

# EXA´MENES DE TEOR´IA Y PRA´CTICAS DE CURSOS ANTERIORES

Asignaturas:

Me´todos matema´ticos aplicados a la Ing. de Materiales Me´todos nume´ricos en el Ma´ster en Ing. Industrial

A. I. Mun˜oz Montalvo Septiembre 2022

c 2022. Autora: A. I. Mun˜oz Montalvo.

⃝

Algunos derechos reservados.

Este documento se distribuye bajo la licencia internacional Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

Disponible en: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Publicado en: https://burjcdigital.urjc.es

<http://hdl.handle.net/10115/20108>

# EXA´MENES DE TEOR´IA

## Examen de Junio. M´etodos num´ericos. Curso 2021-2022.

1. 5 puntos. Se considera el PVI dado por:

{ −

*y′* = 2*y*2*t, y*(0) = 1*.*

Utilizar los esquemas num´ericos de Euler expl´ıcito y de Heun, dado por la tabla

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |
|  | 1 | 1 |
|  | 2 | 2 |

para obtener el valor aproximado de la soluci´on en *t* = 0*.*5, utilizando un paso de discretizaci´on

*h* = 0*.*25.

### Soluci´on.

M´etodo de Euler expl´ıcito:

•

*y*0 = 1 (valor inicial).

*y*1 = *y*0 + 0*.*25*f* (*t*0*, y*0) = 1 + 0 = 1 (valor aproximado en t=0.25).

*y*2 = *y*1 + 0*.*25*f* (*t*1*, y*1) = 1 − 0*.*125 = 0*.*875 (valor aproximado en t=0.5).

* M´etodo de Heun:

*t*0*,*1 = 0*, t*0*,*2 = 0*.*25*, y*0*,*1 = *y*0 = 1*, y*0*,*2 = *y*0 + 0*.*25*f* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) = 1*.*

Valor aproximado en t=0.25:

*y*1 = *y*0 + 0*.*125*f* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) + 0*.*125*f* (*t*0*,*2*, y*0*,*2) = 1 − 0*.*0625 = 0*.*9375*. t*1*,*1 = 0*.*25*, t*1*,*2 = 0*.*5*, y*1*,*1 = *y*1 = 0*.*9375*, y*1*,*2 = *y*1 + 0*.*25*f* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) = 0*.*8276*.*

Valor aproximado en t=0.5:

* Error:

*y*2 = *y*1 + 0*.*25*f* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) + 0*.*25*f* (*t*1*,*2*, y*1*,*2) = 0*.*7969*.*

Se resuelve la edo de variables separadas para obtener la soluci´on exacta:

*t*2

(

*y* = + 1 2

*−*1

*.*

)

Por tanto, el valor exacto en t=0.5, es y(0.5)=0.8.

El error cometido con el m´etodo de Euler expl´ıcito: |0*.*8 − 0*.*875|=0.075. El error cometido con el m´etodo de Heun: |0*.*8 − 0*.*7969|=0.0031.

1. 5 puntos. Considera el siguiente problema evolutivo unidimensional de convecci´on:

*∂u ∂u*



 (*x, t*) + (*x, t*) = *u* + 1*,* 0 *< x* ≤ 1*,* 0 *< t* ≤ 1*,*

*.*  *∂t ∂x*

(*P* ) =



*u*(0*, t*) = *t,* 0 *< t* ≤ 1*, u*(*x,* 0) = −*x* + 1*,* 0 ≤ *x* ≤ 1*.*

Resolver el problema utilizando un esquema en diferencias ﬁnitas a partir de una f´ormula pro- gresiva para aproximar la derivada temporal y regresiva para aproximar la derivada espacial, tomando como pasos de discretizaci´on ∆*x* = 0*.*5 y ∆*t* = 0*.*5.

### Soluci´on.

Nodos: *x*1 = 0, *x*2 = 0*.*5 y *x*3 = 1.

* Etapa inicial: *u*0 = 0, *u*0 = 0*.*5 y *u*0 = 0.

1

2

3

* Para el resto de etapas tenemos que utilizar el siguiente esquema en diferencias:

*un*+1 = *un*− ∆*t* (*un*−*un*

*i*

*i*

∆*x*

*i*

*i−*1

)+∆*t*(*un*+1) = ∆*t un*

+(1 + ∆*t* − ∆*t* ) *un*+∆*t* = *un*

+0*.*5*un*+0*.*5*.*

*i*

Etapa 1, t=0.5:

*i*

∆*x*

*i−*1

∆*x*

*i*

*i−*1

*u*1=0.5 por la condici´on de contorno; los otros dos valores se calculan siguiendo el esquema:

1

*u*1 = *u*0 + 0*.*5*u*0 + 0*.*5 = 1*.*75*, u*1 = *u*0 + 0*.*5*u*0 + 0*.*5 = 1*.*

2 1 2 3 2 3

Etapa 2, t=1:

