuja inmobiliaria en Estados Unidos y la quiebra de *Lehman Brothers*. Se inició debido a la concesión de hipotecas por los bancos a clientes que no

podían pagarlas, esto hacía que el riesgo de impago se incrementase. Como se ha mencionado esta crisis se expandió a Europa y el miedo existente en los mercados disminuyó el valor del euro.

#### **IV. HECHOS COMUNES QUE SE IDENTIFICAN EN LOS DIFERENTES ÍNDICES BURSÁTILES**

Como se puede observar en los gráficos de las Figuras 6-14 que representan la evolución histórica de cada índice estudiado en este TFG, existe un comportamiento bajista entre enero de 2001 y enero de 2004, resultado de la información que descontó la Bolsa con relación a la crisis tecnológica referente a las puntocom que afectó mundialmente, también este periodo se ve afectado por los atentados terroristas en Nueva York.

A continuación, en el siguiente periodo de enero de 2004 a enero de 2008, el comportamiento que muestra cada uno de los índices es mayormente alcista y esto provocó subidas constantes que facilitaron la recuperación de la economía.

Como todo crecimiento cuando llega a su estado de auge comienza un descenso y, es entre 2008 y 2014 cuando se experimenta en cada índice una crisis financiera global producida por el estallido de la burbuja financiera. A medida que avanza el periodo se observa un incremento de forma lenta en los precios, una recuperación hasta 2014.

Por último, desde enero de 2014 hasta enero de 2019 se distingue un comportamiento que continua con el final del periodo anterior, es una época de crecimiento, pero a la vez con picos que corrigen esta tendencia producidos por el *Brexit*, las elecciones en Estados Unidos, el enfrentamiento comercial entre China y Estados Unidos, etc.

#### **V. CONTRASTE**

En los puntos anteriores se han expuesto, en primer lugar, en el punto III las diferentes crisis que se han registrado en la historia económica a nivel mundial desde el año 2000, se puede decir que cada crisis marca el inicio de un ciclo económico y éste finaliza con el comienzo de la siguiente crisis, por tanto, en este caso se pueden agrupar en dos crisis, la primera de ellas marcada por los acontecimientos desde 2000-2002 y la segunda de 2007-2014. Los años que transcurren de una crisis a otra son siete, se puede considerar que el ciclo económico existente entre las dos crisis es de duración media, ya que se aproxima a los ocho años entre las dos crisis.

En segundo lugar, en el punto IV se han expuesto los hechos económicos más relevantes que provocan las subidas y bajadas en los diferentes índices. Extrayendo la información de estos hechos y cogiendo los que marcan las grandes bajadas, existen dos momentos también de crisis económica en los que coinciden todos, traducido en un comportamiento con precios a la baja entre los años 2001 y 2004 y un segundo comportamiento bajista en el periodo de tiempo en el que transcurren los años 2008 y 2009. Por tanto, los ciclos bursátiles de cada índice de manera individual anticipan lo que más tarde sucederá en la economía, en los ciclos económicos desde un punto de vista global.



## RESULTADOS OBTENIDOS

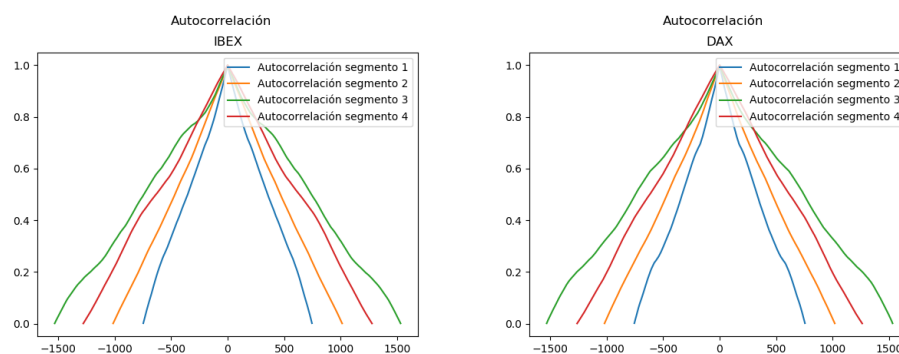
Como se ha descrito anteriormente se han realizado diferentes simulaciones con *scripts* programados en lenguaje Python para llevar a cabo este estudio. Por un lado, se van a presentar los resultados obtenidos al calcular la autocorrelación de cada índice bursátil. Por otro lado, se mostrarán los resultados obtenidos mediante el cálculo del índice de Hurst por el método  $R/S$  y el método del exponente  $1/f$  ambos calculados gracias a la herramienta de repetición de muestras *bootstrap*.

### I. RESULTADOS DE LOS CÁLCULOS DE LA AUTOCORRELACIÓN

En este apartado se van a mostrar las Figuras 15-19 las cuales representan el cálculo de la autocorrelación aplicada a cada índice bursátil estudiado. En todas ellas se observan líneas de diferentes colores, cada una de ellas es la autocorrelación calculada para cada uno de los segmentos en los que se divide el índice en concreto. El eje vertical representa los valores de la autocorrelación y el eje horizontal representa las muestras tomadas en cada segmento.

