# Tema 1: **Introducción**

## Asignatura: Lógica

Joaquín Arias

Universidad Rey Juan Carlos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Curso 2022-2023

# Índice I

# Índice II

# Índice III

# Tema 1.1: **Por qué es necesaria, tipos e historia.**

# Introducción

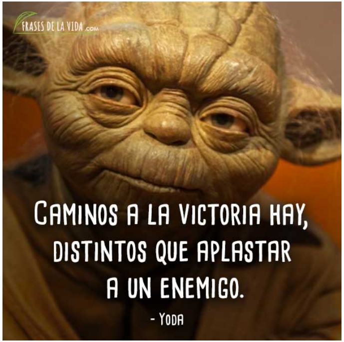
# Introducción

- La lógica formal es la ciencia que estudia las leyes de inferencia en los razonamientos.
- Trata de resolver diversos problemas basándose en la formación del lenguaje y sus reglas básicas.
- Se aplica en multitud de áreas:
  - En matemáticas para demostrar teoremas
  - En ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas
  - En las ciencias física y naturales, para sacar conclusiones de experimentos
  - En las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una multitud de problemas.

# Introducción: Lenguaje natural

- Lenguaje natural: lenguaje usado en la comunicación humana.
- Dentro del lenguaje encontramos sintaxis y semántica.
  - Sintaxis: las reglas de formación de frases correctas.
  - Semántica: las frases deben tener significado completo e independiente.

# Introducción: Lenguaje natural (análisis sintáctico)




- No es válida sintácticamente.

# Introducción: Lenguaje natural (análisis semántico)

- Una vez que una frase es válida sintácticamente, se puede analizar su semántica.
  - Si tiene (o no) sentido desde el punto de vista semántico.

# Introducción: Lenguaje natural (limitaciones)

- Es complicado (o casi imposible) dar una representación completa de las reglas sintácticas de los lenguajes hablados.
- No podemos formular afirmaciones que se definan como correctas (sintácticamente) o verdaderas (semánticamente) sin ambigüedad.

Tenemos que definir un lenguaje más preciso: **Un lenguaje formal**.

# Introducción: Lenguaje formal

- El lenguaje formal se construye a partir de proposiciones
  - Elementos básicos (atómicos)
  - Simples.
  - Se les puede asociar valores de verdad sin ninguna ambigüedad.

# Lógica

# Lógica

- El objetivo de la lógica es estudiar la validez formal de un razonamiento.
- **Razonamiento**: la obtención de un nuevo conocimiento (conclusión) a partir de una serie de conocimientos (premisas).
- **Validez formal de un razonamiento**: si la conclusión es verdadera, siendo las premisas verdaderas.

# Lógoca: Sistemas lógicos

- La estructura de todo sistema lógico viene definido por:
  - **Sintaxis**: definición axiomática de los elementos básicos del lenguaje y de las reglas que permiten obtener nuevas expresiones correctas.
  - **Semántica**: definición de un conjunto de significados (verdadero o falso) que permiten definir la validez de un razonamiento.
  - **Sistemas de demostración**: sistemas formales que permiten averiguar cuándo un razonamiento es (o no es) válido.

# Tipos de lógicas

# Tipos de lógicas

- **Lógica proposicional**: se estudian las fórmulas proposicionales construidas a partir de fórmulas atómicas y conectivos lógicos.
- **Lógica de predicados de primer orden**: es una generalización de la lógica de proposiciones. Distingue entre los objetos del discurso y sus relaciones entre ellos.

# Tipos de lógicas

**Lógica proposicional**

- "Tiene un perro" $p$.
- "Tiene una mascota" $m$.
- "Es adorable" $a$.

- "Si tiene un perro y tiene una mascota, entonces es adorable"
$$p \wedge m \rightarrow a$$

**Lógica de primer orden**

- "$x$ es una mascota" $M(x)$.
- "$x$ es un perro" $P(x)$.
- "$x$ es adorable" $A(x)$.