*u*2=1 por la condici´on de contorno; los otros dos valores se calculan siguiendo el esquema:

1

*u*2 = *u*1 + 0*.*5*u*1 + 0*.*5 = 2*.*375*, u*2 = *u*1 + 0*.*5*u*1 + 0*.*5 = 2*.*75*.*

2 1 2 3 2 3

## Examen de Mayo. M´etodos matem´aticos aplicados a la Ing. de Materiales.

**Curso 2021-2022**

1. 3 puntos. Se considera la ecuaci´on *f* (*x*) = *e−x x*2 = 0. Encontrar un intervalo en el que se pueda garantizar la existencia de al menos una ra´ız. Aplicar un algor´ıtmo del punto ﬁjo para encontrar una aproximaci´on de la u´nica ra´ız con un error inferior a 10*−*3. Utilizar 4 cifras decimales en los c´alculos.

−

**Soluci´on.** Consideramos *f* (*x*) = *e−x x*2, y vemos que se cumplen las hip´otesis del teorema de Bolzano de el intervalo [0*,* 1], puesto que *f* (1) = *e−*1 1 *<* 0 y *f* (0) = 1. Por tanto, podemos asegurar que en dicho intervalo existe al menos una ra´ız.

−

−

Deﬁnimos la funci´on *g*(*x*) = *e−x/*2. Esta funci´on veriﬁca que si *g*(*x*) = *x* entonces *f* (*x*) = 0, por tanto, en principio podemos considerarla como candidata a deﬁnir un esquema de punto ﬁjo para buescar la ra´ız en [0,1]. Para darla por v´alida, tenemos que ver si es contractiva en dicho intervalo. Para ello, consideramos la derivada

*g′* (*x*) = −

*e−x/*2

*.*

2

Se observa f´acilmente que en [0,1], dicha derivada en valor absoluto est´a acotada por 1 , por

2

tanto, es contractiva y tomamos como constante de contracci´on, *k* = 0*.*5

Tomando como semilla *x*0 = 1, el nu´mero de iteraciones *n* a realizar para alcanzar la tolerancia permitida ser´ıa:

*ln*( *ϵ*(1*−k*) )

*n > |x*1 *−x*0 *|* = 2*.*9772*, ln*(*k*)

donde *x*1 = *g*(*x*0) = 0*.*6065 y *ϵ* = 0*.*001. Basta hacer 3 iteraciones, *x*2 = *g*(*x*1) = −0*.*7384 y

*x*3 = *g*(*x*2) = 0*.*6912*.*

La soluci´on pedida ser´ıa: *x∗* = 0*.*6912*.*

1. 3 puntos. Consid´erese el problema de valor inicial:

{ *y′* = −*t*2*y,*

(*PV I*)

*y*(0) = 1*.*

En el intervalo temporal [0*,* 1], utilizar el esquema num´erico de Euler expl´ıcito y el de Heun, dado por la siguiente tabla (tipo Runge -Kutta):

0 0 0

1 1 0

0*.*5 0*.*5

para obtener un valor aproximado de la soluci´on *y*(*t*) en el tiempo *t* = 1, considerando una longitud de paso constante *h* = 0*.*5. Hallar el error cometido con cada uno de los m´etodos.

**Soluci´on.** Calculamos los valores aproximados con cada uno de los esquemas:

M´etodo de Euler expl´ıcito:

•

*y*0 = 1 (valor inicial).

*y*1 = *y*0 + 0*.*5*f* (*t*0*, y*0) = 1 + 0 = 1 (valor aproximado en t=0.5).

*y*2 = *y*1 + 0*.*5*f* (*t*1*, y*1) = 1 − 0*.*125 = 0*.*875 (valor aproximado en t=1).

* M´etodo de Heun:

*t*0*,*1 = 0*, t*0*,*2 = 0*.*5*, y*0*,*1 = *y*0 = 1*, y*0*,*2 = *y*0 + 0*.*5*f* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) = 1*.*

Valor aproximado en t=0.5:

*y*1 = *y*0 + 0*.*25*f* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) + 0*.*25*f* (*t*0*,*2*, y*0*,*2) = 1 − 0*.*0625 = 0*.*9375*. t*1*,*1 = 0*.*5*, t*1*,*2 = 1*, y*1*,*1 = *y*1 = 0*.*9375*, y*1*,*2 = *y*1 + 0*.*5*f* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) = 0*.*8204*.*

Valor aproximado en t=1:

* Error:

*y*2 = *y*1 + 0*.*5*f* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) + 0*.*5*f* (*t*1*,*2*, y*1*,*2) = 0*.*6739*.*

Se resuelve la edo de variables separadas para obtener la soluci´on exacta:

*y* = *e−t /*3*.*

3

Por tanto, el valor exacto en t=1, es y(1)=0.7165.

