



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIÓN

GRADO EN INGENIERÍA EN SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN

TRABAJO FIN DE GRADO

**ANÁLISIS FRACTAL DE SERIES TEMPORALES BURSÁTILES
UTILIZANDO TÉCNICAS DE REMUESTREO**

**Autor: Laura Moreno Gómez
Tutor: Óscar Barquero Pérez**

Curso académico 2019/ 2020

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer este trabajo a mi tutor Óscar, gracias por tu tiempo y ayuda en el final de esta etapa que se cierra.

Gracias a los compañeros que me he encontrado en este camino, Laura, Meli, Sofía, Sara, Prego y Jhon. Porque los aprobados y suspensos de cada uno los hemos vivido como nuestros, por tirar de mí y, por confiar en que podía.

A mis amigas del colegio, Sandra, Paloma, María y Gema gracias por estar juntas en cada etapa que se acaba y empezar la siguiente compartiendo mi ilusión. A Sonso y Nacho, por acompañarme en días de estudio y apoyarme siempre.

A mi familia, en especial a vosotros, mamá y papá por confiar en mi desde el día que apunté Teleco + ADE en el formulario de Selectividad y ayudar a levantarme cada vez que me daban un suspenso. A mis hermanos, Alejandra y Jaime por aguantar mi mal humor cuando estaba agobiada por exámenes.

Por último, a mi compañero de camino y vida, gracias Santi porque quizás hayas sido el más exigente en esto, pero lo has sido porque once años son suficientes para saber que como mejor trabajo es con un poquito de presión. Sin tu apoyo en los momentos más difíciles no hubiese sido posible, GRACIAS.

Resumen

La motivación de una persona al invertir en la Bolsa es, básicamente, la obtención de una elevada rentabilidad respecto al valor de la inversión inicial. Muchas de estas personas actúan sin demasiado conocimiento y su comportamiento a la hora de invertir no sigue un patrón lógico. Para solventar este problema actualmente se utilizan técnicas basadas en métodos estadísticos clásicos de análisis de series temporales como el análisis de Fourier en el dominio de la frecuencia.

En este Trabajo de Fin de Grado se intenta demostrar mediante técnicas no tradicionales como es el caso del análisis fractal, en concreto: exponente de Hurst y el espectro $1/f$ y las técnicas de análisis estadístico no paramétrico como el uso de *bootstrap* y señales sintéticas simuladas que se puede analizar el comportamiento de señales temporales financieras.

Para llevar a cabo lo anterior, se va a hacer uso de series temporales bursátiles de Europa y Asia como, por ejemplo, el Ibex 35, el *Amsterdam Exchange Index*, el *Hang Seng Index* entre otros y se va a realizar su estudio mediante un análisis estadístico llamado *bootstrap* para poder calcular el error estándar de nuestra estimación de parámetros fractales.

Se estimará qué método, cálculo del exponente de Hurst mediante R/S o $1/f$, es más eficaz para caracterizar las series temporales tomadas de ejemplo. En concreto, se verá el resultado más en detalle para el Ibex 35, el FTSE 100 y el Nifty.

Abstract

The motivation of a person to invest in the stock market is, basically, obtaining a high return on the value of the initial investment. Many of these people act without much knowledge and their behavior at the moment of investing does not follow a logical pattern. To solve this problem, techniques based on classical statistical methods of time series analysis such as Fourier analysis in the frequency domain are currently used.

In this Final Degree Project, we try to demonstrate non-traditional techniques such as fractal analysis, in particular: Hurst exponent and the $1/f$ spectrum and nonparametric statistical analysis techniques such as the use of bootstrap and simulated synthetic signals that the behavior of financial temporary signals can be analyzed.

To carry out the project, it is going to make use of stock market time series of Europe and Asia, for example Ibex 35, Amsterdam Exchange Index, Hang Seng Index among others and it is going to carry out its study through a statistical analysis called bootstrap to be able to calculate the standard error of our estimation of fractal parameters.

It will be estimated what method, calculation of the Hurst exponent by means of R/S or $1/f$, is more efficient to characterize the time series taken as an example. Specifically, the result will be seen in more detail for the Ibex 35, the Financial Times Stock Exchange and the Nifty.

Índice

RESUMEN	3
ABSTRACT	4
CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN	7
1.1 MOTIVACIÓN	7
1.2 OBJETIVOS	8
1.3 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA	8
CAPÍTULO 2: ESTADO DEL ARTE	10
CAPÍTULO 3: ANÁLISIS FRACTAL DE SERIES TEMPORALES	13
3.1 CONCEPTO Y ORIGEN DEL TÉRMINO FRACTAL	14
3.2 SERIES TEMPORALES FRACTALES	15
3.3 CONCEPTO DE AUTOCORRELACIÓN	17
3.4 ÍNDICES DE ANÁLISIS FRACTAL UTILIZADOS	18
3.4.1 EXPONENTE DE HURST	18
3.4.2 EXPONENTE $1/f$	20
CAPÍTULO 4: BASES DE DATOS	23
4.1 IBEX 35	24
4.2 DAX	25
4.3 CAC 40	27
4.4 FTSE 100	28
4.5 AEX	30
4.6 SSEC	31
4.7 HSI	33
4.8 NIFTY 50	34
4.9 NIKKEI 225	35
CAPÍTULO 5: ANÁLISIS CON SEÑALES SINTÉTICAS Y CON DATOS REALES. ANÁLISIS ESTADÍSTICO	38
5.1 ANÁLISIS CON SEÑALES SINTÉTICAS	38
5.2 ANÁLISIS ESTADÍSTICO CON SEÑALES REALES	39
CAPÍTULO 6: RESULTADOS	41
6.1 RESULTADOS CON SEÑALES SINTÉTICAS.	41
6.2 RESULTADOS PARA SERIES BURSÁTILES REALES.	42
6.2.1 FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN	42
	43
	43
6.2.2 ANÁLISIS ESTADÍSTICO MEDIANTE <i>BOOTSTRAP</i>	43
6.2.3 DESVIACIÓN DEL EXPONENTE DE HURST MEDIANTE <i>BOOTSTRAP</i>	43
	45
CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS	46
ANEXOS	47

ANEXO I: HISTOGRAMA EXPONENTE DE HURST MEDIANTE <i>BOOTSTRAP</i>	47
ANEXO II: HISTOGRAMA EXPONENTE DE HURST ESTIMADO CON MÉTODO $1/f$ MEDIANTE <i>BOOTSTRAP</i>	48
ANEXO III: DESVIACIÓN DEL EXPONENTE DE HURST MEDIANTE <i>BOOTSTRAP</i>	49
BIBLIOGRAFÍA	50

Capítulo 1: Introducción

1.1 Motivación

Un índice bursátil es un indicador que presenta el promedio de los precios de un conjunto de valores cotizados en un determinado mercado, de esta manera muestra los aumentos o disminuciones del valor de sus acciones. Los índices bursátiles tienen una gran importancia para las personas que quieren invertir en bolsa ya que sirven como referencia para realizar estas operaciones. Para ello, es muy importante estar informado de cada acontecimiento que ocurre en el día a día.

El presente Trabajo de Fin de Grado (TFG) estudia nueve índices bursátiles nacionales, cada uno de los cuales están compuestos por las empresas más influyentes que cotizan en la Bolsa de cada país: IBEX 35 (35 empresas de España), CAC 40 (40 empresas de Francia), DAX (30 empresas de Alemania), FTSE 100 (100 empresas de Inglaterra), Nikkei 225 (225 empresas de Japón), HSI (45 empresas de China), SSEC (todas las empresas de China) NIFTY 50 (50 empresas de India), AEX (25 principales valores que cotizan en el *Euronext* en Holanda) [1]. El análisis se realizará desde el 5 de enero de 2001 hasta el 2 de enero de 2019, dividiendo este periodo de tiempo en los cuatro segmentos más representativos en la economía (2001-2004, 2004-2008, 2008-2014, 2014-2019), de acuerdo a criterios socio-económicos relevantes, que permitan establecer periodos económicos diferenciados.

Los índices bursátiles son series temporales y debido al comportamiento que tienen, en economía se analizan y estudian mediante el uso de métodos de análisis de series temporales. En los últimos años para realizar este análisis se están empezando a utilizar métodos de series temporales fractales como los que se van a abordar en el presente TFG. Un fractal es un objeto geométrico (pueden encontrarse en la naturaleza o estar creados por el ser humano), es decir, en la escala que se observe siempre es igual. Está formado por elementos más pequeños que presentan la misma distribución estadística. Las propiedades estadísticas que caracterizan a los fractales presentan autosimilitud y puede ser de tres tipos diferentes: autosimilitud exacta, cuasiautosimilitud y autosimilitud estadística.

Por tanto, las series temporales fractales son procesos que se caracterizan por su

autosimilitud, su comportamiento, en términos estadísticos, no varía en el espacio ni en el tiempo sea cual sea su escala de observación. Fueron estudiadas por Hurst (1951) y Mandelbrot (1969). Entre las aplicaciones que tienen las series de tiempo fractales para el estudio de las series financieras se encuentran entre otras características: el riesgo, la volatilidad y la eficiencia financiera.

Para estudiar este tipo de series temporales, los métodos clásicos de análisis como el análisis de Fourier en el dominio de la frecuencia o los diferentes análisis estadísticos convencionales no son adecuados. Una de las características de las series temporales fractales es que la función de autocorrelación cae lentamente, no llega a valer cero hasta muestras muy lejanas, es decir, muestras que están muy alejadas contienen información la una sobre la otra. Esto hace que la serie temporal tenga memoria a largo plazo. Por lo tanto, vamos a utilizar métodos de análisis fractales que intentan explotar la memoria a largo plazo de estas señales para poder caracterizar el comportamiento de los índices temporales a lo largo del tiempo y estimar cómo actuarán en un futuro.

1.2 Objetivos

El objetivo de este TFG es caracterizar series temporales en el ámbito económico utilizando métodos de análisis fractal de series temporales. Para conseguir este objetivo principal se van a fijar varios objetivos específicos.

- Objetivo específico 1: estudio e implementación de dos índices de análisis de series temporales fractales: exponente de Hurst y exponente $1/f$.
- Objetivo específico 2: análisis fractal de señales sintéticas. Cálculo del exponente de Hurst y el exponente $1/f$ en series de movimiento Browniano fraccionario.
- Objetivo específico 3: análisis fractal de series temporales reales financieras de Europa y Asia, segmentadas de acuerdo a criterios socio-económicos.
- Objetivo específico 4: análisis estadístico de los resultados utilizando estadística no paramétrica basada en *bootstrap*.

1.3 Estructura de la memoria

- Capítulo 2: Estado del Arte. Se van a introducir las siguientes series financieras que son: IBEX 35, CAC 40, DAX, FTSE 100, Nikkei 225, HSI, SSEC, NIFTY 50, AEX. Se estudiará cómo se analizan las series financieras.
- Capítulo 3: Análisis fractal de series temporales.
- Capítulo 4: Bases de datos. En este capítulo se van a explicar los datos reales que se han utilizado, más en concreto, los precios de cierre de los índices bursátiles mencionados en el **Capítulo 2** desde el 5 de enero de 2001 hasta el 2 de enero de 2019.
- Capítulo 5: Análisis estadístico. Se va a realizar un análisis mediante *bootstrap* y simulación de señales sintéticas.
- Capítulo 6: Resultados.
- Capítulo 7: Conclusiones y líneas futuras.

Capítulo 2: Estado del Arte

Un índice bursátil es un indicador numérico que está compuesto por un conjunto de valores que cotizan en la Bolsa; estos valores pueden variar de un año a otro debido al volumen de contratación o su capitalización bursátil. Cuando se habla de subida o bajada en Bolsa se hace referencia a lo que ha aumentado o disminuido el valor del índice. Su principal función es servir como referencia en el estudio de las posibles variaciones que existen en el precio de las empresas de un país y ver el estado de la economía de éste. Por lo tanto, permite saber el estado en el que se encuentra la Bolsa en cada instante de tiempo.

El primer índice bursátil del mundo tuvo lugar a finales del siglo XIX fue el *Dow Jones Industrial Average (Dow Jones)*. Su fundador fue Charles Henry Dow, editor del periódico *The Wall Street Journal*, junto a dos periodistas estadounidenses llamados Edward David Jones y Charles Milford Bergstresser. Se formó con las doce empresas más influyentes del momento en EEUU y se creó para evaluar la actividad financiera y económica del país en un determinado periodo de tiempo. En la actualidad es uno de los índices más importantes e influyentes y está formado por treinta empresas. [2]

Los índices de referencia son bastante útiles tanto para inversores como para fondos de inversión. Para estos últimos, el índice funciona como índice de referencia o *benchmark*, los fondos pasivos tratarán de igualar su valor, igualar su rentabilidad; los fondos de inversión activos, en cambio, intentarán superar su rentabilidad, es decir, superar su valor. Para los inversores, la funcionalidad de estos valores consiste en tener conocimiento de si los fondos en los que han invertido cumplen su función [3].

Existen dos formas de ponderación de un índice bursátil. Por un lado, se encuentra la ponderación por capitalización bursátil, en ella tiene importancia el número de acciones y su valor. Es la forma más fiel de representar lo que se desea medir. Este método posee una alta complejidad ya que cada empresa es computada por el peso específico que tiene. Por otro lado, existe la ponderación clásica, que es un método algo más simple, en el cual todas las empresas están ponderadas de igual forma sea cual sea su número de acciones y su valor, se calcula realizando la media ponderada del valor del porcentaje de bajada o subida de las acciones. La mayoría de índices están ponderados mediante el sistema de capitalización bursátil. [4, 5]

Los índices bursátiles se pueden dividir en índices de renta fija e índices de renta variable. Los índices de renta fija miden la variación de los títulos de renta fija, es decir, miden las fluctuaciones de valores en los cuales, cuando se realiza la inversión, se conoce la rentabilidad que se va a obtener; esto hace que el riesgo que se asume sea bajo. Un ejemplo son los bonos emitidos por entidades financieras. Por otro lado, los índices de renta variable son aquellos que miden la variación de los títulos de renta variable, es decir, las acciones de las empresas. Los índices de renta variable asumen mayor riesgo que los índices de renta fija y, por lo tanto, la rentabilidad que se adquiere con ellos es mucho mayor (pero no es seguro obtener esa rentabilidad). Este TFG se va a centrar en los índices de renta variable los cuales se pueden dividir en índices globales, nacionales e índices de sector. Los índices globales o regionales están formados por las acciones de empresas de una determinada zona geográfica o un país concreto (desarrollado o emergente). Los principales índices son:

- MSCI *World* (formado por las 1600 empresas más importantes de todo el mundo).
- *Euro Stoxx 50* (constituido por las 50 empresas más influyentes de Europa).
- MSCI *Emerging market index* (forman parte países emergentes).

En cuanto a los índices nacionales, están formados por las acciones de las empresas más representativas del país al que pertenecen. De esta manera, es muy fácil ver la situación del mercado que está experimentando un país en concreto. Son los índices más conocidos y los que más se utilizan. Los principales índices bursátiles nacionales son:

- Ibex 35 en España.
- FTSE MIB en Italia.
- CAC 40 en Francia.
- DAX 30 en Alemania.
- FTSE 100 en Reino Unido.
- AEX en Países Bajos.
- SMI en Suiza.
- S&P/TSX 60 en Canadá.
- *Dow Jones* en Estados Unidos (EEUU).
- S&P 500 en EEUU.
- Nasdaq 100 en EEUU.
- IPC en México.
- IBES en El Salvador.

- IGBC en Colombia.
- IBC en Venezuela.
- Bovespa en Brasil.
- *SSE Composite Index* (SSEC) en China.
- *Hang Seng Index* en China.
- Nikkei 225 en Japón.
- KOSPI en Corea del Sur.
- BSE Sensex en India.
- RTS en Rusia.
- *Australia Securities Exchange* (Australia).