- "Todas las mascotas que sean perros, son adorables"
$$\forall x. M(x) \wedge P(x) \rightarrow A(x)$$

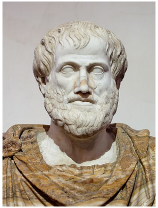
# Algo de historia: Lógica y filosofía

# Algo de historia: Lógica y filosofía

- **S. IV a.C.:** Aristóteles formaliza el razonamiento humano. Fundó la lógica clásica o lógica aristotélica. Por Ejemplo:

*Todos los hombres son mortales. Sócrates en un hombre. Luego Sócrates es mortal.*

- **En el s. XIII:** Santo Tomás de Aquino empleó la lógica en el contexto de discusiones teológicas.
- **s. XVIII:** Leibniz fue el primero en formular la lógica como base del razonamiento matemático.



Aristóteles

Leibniz

# Algo de historia: Lógica y matemáticas

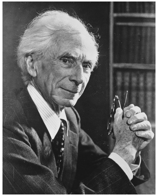
- **En 1854:** George Boole definió la lógica como sistemas formal. Esto proporcionó un modelo algebraico de la lógica de proposiciones.
- **En 1879:** Gottlob Frege formalizó la lógica de predicados.

Boole

Frege

# Algo de historia: Lógica y matemáticas

- **1910-1913:** Alfred North Whitehead y Bertrand Russell publican "Principia Mathematica".
- **1920:** Hilbert propone el problema de la axiomatización de las matemáticas...
- **...en 1930:** Gödel rebate esta posibilidad al demostrar los teoremas de incompletitud.

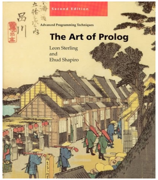


Russel

Gödel

# Algo de historia: Lógica e informática

- **1965:** Alan Robinson publica un método de resolución para lógica de primer orden. Sienta las bases de la deducción automática:
  - Verificación automática de programas: a partir de su especificación formal y utilizando demostradores automáticos de teoremas.
- **1972:** Alain Colmerauer crea Prolog, el primer lenguaje de programación lógica. Sienta las bases de la inteligencia artificial:
  - Permite inferir/deducir conocimiento a partir de una base de conocimientos y una serie de reglas (de inferencia).




Prolog

Colmerauer

# Tema 1.2: **Teoría de conjuntos, relaciones, funciones y álgebra de Boole.**

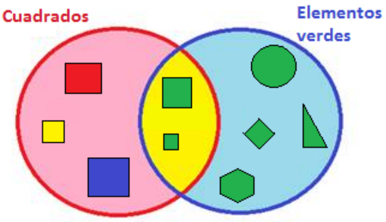
# Teoría de Conjuntos

# Teoría de Conjuntos

- Definición de conjunto y pertenencia.
- Un conjunto $A$ es una colección, finita o infinita, de objetos de un universo $U$ tal que para todo objeto $x$ se puede determinar si $x$ pertenece a $A$ ($x \in A$).
- Si no perteneciera se indicaría como: ($x \notin A$).
- Los objetos que pertenecen a un conjunto se conocen como **elementos** del conjunto.

# Teoría de Conjuntos: Representación

- Una manera muy común de representar relaciones y operaciones entre conjuntos son los diagramas de Venn.



# Teoría de conjuntos: Inclusión e igualdad

- Si todo elemento $x$ de un conjunto $A$ es también elemento de un conjunto $B$, diremos que $A$ está contenido en $B$, o que $A$ es un subconjunto de $B$:

$$A \subseteq B$$

- Si $A$ es un subconjunto de $B$ y existe un elemento de $B$ que no pertenece a $A$, entonces $A$ es un subconjunto propio de $B$:

$$A \subset B$$

- Dos conjuntos serás iguales ($A \equiv B$), si contienen los mismo elementos:

$$A \subseteq B \quad y \quad B \subseteq A$$

# Teoría de conjuntos: Inclusión e igualdad (conjunto vacío)

- El conjunto vacío $\emptyset$ es el conjunto que no tiene elementos:

$$\emptyset = \{\}$$

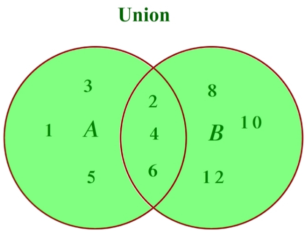
- Dado el conjunto $A = \{\emptyset\}$. ¿Cual es la respuesta correcta?:

$$A = \emptyset \quad o \quad A \neq \emptyset$$

# Teoría de conjuntos: Operaciones (Unión)

- La unión de dos conjuntos $A$ y $B$, es el conjunto $A \cup B$ de todos los elementos de $A$ o de $B$, es decir:

$$A \cup B = \{x \ : \ x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}$$

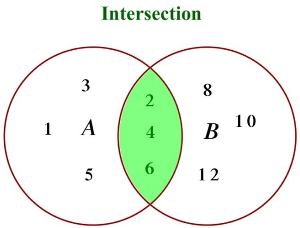



$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$$

# Teoría de conjuntos: Operaciones (Intersección)

- La intersección de dos conjuntos $A$ y $B$, es el conjunto $A \cap B$ de todos los elementos que pertenecen a $A$ a de $B$, es decir:

$$A \cap B = \{x \;:\; x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$$

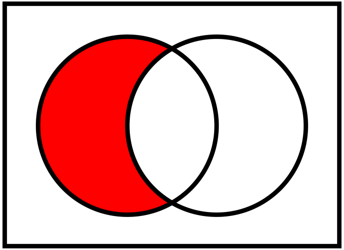



$$A \cap B = \{2,4,6\}$$

# Teoría de conjuntos: Operaciones (Complemento relativo)

- El complemento relativo de $B$ respecto de $A$ (o diferencia $A - B$), es el conjunto $A \backslash B$ de todos los elementos de $A$ que no pertenecen a $B$, es decir:

$$A \backslash B = \{x \ : \ x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}$$



# Teoría de conjuntos: Operaciones (Producto cartesiano)

- El producto cartesiano de dos conjuntos no vacíos $A$ y $B$, es el conjunto de todos los pares ordenados $(a, b)$ con $a \in A$ y $b \in B$, es decir:

$$AxB = \{(a, b) \;\setminus\; a \in A \quad \text{y } b \in B\}$$

- Dado $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$

$$AxB = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

# Teoría de conjuntos: Operaciones (Partes de un conjunto)

- Sea $A$ un conjunto, se llama conjunto de las partes de $A$, $P(A)$, al conjunto cuyos elementos son exactamente los subconjuntos de $A$.
- Dado $A = \{1, 2, 3\}$, el conjunto de las partes de $A$ es:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

# Teoría de conjuntos: Propiedades de las operaciones

- Sean $A$, $B$ y $C$ tres conjuntos. Las principales propiedades de las operaciones con conjuntos son las siguientes:
  1. **Idempotencia** de la unión y de la intersección:
  $$A \cup A = A$$
  $$A \cap A = A$$
  2. **Conmutatividad** de la unión y de la intersección:
  $$A \cup B = B \cup A$$
  $$A \cap B = B \cap A$$
  3. **Asociatividad** de la unión y de la intersección:
  $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
  $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

# Teoría de conjuntos: Propiedades de las operaciones

4. **Distributiva** de la unión respecto de la intersección y de la intersección respecto a la unión:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

5. **Leyes de Morgan**:

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B) \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B) \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

6. **Otras** propiedades interesantes:

$$(A \backslash B) \cup B = A \cup B$$

$$(A \backslash B) \cap B = \emptyset$$

$$A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$$

# Teoría de conjuntos: Propiedad de los conjuntos (Cardinal)

- El cardinal de un conjunto, $Card(A)$ o $|A|$, es el número de elementos de dicho conjunto.
- Sean $A$ y $B$ dos conjuntos finitos cualesquiera:

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

# Relaciones Binarias

# Relaciones Binarias

- Una relación binaria entre $A$ y $B$ es un subconjunto $R$ del producto cartesiano $AxB$. Si $(a, b) \in R$ se dirá que $a$ y $b$ están relacionados:

$$aRb$$

- Dado $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$, cuyo producto cartesiano es:

$$AxB = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

- Si consideramos $R = \{(1, c), (2, b), (1, a)\}$ entonces tenemos que:

$$1Rc, 2Rb, 1Ra$$

# Relaciones Binarias: Definiciones

- Dada una relación binaria $R \subseteq AxB$, se denomina:
  - Domino de $R$:

    $$dom(R) = \{x \in A : \exists y \in B \mid (x, y) \in R\} \qquad dom(R) \subseteq A$$

  - Imagen directa (o rango) de $R$:

    $$Im(R) = \{y \in B : \exists x \in A \mid (x, y) \in R\} \qquad Im(R) \subseteq B$$

  - Imagen inversa (o recíproca) de un subconjunto $C$ de $B$:

    $$R^{-1}(C) = \{x \in A : \exists y \in C \mid (x, y) \in R\} \qquad R^{-1}(C) \subseteq A$$

  - Codominio de $R$ al conjunto $B$

# Relaciones Binarias: Homogéneas

- Sea $R$ una relación binara homogénea en un conjunto $A$, no vacío ($R \subseteq AxA$). La relación binaria $R$ puede ser:
  1. **Reflexiva**: $\forall x \in A \mid (x,x) \in R$
  2. **Simétrica**: $\forall x, y \in A \mid (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$
  3. **Antisimétrica**: $\forall x, y \in A \mid (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow x = y$
  4. **Transitiva**: $\forall x, y, z \in A \mid (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$

# Relaciones Binarias: Homogénea y de Equivalencia

- Una relación binaria homogénea $R$, en un conjunto no vacío $A$, se denomina relación de equivalencia si es *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.
- Si $R$ es una relación de equivalencia en lugar de $R$ se escribe $\sim$.
- Si $a \in A$ y $\sim$ es una relación de equivalencia en $A$, se define la clase de equivalencia como:

$$C(a) = \{x \in A : \; x \sim a\}$$

# Relaciones n-arias

# Relaciones n-arias

- Una relación n-aria entre $n$ conjuntos $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, es un subconjunto $R$ del producto cartesiano $A_1 x A_2 x \ldots x A_n$.
- Es una generalización de la relación binaria donde R está formada por una tupla de $n$ términos:

$$R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \; x_1 \in X_1 \;\wedge\; x_2 \in X_2 \;\wedge\; \ldots$$

$$\ldots \;\wedge\; x_n \in X_n \;\wedge\; R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{verdadero}\}$$

- El predicado n-ario: $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función que asigna el valor de verdad $\text{verdadero}$ si y solo si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$.

# Funciones n-arias

# Funciones n-arias

- Una función (o aplicación) n-aria, $f : A_1 x A_2 x \ldots x A_n \rightarrow B$, de un conjunto no vacío $A = A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ a un conjunto no vacío $B$ se puede definir como una “regla de correspondencia” que asigna a cada elemento elemento$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$ un único elemento $b \in B$:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$$

- Una función $f : A_1 x A_2 x \ldots x A_n \rightarrow B$ es a su vez una relación binaria entre el conjunto $A = A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ y el conjunto $B$, tal que a cada elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$ le corresponde un único elemento $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ del conjunto $B$.

# Algebra de Boole: Definición

# Algebra de Boole: Definición

- Definida en 1847 por el matemático inglés George Boole.
- Es un álgebra con sólo dos valores, p.ej.: Falso o Verdadero.
  ...una variable *lógica* tiene dos valores posibles, uno excluye al otro.
- Sobre estos valores definió tres operaciones básicas, p.ej.:
  - NOT ($\neg$): negación lógica o función complemento.
  - OR ($\vee$): suma lógica o función unión.
  - AND ($\wedge$): producto lógico o función intersección.

| $\neg$ | |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

| $\vee$ | V | F |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | F |

| $\wedge$ | V | F |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | F | F |

- Son Álgebras de Boole (entre otras): $(\{\emptyset, U\}, \sim, \oplus, \odot)$, $(\{F, V\}, \neg, \vee, \wedge)$, $(\{0, 1\}, ^{-}, +, \cdot)$, y $(P(U), ^{-}, \cup, \cap)$.