El error cometido con el m´etodo de Euler expl´ıcito: |0*.*7165 − 0*.*875|=0.1585. El error cometido con el m´etodo de Heun: |0*.*7165 − 0*.*6739|=0.0426.

1. 4 puntos. Considera el dominio abierto Ω de frontera formada por los lados *L*1*, L*2*, L*3 y *L*4 que se recoge en la ﬁgura.



Figure 1: Dominio Ω, su frontera *L*1 *L*2 *L*3 *L*4 y correspondiente mallado de taman˜o h=1. El origen de coordenadas se localiza en el nodo 1.

∪ ∪ ∪

Sobre dicho dominio se pretende resolver mediante un m´etodo en diferencias el problema de contorno siguiente:

 −2∇ · (∇*u*(*x, y*)) + ∇ · (−→**V**(*x, y*)*u*(*x, y*)) + *u*(*x, y*) = 0*, en* Ω*,*

 *u*(*x, y*) = 0*, en L*1 ∪ *L*4*,*

 [−∇*u*(*x, y*) + −→**V**(*x, y*)*u*(*x, y*)] · −→**n** (*x, y*) = 0*, en L*2 ∪ *L*3*,*

donde −→**V**(*x, y*) es el campo de velocidades de convecci´on, dado por:

−→**V**(*x, y*) = *xy yx*

{ −

}

y −→**n** (*x, y*) es el vector normal unitario exterior en el punto (*x, y*) de la frontera de Ω. Se pide escribir las ecuaciones algebraicas a las que conduce el plantear un esquema en diferencias ﬁnitas de **5 puntos en cruz para la aproximaci´on del t´ermino difusivo y progresivo para la aproximaci´on de las derivadas parciales de primer orden**, junto a, en su caso, la imposici´on de las correspondientes condiciones de contorno, en los nodos 10, 12 y 15 del mallado dado.

### Soluci´on.

En primer lugar, vemos como queda la ecuaci´on:

−2∇ · (∇*u*) + ∇(−→*V u*) + *u* = 0*,*

*∂ ∂ ∂u ∂u*

−2∆*u* + *∂x* (−*xyu*) + *∂y* (*xyu*) + *u* = −2∆*u* + −*xy∂x* + *xy ∂y* + (*x* − *y* + 1)*u* = 0*.*

Calculamos la ecuaci´on algebraica que se obtiene en el nodo 10 de coordenadas (1,2). Para ello utilizamos el esquema de cinco puntos en cruz para la aproximaci´on del laplaciano y un esquema descentrado progresivo para el convectivo, resultando:

−2 *u*14 + *u*9 + *u*6 + *u*11 − 4*u*10 − 2 *u*11 − *u*10 + 2 *u*14 − *u*10 + 0 = 0*,*

de donde

12 1 1

−2*u*6 − 2*u*9 + 12*u*10 − 4*u*11 = 0

−2*u*6 + 12*u*10 − 4*u*11 = 0*,*

ya que *u*9 = 0, por la condici´on de contorno.

Calculamos la ecuaci´on algebraica que se obtiene en el nodo 12 de coordenadas (3,2). Para ello utilizamos el esquema de cinco puntos en cruz para la aproximaci´on del laplaciano y un esquema descentrado progresivo para el convectivo, resultando:

−2 *u*16 + *u*8 + *uF* + *u*11 − 4*u*12 − 6 *uF* − *u*12 + 6 *u*16 − *u*12 + 2*u*

= 0*,*

12

donde el nodo ﬁcticio es F=(4,-2).

1 1 12

Utilizamos la condici´on de contorno aplicada en el nodo 12, para hallar el de valor *uF* :

−2∇*u* + −→**V***u* · −→**n** = 0*,* donde la normal es el vector −→**n** = (1*,* 0)*.*

[ ]

Haciendo sencillos c´alculos, se tiene que:

2 *∂u*

( )−

*∂n* 12

+ (−6*u*12

*,* 6*u*12

)(1*,* 0) = 0*, ∂u*

*∂n* 12

( )

= −3*u*12

*, uF* − *u*12 = 3*u*

1

−

12

*, uF*

= −2*u*12*,*

con lo que la ecuaci´on resultante es,

−2*u*8 − 2*u*11 + 26*u*12 + 4*u*16 = 0*.*

Calculamos la ecuaci´on algebraica que se obtiene en el nodo 15 de coordenadas (2,3). Para ello utilizamos el esquema de cinco puntos en cruz para la aproximaci´on del laplaciano y un esquema descentrado progresivo para el convectivo, resultando:

−2 *u*14 + *uG* + *u*11 + *u*16 − 4*u*15 − 6 *u*16 − *u*15 + 6 *uG* − *u*15 + 0 = 0*,*

12 1 1

donde el nodo ﬁcticio es *G* = (2*,* 4).