Por último, en cuanto a los índices bursátiles sectoriales, son índices formados por empresas del mismo sector. De los ejemplos citados anteriormente, se puede encontrar el *Euro Stoxx Financials*, formado por empresas del sector financiero en Europa, el Nasdaq constituido por las principales empresas tecnológicas estadounidenses y el *Dow Jones* en el que se reúnen las empresas más influyentes del sector industrial de EEUU. [6, 7, 8]

Para llevar a cabo este estudio, se han tenido en cuenta los siguientes índices bursátiles nacionales asiáticos y europeos:

- **Europa**
 - IBEX 35
 - DAX
 - CAC 40
 - FTSE 100
 - AEX
- **Asia**
 - SSEC
 - HSI
 - NIFTY 50
 - NIKKEI 225

Las series financieras se analizan mediante métodos cuantitativos al ser series temporales que constan de datos históricos pasados. Hay dos tipos de análisis, por un lado, el análisis de series temporales, mediante el estudio de datos que ocurrieron en el pasado trata de

predecir los valores futuros. En concreto, para series financieras, los valores que se toman como información pasada son los precios de cierre. En este sentido el modelo de análisis no determina el impacto que va a tener la decisión del inversor, en este caso es el agente decisor, pero sí da a conocer el comportamiento de la señal que se está analizando. Por otro lado, se encuentra el análisis causal, en este análisis influyen factores externos en la explicación de la variable o variables que se pretende estudiar, de este modo la variable a analizar depende de otras. Una posible desventaja de esta forma de predicción es la necesidad de estimar los valores que tendrán lugar en un futuro antes de realizarla, además de ser necesaria la información de diversas variables y ser susceptibles a los cambios subyacentes al estar compuesta de varios factores. [9]

La caracterización de series temporales de índices bursátiles con métodos clásicos realiza una serie de asunciones que no siempre se cumplen en las series reales. Por ejemplo, los modelos que se asumen son, por lo general, estacionarios, con una cierta distribución estadística de los residuos, una serie de asunciones en cuanto a la distribución estadística de las variables, y una cierta forma de las funciones de autocorrelación. Sin embargo, se ha demostrado que los índices bursátiles suelen tener una estructura de series temporales fractales, en ocasiones causada por el efecto cascada. Parece razonable intentar caracterizar este tipo de series temporales utilizando métodos basados en el análisis fractal. En este TFG se implementan dos índices que caracterizan las propiedades de autocorrelación de largo plazo en series temporales.

Capítulo 3: Análisis Fractal de Series Temporales

Los métodos clásicos de análisis estadísticos, tanto en el dominio de la frecuencia como en el tiempo, realizan asunciones estadísticas que las series reales por lo general no cumplen. Este tipo de análisis son útiles, pero no proporcionan una caracterización completa debido a estas asunciones. En los últimos años se han introducido técnicas basadas en análisis fractales para analizar las series temporales financieras. De forma genérica, se puede pensar que las oscilaciones que producen los índices bursátiles dan lugar a unas señales temporales que tienen un comportamiento complejo e impredecible, por lo que parece razonable utilizar herramientas más adecuadas para su estudio.

La teoría del caos se ocupa de estudiar los sistemas dinámicos y afirma que, cualquier cambio inicial en el estado del sistema puede producir grandes consecuencias en el medio y

largo plazo, lo que conduciría a problemas en la predicción de los estados futuros del sistema, aun siendo éste determinista. Como los mercados financieros presentan una naturaleza turbulenta pueden regirse por las leyes de esta teoría, dentro de la cual existen pautas de comportamiento y fórmulas para estimar estas series temporales. [10]

3.1 Concepto y origen del término fractal

El concepto de fractal proviene del latín *fractus* (fractura), fue desarrollado por Benoît Mandelbrot en 1975. Un fractal es un elemento geométrico infinito, cuyo patrón es siempre igual con la independencia de la escala a la que se observe. Está formado por figuras más pequeñas con la misma distribución estadística y propiedades. Se puede afirmar que un fractal es un sistema dinámico ya que su comportamiento se basa en una norma fija y sufre una evolución a lo largo del tiempo. [11, 12]

Un fractal puede estar creado por la naturaleza como se observa en la **Figura 3.1.1**, como es el caso de las hojas de los helechos, las caracolas o incluso los copos de nieve, o pueden ser creados por el hombre mediante representaciones artísticas (**Figura 3.1.2**). La característica principal de estos elementos geométricos es la autoafinidad o autosimilitud. Los fractales pueden presentar tres tipos diferentes de autosimilitud.

- En primer lugar, la **autosimilitud exacta**, es decir, el elemento presenta la misma forma en cualquier escala.
- Por otro lado, la **cuasiautosimilitud**, en este caso la figura, a medida que la escala de observación varía, se parece, pero no con exactitud.
- Por último, la **autosimilitud estadística**, el fractal presenta una propiedad estadística que es conservada con la variación de escala.



Figura 3.1.1 Brócoli Romanesco, ejemplo de fractal encontrado en la naturaleza [13]

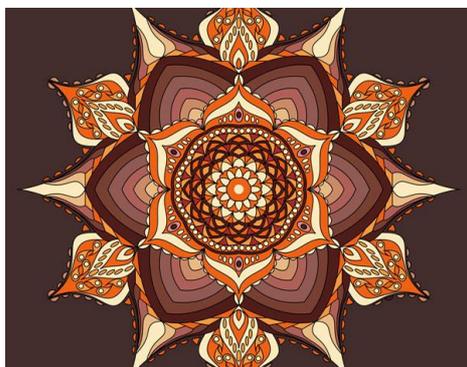


Figura 3.1.2 Representación artística, ejemplo de fractal creado por el hombre [14]

Otra propiedad particular que caracteriza a los fractales es la gran sensibilidad que presentan cuando se producen variaciones en las condiciones establecidas en un inicio. Esta propiedad les relaciona directamente con las series temporales financieras ya que éstas se encuentran muy influenciadas por los acontecimientos y noticias que ocurren en el exterior. Esto está relacionado con el efecto mariposa de la teoría del caos como se ha mencionado anteriormente: “El aleteo de las alas de una mariposa se puede sentir al otro lado del mundo”.

3.2 Series temporales fractales

Como se ha mencionado anteriormente, se puede considerar que las series temporales bursátiles son series temporales fractales debido a que su comportamiento es complejo y caótico. Pero a pesar de tener estas características siguen unas pautas de comportamiento y se pueden seguir fórmulas y pautas para predecir sus movimientos futuros. Por ejemplo, en las series temporales financieras se pueden extraer diferentes características que las clasifican como series estadísticamente auto similares con estructura fractal, como es el caso de las autocorrelaciones, la dependencia a largo plazo, la ley de potencia o su invariancia temporal.

Un ejemplo de serie temporal fractal es el movimiento Browniano fraccionario (*fractional Brownian motion*, fBm), este término fue introducido por Robert Brown al observar el movimiento aleatorio que producían las partículas de los fluidos. El fBm está estrechamente relacionado con los términos citados en el párrafo anterior, autocorrelación, ley de potencia, invariancia temporal, dependencia en el tiempo, debido a esto, es un modelo útil para estudios en campos como la economía.

Para entender el fBm hay que tener en cuenta dos premisas del movimiento Browniano:

- En el instante $t = 0$, la partícula empieza desde el origen.
- En cada instante de tiempo, la partícula se mueve de forma aleatoria con probabilidad $p = 1/2$ un desplazamiento igual a L o $-L$.

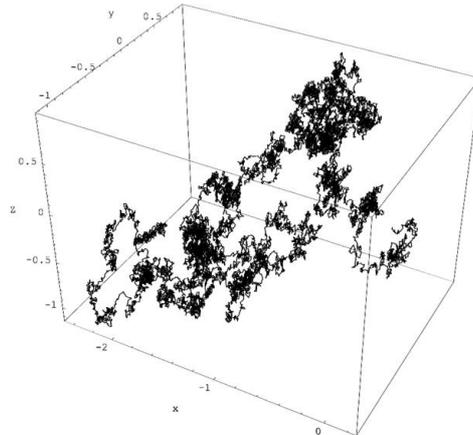


Figura 3.2.1 Movimiento browniano tridimensional para $0 \leq t \leq 2$ [15]

Para representar la posición en la que se encuentra en cada momento la variable aleatoria se va a hacer uso del término $B(t)$. $B(t)$ es una función que se comporta como un proceso aleatorio con incrementos independientes gaussianos que contiene una serie de propiedades:

- Con probabilidad $p = 1$, en $t = 0$, $B(0) = 0$.
- Los incrementos que experimenta la variable aleatoria tienen una distribución gaussiana con varianza $v = |t_2 - t_1|$ y media $m = 0$.

$$B(t_2) - B(t_1) \sim N(0, |t_2 - t_1|)$$

Además si no existe superposición entre los intervalos de tiempo (t_1, t_2) y (t_3, t_4) se puede afirmar que no hay dependencia entre $B(t_2) - B(t_1)$ y $B(t_4) - B(t_3)$

El fBm deriva del movimiento Browniano estándar, es un proceso de naturaleza gaussiana, estocástico, no estacionario de media $m = 0$ y se denota con $B_H(t)$.

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) \right\}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$$

$$B_H(0) = b_0 \text{ para } t = 0.$$

$$t > 0.$$

$B(t)$ es un movimiento Browniano estándar.

Γ es la función Gamma.

En esta función H va a ser el exponente de Hurst y tomará valores reales entre 0 y 1, más adelante, se explica con detalle el significado de estos.

Una vez introducido el fBm es importante enumerar sus características como se ha hecho anteriormente con el movimiento Browniano estándar.

- El fBm es estadísticamente auto similar, es decir:

$$B_H(ct) = c^H B_H(t)$$

Partiendo de que los dos miembros tienen la misma distribución:

c es una constante.

- La covarianza del fBm se representa por la siguiente función:

$$E\{B_H(t)B_H(s)\} = \frac{\sigma_H^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

Donde $\sigma_H^2 = \Gamma(1-2H) \frac{\cos(\pi H)}{\pi H}$.

El fBm es no estacionario ya que la covarianza no depende solo de $t-s$. Se puede obtener la varianza de la siguiente manera:

$$Var\{B_H(t)\} = \frac{\sigma_H^2}{2} (|t|^{2H} + |t|^{2H} - 0) = \sigma_H^2 |t|^{2H}$$

- Los incrementos del fBm es un proceso estacionario gaussiano de media $m=0$ con la varianza que se muestra a continuación: [16]

$$E\{|B_H(t) - B_H(s)|^2\} = \sigma_H^2 |t-s|^{2H}$$

3.3 Concepto de autocorrelación

La relación que presentan las series financieras con la teoría del caos hace que no se cumpla la independencia en los precios de la que habla la teoría de los mercados eficientes. Por ello, para analizar la dimensión fractal se va a hacer uso del término autocorrelación. La autocorrelación es una estimación que se usa para medir lo que se asemeja una señal a si misma desplazada en diferentes momentos de tiempo. Dicho de otro modo, es la dependencia que presenta una señal consigo misma en el tiempo.

La autocorrelación para señales continuas se puede definir de la siguiente manera:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

Donde $x(t)$ es la señal en el instante de tiempo t , t es el instante inicial que se va a utilizar y τ es el desplazamiento.

Una vez desarrollada la fórmula de la autocorrelación se puede calcular la densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ de la siguiente manera:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Siendo $X(t)$ estadísticamente auto similar, se puede expresar la anterior ecuación en el dominio de la frecuencia como una ley de potencia con la siguiente expresión:

$$S_X(\omega) \propto f^{-\beta}$$

De esta manera se establece la ley de potencia como un criterio de auto similitud. En el exponente $1/f$ que se explica en el punto **3.4.2 Exponente $1/f$** presenta invariancia de escala, lleva inherente ser auto similar y esto produce una estructura fractal en las señales temporales en las que está asociado. Con esto se puede afirmar que la ley de potencia es otro factor clave para determinar si una serie de tiempo es auto similar o no.

Como se ha llegado a la conclusión que el fBm no es un proceso estacionario no se puede calcular su densidad espectral de potencia de la forma tradicional. Con la siguiente expresión se saca un espectro promediado: [16]

$$S_{B_H}(\omega) = \frac{\sigma_H^2}{|\omega|^\beta} = \frac{\sigma_H^2}{|\omega|^{2H+1}}$$

En las series temporales financieras para determinar la autocorrelación se utiliza también el exponente de Hurst, esta herramienta se va a explicar más detalladamente en el siguiente punto.

3.4 Índices de análisis fractal utilizados

3.4.1 Exponente de Hurst

El exponente de Hurst está directamente relacionado con el concepto de dimensión fractal. Debido a que los elementos fractales están formados por subelementos con la misma distribución estadística y forma, es muy complejo realizar su medición con las herramientas clásicas. Por este motivo, nace el concepto de dimensión fractal. La dimensión fractal nos indica de qué forma una línea fractal ocupa un espacio del plano. Las dimensiones euclídeas o topológicas son siempre números enteros que van del 0 al 3: 0 cuando se habla de un punto, 1 cuando tiene que ver con líneas, 2 para planos y 3 para objetos con volumen. En cambio, la dimensión fractal va a ser un número fraccionario.

Para profundizar más en la ecuación de la dimensión fractal en el caso particular de las series económicas se utilizará la siguiente ecuación:

$$D = d + 1 - H$$

$$D = 2 - H$$

Siendo d la dimensión euclídea o topológica, en este caso vale 1; H el exponente de Hurst cuyos valores se encuentran entre 0 y 1; y D la dimensión fractal que se desea obtener. En este caso D se encuentra entre 1 y 2, y mide la rugosidad de la señal. Si el valor de D está más cerca de 2, la señal presenta mayor rugosidad, es decir, ocupa mayor espacio y se asemeja más a un plano, y en relación con las señales financieras significa que es menos tendencial. Por el contrario, si el valor de D tiende a 1, la señal financiera tendrá un comportamiento más tendencial, debido a que presenta menor rugosidad y se asemeja más a una recta. [12, 16]

A continuación, se va a explicar uno de los componentes principales de la ecuación anterior: el exponente de Hurst. El exponente de Hurst fue estudiado por Harold Edwin Hurst, un hidrólogo que realizó estudios sobre el nivel del río Nilo en 1907 para que sus reservas no se agotaran ni se desbordaran. El exponente mide la independencia de las series temporales y sirve para diferenciar fractales y estimar la autocorrelación en una serie de datos. [17]

Mandelbrot utilizó el estudio de Hurst para su análisis de rango re-escalado $\left(\frac{R}{S}\right)$:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n = cnH$$

$$\ln\left(\frac{R}{S}\right)_n = \ln(cnH)$$

$$\ln\left(\frac{R}{S}\right)_n = \ln(c) + H\ln(n)$$

$\left(\frac{R}{S}\right)$ es la notación utilizada para el estadístico rango re-escalado.

c es una constante de proporcionalidad.

n es el número de datos por intervalo.

H es el coeficiente de Hurst.

Como se ha mencionado anteriormente, las series de tiempo fractales se caracterizan por la invariancia temporal, a consecuencia de esto, Mandelbrot demostró en 1975 que el rango de valores que podía tomar el exponente de Hurst se encontraba entre 0 y 1.

Dependiendo del valor de H tenemos diferentes resultados:

- Si $0 \leq H \leq 1/2$ las series temporales se comportan de forma antipersistente o anticorrelacional. Son señales muy irregulares y de alta frecuencia. Cuando la tendencia ha sido durante un periodo de tiempo ascendente, este valor supone que va a ir seguida de un periodo descendente y lo mismo pasa en el sentido inverso. Se dice que este tipo de series presentan ruido rosa y se encuentran en abundancia en la naturaleza.
- Si $H = 1/2$ se dice que la serie presenta ruido blanco. El proceso no presenta correlación, los datos son independientes y aleatorios. Es decir, cumple con las propiedades de un movimiento Browniano estándar.
- Si $1/2 \leq H \leq 1$, la serie temporal es persistente o correlacionada, la tendencia se mantiene. Si la serie temporal está compuesta de movimientos alcistas, estos continuarán en el tiempo y viceversa si los movimientos tienen carácter bajista. La serie temporal presenta ruido negro y abunda en la naturaleza en forma de movimientos que se repiten en el tiempo.
- Si $H = 1$, la serie se comporta de manera determinística, presenta ruido negro. Se relaciona también como las anteriores con procesos cíclicos que tienen lugar en el largo plazo, como ocurre en la Bolsa con la variabilidad de los precios.