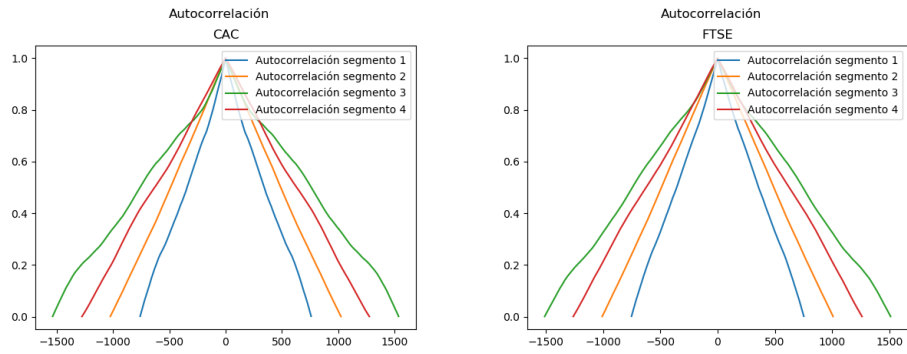
Con estos gráficos se llega a la conclusión de que las series bursátiles son series temporales puesto que se comportan como éstas. Esto se puede apreciar en los valores que toma la autocorrelación, es decir, ésta toma valores nulos en muestras muy lejanas, por tanto, esto significa que en muestras alejadas se observa que existe memoria, esto es, muestras que se encuentran alejadas guardan información la una sobre la otra.

Figura 15: Autocorrelación IBEX 35 y DAX



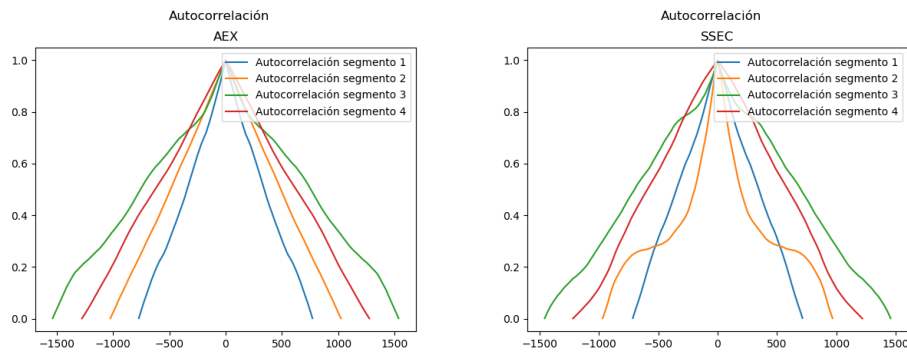
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 16: Autocorrelación CAC 40 y FTSE 100



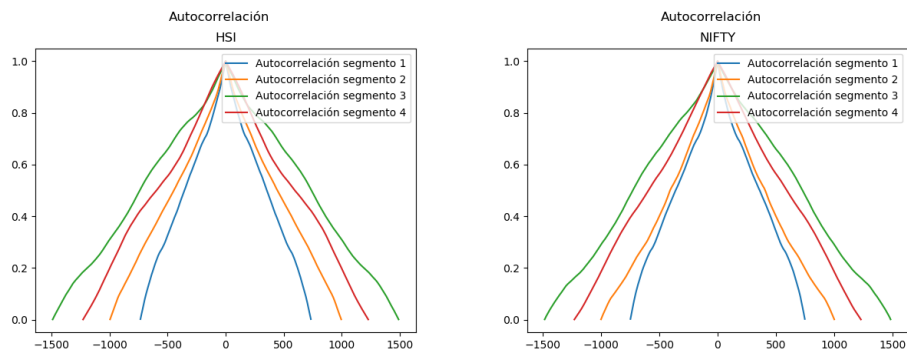
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 17: Autocorrelación AEX y SSEC



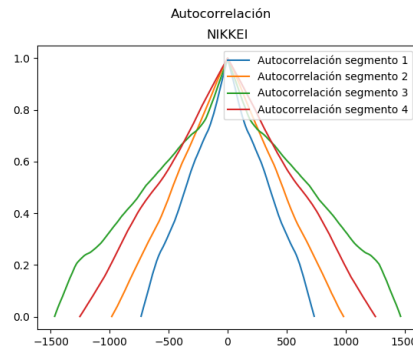
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 18: Autocorrelación HSI y NIFTY 50



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 19: Autocorrelación NIKKEI 225