Utilizamos la condici´on de contorno aplicada en el nodo 15, para hallar el de valor *uG*:

[−2∇*u* + −→**V***u*] · −→**n** = 0*,* donde la normal es el vector −→**n** = (0*,* 1)*.*

Haciendo sencillos c´alculos, se tiene que:

−2 ( *∂u* )

*∂n*

15

+ (−6*u*15

*,* 6*u*15

)(0*,* 1) = 0*, ∂u*

*∂n* 15

( )

= 3*u*15

*, uF* − *u*12 = 3*u*

1

15

*, uF*

= 4*u*15*,*

con lo que la ecuaci´on resultante es,

−2*u*11 − 2*u*14 − 8*u*16 = 0*.*

## Examen de Enero. M´etodos num´ericos. Curso 2021-2022.

1. 4 puntos. Consid´erese el problema de valor inicial:

{ *y′* = 2*y*1*/*2*t,*

(*PV I*)

*y*(0) = 1*.*

En el intervalo temporal [0*,* 1], utilizar el esquema num´erico de Euler expl´ıcito y el de Heun, dado por la siguiente tabla (tipo Runge -Kutta):

0 0 0

1 1 0

0*.*5 0*.*5

para obtener un valor aproximado de la soluci´on *y*(*t*) en el tiempo *t* = 1, considerando una longitud de paso constante *h* = 0*.*5. Hallar el error cometido con cada uno de los m´etodos.

### Soluci´on.

M´etodo de Euler expl´ıcito:

•

*y*0 = 1 (valor inicial).

*y*1 = *y*0 + 0*.*5*f* (*t*0*, y*0) = 1 + 0 = 1 (valor aproximado en t=0.5).

*y*2 = *y*1 + 0*.*5*f* (*t*1*, y*1) = 1 + 0*.*5 = 1*.*5 (valor aproximado en t=1).

* M´etodo de Heun:

*t*0*,*1 = 0*, t*0*,*2 = 0*.*5*, y*0*,*1 = *y*0 = 1*, y*0*,*2 = *y*0 + 0*.*5*f* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) = 1*.*

Valor aproximado en t=0.5:

*y*1 = *y*0 + 0*.*25*f* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) + 0*.*25*f* (*t*0*,*2*, y*0*,*2) = 1 + 0 + 0*.*25 = 1*.*25*. t*1*,*1 = 0*.*5*, t*1*,*2 = 1*, y*1*,*1 = *y*1 = 1*.*25*, y*1*,*2 = *y*1 + 0*.*5*f* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) = 1*.*25*.*

Valor aproximado en t=1:

*y*2 = *y*1 + 0*.*25*f* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) + 0*.*25*f* (*t*1*,*2*, y*1*,*2) = 1*.*25 + 0*.*295 + 0*.*672 = 2*.*217*.*

* Error:

Se resuelve la edo de variables separadas para obtener la soluci´on exacta:

*t*2 2

(

)

*y* = + 1 *.*

2

Por tanto, el valor exacto en t=1, es y(1)=2.25.

El error cometido con el m´etodo de Euler expl´ıcito: |2*.*25 − 1*.*5|=0.75. El error cometido con el m´etodo de Heun: |2*.*25 − 2*.*217|=0.33.

1. 3 puntos. Consideramos el problema evolutivo unidimensional de convecci´on siguiente:

*∂t*

 2 *∂u* (*x, t*) − *∂u* (*x, t*) = *u,* 0 *< x* ≤ 1*,* 0 *< t* ≤ 1*,*



*.*

(*P* ) =



*∂x*

*u*(0*, t*) = *t,* 0 *< t* ≤ 1*,*

*u*(*x,* 0) = *x*(1 − *x*)*,* 0 ≤ *x* ≤ 1*.*

Resolver el problema utilizando un esquema en diferencias ﬁnitas a partir de una f´ormula pro- gresiva de orden 1 para aproximar la derivada temporal y de una f´ormula regresiva de orden 1 para aproximar la derivada espacial, y tomando como pasos de discretizaci´on espacial y temporal

∆*x* = 0*.*5 y ∆*t* = 0*.*5*.*

### Soluci´on.

Nodos: *x*1 = 0, *x*2 = 0*.*5 y *x*3 = 1.

* Etapa inicial: *u*0 = 0, *u*0 = 0*.*25 y *u*0 = 0.