En el presente TFG se ha creado un módulo propio con funciones para calcular los índices fractales, se encuentra en un repositorio *github* en la siguiente url: <https://github.com/LauraMorenoGo/TFG>

3.4.2 Exponente $1/f$

El exponente espectral β o exponente $1/f$, mencionado en el punto **3.2 Series temporales fractales**, se define como la pendiente calculada del espectro de potencia de Fourier en un gráfico log-log en 2D. Presenta la variabilidad de la serie que se está analizando como una función de escala espacial y/o longitud de onda, donde la potencia en la longitud de onda más corta y la amplitud de rugosidad miden la varianza de la series en la escala espacial que corresponde. [18]

El código para el cálculo de este exponente se encuentra en el repositorio *github* anteriormente citado.

Existe una relación entre el exponente de Hurst y el exponente $1/f$. El exponente de Hurst se puede calcular también con el valor del exponente espectral ya que el fBm se corresponde con el exponente $1/f$ con $\beta = 2H + 1$, tomando $1 < \beta < 3$ (toma estos valores ya que $0 < H < 1$), despejando H :

$$H = \frac{\beta - 1}{2}$$

Entre los valores que puede tomar β es interesante comentar algunos de ellos:

- Si $\beta = 0$, significa que cada valor de la serie temporal es independiente de muestras pasadas, a este fenómeno se le denomina ruido blanco.
- Si $\beta = 1$, la señal muestra invariancia de escala, es muy común encontrar este tipo de procesos en la naturaleza. Se denomina ruido rosa y su comportamiento varía bastante ya que puede mostrar cambios predecibles y cambios inesperados. Este ruido es muy común en señales fisiológicas, fenómenos naturales, música, fluctuaciones en economía, etc. Está relacionado con el efecto cascada de las series temporales.
- Si $\beta > 2$, significa que la señal presenta ruido negro. Este tipo de ruido está presente en señales financieras cuando se producen caídas en los mercados. [16]

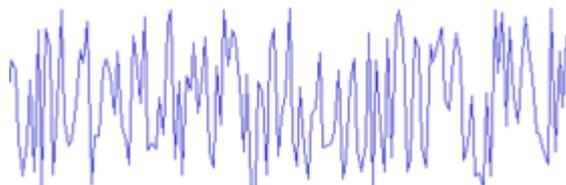


Figura 3.4.2.1 Ruido blanco [19]

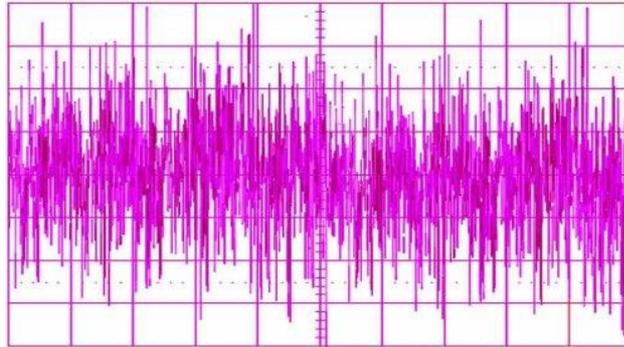


Figura 3.4.2.2 Ruido rosa [20]



Figura 3.4.2.3 Ruido negro [21]

Capítulo 4: Bases de datos

Una serie temporal bursátil es una secuencia de valores medidos en un periodo de tiempo. Las señales bursátiles miden la variación de precios existente en un determinado valor. Cuando se realiza un estudio de series temporales financieras, se intenta identificar posibles patrones en su comportamiento que han ocurrido en un pasado y que pueden ser de gran utilidad para estimar su comportamiento futuro.

Para realizar el estudio de este TFG ha sido necesario el uso de datos económicos, se han escogido series temporales diarias, más en concreto nueve índices bursátiles, cinco de ellos de Europa y cuatro de Asia, de los cuales se han recogido sus valores de cierre diarios. Estos datos históricos se han obtenido de la página web *Investing*. El criterio para la decisión de la fecha de inicio (5 de enero de 2001) ha sido la elección de una fecha con valor de precio de cierre que todos los índices que habían sido elegidos compartiesen. Debido a ese criterio se han descartado fechas anteriores o índices como *Dow Jones*, *S&P 500* no se han podido utilizar para sacar resultados en este estudio debido a que no encajaban en las fechas de inicio elegidas como referencia. En cuanto a la fecha final (2 de enero de 2019), la decisión de su elección fue la presencia del inicio del año 2019. Los datos extraídos de la página web fueron pasados a documentos con formato .csv para más tarde poder hacer uso de ellos en los *scripts* que se han realizado en lenguaje de programación Python. Gracias a estos *scripts* se accede a los ficheros con las fechas y los precios de cierre de cada índice, se leen y a partir de ahí se realizan diferentes análisis con ellos. En las siguientes figuras se puede ver la evolución de precios de cada índice.

Índice	Abreviación	País	Número de empresas que lo componen
Unión de la palabra iberia + índice	IBEX 35	España	35
<i>Deutscher Aktienindex</i>	DAX	Alemania	30
<i>Cotation Assistée en Continu</i>	CAC 40	Francia	40
<i>Financial Times Stock Exchange</i>	FTSE 100	Reino Unido	100
<i>Amsterdam Exchange Index</i>	AEX	Países Bajos	25
<i>Shanghai Stock Exchange Composite</i>	SSEC	China	50
<i>Hang Seng Index</i>	HSI	China	45
	NIFTY 50	India	50
<i>Nikkei Heikin Kabuka</i>	NIKKEI 225	Japón	225

Se ha considerado oportuno dividir cada índice bursátil en cuatro segmentos para estudiar cada uno por separado. La división de los segmentos ha sido la siguiente:

- Naranja: 05/01/2001 – 02/01/2004.
- Verde: 02/01/2004 – 02/01/2008.
- Rojo: 02/01/2008 – 02/01/2014.
- Morado: 02/01/2014 – 02/01/2019.

4.1 IBEX 35

El IBEX 35 es el índice nacional del mercado bursátil español. Se fundó el 14 de enero de 1992. Las siglas IBEX provienen de la unión de dos palabras, iberia e index. Como su nombre indica, está formado por las 35 empresas de mayor peso en España algunas de las compañías que lo forman son Inditex, BBVA, Telefónica, Indra, Ferrovial, etc. Se elaboró tomando la cotización de las empresas a día 29 de diciembre de 1989 como referencia. La formación del índice se revisa cada seis meses de manera regular por el Comité Asesor Técnico del índice y si el mercado lo requiere se revisa de forma extraordinaria. [22]

Para estudiar su evolución se va a realizar un análisis de los momentos que han existido de crisis que hayan podido provocar una caída de los precios y, por otro lado, también se van a destacar los momentos en los que la economía se ha recuperado. En la **Figura 4.1** se pueden observar los siguientes segmentos: [23, 24]

- **05/01/2001 – 02/01/2004:** en este periodo de tiempo destacan varios momentos importantes que afectaron a la economía española. En primer lugar, desde el inicio de la representación hasta el año 2002 aproximadamente, hay una caída de precios cuyo origen se encuentra en el año 2000. Esta bajada se debe a la crisis tecnológica que tuvo lugar en dos oleadas diferentes, también afectó la crisis en Argentina y Brasil y, una serie de alborotos empresariales (bajada del 59,39%). Otra fecha bastante relevante en este segmento y que llevó consigo una gran caída de precios fue el 11 de septiembre de 2001 cuando se produjo el atentado terrorista en Estados Unidos (caída de 28,41%).
- **02/01/2004 – 02/01/2008:** el valor más alto lo consiguió el 8 de noviembre de 2007, a partir de ese momento se produce una crisis financiera mundialmente, que trajo consigo el estallido de la burbuja inmobiliaria, la crisis de la deuda de

Europa y la quiebra de *Lehman Brothers* (la caída fue del 59,9% en cuatro años).

- **02/01/2008 – 02/01/2014:** una de las peores bajadas tuvo lugar en 2008 con una caída de 39,23%. El 10 de mayo del 2010 se observa una subida en el valor del precio de cierre (14,43%) debido a asuntos que favorecían al euro. El 9 de junio de 2012 se experimenta un gran descenso debido a que España tuvo que pedir el rescate del euro.
- **02/01/2014 – 02/01/2019:** la sesión que tuvo mayor descenso en el precio fue el 24 de junio de 2016 (caída del 12,35%) debido a las noticias del *Brexit* que anunciaban la separación de Reino Unido y la Unión Europea.

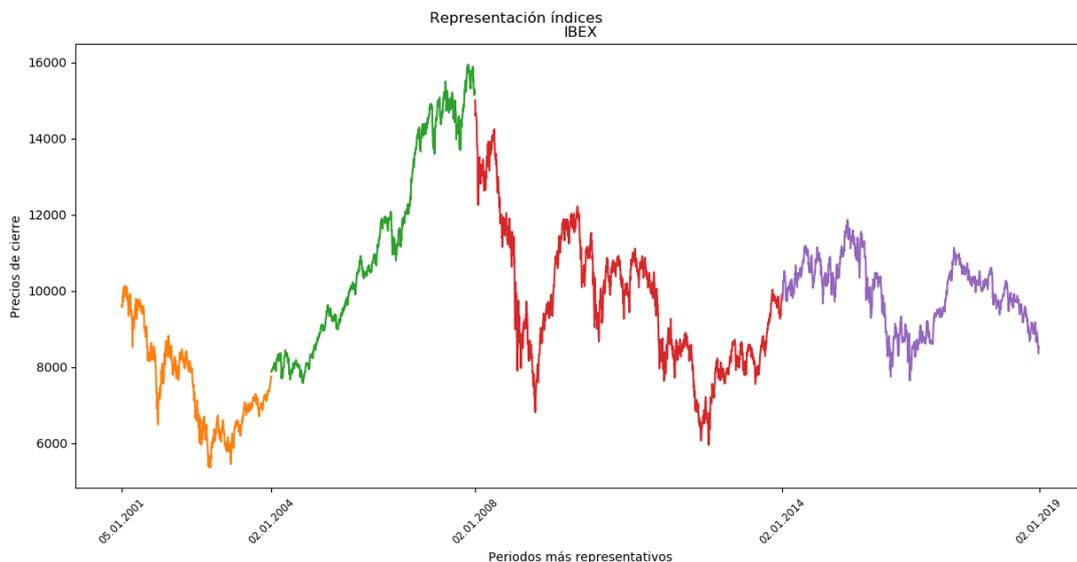


Figura 4.1 Evolución histórica IBEX 35

4.2 DAX

El término DAX proviene de *Deutscher Aktienindex*. Es el índice de referencia en Alemania. Está formado por las 30 empresas más importantes del país como son Allianz, Adidas, Siemens, SAP, Volkswagen Group, Bayer, BWW, etc. Se desarrolló por la Asociación de Bolsas de Valores de Alemania y se fundó el 31 de diciembre de 1987 y fue el sucesor del índice *Börsen-Zeitung* (1959). [25]

En la **Figura 4.2** se pueden observar las diferentes variaciones de precios que han existido a lo largo de la historia del índice DAX entre los años 2001 y 2019: [26, 27]

- **05/01/2001 – 02/01/2004:** para la historia del índice bursátil DAX, el segundo peor año que ha tenido ha sido el año 2002 con una pérdida del 43,94%. El 12 de marzo de 2003 debido a la crisis tecnológica de las puntocom, se produjo una caída del 72,7% después de que el índice alcanzase sus máximos el 7 de marzo del año 2000.
- **02/01/2004 – 02/01/2008:** después de la crisis tecnológica que tuvo lugar en el año 2003, el DAX experimentó una subida hasta el año 2008. Durante la semana del 6 al 10 de octubre del 2008, el índice DAX experimentó una bajada debida a la crisis financiera y a la quiebra de *Lehman Brothers*. En cambio, el 13 de octubre de ese mismo año, consiguió subir un 11,40% gracias al rescate que tuvo lugar en la zona euro para conseguir que el sistema financiero saliese de su estado de bloqueo.
- **02/01/2008 – 02/01/2014:** en 2009, después del estallido de la crisis financiera, empieza a experimentar un incremento de los precios que llega hasta el presente. Hay que señalar que el 6 de marzo de 2009 tuvo una caída de 54,8% y dio lugar a un nuevo mínimo en la evolución histórica del DAX. El 2 de mayo de 2011 tuvo una subida del 105,3%. El 22 de mayo de 2013, el DAX cerró por encima de los 8500 puntos (subida del 68,18%).
- **02/01/2014 – 02/01/2019:** a partir de junio de 2014 el índice experimentó una gran recuperación y alcanzó varios máximos. En 2015 tienen lugar los máximos históricos del índice bursátil DAX. En junio de 2016, con la noticia del sí de la salida de Reino Unido de la Unión Europea, el índice cayó un 6,82%. Como se puede observar el DAX en 2017 experimentó una subida del 60% respecto a los valores que tuvo en 2008.

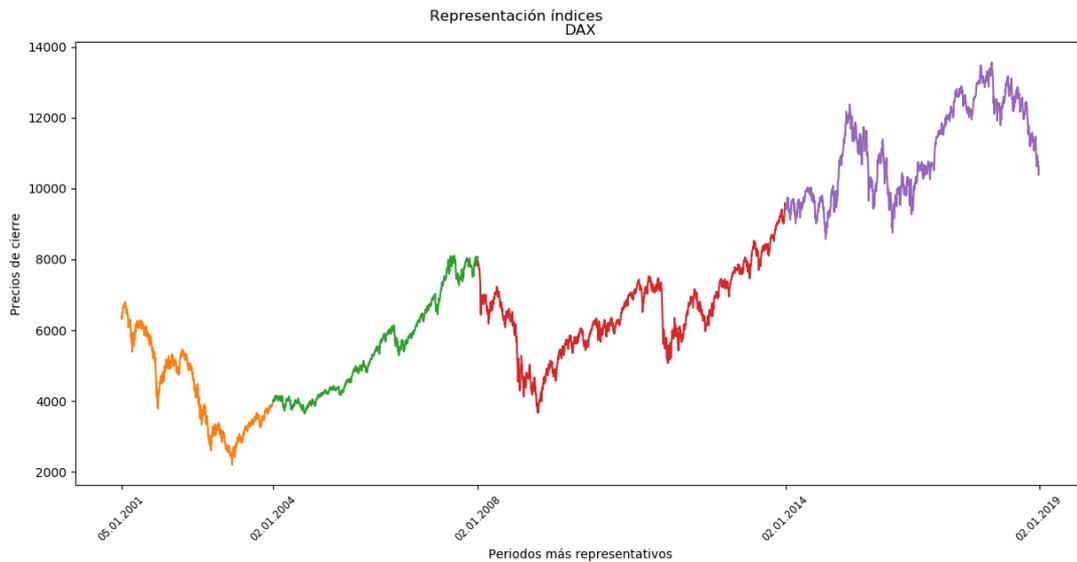


Figura 4.2 Evolución histórica DAX

4.3 CAC 40

El CAC 40 se fundó el 31 de diciembre de 1987, sus siglas vienen de *Cotation Assistée en Continu*. Es el índice más importante en Francia y es un valor muy representativo de la evolución europea debido a la importancia de Francia en la economía de Europa, además, sirve de referencia para el índice europeo *Euronext*. El CAC 40 está formado por 40 empresas entre las que se encuentran Renault, L'oreal, Carrefour, Capgemini, Engie, etc. [28]

La **Figura 4.3** muestra su comportamiento desde 2001:

- **05/01/2001 – 02/01/2004:** el CAC 40 consiguió en el año 2000 su gran máximo, pero tras los atentados terroristas en 2001, el índice se desplomó llegando a alcanzar el 12 de marzo de 2003 sus peores cifras debido al estallido de la burbuja de Internet.
- **02/01/2004 – 02/01/2008:** desde sus peores valores en 2003, el CAC 40 ha ido aumentando a medida que pasaban los años hasta el 24 de enero de 2007, cuando alcanzó un máximo que no lograba desde mayo de 2001.
- **02/01/2008 – 02/01/2014:** el 6 de octubre de 2008 debido a la crisis internacional financiera, el CAC 40 experimentó la mayor caída de su historia provocada por

las grandes pérdidas a las que se enfrentaba.