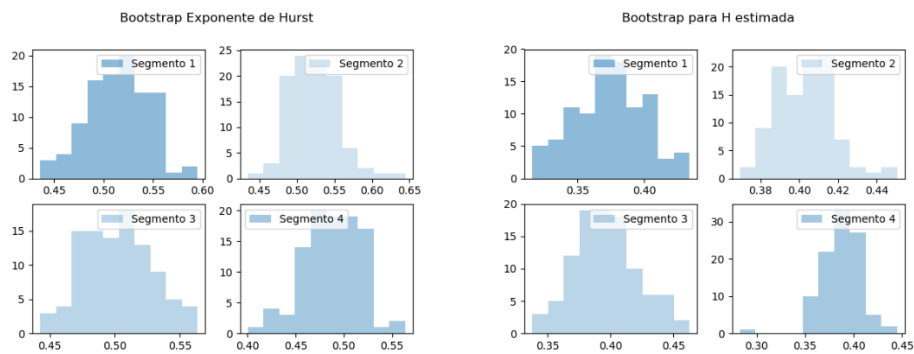


Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

## II. RESULTADOS DEL CÁLCULO DEL EXPONENTE DE HURST MEDIANTE BOOTSTRAP

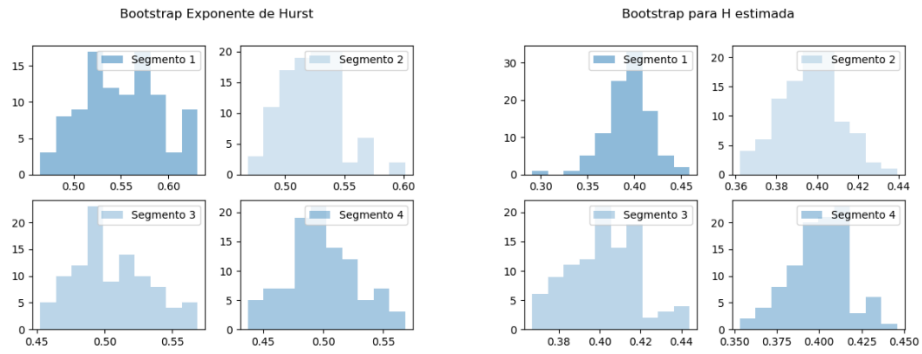
En este apartado se van a observar los diferentes gráficos (Figuras 20-28) que son el resultado de aplicar la herramienta *bootstrap* al cálculo del exponente de Hurst mediante los dos métodos que se han utilizado para el estudio. Como se puede observar en la mayoría de los índices bursátiles el valor predominante del exponente de Hurst se encuentra entre 0,5 y valores superiores a esta cifra. Esto significa que cada segmento de cada índice tiene un comportamiento persistente, en el que la tendencia se mantiene con más fuerza a media que los valores superan la cifra 0,5 y se alejan a la derecha de ese valor. Los resultados para el cálculo del exponente de Hurst mediante el método  $1/f$  no han sido los esperados ya que los valores del exponente  $H$  son inferiores a 0,5 y esto contradice el estudio que se ha realizado de la autocorrelación, el cual afirma que los precios no son aleatorios y tienen memoria a largo plazo.

Figura 20: Cálculo exponente de Hurst mediante R/S y  $1/f$  con bootstrap para IBEX 35



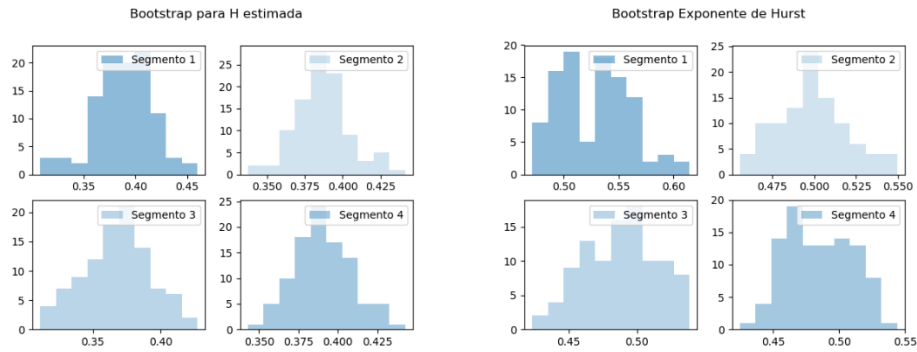
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 21: Cálculo exponente de Hurst mediante R/S y 1/f con bootstrap para DAX



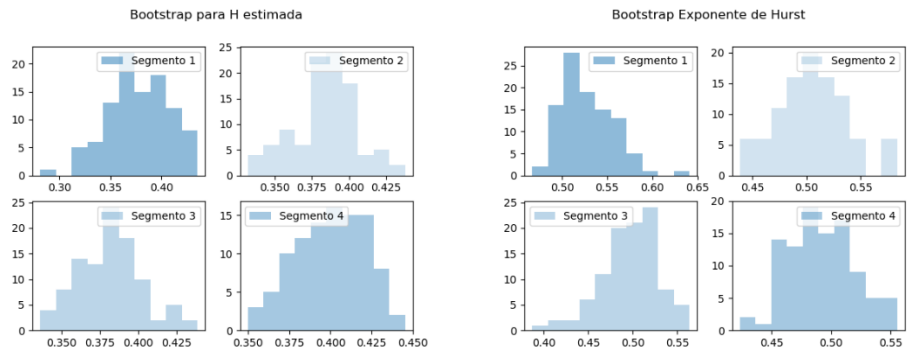
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 22: Cálculo exponente de Hurst mediante R/S y 1/f con bootstrap para CAC 40