1

2

3

* Para el resto de etapas tenemos que utilizar el siguiente esquema en diferencias:

*un*+1 = *un* + ∆*t* (*un* −*un*

*i*

*i*

2∆*x*

*i*

*i−*1

)+ ∆*tun* = −∆*tun*

+(1 + 1 + ∆*t* ) *un* = −0*.*5*un*

+1*.*75*un.*

*i*

Etapa 1, t=0.5:

2

*i*

2∆*x*

*i−*1

2

2

*i*

*i−*1

*u*1=0.5 por la condici´on de contorno; los otros dos valores se calculan siguiendo el esquema:

1

*u*1 = −0*.*5*u*0 + 1*.*75*u*0 = 0*.*875*, u*1 = −0*.*5*u*0 + 1*.*75*u*0 = −0*.*125*.*

2

1

2

3

2

3

Etapa 2, t=1:

*u*2=1 por la condici´on de contorno; los otros dos valores se calculan siguiendo el esquema:

1

*u*2 = −0*.*5*u*1 + 1 = −0*.*656*.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *.*75*u*1 = 0*.*778*, u*2 = − | 0*.*5*, u*1 + 1*.* | 75*, u*1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |

1. 3 puntos. Considera el dominio abierto Ω de frontera formada por los lados *L*1*, L*2*, L*3 y *L*4 que se recoge en la ﬁgura. Sobre dicho dominio, siendo el nodo 1 el punto (0*,* 0) y el taman˜o



Figure 2: Dominio Ω, su frontera *L*1 *L*2 *L*3 *L*4 y correspondiente mallado de taman˜o h=1.

∪ ∪ ∪

de discretizaci´on *h* = 1, se pretende resolver mediante un m´etodo en diferencias el problema de contorno siguiente:

 −∇ · (∇*u*(*x, y*)) + ∇ · (−→**V**(*x, y*)*u*(*x, y*)) + *u*(*x, y*) = 0*, en* Ω*,*

 *u*(*x, y*) = 0*, en L*1 ∪ *L*3*,*

 [−∇*u*(*x, y*) + −→**V**(*x, y*)*u*(*x, y*)] · −→**n** (*x, y*) = 0*, en L*2 ∪ *L*4*,*

donde −→**V**(*x, y*) es el campo de velocidades de convecci´on que se considera dado por:

−→**V**(*x, y*) = *x*

{

}

−*y*

y −→**n** (*x, y*) es el vector normal unitario exterior en el punto (*x, y*) de la frontera de Ω. Se pide escribir las ecuaciones algebraicas a las que conduce el plantear un esquema en diferencias ﬁnitas de **5 puntos en cruz para la aproximaci´on del t´ermino difusivo y progresivo para la aproximaci´on de las derivadas parciales de primer orden**, junto a, en su caso, la imposici´on de las correspondientes condiciones de contorno, en los nodos 3 y 10 del mallado dado.

### Soluci´on.

En primer lugar, vemos como queda la ecuaci´on:

−∇ · (∇*u*) + ∇(−→*V u*) + *u* = 0*,*

*∂ ∂ ∂u ∂u*

−∆*u* + *∂x* (*xu*) + *∂y* (−*yu*) + *u* = −∆*u* + *x∂x* − *y ∂y* + *u* = 0*.*

Calculamos la ecuaci´on algebraica que se obtiene en el nodo 3 de coordenadas (2,0). Para ello utilizamos el esquema de cinco puntos en cruz para la aproximaci´on del laplaciano y un esquema descentrado progresivo para el convectivo, resultando:

− *u*7 + *u*2 + *u*4 + *uF* − 4*u*3 + 2 *u*4 − *u*3 + 0 + *u* = 0

12 1 3

donde el nodo ﬁcticio es F=(2,-1).

Utilizamos la condici´on de contorno aplicada en el nodo 3, para hallar el de valor *uF* :

[−∇*u* + −→**V***u*] · −→**n** = 0*,* donde la normal es el vector −→**n** = (0*,* −1)*.*

Haciendo sencillos c´alculos, se tiene que:

— ( *∂u* )

*∂n*

+ (2*u ,* 0)(0*,* −1) = 0*,* ( *∂u* )

= 0*, u*3 − *uF*

= 0*,*

3

3

*uF* = *u*3, con lo que la ecuaci´on resultante es,

3

*∂n*

1

−*u*2 + 2*u*3 + 2*u*4 − *u*7 = 0*.*

Calculamos la ecuaci´on algebraica que se obtiene en el nodo 10 de coordenadas (1,2). Para ello utilizamos el esquema de cinco puntos en cruz para la aproximaci´on del laplaciano y un esquema descentrado progresivo para el convectivo, resultando:

− *u*9 + *u*14 + *u*11 + *u*6 − 4*u*10 + *u*11 − *u*10 + (−2) *u*14 − *u*10 + *u*

12

1

1

= 0*,*

10

−*u*6 − *u*9 + 6*u*10 − *u*11 − 3*u*14 = 0*,* −*u*6 + 6*u*10 − *u*11 − 3*u*14 = 0*,*

ya que *u*9 = 0 por la condici´on de contorno.