- **02/01/2014 – 02/01/2019:** tras el referéndum del *Brexit* que tuvo lugar el 23 de junio de 2016 todos los índices europeos sufrieron un descenso en sus precios, esto hizo que el índice CAC 40 también se viera afectado por ello. En 2018, debido a las continuas noticias en las que se anunciaba el enfrentamiento entre China y Estados Unidos debido a su guerra comercial, el CAC 40 experimentó dos semanas de continuas bajadas que al final fueron solventadas el 25 de octubre de ese mismo año.

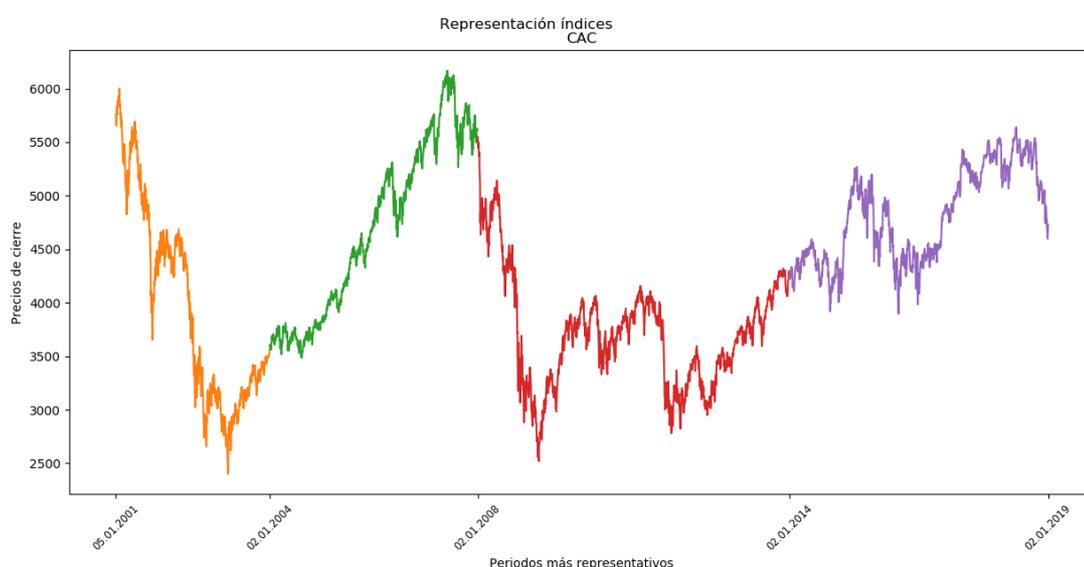


Figura 4.3 Evolución histórica CAC 40

4.4 FTSE 100

El FTSE 100 proviene de *Financial Times Stock Exchange*, también se le conoce con el nombre de *Footsie*. Es el índice más importante de Reino Unido en el que están 100 empresas como Vodafone, Barclays, Marks & Spencer, Tesco, etc. Cada trimestre se revisan sus valores. [29]

A continuación, en la **Figura 4.4** puede observarse la evolución del principal índice londinense a lo largo de los años:

- **05/01/2001 – 02/01/2004:** en marzo del año 2001 tanto Reino Unido como Europa se ven involucrados en la crisis tecnológica, se puede observar las consecuencias de este suceso en el gráfico. Además, en el mes de septiembre del mismo año experimentó una bajada debido a los ataques terroristas que tuvieron lugar en Estados Unidos. El 12 de marzo de 2003 destaca otro descenso en los valores del índice FTSE 100, que alcanzó el valor más bajo de la historia, esto se debió al comienzo de la guerra de Iraq.
- **02/01/2004 – 02/01/2008:** entre los años 2006 y 2007 se puede observar que el índice evolucionó con un comportamiento de diente de sierra. Debido al estallido de la crisis económica, el FTSE 100 sufrió un descenso en sus precios a partir de 2008.
- **02/01/2008 – 02/01/2014:** durante los primeros años de la crisis (2008-2009), el *Footsie* experimenta continuas bajadas. Pero en el año 2010 se empieza a observar una continua recuperación que está corregida por alguna bajada en los valores de cierre. A pesar de esto, 2010 fue un año que tiende al alza, seguido de 2011 que fue un año mucho más estable.
- **02/01/2014 – 02/01/2019:** en 2015 consiguió un máximo histórico debido al buen comportamiento que se estaba registrando de las compañías del sector turístico y compañías dedicadas a la exportación. El año 2016 fue muy bueno para el FTSE 100 puesto que tuvo los mejores valores de todos los índices europeos después de la bajada por la noticia de la salida de Europa. El 6 de noviembre de 2016 debido a una gran subida en la bolsa de Estados Unidos, Reino Unido tuvo un ascenso en sus precios ya que se encontraba frente a una situación de optimismo. Fue su valor de cierre más alto desde 2001.

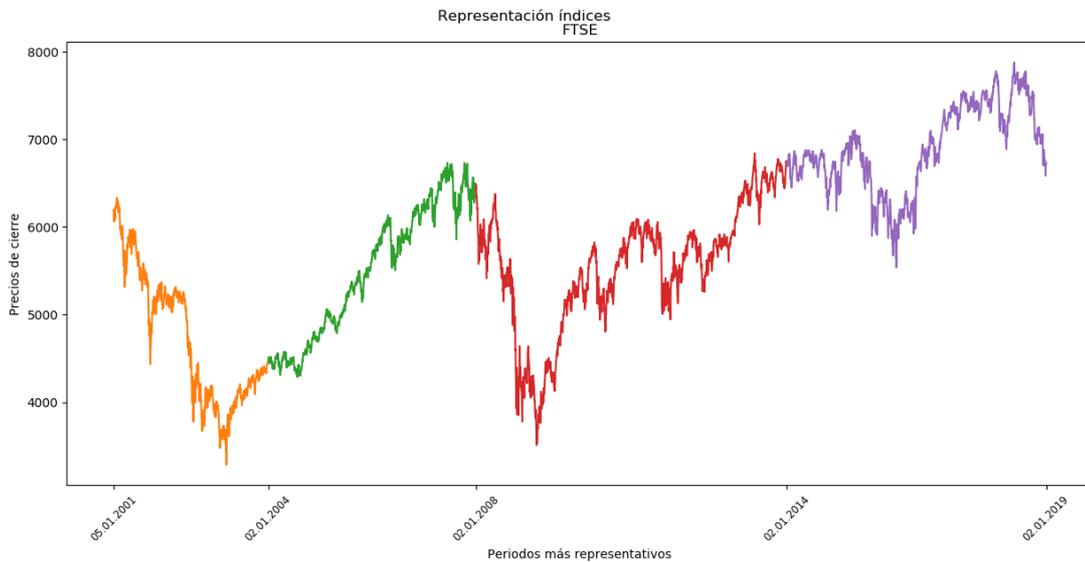


Figura 4.4 Evolución histórica FTSE 100

4.5 AEX

El término del índice AEX proviene de *Amsterdam Exchange Index*. Este índice bursátil es el más representativo de los Países Bajos y se fundó en 1983. Está formado por las 25 empresas más representativas del país entre las que se encuentran Phillips, Aegon, Tom Tom, etc. Se revisa una vez al año. [30]

Gracias a este índice bursátil se puede realizar una estimación del comportamiento de la bolsa de Ámsterdam como se puede observar en la **Figura 4.5**: [31]

- **05/01/2001 – 02/01/2004:** a pesar de la caída del 26,4% que tuvo lugar en el 2001 debido a los atentados de las torres gemelas, los mínimos históricos del índice bursátil más relevante en Países Bajos, tuvieron lugar en el año 2003 con la segunda guerra del Golfo, en el gráfico se puede observar este descenso de los precios.
- **02/01/2004 – 02/01/2008:** en el año 2007 se experimenta una continua subida que se frena en 2008 con la llegada de la crisis financiera.
- **02/01/2008 – 02/01/2014:** durante los años de la crisis se observa un descenso bastante grande que afecta a los valores de todos los índices. A pesar de que

poco a poco durante este periodo de tiempo va mejorando su comportamiento, entre los años 2011 y 2014 debido a los diferentes rescates que tienen lugar en Europa, el índice AEX 25 se ve afectado.

- **02/01/2014 – 02/01/2019:** en 2016 a causa de los enfrentamientos comerciales entre China y Estados Unidos el índice experimenta una caída. Además, la amenaza con la salida de Reino Unido de Europa no deja indiferente a ningún índice europeo.

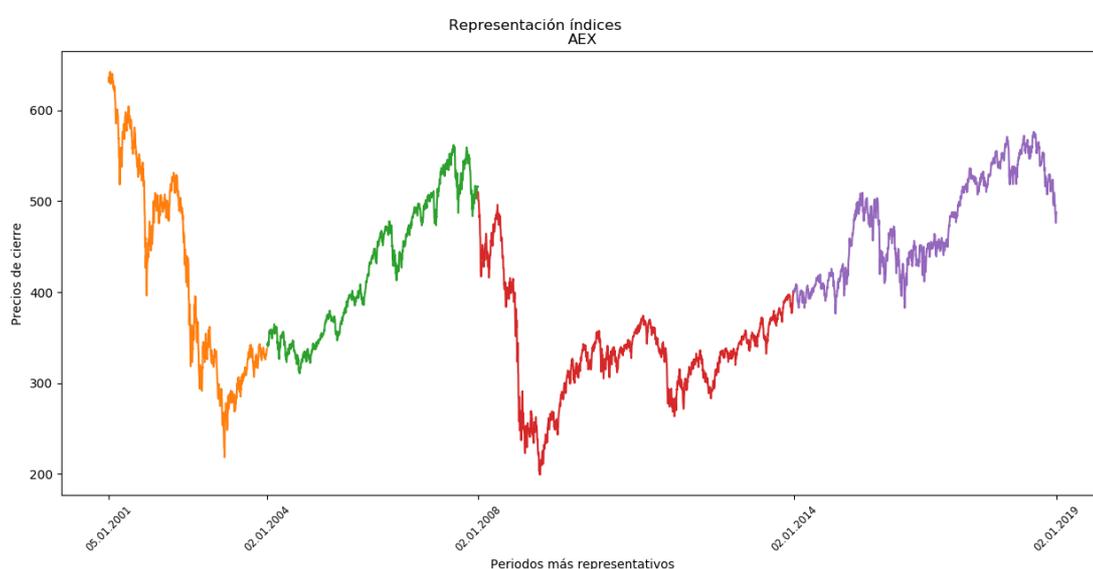


Figura 4.5 Evolución histórica AEX

4.6 SSEC

Shanghai Stock Exchange Composite es uno de los principales índices de China. Se fundó el 26 de noviembre de 1990 y entre sus 50 valores pueden encontrarse compañías como Air China, Hua Xia Bank, Industrial and Commercial Bank of China, Orient Group, etc. [32]

En la **Figura 4.6** se va a observar el comportamiento existente en el periodo de tiempo 2001-2019 del índice SSEC: [33, 34, 35, 36]

- **05/01/2001 – 02/01/2004:** después del máximo que alcanzó en 2001, el índice bursátil de Shanghái sufrió un descenso continuado desde el año 2001 hasta el 1

de febrero del 2005 exactamente.

- **02/01/2004 – 02/01/2008:** para parar la caída que sufrió el SSEC hasta 2005, se prohibieron las nuevas oficinas de propiedad industrial. En septiembre de 2007 la economía China se coloca en el tercer puesto de economías del mundo, superando así a la alemana. El SSE *Composite* consiguió su máximo histórico el 16 de octubre de 2007, llegando a 6124,044 puntos. Más tarde, con la crisis financiera que tuvo lugar en 2008 sufrió una gran bajada.
- **02/01/2008 – 02/01/2014:** como se ha mencionado en el anterior apartado, debido al estallido de la burbuja financiera, en 2008 el índice cayó un 65% desde su máximo histórico. En febrero de 2011, China consigue superar a Japón y se convierte en la mayor economía del mundo. Además, desde el inicio de 2013 hasta 2015, el índice mostró una revalorización del 250%, esto muestra que todavía era un mercado inmaduro.
- **02/01/2014 – 02/01/2019:** en julio de 2015 el comportamiento del índice no había sido tan bajo desde agosto de 2009, tuvo una caída muy grande debido al miedo por el estallido de una posible burbuja en China. En junio de 2018 alcanzó unos niveles muy bajos debido al conflicto entre China y EEUU.

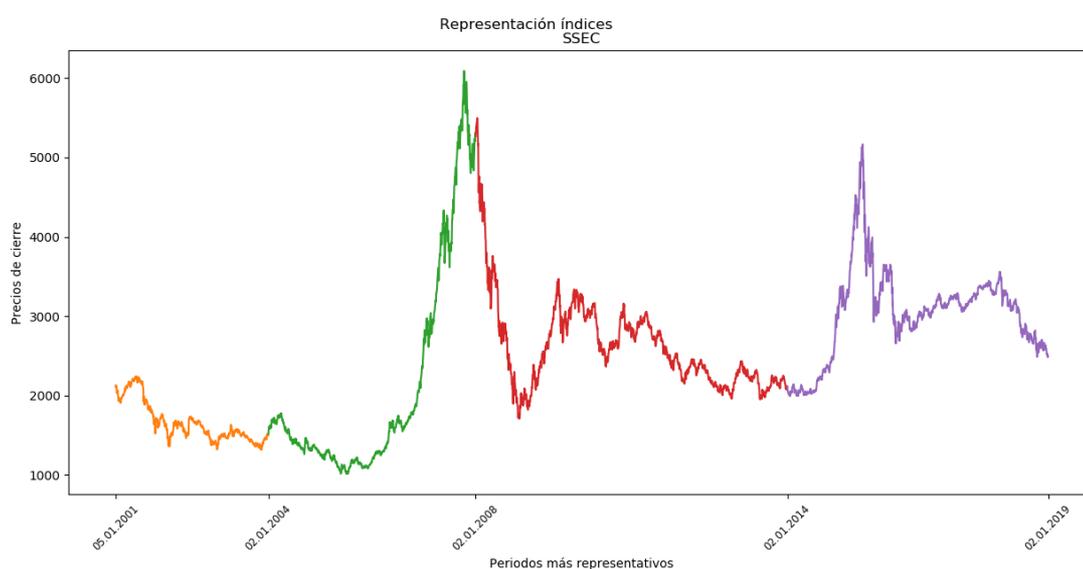


Figura 4.6 Evolución histórica SSEC

4.7 HSI

Hang Seng Index se creó en 1969 gracias al Banco de *Hang Seng*. El índice HSI es otro de los principales de la Bolsa en China y está formado por las 48 empresas más influyentes como por ejemplo, China Coal Energy, China Unicom, COSCO Pacific, etc. [37]

Se puede analizar la evolución del índice bursátil HSI y, por lo tanto, de la economía de Hong Kong, en la **Figura 4.7**: [38, 39, 40]

- **05/01/2001 – 02/01/2004:** en 2001 debido a las continuas pérdidas que sufría *Wall Street* el índice *Hang Seng* se vio afectado y sufrió descensos en su precio. A partir de finales del 2003 comenzó a subir y durante el 2004 tuvo una gran importancia en la economía a nivel mundial.
- **02/01/2004 – 02/01/2008:** su primer máximo se produce en 2005, de ahí comienza un ascenso hasta noviembre de 2007. Entre el año 2007 y 2008 se experimentó una caída en los precios que produce una corrección de la anterior subida mencionada.
- **02/01/2008 – 02/01/2014:** la bajada destacada en el anterior segmento, alcanza su mínimo en febrero de 2009. Desde ese momento hasta el año 2015 el índice tuvo un comportamiento mucho más estable en el que se pueden ver subidas y bajadas.
- **02/01/2014 – 02/01/2019:** en agosto de 2015 se produjeron una serie de bajadas en el valor del índice debido a la devaluación que sufrió el Yuan por parte del Banco Popular de China. Además, como se menciona en el resto del índice, las noticias internacionales afectan en menor o mayor medida a los índices de todo el mundo, por lo tanto, el HSI se vio afectado también en 2016 con la noticia del *Brexit*. En 2017 la Bolsa China evolucionó muy bien, por eso se puede observar el continuo ascenso que experimenta en ese periodo.