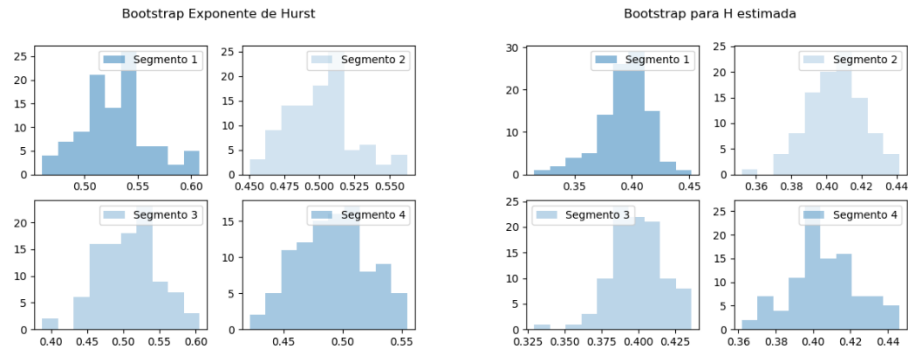
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 23: Cálculo exponente de Hurst mediante R/S y 1/f con bootstrap para FTSE 100



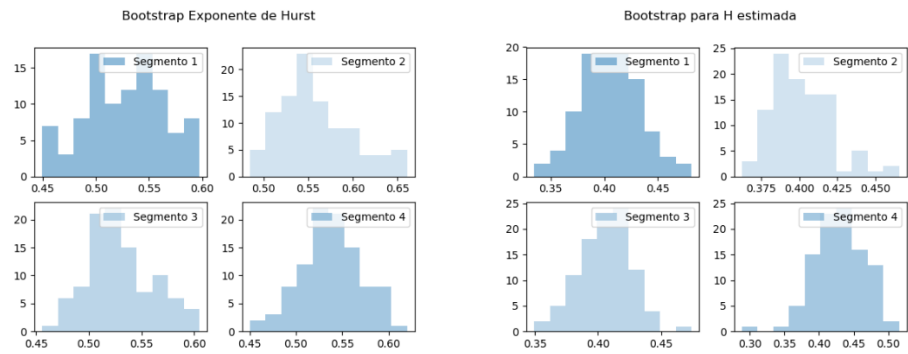
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 24: Cálculo exponente de Hurst mediante R/S y 1/f con bootstrap para AEX



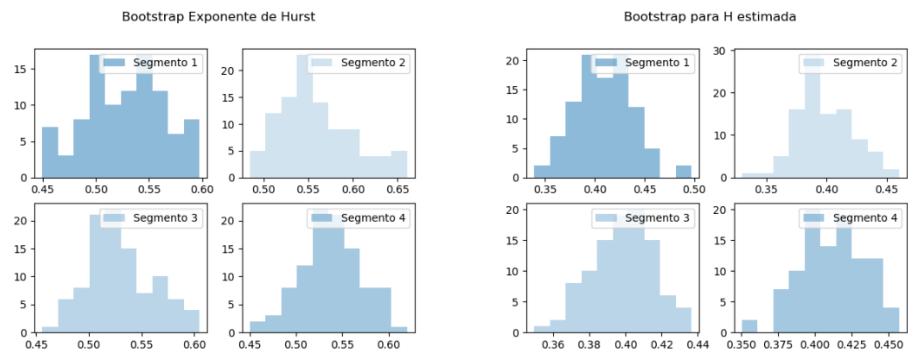
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 25: Cálculo exponente de Hurst mediante R/S y 1/f con bootstrap para SSEC



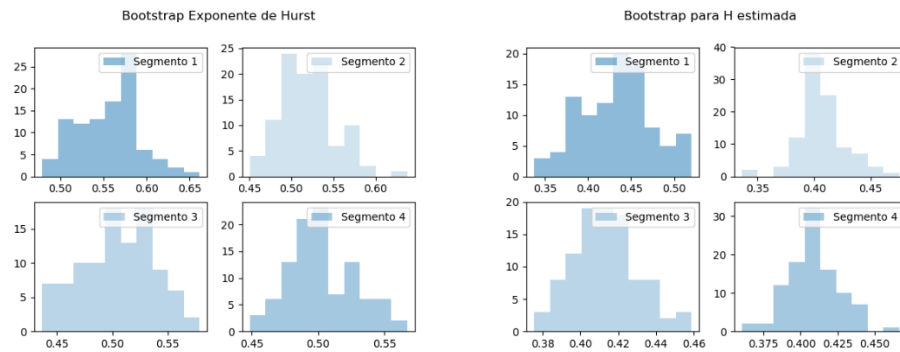
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 26: Cálculo exponente de Hurst mediante R/S y 1/f con bootstrap para HSI



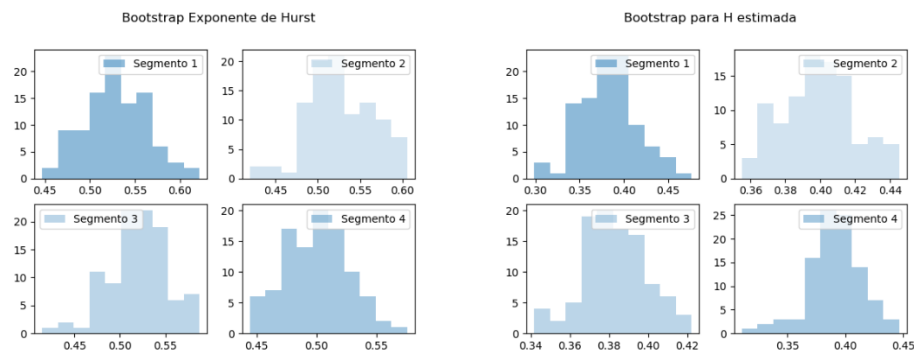
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 27: Cálculo exponente de Hurst mediante  $R/S$  y  $1/f$  con bootstrap para NIFTY 50