## Examen de Junio. M´etodos num´ericos. Curso 2020-2021.

1. 5 puntos. Se considera el PVI dado por:

{ −

*y′* = *y*3*t, y*(0) = 1*.*

Utilizar los esquemas num´ericos de Euler expl´ıcito y de Heun, dado por la tabla

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |
|  | 1 | 1 |
|  | 2 | 2 |

para obtener el valor aproximado de la soluci´on en *t* = 0*.*5, utilizando un paso de discretizaci´on

*h* = 0*.*25.

### Soluci´on.

M´etodo de Euler expl´ıcito:

•

*y*0 = 1 (valor inicial).

*y*1 = *y*0 + 0*.*25*f* (*t*0*, y*0) = 1 + 0 = 1 (valor aproximado en t=0.25).

*y*2 = *y*1 + 0*.*25*f* (*t*1*, y*1) = 1 − 0*.*0625 = 0*.*9375 (valor aproximado en t=0.5).

* M´etodo de Heun:

*t*0*,*1 = 0*, t*0*,*2 = 0*.*25*, y*0*,*1 = *y*0 = 1*, y*0*,*2 = *y*0 + 0*.*25*f* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) = 1*.*

Valor aproximado en t=0.25:

*y*1 = *y*0 + 0*.*125*f* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) + 0*.*125*f* (*t*0*,*2*, y*0*,*2) = 1 − 0*.*03125 = 0*.*96875*. t*1*,*1 = 0*.*25*, t*1*,*2 = 0*.*5*, y*1*,*1 = *y*1 = 0*.*96875*, y*1*,*2 = *y*1 + 0*.*25*f* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) = 0*.*9119*.*

Valor aproximado en t=0.5:

* Error:

*y*2 = *y*1 + 0*.*25*f* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) + 0*.*25*f* (*t*1*,*2*, y*1*,*2) = 0*.*0*.*8929*.*

Se resuelve la edo de variables separadas para obtener la soluci´on exacta:

*t*2 *−*1*/*2

(

)

*y* = + 1 *.*

2

Por tanto, el valor exacto en t=0.5, es y(0.5)=0.8944.

El error cometido con el m´etodo de Euler expl´ıcito: |0*.*8944 − 0*.*9375|=0.0431. El error cometido con el m´etodo de Heun: |0*.*8944 − 0*.*8929|=0.0015.

1. 5 puntos. Considera el siguiente problema evolutivo unidimensional de convecci´on:

*∂u ∂u*



 (*x, t*) + (*x, t*) = *u* + 1*,* 0 *< x* ≤ 1*,* 0 *< t* ≤ 1*,*

*.*  *∂t ∂x*

(*P* ) =



*u*(0*, t*) = 1*,* 0 *< t* ≤ 1*,*

*u*(*x,* 0) = −*x*2 + 1*,* 0 ≤ *x* ≤ 1*.*

Resolver el problema utilizando un esquema en diferencias ﬁnitas a partir de una f´ormula pro- gresiva para aproximar la derivada temporal y regresiva para aproximar la derivada espacial, tomando como pasos de discretizaci´on ∆*x* = 0*.*5 y ∆*t* = 0*.*5.

### Soluci´on.

Nodos: *x*1 = 0, *x*2 = 0*.*5 y *x*3 = 1.

* Etapa inicial: *u*0 = 0, *u*0 = 0*.*75 y *u*0 = 0.

1

2

3

* Para el resto de etapas tenemos que utilizar el siguiente esquema en diferencias:

*un*+1 = *un*− ∆*t* (*un*−*un*

*i*

*i*

∆*x*

*i*

*i−*1

)+∆*t*(*un*+1) = ∆*t un*

+(1 + ∆*t* − ∆*t* ) *un*+∆*t* = *un*

+0*.*5*un*+0*.*5*.*

*i*

Etapa 1, t=0.5:

*i*

∆*x*

*i−*1

∆*x*

*i*

*i−*1

*u*1=1 por la condici´on de contorno; los otros dos valores se calculan siguiendo el esquema:

1

*u*1 = *u*0 + 0*.*5*u*0 + 0*.*5 = 1*.*875*, u*1 = *u*0 + 0*.*5*u*0 + 0*.*5 = 1*.*25*.*

2 1 2 3 2 3

Etapa 2, t=1:

*u*2=1 por la condici´on de contorno; los otros dos valores se calculan siguiendo el esquema:

1

*u*2 = *u*1 + 0*.*5*u*1 + 0*.*5 = 2*.*4375*, u*2 = *u*1 + 0*.*5*u*1 + 0*.*5 = 3*.*

2 1 2 3 2 3

## Examen de Mayo. M´etodos matem´aticos aplicados a la Ing. de Materiales.

**Curso 2020-2021**

1. 3 puntos. Considera la ecuaci´on *f* (*x*) = √*x* + 1 *tan*(*x*) = 0: Demostrar que *f* (*x*) tiene una ra´ız en [0*.*5*,* 1]. Resolver la ecuaci´on *f* (*x*) = 0 utilizando un m´etodo del punto ﬁjo, veriﬁcando que la funci´on *g*(*x*) elegida es contractiva en las proximidades de la ra´ız y hallando un nu´mero de iteraciones suﬁciente para que |*xi* − *xi−*1| *<* 10*−*2.