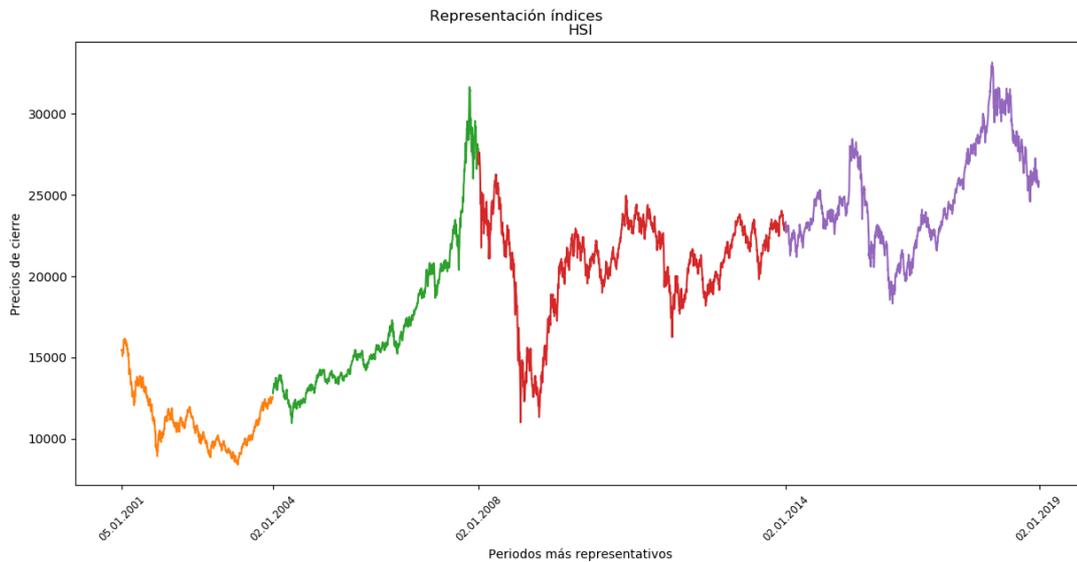


Figura 4.7 Evolución histórica HSI

4.8 NIFTY 50

El Nifty 50 es el índice referente en India, se fundó en 1996. Está formado por 50 empresas como Tata Motors, Indian Oil, AXIS Bank, UPL, Zee Entertainment, etc. [41]

La **Figura 4.8** nos va a mostrar la evolución del comportamiento del Nifty 50, se van a detallar los momentos más relevantes en cada uno de los periodos en los que se ha considerado oportuno dividir el índice: [42, 43]

- **05/01/2001 – 02/01/2004:** a pesar de la bajada de precios debida a las noticias relativas a los atentados terroristas ocurridos en Estados Unidos en 2001, en este periodo el índice Nifty 50 se comporta de manera bastante estable. No presenta subidas ni caídas fuertes.
- **02/01/2004 – 02/01/2008:** durante los años 2007 y 2008 debido a la crisis financiera que afectó a todo el mundo, el índice sufrió una tendencia bajista.
- **02/01/2008 – 02/01/2014:** en este periodo la participación del principal índice de India descendió de manera importante en la capitalización del mercado al que pertenece.

- **02/01/2014 – 02/01/2019:** tras permanecer en una continua tendencia alcista que arrastraba de años anteriores, a finales del año 2015 y principios del 2016, el índice indio continúa con esta tendencia alcanzando sus máximos históricos en 2018. Hay que destacar que en el 2015 experimentó una caída en el precio debido a la devaluación del Yuan. En 2016 también sufrió una bajada en el precio de sus valores debido al resultado de las elecciones de Estados Unidos y la debilidad que estaba sufriendo en ese momento la rupia.

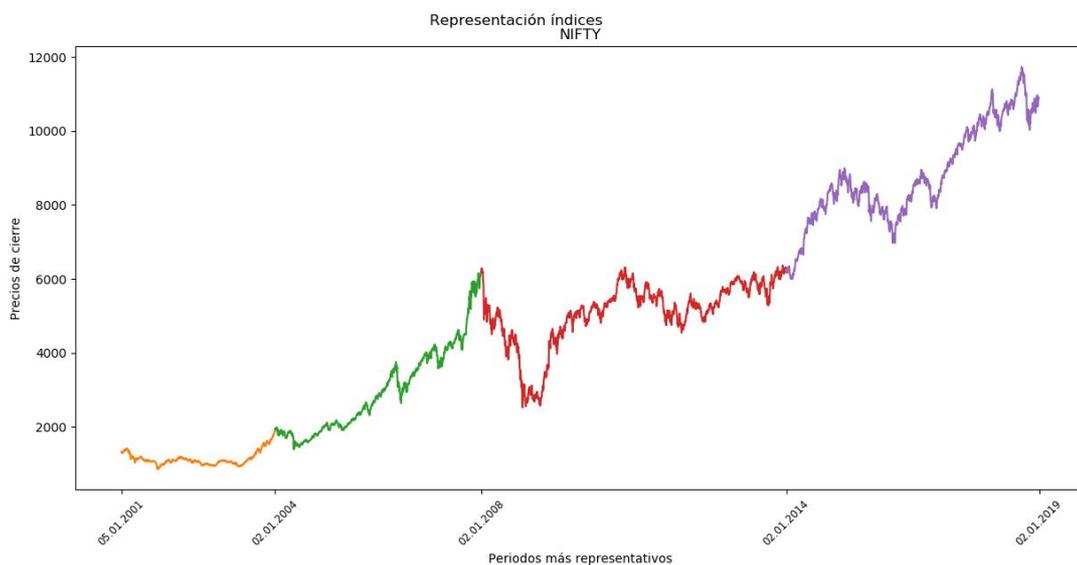


Figura 4.8 Evolución histórica Nifty 50

4.9 NIKKEI 225

Nikkei Heikin Kabuka, es el principal índice bursátil en Japón, sirve de referencia para todos los inversores del mundo, en concreto, para los occidentales, puesto que cuando abre la Bolsa, cuentan con la referencia del estado de los precios de cierre del mercado asiático. Empezó a cotizar el 7 de septiembre de 1950 y se revisa periódicamente. Está formado por 225 valores entre los cuales están Canon, Sony, Toyota, Nissan, etc. [44]

En la **Figura 4.9** se muestra la evolución que ha seguido desde el año 2001 hasta el 2019 el índice más conocido del mercado japonés: [45, 46, 47, 48]

- **05/01/2001 – 02/01/2004:** con la noticia del 11 de septiembre de 2001 el índice japonés se desplomó hasta el año 2002 que sufrió una corrección. En los meses

de abril y mayo el índice bursátil de Japón volvió a caer. Además, en el 2003 se recoge una caída del 30%.

- **02/01/2004 – 02/01/2008:** el 17 de enero de 2006 debido a una sospecha de una posible estafa de valores, el índice Nikkei 225 cayó un 2,8%.
- **02/01/2008 – 02/01/2014:** tras el terremoto sufrido en Japón en marzo de 2011, el índice bursátil sufrió una bajada del 10%. Continuó disminuyendo el valor hasta llegar a mínimos inferiores de los alcanzados en 2009. En total, en el año 2011 la caída fue del 17% debido al accidente nuclear en Fukushima. En el año 2013 se produjo una gran subida como resultado de la nueva política monetaria y fiscal.
- **02/01/2014 – 02/01/2019:** en noviembre de 2016 el Nikkei 225 se desplomó como consecuencia de los resultados de las elecciones de Estados Unidos que proclamaban como nuevo presidente a Donald Trump. En 2018 vuelve a sufrir una caída debido al futuro de la economía global y el conflicto que mantiene Trump con China.

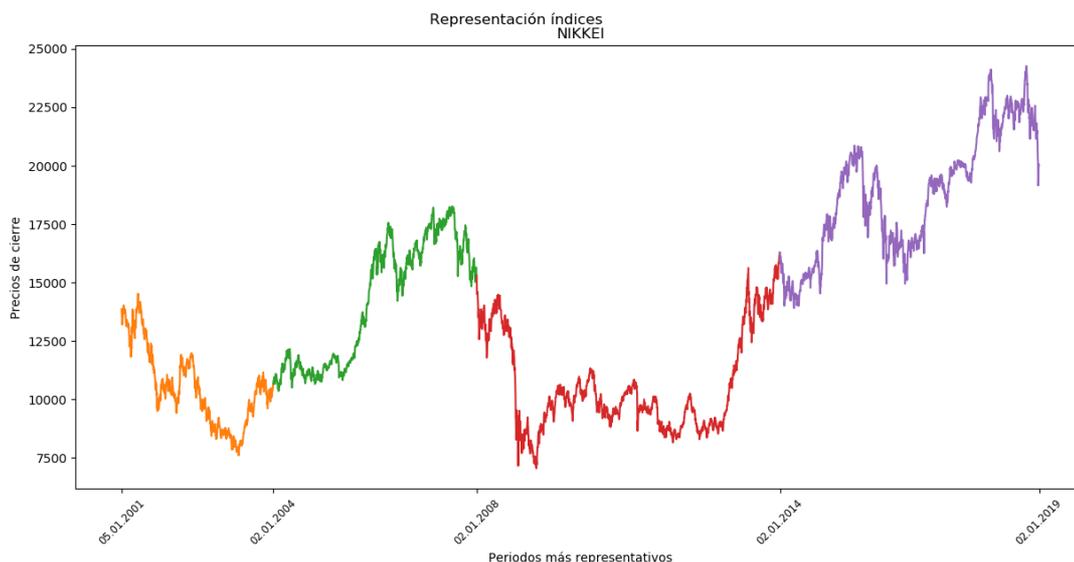


Figura 4.9 Evolución histórica NIKKEI 225

ÍNDICE	05/01/2001 – 02/01/2004	02/01/2004 – 02/01/2008	02/01/2008 – 02/01/2014	02/01/2014 – 02/01/2019
IBEX 35	<ul style="list-style-type: none"> - Crisis tecnológica de las .com - Crisis en Argentina y Brasil - Atentado 11- S - Comportamiento bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Comportamiento alcista hasta noviembre de 2007 - Crisis financiera mundial - Caída <i>Lehman Brothers</i> - Acaba con comportamiento bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Asuntos que favorecen al euro - Rescate del euro - Bajista 	<ul style="list-style-type: none"> -Brexit - Comportamiento estable
DAX	<ul style="list-style-type: none"> - Crisis tecnológica de las .com - Bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Alcista hasta la crisis - Crisis financiera mundial - Caída <i>Lehman Brothers</i> - Rescate zona euro - Predomina comportamiento alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Incremento precios - Subida valor del índice - Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> -Recuperación del valor - Brexit -Alcista
CAC 40	<ul style="list-style-type: none"> - Atentado 11-S - Burbuja Internet - Bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Subida constante - Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Crisis financiera - Bajista - Recuperación -Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Brexit - Enfrentamiento China y EEUU - Comportamiento estable
FTSE 100	<ul style="list-style-type: none"> - Crisis tecnológica de las .com - Atentado terrorista - Guerra Iraq - Bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Diente de sierra - Crisis financiera - Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Bajadas en los años de crisis - Recuperación - Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Buen comportamiento sector turístico y empresas exportadoras - Brexit - Subida bolsa EEUU - Alcista
AEX	<ul style="list-style-type: none"> - Atentados torres gemelas - Guerra Golfo - Bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Crisis financiera - Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> -Continuación crisis financiera mundial - Rescates - Bajista al principio y al final alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Enfrentamientos comerciales China y EEUU - Brexit - Alcista
SSEC	<ul style="list-style-type: none"> - Crisis tecnológica - Bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Prohibición nuevas oficinas de propiedad industrial - Economía China tercera del mundo - Llegada crisis financiera - Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Estallido burbuja financiera - China mayor economía mundial - Bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Posible burbuja en China - Conflicto China y EEUU -Alcista al principio, luego estable
HSI	<ul style="list-style-type: none"> - Atentados EEUU - Bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Subidas continuadas - Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Comportamiento estable 	<ul style="list-style-type: none"> - Devaluación Yuan - Brexit - Alcista
NIFTY 50	<ul style="list-style-type: none"> - Atentado 11-S - Comportamiento estable 	<ul style="list-style-type: none"> - Crisis financiera mundial - Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Descenso continuo - Bajista al principio y luego estable 	<ul style="list-style-type: none"> - Devaluación Yuan - Elecciones EEUU - Debilidad rupia - Alcista
NIKKEI 225	<ul style="list-style-type: none"> - Atentados 11-S - Bajista 	<ul style="list-style-type: none"> - Posible estafa de valores - Alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Terremoto Japón - Accidente nuclear Fukushima - Nueva política monetaria y fiscal - Bajista al principio y luego alcista 	<ul style="list-style-type: none"> - Elecciones EEUU - Conflicto Donald Trump y China - Alcista

Capítulo 5: Análisis con señales sintéticas y con datos reales. Análisis Estadístico

5.1 Análisis con señales sintéticas

En esta sección se describen los experimentos con señales sintéticas. El objetivo fundamental es analizar la estimación del exponente de Hurst a partir de los métodos propuestos, utilizando señales fractales sintéticas con exponente conocido.

Se va a utilizar la señal de movimiento Browniano fraccionario (*fractional Brownian motion*, fBm). El fBm fue desarrollado en primer lugar por Kolmogorov y más tarde Mandelbrot y Van Ness siguieron haciendo estudios sobre él. Es un proceso gaussiano centrado con parámetro H (valor entre 0 y 1) como se explica en el apartado **3.2 Series temporales fractales**.

En la realización de este TFG se ha llevado a cabo la simulación de señales sintéticas mediante *random walk* como se puede observar en el *script* de Python que se encuentra en el repositorio de *github*. Con este código se generan señales aleatorias (como la de la **Figura 5.1**), cada vez diferentes aunque alguna vez coincida su exponente de Hurst.

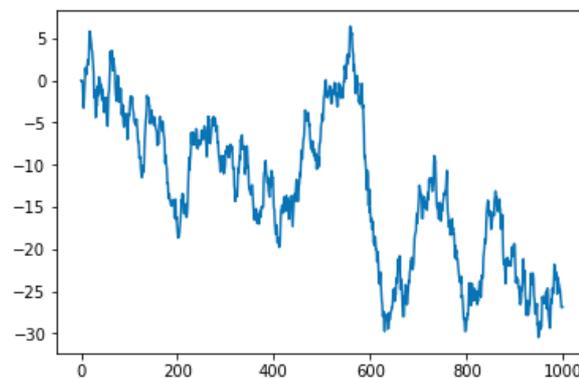


Figura 5.1: Señal sintética generada mediante *random walk*

En el experimento se realizan 100 simulaciones de fBm, para diferentes valores del exponente de Hurst. En concreto, para valores de $H = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9]$.

5.2 Análisis estadístico con señales reales

Con el objetivo de caracterizar la estimación del exponente de Hurst en las series bursátiles se va a utilizar un método estadístico basado en remuestreo *bootstrap* para series temporales.

El remuestreo *bootstrap* fue desarrollado en 1979 por Bradley Efron, sirve para estimar la varianza o el sesgo en el proceso de muestreo de un análisis estadístico y para comparar hipótesis sobre variables que tienen un determinado interés.

La técnica *bootstrap* para la caracterización de estadísticos se basa en obtener remuestras con reemplazamiento a partir de una muestra (conjunto de datos) dada. Suponiendo que se tiene un conjunto de datos $x = [x_1, \dots, x_n]$, el objetivo es caracterizar la media correspondiente a la población de la cual se ha obtenido la muestra, μ . En *bootstrap* se realizan B remuestreos con reemplazamiento, es decir, en un remuestreo puede repetirse varias veces un mismo dato. Para cada uno de estos B remuestreos *bootstrap*, se calcula un valor de la media, $\hat{\mu}_i$. De esta forma, se acaban teniendo B estimaciones *bootstrap* de la media $\hat{\mu}_i$, $i = 1, \dots, B$, que permiten obtener una distribución empírica de la media, μ . Una de las aproximaciones más comunes es obtener la desviación estándar del estimador media, o bien la creación de intervalos de confianza.

La aplicación directa de esta forma de *bootstrap* sobre series temporales tiene diferentes problemas. Entre ellos, el más grave es el de que no se respeta la estructura temporal de los datos. Para series temporales es fundamental mantener la información que proporciona la relación temporal. Existen modificaciones del remuestreo *bootstrap* que permiten preservar esta relación temporal. En concreto se va a utilizar en este TFG *bootstrap* mediante bloques móviles, en este método se va a mantener la forma de la serie original, para lo cual, se considera que un bloque de tamaño reducido dentro de la serie contiene un patrón de comportamiento similar. En *bootstrap* por bloques móviles se remuestran k bloques con reemplazamiento y con la misma probabilidad de ser extraídos. Con esto se extrae una remuestra *bootstrap* formada por los bloques escogidos agrupados aleatoriamente. Para este TFG se ha usado *MovingBlockBootstrap* y el *script* de Python se encuentra en el repositorio de *github*. [49]

Para elegir el tamaño de bloque se va a utilizar como guía la función de autocorrelación.