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 28: Cálculo exponente de Hurst mediante  $R/S$  y  $1/f$  con bootstrap para NIKKEI 225



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

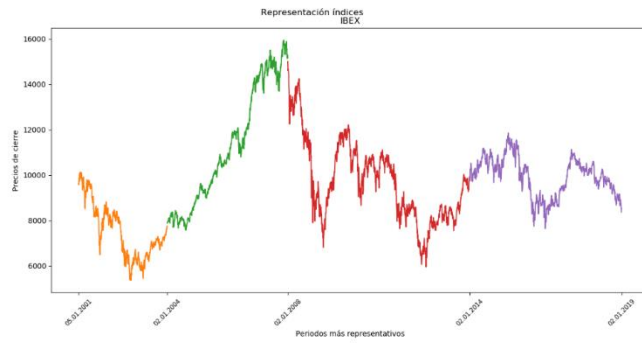
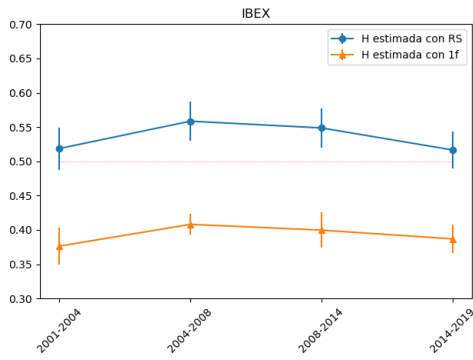
### III. RESULTADOS DE LA DESVIACIÓN EXPONENTE DE HURST MEDIANTE BOOTSTRAP

En el último apartado de resultados, se va a analizar la desviación del exponente de Hurst, obtenido por los dos métodos citados anteriormente aplicando *bootstrap*, comparándola con el histórico de precios de cada índice.

Esta comparación se presenta en las Figuras 29-37, cada figura se divide en dos gráficos, el de la derecha es el gráfico que muestra la desviación del índice de Hurst calculado de dos maneras diferentes, en color azul representa el método de re-escalado  $R/S$  y el color naranja representa la estimación  $1/f$ . El gráfico de la izquierda es la evolución histórica de cada índice.

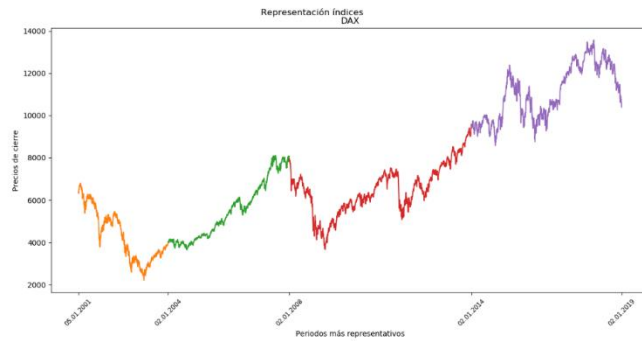
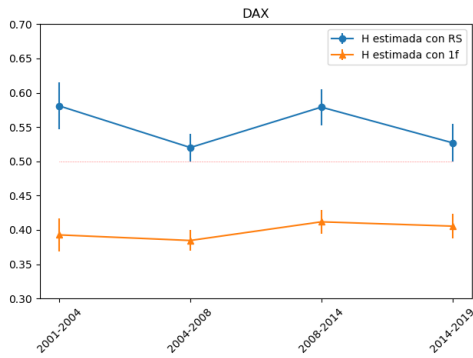
Como comentario común a todos los índices, la estimación que se aproxima más a la realidad de la evolución que ha sufrido cada índice es la del método  $R/S$ , como se ha explicado anteriormente en el apartado II. En todos los segmentos en los que se dividen los índices el valor que toma  $H$  se encuentra comprendido entre 0,5 y 1, lo que implica que la serie temporal en cada periodo se comporta de forma persistente, la tendencia no varía. Los valores más cercanos a 0,5 significan que el segmento tiene una tendencia menos persistente, es decir, con subidas y bajadas más acentuadas que en los segmentos cuyo valor de  $H$  es más cercano a 1.