−

**Soluci´on.** Consideramos *f* (*x*) = √*x* + 1 *tan*(*x*), y vemos que se cumplen las hip´otesis del teorema de Bolzano de el intervalo [0*.*5*,* 1], puesto que *f* es continua, *f* (0*.*5) *<* 0 y *f* (1) *>* 0. Por tanto, podemos asegurar que en dicho intervalo existe al menos una ra´ız.

−

Deﬁnimos la funci´on *g*(*x*) = *atan*(√*x* + 1). Esta funci´on veriﬁca que si *g*(*x*) = *x* entonces

*f* (*x*) = 0, por tanto, en principio, podemos considerarla como candidata a deﬁnir un esquema de punto ﬁjo para hallar una aproximaci´on de la ra´ız en [0.5,1]. Para darla por v´alida, vamos a estudiar si es contractiva en dicho intervalo. Para ello, consideramos su derivada

*′* 1 1

*g* (*x*) = *x* + 2 2√*x* + 1 *.*

Se observa f´acilmente que en [0.5,1], dicha derivada en valor absoluto est´a acotada, a simple vista, por 1 . En realidad en dicho intervalo, la cota superior es el valor *g′* (0*.*5) *<* 0*.*25. Hemos visto que *g* es contractiva y tomamos como constante de contracci´on *k* = 0*.*25*.*

4

Tomando como semilla *x*0 = 1, tenemos que: *x*1 = *g*(*x*0) = 0*.*9553, *x*2 = *g*(*x*1) = 0*.*9499, *x*3 = *g*(*x*2) = 0*.*9493 y vemos que *x*3 *x*2 *<* 0*.*01, que es la codici´on de parada del esquema iterativo que nos dice el enunciado.

| − |

La soluci´on pedida ser´ıa: *x∗* = 0*.*9493*.*

1. 4 puntos. Se considera el problema de valor inicial:

{ *y′* = −*t*(*y* + 1)2

(*PV I*)

*y*(0) = 1*.*

En el intervalo temporal [0*,* 0*.*5], utilizar el esquema num´erico tipo Runge-Kutta, dado por la tabla:

0

1

2

1

0

1

2

−1

1

6

0 0

0 0

2 0

4 1

6 6

para encontrar un valor aproximado de la soluci´on en *t* = 0*.*5 tomando un taman˜o de dis- cretizaci´on *h* = 0*.*25 (usar 3 cifras decimales). Calcular el error cometido.

### Soluci´on.

*t*0*,*1 = 0*, t*0*,*2 = 0*.*125*, t*0*,*3 = 0*.*25*,*

*y*0*,*1 = *y*0 = 1*, y*0*,*2 = *y*0 + *hf* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) = 1*,*

*y*0*,*3 = *y*0 − *hf* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) + 2*hf* (*t*0*,*2*, y*0*,*2) = 1 − 0*.*25 = 0*.*75*.*

Valor aproximado en t=0.25:

*y*1 = *y*0 + (0*.*25*/*6)(*f* (*t*0*,*1*, y*0*,*1) + 4*f* (*t*0*,*2*, y*0*,*2) + *f* (*t*0*,*3*, y*0*,*3)) = 0*.*887

*t*1*,*1 = 0*.*25*, t*1*,*2 = 0*.*375*, t*1*,*3 = 0*.*5*,*

*y*1*,*1 = *y*1 = 0*.*887*, y*1*,*2 = *y*0 + *hf* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) = 0*.*776*, y*1*,*3 = *y*1 − *hf* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) + 2*hf* (*t*1*,*2*, y*1*,*2) = 0*.*407*.*

Valor aproximado en t=0.5:

*y*2 = *y*1 + (0*.*25*/*6)(*f* (*t*1*,*1*, y*1*,*1) + 4*f* (*t*1*,*2*, y*1*,*2) + *f* (*t*1*,*3*, y*1*,*3)) = 0*.*617

Error:

Se resuelve la edo de variables separadas para obtener la soluci´on exacta:

1 *t*2

−

*y* = *.*

1 + *t*2

Por tanto, el valor exacto en t=0.5, es y(0.5)=0.6.

El error cometido con el m´etodo num´erico es: |0*.*6 − 0*.*617|=0.017.