La función de autocorrelación como se ha explicado anteriormente, muestra la auto similitud que presenta una señal temporal en distintos periodos de tiempo. El mayor valor que puede tener es 1, y lo toma en el instante de tiempo $t = 0$. Se ha seleccionado un tamaño de bloque $block_size = 200$ ya que los segmentos en los que se ha dividido la señal presentan una autocorrelación similar hasta ese desplazamiento, aunque para series temporales fractales siempre va a existir memoria a largo plazo.

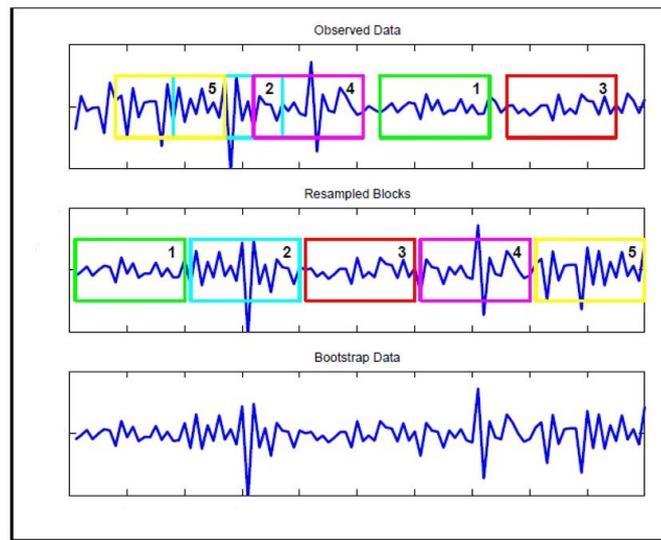


Figura 5.2: *Bootstrap* mediante bloques móviles [50]

Capítulo 6: Resultados

6.1 Resultados con señales sintéticas.

Se va a llevar a cabo la simulación de 100 señales sintéticas para los diferentes valores de Hurst ($h = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9]$). Estos valores de h van a ser los llamados h_{real} y, a continuación, se va a realizar el cálculo de la estimación de los valores de Hurst para esas señales, puede verse en el repositorio *github*.

En la **Figura 6.1** se muestra la comparación entre el exponente h_{real} (línea recta de color naranja) y el exponente de Hurst estimado mediante R/S y representado con la ayuda de *errorbar*. Como se puede observar el exponente de Hurst estimado (línea azul) tiende a parecerse al real en los valores cercanos a 0.5.

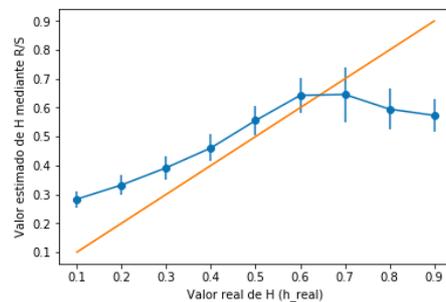


Figura 6.1: Comparación h_{real} y exponente de Hurst calculado mediante R/S

Por otro lado, en la **Figura 6.2** se observa el exponente de Hurst real (h_{real} , línea naranja) y el exponente de Hurst estimado mediante el método $1/f$. En este segundo método se visualiza como se asemeja bastante el exponente de Hurst calculado con el exponente real en los valores entre 0.1 y 0.4 y, a medida que se acerca al valor 0.9 se va alejando más del valor real.

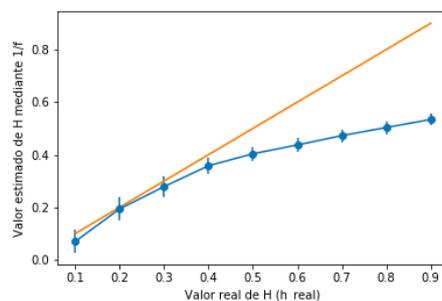


Figura 6.2: Comparación h_{real} y exponente de Hurst calculado mediante $1/f$

Por lo tanto, para valores del exponente de Hurst que caractericen series temporales antipersistentes o anticorrelacionales, $0.1 \leq H \leq 0.4$, son más realistas los resultados

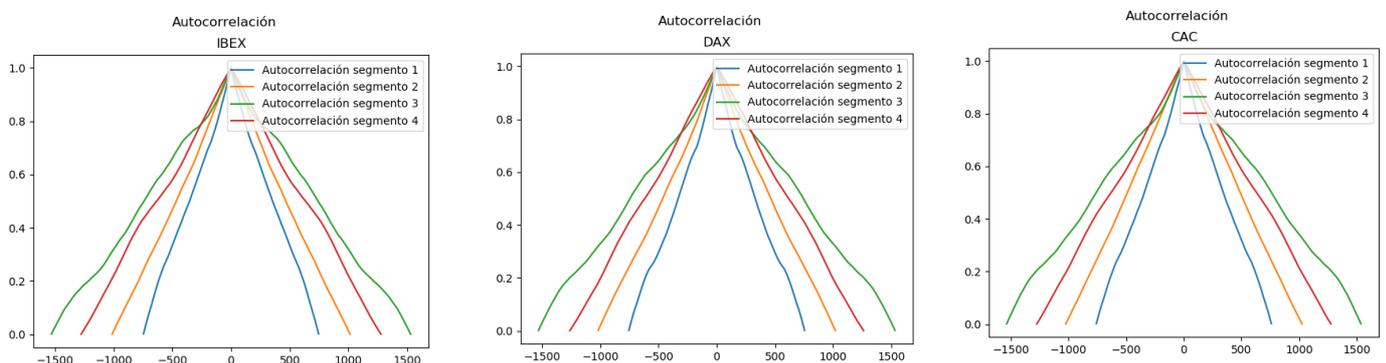
obtenidos con el método del exponente $1/f$. Por el contrario, para series temporales que presentan ruido blanco, $H = 0.1$, es más preciso el método de cálculo del exponente de Hurst mediante R/S . Finalmente, para series temporales correlacionadas, $0.6 \leq H \leq 0.9$, ambos análisis se alejan de la realidad pero, el análisis R/S diverge de una manera más suave.

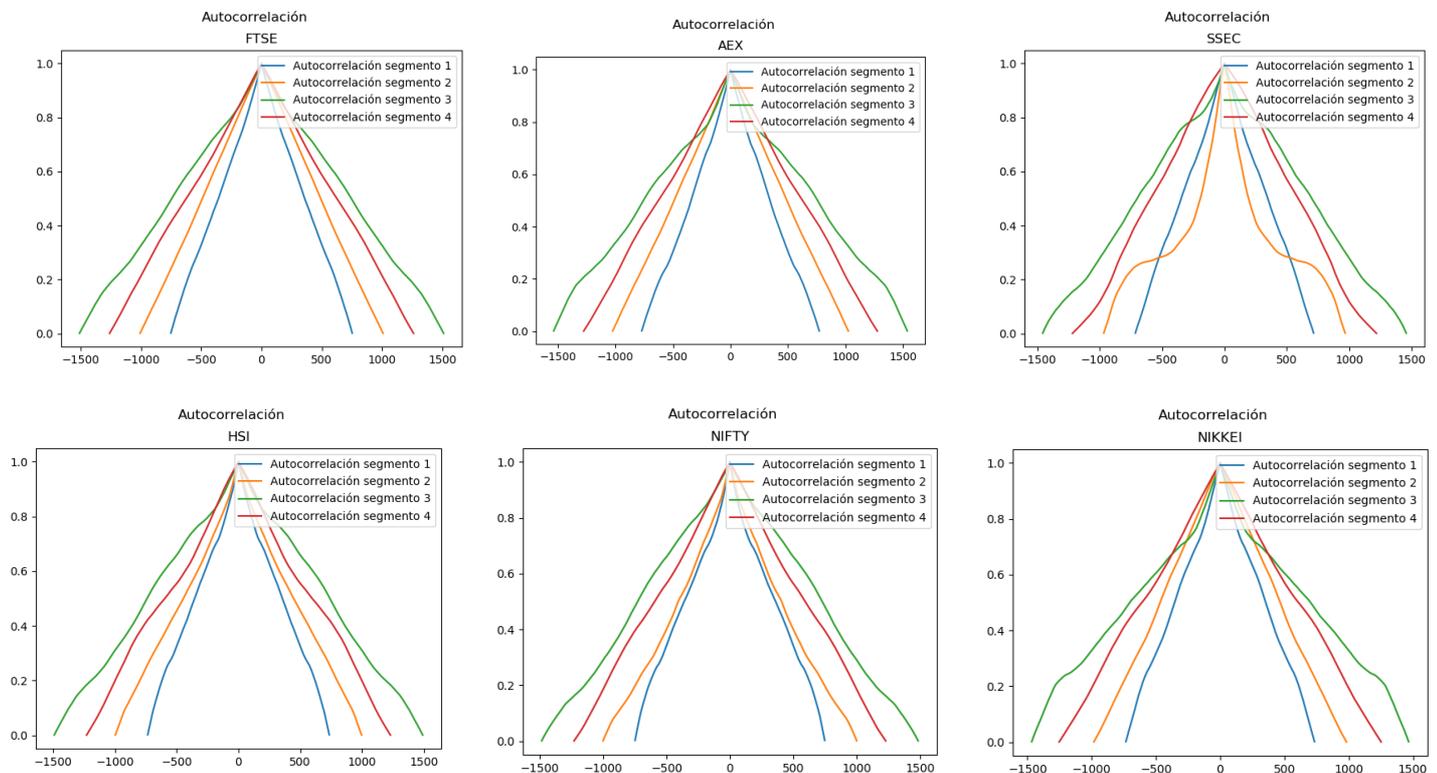
6.2 Resultados para series bursátiles reales.

El tamaño de bloque que se ha elegido para trabajar con las series bursátiles reales ha sido $block_size = 200$, para ello se ha utilizado la función de autocorrelación como guía, esta se puede observar en el apartado **6.2.1 Función de autocorrelación**. El valor del tamaño del bloque se ha escogido de acuerdo a dos criterios, uno de ellos es que el número de bloques sea razonable y, el segundo criterio es que el número de muestras que existan en el bloque sea suficiente para que la correlación haya caído bastante, sabiendo las limitaciones impuestas por las correlaciones a largo plazo. A continuación, se van a mostrar los resultados obtenidos.

6.2.1 Función de autocorrelación

A continuación, se van a presentar las gráficas que muestran la autocorrelación de cada uno de los segmentos temporales de cada índice, obtenidas mediante el programa desarrollado en Python para la realización de este TFG. Como se puede observar en todos los índices la autocorrelación cae muy lentamente, vale cero en muestras muy alejadas, esto quiere decir que las muestras que se encuentran lejanas guardan información la una sobre la otra. Por tanto, queda demostrado que las series temporales financieras tienen memoria a largo plazo. El eje horizontal corresponde con las muestras.





6.2.2 Análisis estadístico mediante *bootstrap*

En cuanto al análisis estadístico que se ha llevado a cabo mediante la herramienta *bootstrap*, el exponente de Hurst calculado para la mayoría de las combinaciones de bloques tiene un valor 0.5 o muy cercano a él. Se pueden visualizar los histogramas para el exponente de Hurst y el exponente de Hurst estimado en los **Anexos I** y **II** respectivamente.

6.2.3 Desviación del exponente de Hurst mediante *bootstrap*

En este apartado se va a proceder a explicar el significado que tiene el exponente de Hurst en ejemplos concretos, es decir, los nueve índices bursátiles elegidos. Se ha realizado el cálculo tanto del exponente de Hurst mediante el método *R/S* como del exponente de Hurst estimado mediante exponente $1/f$. Se va a realizar el análisis de esta comparación con tres índices, el Ibex 35, el FTSE y el Nifty.

En primer lugar, se va a analizar el índice bursátil Ibex 35. Como se observa en la gráfica que muestra los valores de cierre de los precios diarios de dicho índice en el primer segmento se ve un cambio en la tendencia con la que se inicia el periodo, empieza comportándose de manera bajista debido a la crisis tecnológica de las .com la subida hasta 2004 se debe a la corrección que tuvo en este periodo. Por otro lado, se observa que falta información del pasado,

y esto puede suponer que la tendencia anterior no sea extremadamente bajista y, además, el cambio de tendencia no se produce bruscamente. Por lo tanto, el exponente de Hurst tendría que tener un valor cercano a 0.5. En la época anterior a la crisis financiera mundial, es decir, el segundo segmento, se observa que es una etapa de subida continua en la cual la tendencia alcista se mantiene, por lo tanto, el exponente de Hurst tiene que tener un valor mayor que 0.5. En el tercer segmento, se puede observar una tendencia bajista, aunque tiene algunas correcciones, pero predomina el comportamiento de bajada en precios. En este periodo el exponente de Hurst debería ser mayor que 0.5, ya que la tendencia se mantiene. Por último, en los últimos años elegidos, se observa un comportamiento más estable, no hay una tendencia clara predominante, es un periodo de incertidumbre y el valor de Hurst debería ser cercano a 0.5.

Con todo esto, se puede visualizar en la gráfica de los exponentes de Hurst (**Figura 6.2.3.1**) estimados que los más acordes al comportamiento que se muestra en la gráfica del Ibx 35 son los que se corresponden al método *R/S*.

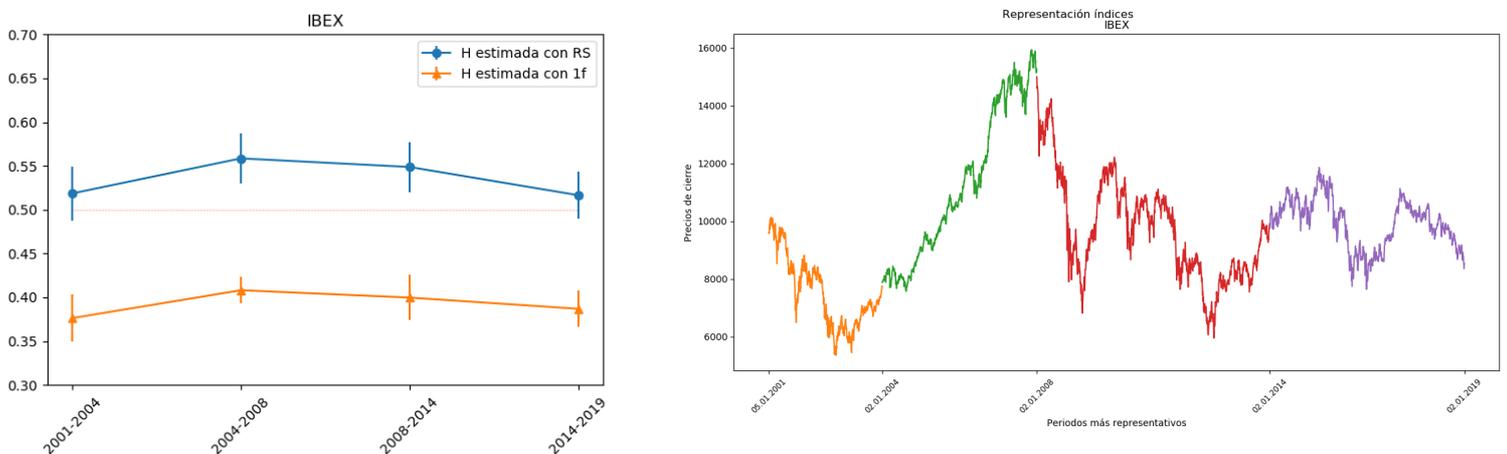


Figura 6.2.3.1: Comparación exponente de Hurst con dos métodos y gráfica Ibx 35

En segundo lugar, en cuanto al índice CAC 40 (**Figura 6.2.3.2**), en todos los segmentos se observa un cambio de tendencia respecto al comportamiento que experimentaba el índice al comienzo de cada periodo. Debido a esto el valor del exponente de Hurst tendría que estar por debajo de 0.5, ya que la tendencia cambia antes de terminar el periodo. En el último segmento, se visualiza una situación de incertidumbre y el exponente de Hurst está más cerca de 0.5, si se hubiesen cogido más muestras cercanas al presente, se observaría mejor cual es el comportamiento y si concuerda con el valor de Hurst. Con todo esto, la mejor estimación del exponente es el calculado mediante $1/f$.