Figura 29: Desviación índice de Hurst IBEX 35



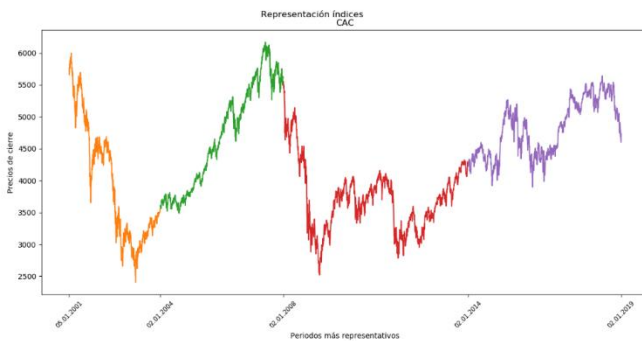
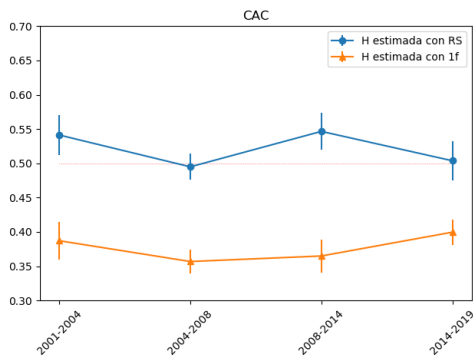
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 30: Desviación índice de Hurst DAX



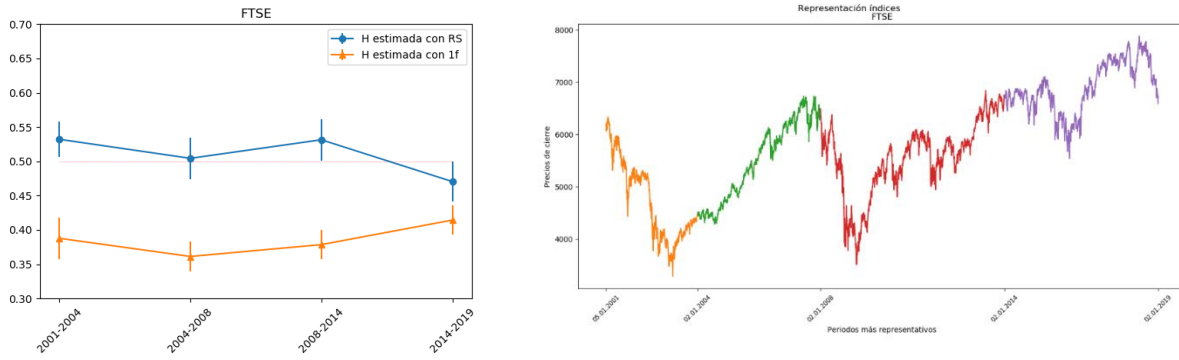
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 31: Desviación índice de Hurst CAC 40



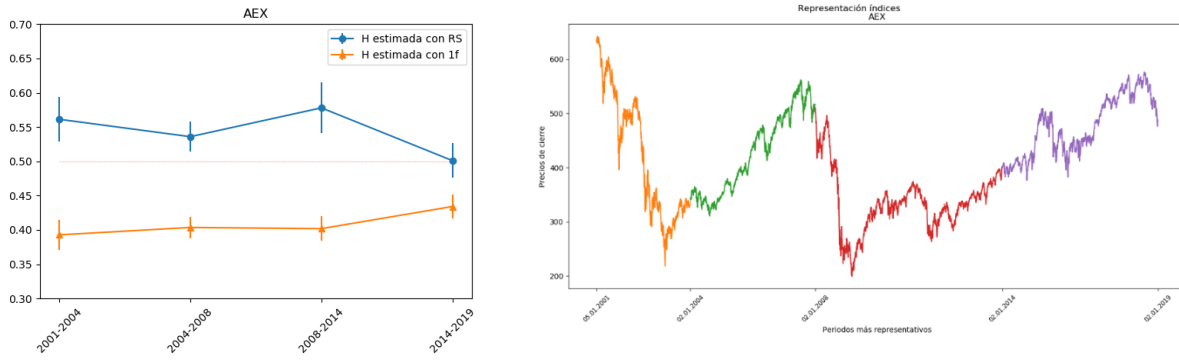
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 32: Desviación índice de Hurst FTSE 100



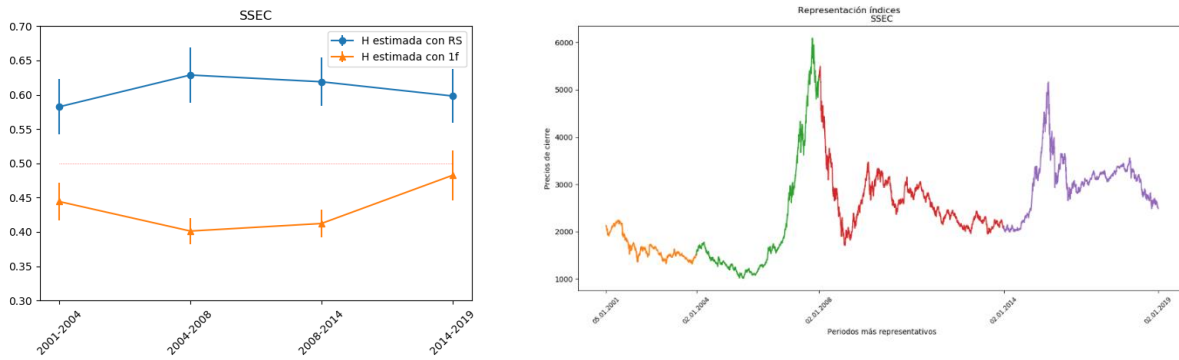
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 33: Desviación índice de Hurst AEX