# Algebra de Boole: Interpretación

- Los elementos del álgebra de Boole representa estados diferentes de un dispositivo, p.ej., abierto/cerrado, encendido/apagado, etc.
- Matemáticamente se representan por 1 y 0, y responde a la pregunta:
  - ¿Cómo expresar la clase *not*-$X$ (clase de individuos que no son Xs)?
  - La clase $X$ y la *not*-$X$ juntas hacen el Universo, representado por 1.
  - Por lo tanto, si la clase $X$ es $x$, la clase *not*-$X$ es $1 - x$.
- ... y muchas más. p.ej.:
  - Todos $Xs$ son $Ys$ y todos $Ys$ son $Xs$. $\quad x = y$
  - Todos $Xs$ son $Ys$. $\quad x(1 - y) = 0$
  - No $Xs$ son $Ys$. $\quad xy = 0$
  - Todos $Ys$ son $Xs$ y algunos $Xs$ son $Ys$. $\quad \dots$
  - etc...

# Algebra de Boole: Propiedades y teoremas

- Usando la notación matemática del álgebra de Boole:

| Propiedades | Suma | Producto |
|---|---|---|
| Conmutativa | $x+y=y+x$ | $x \cdot y = y \cdot x$ |
| Elemento neutro | $0+x=x$ | $1 \cdot x = x$ |
| Distributiva | $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ | $x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$ |
| Asociativa | $x + (y+z) = (x+y) + z$ | $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ |
| Complementario | $x + \overline{x} = 1$ | $x \cdot \overline{x} = 0$ |
| **Teoremas** | | |
| Idempotencia | $x+x=x$ | $x \cdot x = x$ |
| Identidad | $x+1=1$ | $x \cdot 0 = 0$ |
| Absorción | $x + x \cdot y = x$ | $x \cdot (x+y) = x$ |
| DeMorgan | $\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ | $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$ |

# Algebra de Boole: Simplificación de ecuaciones

- Aplicando propiedades y teoremas podemos simplificar ecuaciones:

$$x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot \overline{x_1} + x_2 \cdot x_0 \stackrel{?}{=} x_2$$

# Algebra de Boole: Simplificación de ecuaciones

- Aplicando propiedades y teoremas podemos simplificar ecuaciones:

$$x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot \overline{x_1} + x_2 \cdot x_0 \stackrel{?}{=} x_2$$

| | |
|---|---|
| $x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot \overline{x_1} + x_2 \cdot x_0 =$ | Distributiva |
| $= x_2 \cdot (x_1 + \overline{x_1}) + x_2 \cdot x_0 =$ | Complemento |
| $= x_2 \cdot 1 + x_2 \cdot x_0 =$ | Distributiva |
| $= x_2 \cdot (1 + x_0) =$ | Identidad |
| $= x_2 \cdot 1 =$ | Elemento neutro |
| $= x_2$ | |

...para ver si son equivalentes y/o para construir circuitos mas baratos.

# Algebra de Boole: Simplificación de ecuaciones

- Aplicando propiedades y teoremas podemos simplificar ecuaciones:

$$x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot \overline{x_1} + x_2 \cdot x_0 \stackrel{?}{=} x_2$$

$$\begin{aligned}
& x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot \overline{x_1} + x_2 \cdot x_0 = && \text{Distributiva} \\
& = x_2 \cdot (x_1 + \overline{x_1}) + x_2 \cdot x_0 = && \text{Complemento} \\
& = x_2 \cdot 1 + x_2 \cdot x_0 = && \text{Distributiva} \\
& = x_2 \cdot (1 + x_0) = && \text{Identidad} \\
& = x_2 \cdot 1 = && \text{Elemento neutro} \\
& = x_2
\end{aligned}$$

...para ver si son equivalentes y/o para construir circuitos mas baratos.

- Las ecuaciones simplificadas se llaman formas canónicas. Hay dos:
  - Suma de productos.
  - Producto de sumas.