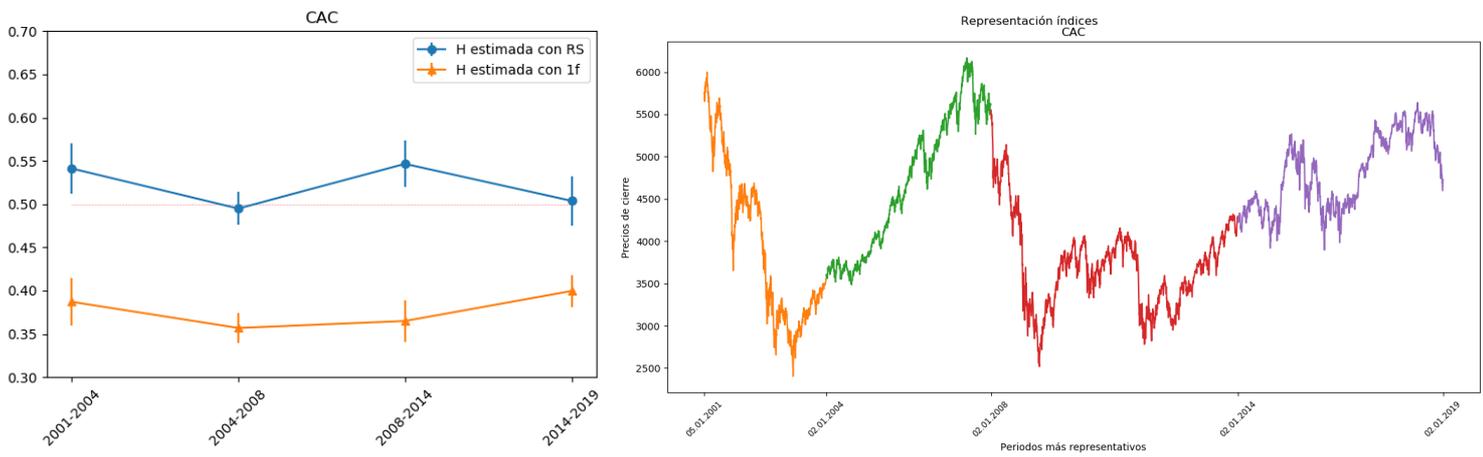


Figura 6.2.3.2: Comparación exponente de Hurst con dos métodos y gráfica CAC 40

Por último, se va a realizar el estudio del índice Nifty como se muestra en la **Figura 6.2.3.3**. El primer periodo se comporta de forma bastante estable, por lo tanto, el valor que debería tener el exponente de Hurst sería cercano a 0.5. El segundo periodo y el último muestran una clara tendencia alcista, por tanto, el exponente de Hurst tendría que ser mayor que 0.5. Por último, el periodo que va desde 2008 hasta 2014, presenta un comportamiento estable, no se identifica la tendencia predominante, por tanto, es un periodo de incertidumbre. En este caso, el exponente de Hurst tendría que acercarse a 0.5. Como se puede observar en la gráfica que muestra los valores de los exponentes estimados no hay una clara relación con el comportamiento del índice.

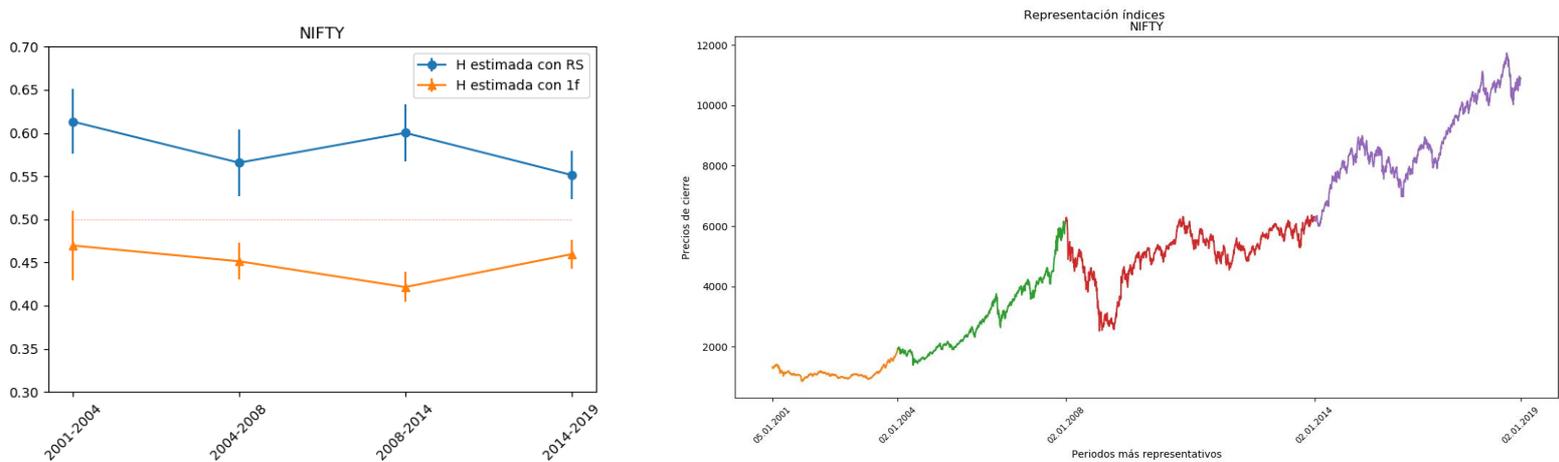


Figura 6.2.3.3: Comparación exponente de Hurst con dos métodos y gráfica Nifty

Capítulo 7: Conclusiones y líneas futuras

Después de realizar el estudio de caracterización de series fractales en este TFG, se ha identificado que, en el análisis de las señales sintéticas, para valores de H menores de 0.5 funciona mejor el método $1/f$, para valores iguales o mayores que 0.5, el método que más se acerca a los resultados reales es el R/S . En cuanto al estudio de señales temporales bursátiles reales, dependiendo del índice, la estimación correcta para el exponente de Hurst varía entre el método R/S o el $1/f$. Esto puede deberse a la elección del tamaño del bloque, o la elección del inicio y final de cada segmento.

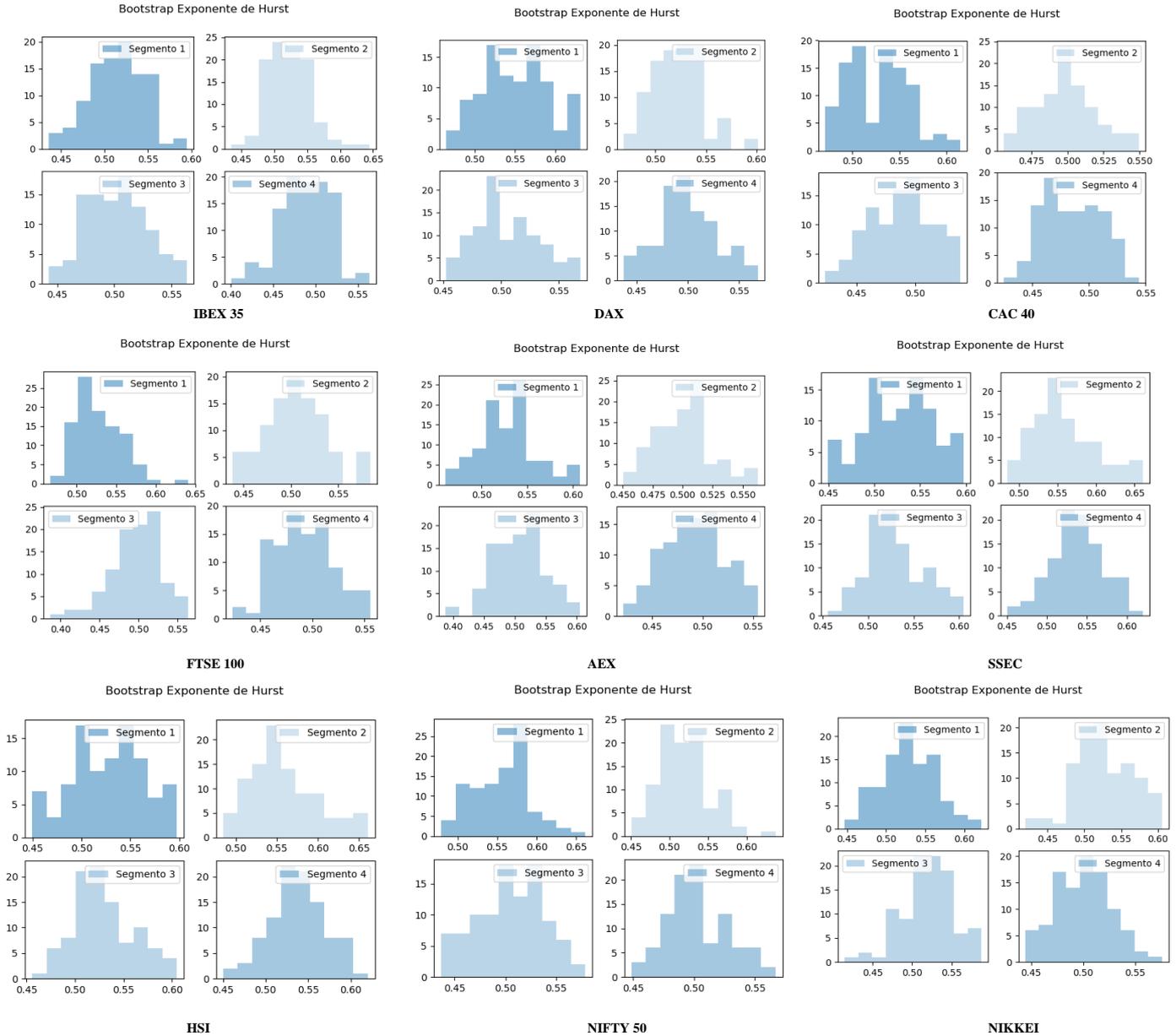
Una posible línea futura sería realizar el mismo estudio con un número diferente de muestras por bloque y, de esta manera, ver cuál es el efecto de este parámetro en la estimación del exponente de Hurst. Además, se podría hacer un pequeño estudio con señales sintéticas.

Como segunda línea futura, podrían elegirse otros periodos de tiempo en cada índice, variando las fechas de inicio y fin de cada segmento.

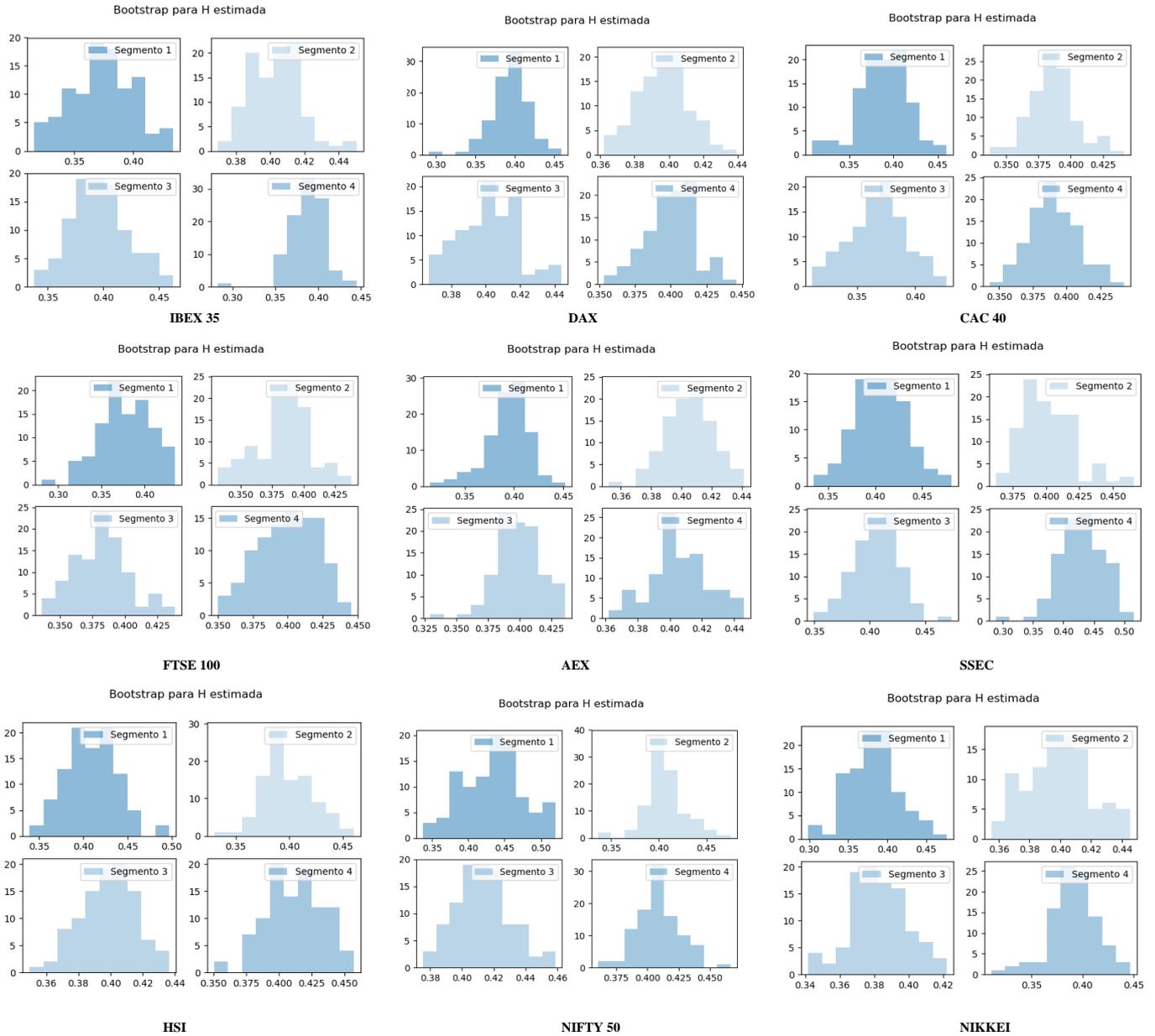
Otra línea futura podría ser analizar el comportamiento de los índices hasta fechas más recientes para poder tener más valores en el último segmento.