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

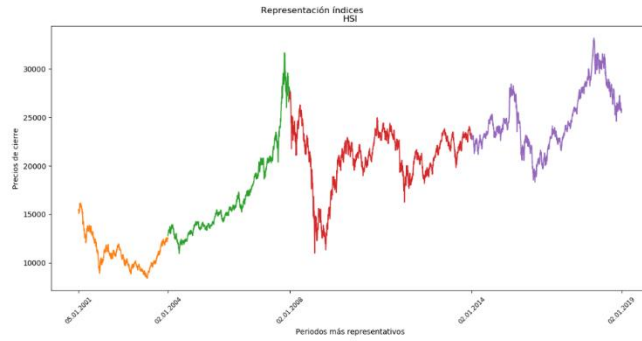
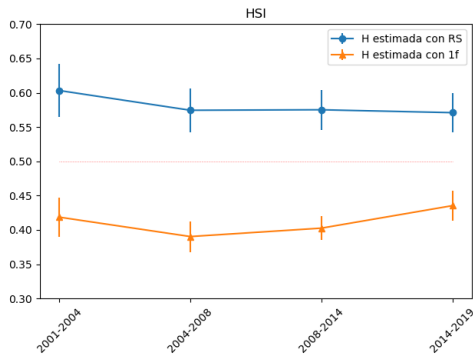
Figura 34: Desviación índice de Hurst SSEC



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

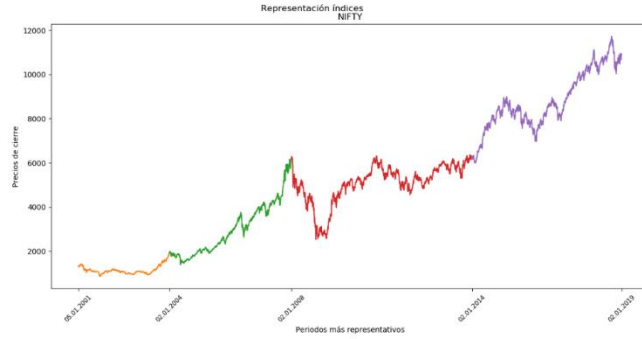
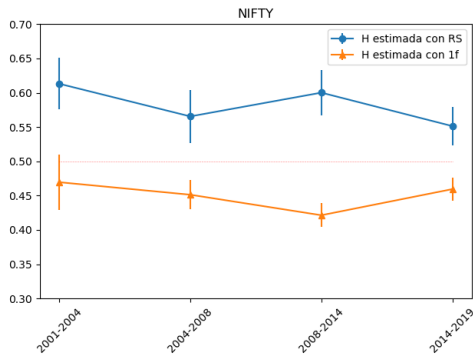


Figura 35: Desviación índice de Hurst HSI



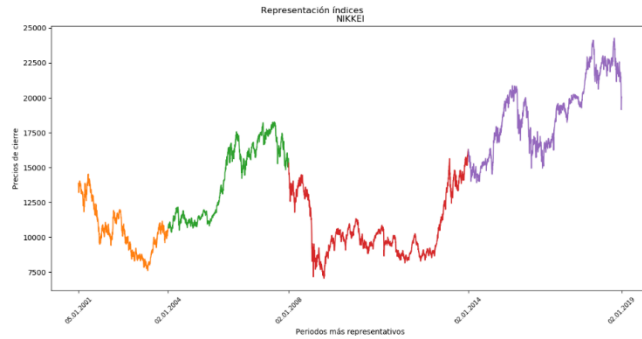
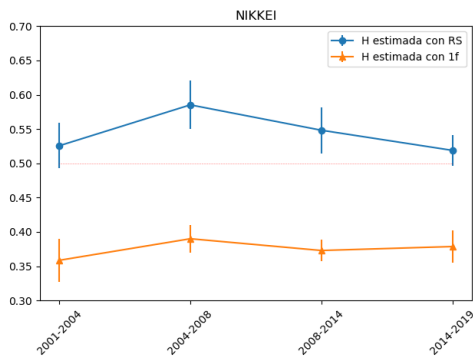
Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 36: Desviación índice de Hurst NIFTY 50



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

Figura 37: Desviación índice de Hurst NIKKEI 225



Fuente: TFG de Telecomunicaciones (Moreno, 2019)

## CONCLUSIONES

Como se puede apreciar los resultados no son los esperados y no se asemejan con exactitud a la realidad de lo que muestran los gráficos en muchas ocasiones. Se puede confirmar que en el cálculo de la desviación del exponente de Hurst con la herramienta *bootstrap* es mejor la estimación mediante el método de re-escalado  $\frac{R}{S}$  ya que guarda relación con los resultados obtenidos en el apartado I de resultados, es decir, confirma mediante otro proceso que los índices bursátiles tienen memoria a largo plazo. En cambio, la estimación mediante  $1/f$  contradice lo anterior. Además se desconoce por qué esta estimación se comporta de diferente manera respecto a la estimación  $R/S$  dependiendo del índice. Por ejemplo, en el IBEX los resultados de ambas estimaciones son más parecidos que en otros como en el DAX, en el cual son totalmente diferentes, o en el SSEC donde parece que avanzan en espejo. Esto podría ser objeto de investigación en un futuro.