Anexos

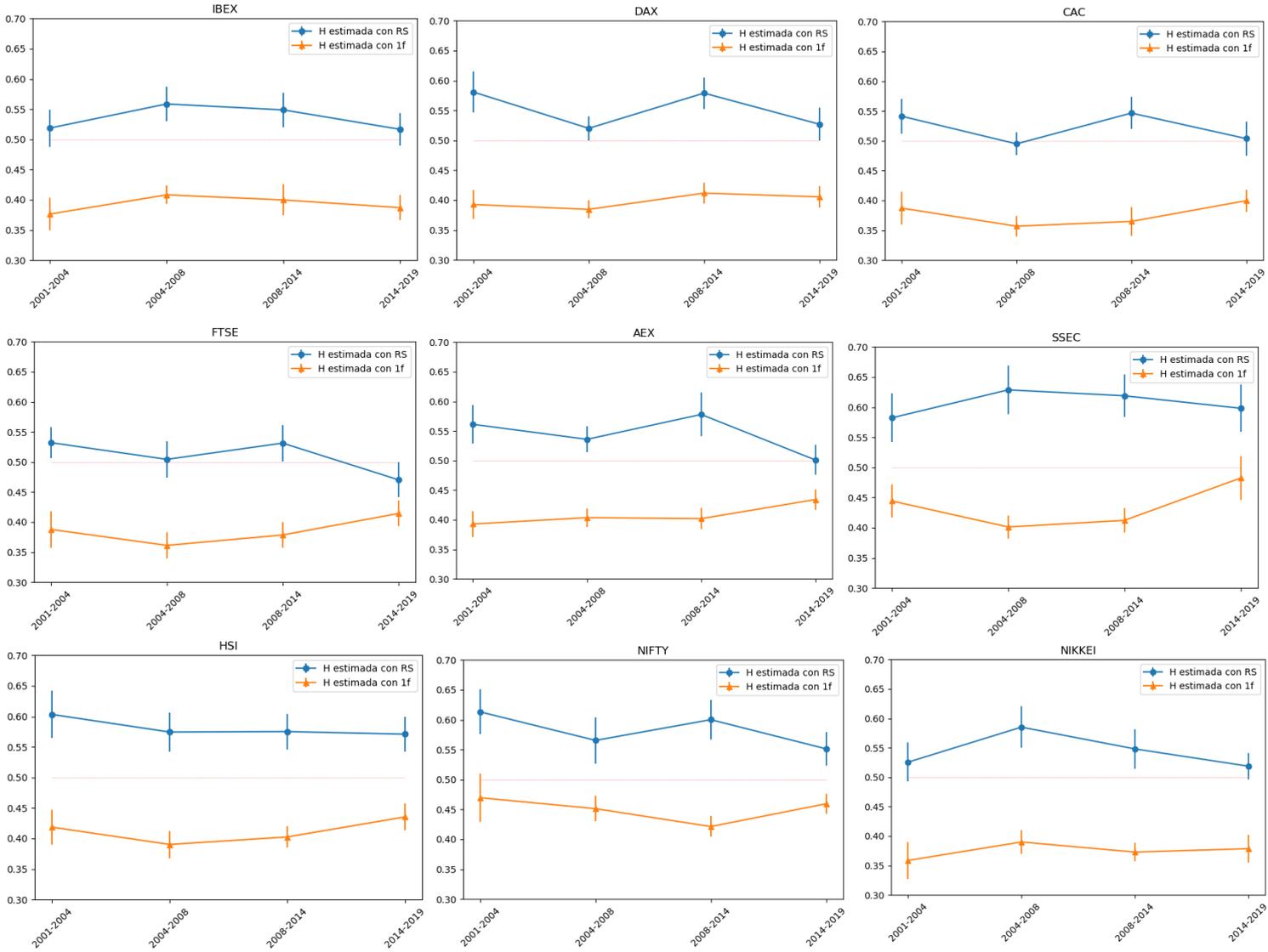
Anexo I: Histograma exponente de Hurst mediante *bootstrap*



Anexo II: Histograma exponente de Hurst estimado con método $1/f$ mediante *bootstrap*



Anexo III: Desviación del exponente de Hurst mediante *bootstrap*



Bibliografía

- [1] «Investing.com,» Investing.com Español, [En línea]. Available: <https://es.investing.com/>. [Último acceso: 24/ 05/ 2019].
- [2] «Qué es el Dow Jones,» esBolsa, [En línea]. Available: <https://esbolsa.com/blog/bolsa-americana/que-es-el-dow-jones/>. [Último acceso: 24/ 05/ 2019].
- [3] «Índices bursátiles: ¿Qué son y para qué sirven? - Gestión Pasiva,» Gestión Pasiva, [En línea]. Available: <https://www.gestionpasiva.com/indices-bursatiles-que-son-para-que-sirven/#que-es-para-que-sirve-un-indice-bursatil>. [Último acceso: 24/ 05/ 2019].
- [4] «admin, ¿Que es un índice bursatil?,» Elblogsalmon.com, [En línea]. Available: <https://www.elblogsalmon.com/mercados-financieros/que-es-un-indice-bursatil>. [Último acceso: 25/ 05/ 2019].
- [5] «iAhorro, “ÍNDICE BURSÁTIL: ¿Qué es y cómo se hace? | iAhorro,» iAhorro.com, [En línea]. Available: https://www.iahorro.com/ahorro/noticias/que_es_y_como_se_hace_un_indice_bursatil.html. [Último acceso: 24/ 05/ 2019].
- [6] «BBVA, “Qué es la renta fija - BBVA.es,» Bbva.es, [En línea]. Available: <https://www.bbva.es/general/finanzas-vistazo/fondos-inversion/que-es-la-renta-fija/index.jsp>. [Último acceso: 25/ 05/ 2019].
- [7] «“El mercado de renta variable,» Finanzasparatodos.es, [En línea]. Available: <http://finanzasparatodos.es/es/productosyservicios/productosinversionrentavariabile/introduccion.html>. [Último acceso: 25/ 05/ 2019].
- [8] «Índices bursátiles: Un resumen de todo lo que deberías saber,» Opinatron - Independencia Financiera y Dinero, [En línea]. Available: <https://opinatron.com/indices-bursatiles-invertir/>. [Último acceso: 25/ 05/ 2019].
- [9] M. P. a. G. Casimiro, «Técnicas de predicción económica.,» [En línea]. Available: <https://addi.ehu.es/bitstream/handle/10810/12493/05-09pil.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. [Último acceso: 25/ 05/ 2019].
- [10] «NatGeoES, “Efecto mariposa: ¿el aleteo de una mariposa en Sri Lanka pueda provocar un huracán en EE.UU?»,» National Geographic, 14/ 11/ 2017. [En línea]. Available: <https://www.nationalgeographic.es/ciencia/2017/11/el-efecto-mariposa>. [Último acceso: 26/ 05/ 2019].
- [11] «Definición de fractal,» Definicion.de, [En línea]. Available: <https://definicion.de/fractal/>. [Último acceso: 26/ 05/ 2019].
- [12] «“Fractales y series financieras - Quantdare,» Quantdare, 21/ 04/ 2017. [En línea]. Available: <https://quantdare.com/fractales-y-series-financieras/>. [Último acceso: 26/ 05/ 2019].
- [13] «Romanesco, cerca de florecillas, un ejemplo de fractales naturales Foto & Imagen De Stock: 54874772 - Alamy,» Alamy, 2017. [En línea]. Available: <https://www.alamy.es/foto-romanesco-cerca-de-florecillas-un-ejemplo-de-fractales-naturales-54874772.html>. [Último acceso: 26/ 05/ 2019].
- [14] C. L. Cifuentes, «La esencia de la dirección,» Carlosllanocatedra.org, 2018. [En línea]. Available: <https://www.carlosllanocatedra.org/blog-carlos-llano/la-esencia-de-la-direccion>. [Último acceso: 26/ 05/ 2019].
- [15] «Wiener process,» Wikimedia Commons, [En línea]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wiener_process_3d.png. [Último acceso: 05/ 07/ 2019].
- [16] Ó. B. Pérez, «HEART RATE VARIABILITY: A FRACTAL ANALYSIS,» 06 2008. [En línea]. Available: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/11023/1/Texto%20integral.pdf>. [Último acceso: 01/ 06/ 2019].
- [17] J. R.-D. a. O. Yesid, «Estimación Del Exponente De Hurst y La Dimensión Fractal De Una Superficie Topográfica a Través De La Extracción De Perfiles,» 2015. [En línea]. Available: https://www.academia.edu/23083837/Estimaci%C3%B3n_Del_Exponente_De_Hurst_y_La_Dimensi%C3%B3n_Fractal_De_Una_Superficie_Topogr%C3%A1fica_a_Trav%C3%A9s_De_La_Extracci%C3%B3n_De_Perfiles. [Último acceso: 01/ 06/ 2019].

- [18] E. C.-Y. C. F. A. L.-R. a. M. L.-L. A. López-Lambraño, «Una revisión de los métodos para estimar el exponente de Hurst y la dimensión fractal en series de precipitación y temperatura,» *REVIEW Revista Mexicana de Física*, vol. 63, p. pp. 244–267, 2017.
- [19] «Ruido blanco,» Wikipedia, [En línea]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Ruido_blanco. [Último acceso: 07/ 07/ 2019].
- [20] «Ruido rosa, ¿qué es?,» Alex Metric, [En línea]. Available: <http://www.alexmetric.com/ruido-rosa-que-es/>. [Último acceso: 07/ 07/ 2019].
- [21] «Lunes negro,» Wikipedia, [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Lunes_negro_\(1987\)#/media/Archivo:Black_Monday_Dow_Jones.png](https://es.wikipedia.org/wiki/Lunes_negro_(1987)#/media/Archivo:Black_Monday_Dow_Jones.png). [Último acceso: 07/ 07/ 2019].
- [22] «Ibex 35,» Expansion.com, 2018. [En línea]. Available: <http://www.expansion.com/diccionario-economico/ibex-35.html>. [Último acceso: 02 06/ 2019].
- [23] «Evolución del IBEX 35 desde 1987,» EL PAÍS,, 06 2014. [En línea]. Available: https://elpais.com/elpais/2014/05/31/media/1401558681_263531.html. [Último acceso: 02/ 06/ 2019].
- [24] Í. d. Barrón, «El Ibex 35 cumple 25 años con una revalorización del 255%,» EL PAÍS,, 13/ 01/ 2017. [En línea]. Available: https://elpais.com/economia/2017/01/13/actualidad/1484312173_786898.html. [Último acceso: 02/ 06/ 2019].
- [25] P. Figueiredo, «Origen e historia del DAX,» Valutrades.com, 2017. [En línea]. Available: <https://www.valutrades.com/es/blog/origen-e-historia-del-dax>. [Último acceso: 08/ 06/ 2019].
- [26] J. B. Escribano, «FACULTAD DE TURISMO Y FINANZAS GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL DAX 30,» [En línea]. Available: https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/46432/file_1.pdf?sequence=1. [Último acceso: 08/ 06/ 2019].
- [27] «Qué es el DAX,» esBolsa, 30/ 04/ 2018. [En línea]. Available: <https://esbolsa.com/blog/bolsa-europea/que-es-el-dax/>. [Último acceso: 08/ 06/ 2019].
- [28] R. V. Burguillo, «Cac 40 - Definición, qué es y concepto | Economipedia,» Economipedia, 04/ 12/ 2018. [En línea]. Available: <https://economipedia.com/definiciones/cac-40.html>. [Último acceso: 09/ 06/ 2019].
- [29] R. V. Burguillo, «FTSE 100 - Definición, qué es y concepto | Economipedia,» Economipedia, 04/ 12/ 2018. [En línea]. Available: <https://economipedia.com/definiciones/ftse100.html>. [Último acceso: 09/ 06/ 2019].
- [30] «AEX - Definición, qué es y concepto | Economipedia,» Economipedia.com, 04/ 12/ 2018. [En línea]. Available: <https://economipedia.com/definiciones/aex.html>. [Último acceso: 09/ 06/ 2019].
- [31] «AEX - Historia; La aparición del AEX; Cambio de nombre del AEX; Las empresas participantes en el AEX; Cálculo de la AEX,» 07/ 07/ 2017. [En línea]. Available: <http://imparatudos.com/article/aex-historia>. [Último acceso: 09/ 06/ 2019].
- [32] «Bolsa de Shanghai - EcuRed,» EcuRed.cu, 2012. [En línea]. Available: https://www.ecured.cu/Bolsa_de_Shanghai. [Último acceso: 15/ 06/ 2019].
- [33] D. Corral, «Las grandes Bolsas del mundo,» BBVA NOTICIAS, 17/ 04/ 2018. [En línea]. Available: <https://www.bbva.com/es/grandes-bolsas-mundo/>. [Último acceso: 18/ 06/ 2019].
- [34] «Crisis en la bolsa china: la ‘resaca del lunes negro’ empieza con caídas en Shanghái,» BBC News Mundo, 25/ 08/ 2015. [En línea]. Available: https://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/08/150824_economia_crisis_bolsas_china_ep. [Último acceso: 18/ 06/ 2019].
- [35] «Cronología de los acontecimientos más relevantes de la última década en China,» La Información, 04/ 11/ 2012. [En línea]. Available: https://www.lainformacion.com/economia-negocios-y-finanzas/macroeconomia/cronologia-de-los-acontecimientos-mas-relevantes-de-la-ultima-decada-en-china_KrFoiPB9E6M99j6xacP7z6/. [Último acceso: 18/ 06/ 2019].
- [36] «CHINA A FONDO: PREGUNTAS Y RESPUESTAS - china.org.cn,» China.org.cn, 2019. [En línea]. Available: http://spanish.china.org.cn/china/archive/wenda/txt/2006-04/28/content_2235122.htm. [Último acceso: 19/ 06/ 2019].

- [37] R. V. Burguillo, «Hang Seng Index - Definición, qué es y concepto | Economipedia,» Economipedia, 06/ 12/ 2018. [En línea]. Available: <https://economipedia.com/definiciones/hang-seng-index.html>. [Último acceso: 19/ 06/ 2019].
- [38] «Opere con el Índice Hang Seng -Formación Gratis | AvaTrad,» AvaTrade, 2015. [En línea]. Available: <https://www.avatrade.es/cfd-trading/indices/indice-hang-seng-hsi>. [Último acceso: 19/ 06/ 2019].
- [39] «La Bolsa de Hong Kong en directo,» Estrategia-bolsa.es, 2009. [En línea]. Available: <https://www.estrategia-bolsa.es/bolsa-hong-kong-directo.html>. [Último acceso: 19/ 06/ 2019].
- [40] M. R. Canfranc, «Análisis | China, un actor de relevancia,» Cinco Días, 13/ 09/ 2004. [En línea]. Available: https://cincodias.elpais.com/cincodias/2004/09/14/mercados/1095256032_850215.html. [Último acceso: 20/ 06/ 2019].
- [41] P. R. López, «Índices bursátiles internacionales: ¿Cuáles son?,» BBVA NOTICIAS, 13/ 02/ 2018. [En línea]. Available: <https://www.bbva.com/es/indices-bursatiles-ibex-35-nasdaq-nikkei-otros-conoces/>. [Último acceso: 20/ 06/ 2019].
- [42] Rafael, «Nifty 50, el índice de valores principal de la India cerca de máximos - Making a Trader,» Making a Trader, 12/ 04/ 2019. [En línea]. Available: <https://makingatrader.com/nifty-50-el-indice-de-valores-principal-de-la-india-cerca-de-maximos/>. [Último acceso: 21/ 06/ 2019].
- [43] «Trading con Nifty 50 ⇒ Cotización Tiempo Real | Avatrade,» AvaTrade, 2013. [En línea]. Available: <https://www.avatrade.es/cfd-trading/indices/nifty-50>. [Último acceso: 21/ 06/ 2019].
- [44] “. e. E. N. finanzas.com, «Qué es... El Nikkei,» Finanzas.com, 09/ 07/ 2013. [En línea]. Available: <http://www.finanzas.com/aula-accionista/20130709/nikkei-2389131.html>. [Último acceso: 22/ 06/ 2019].
- [45] «Qué es el Nikkei,» esBolsa, 09/ 04/ 2018. [En línea]. Available: <https://esbolsa.com/blog/bolsa-asia/que-es-el-nikkei/>. [Último acceso: 22/ 06/ 2019].
- [46] «Sharp Trader,» Sharptrader.com, 15/ 10/ 2018. [En línea]. Available: <https://www2.sharptrader.com/es/new-to-trading/stock-indices/overview-of-the-nikkei-225-stock-market-index/>. [Último acceso: 22/ 06/ 2019].
- [47] «Bolsa de Japón: Qué pasó, qué está pasando y qué pasará,» Losmercadosfinancieros.es, 25/ 09/ 2012. [En línea]. Available: <http://losmercadosfinancieros.es/pasado-presente-y-futuro-asi-fue-y-asi-esta-el-mercado-de-japon.html>. [Último acceso: 23/ 06/ 2019].
- [48] «El Nikkei tiene la peor caída en un solo día en dos años,» www.efe.com, 25/ 12/ 2018. [En línea]. Available: <https://www.efe.com/efe/espana/economia/el-nikkei-tiene-la-peor-caida-en-un-solo-dia-dos-anos/10003-3851472>. [Último acceso: 23/ 06/ 2019].
- [49] «Time-series Bootstraps — arch 4.7.0 documentation,» Readthedocs.io, 2018. [En línea]. Available: <https://arch.readthedocs.io/en/latest/bootstrap/timeseries-bootstraps.html#the-moving-block-bootstrap>. [Último acceso: 23/ 06/ 2019].
- [50] «Graph of the moving block bootstrap principle,» Research gate, [En línea]. Available: https://www.researchgate.net/figure/Graph-of-the-moving-block-bootstrap-principle-Graph-showing-the-principal-of-moving_fig5_280031088. [Último acceso: 07/ 07/ 2019].