Esto puede deberse entre otras cosas a la elección de los periodos, es decir, la fecha de inicio y finalización de cada uno de los segmentos en los que se ha dividido cada índice. Es probable que los resultados se estimen de manera más exacta si la elección de la duración de cada periodo hubiese respetado las tendencias de inicio a fin. Una de las mejoras a añadir podría ser la elección de índices bursátiles de la Bolsa estadounidense para ver el comportamiento de una de las potencias globales económicas.

Desde el punto de vista bursátil es muy importante la conclusión sacada en el apartado I de resultados ya que demuestra con el cálculo de la autocorrelación que muestras que están alejadas unas de otras guardan dependencia. Esto es relevante para el análisis bursátil puesto que rebate la existencia de aleatoriedad o hipótesis de *random walk* en la que se basa el análisis fundamental. La elección de la tendencia completa en este punto habría manifestado, con mayor grado aún, la dependencia existente entre las sucesivas variaciones de los precios.

Las conclusiones sacadas de los apartados de resultados II y III son las mismas. En ambos se demuestra la persistencia que presenta la tendencia de cada segmento ya que los valores que toma el índice de Hurst se encuentran entre 0,5 y 1. Como se explica en esos puntos, esto significa que la tendencia se mantiene con más fuerza cuanto más cercano sea el valor de  $H$  a 1.

El estudio de Díaz Mata (1996 y 2008) obtiene, en primer lugar, el mismo resultado, es decir, valores de  $H$  superiores a 0,5, por tanto, señales bursátiles persistentes y con memoria a largo plazo, pero en un segundo experimento en su estudio, en el cual desordena los precios de las acciones y vuelve a realizar el cálculo obtiene que los resultados de  $H$  no han variado apenas, lo que significaría que no tienen memoria a largo plazo. A pesar de este resultado, Díaz Mata concluye que para dar valor a esta contradicción es necesario utilizar más muestras para su estudio.

Por último, Soto (2018) concluye que “el mercado reacciona ante las emergencias como un sistema complejo que a su vez se comporta de una forma organizada formando un patrón de orden reflejado en los precios”, es decir, afirma también que el mercado no se comporta de forma aleatoria.

Como comentario final, con la situación actual a nivel mundial que se está viviendo debido al virus del Covid-19 las Bolsas han sufrido y están sufriendo un gran desplome, lo que anticipa la previsible crisis económica global a la que se tendrá que hacer frente en los próximos meses.

**BIBLIOGRAFÍA**

**Bachelier, L.** *Teoría de la especulación*. París : Universidad de París, 1900.

**Barquero, O.** *Heart rate variability: a fractal analysis*. Oporto : Universidad de Porto, 2008.

**Burns, A. F., Mitchell, W. C.** *Measuring Business Cycles*. New York, 1946 : National Bureau of Economic Research.

Del Crack del 29 a la Gran Recesión. Cronología de las crisis financieras del último siglo. *Libertad Digital*, 2010.

**Díaz Mata, A.** Algunas consideraciones sobre el uso de técnicas fractales en el análisis del mercado accionario bursátil mexicano. *Contaduría y Administración*, 2008. 35-57.

—. Caos, fractales, mercados de valores y triceversa. *Contaduría y Administración*, 1996.

**Elliott, R. N. 1938.** *The Wave Principle*. 1938.

**Fernández, J. A.** *Manual del buen bolsista*. Madrid : Pearson Educación, 2001.

**Frost, A. J. y Prechter, R. R.** *El principio de la onda de Elliott*. EEUU : Haddon Craftsmen, 1978.

**Iturriaga, R., Jovanovich, C.,** *Fractales, economía y empresa*. Argentina : UNNE, Resistencia, 2014.

**Jiménez, I.C.** *Cómo entender las Ondas de Elliott*. Madrid : Financial Times-Prentice Hall, 2001.

**Juglar, J. C.** *Crisis comerciales y su retorno periódico en Francia, Inglaterra y Estados Unidos español*. Montana : Kessinger Publishing, 1889.

**Kitchin, J.** Cycles and Trends in Economic Factors. *The Review of Economics and Statistics*, 1923. Vol. 5, 10-16.

**Kondratieff, N.** *Los Ciclos Económicos Largos*. s.l. : General Data Publications, 1995.

**Mandelbrot, B., Hudson, R. L.** *Fractales y finanzas: Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar*. Barcelona : Tusquets Editores, 2006.

—. *The (Mis)Behaviour of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin and Reward*. London : Profile Books, 2004.

**Mandelbrot, Benoît.** *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*. Barcelona : Tusquets Editores, 1987.

**Miranda, F., Ramos, M.** Concatenación fractal aplicada a la interpolación de los precios. *Ecorfan Journal*, 2012. 48-77.

**Moreno, L.** *Análisis fractal de series temporales bursátiles utilizando técnicas de remuestreo*. Madrid : Universidad Rey Juan Carlos, 2019.

**Schumpeter, J., A.** *Ciclos económicos. Análisis teórico, histórico y estadístico del proceso capitalista*. Zaragoza : Prensas Universitarias de Zaragoza, 2002.

**Soto, L. M.** *Estudio de los crashes bursátiles bajo el análisis de la geometría fractal.*  
Bogotá D. C : Universidad de la Salle, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, 2018.