1. 3 puntos. Considera el dominio abierto Ω de frontera formada por los lados *L*1*, L*2 y *L*3 que se recoge en la ﬁgura. Sobre dicho dominio se pretende resolver mediante un m´etodo en diferencias el problema de contorno siguiente:

 −2∇ · (∇*u*(*x, y*)) + ∇ · (−→**V**(*x, y*)*u*(*x, y*)) + 2*u*(*x, y*) = 0*, en* Ω*,*



[−2∇*u*(*x, y*) + −→**V**(*x, y*)*u*(*x, y*)] · −→**n** (*x, y*) = 0*, en L*1 *L*2 *L*3*,*

 ∪ ∪

donde −→**V**(*x, y*) es el campo de velocidades de convecci´on que se considera dado por:

−→**V**(*x, y*) = *x y*

{ −

}

*x* + *y*

y −→**n** (*x, y*) es el vector normal unitario exterior en el punto (*x, y*) de la frontera de Ω. Se pide escribir las ecuaciones algebraicas a las que conduce el plantear un esquema en diferencias ﬁnitas de **5 puntos en cruz para la aproximaci´on del t´ermino difusivo y contracorriente para el convectivo**, junto a, en su caso, la imposici´on de las correspondientes condiciones de contorno, en los nodos 3 y 6 del mallado dado.



Figure 3: Dominio Ω, su frontera *L*1 *L*2 *L*3 y correspondiente mallado de taman˜o h=1, estando el nodo 1 localizado en el origen de coordenadas (0*,* 0).

∪ ∪

### Soluci´on.

En primer lugar, vemos como queda la ecuaci´on:

−2∇ · (∇*u*) + ∇(−→*V u*) + 2*u* = 0*,*

*∂ ∂ ∂u ∂u*

−2∆*u* + *∂x* ((*x* − *y*)*u*) + *∂y* ((*x* + *y*)*u*) + 2*u* = −2∆*u* + +(*x* − *y*) *∂x* + (*x* + *y*) *∂y* + 4*u* = 0*.*

Calculamos la ecuaci´on algebraica que se obtiene en el nodo 3 de coordenadas (2,0). Para ello utilizamos el esquema de cinco puntos en cruz para la aproximaci´on del laplaciano y un esquema descentrado progresivo para el convectivo, resultando:

−2 *u*7 + *u*4 + *u*2 + *uF* 1 − 4*u*3 + 2 *u*3 − *u*2 + 2 *u*3 − *uF* 1 + 4*u*

= 0*,*

de donde

12 1 1 3

−4*u*2 + 16*u*3 − 2*u* − 4 − 2*u*7 − 4*uF* 1 = 0*,*

donde el nodo ﬁcticio *F* 1 tiene coordenadas (2,-1). Utilizamos la condici´on de contorno aplicada en el nodo 3, para hallar el de valor *uF* 1:

−2∇*u* + −→**V***u* · −→**n** = 0*,* donde la normal es el vector −→**n** = (0*,* −1)*.*

[ ]

Haciendo sencillos c´alculos, se tiene que:

−2 ( *∂u* )

*∂n*

+ (2*u ,* 2*u* )(0*,* −1) = 0*,* ( *∂u* )

= −*u , u*3 − *uF* 1 = −*u , u*

= 2*u ,*

*F* 1

3

3

3

con lo que la ecuaci´on resultante es,

3

3

*∂n*

3

1

3

−4*u*2 + 8*u*3 − 2*u*4 − 2*u*7 = 0*.*

Calculamos la ecuaci´on algebraica que se obtiene en el nodo 6 de coordenadas (1,1). Para ello utilizamos el esquema de cinco puntos en cruz para la aproximaci´on del laplaciano y un esquema descentrado progresivo para el convectivo, resultando:

−2 *uF* 2 + *uF* 3 + *u*2 + *u*7 − 4*u*6 + 0 + 2 *u*6 − *u*2 + 4*u*

12

1

= 0*,*

6

donde los nodos ﬁcticios son F2=(1,2) y F3=(0,1).

Utilizamos la condici´on de contorno aplicada en el punto f2=(1.5,1.5), para hallar el de valor

*uF* 2:

[−2∇*u* + −→**V***u*] · −→**n** = 0*,* donde la normal es el vector −→**n** = (−1*/*√2*,* 1*/*√2)*.*

Haciendo sencillos c´alculos, se tiene que:

−2 ( *∂u* )

+ (0*,* 3*u*

)(−1*/*√2*,* 1*/*√2) = 0*,* ( *∂u* )

= *uF*√2 − *uf*2 = 3 *u ,*

*∂n f* 2

*f* 2

*∂n f* 2

7 7

2*/*2

2√2 *f* 2

*uF* 2 = 4 *uf*2 = 8 (*u*6 + *u*4)*.*

Utilizamos la condici´on de contorno aplicada en el punto f3=(0.5,5.5), para hallar el de valor

*uF* 3:

[−2∇*u* + −→**V***u*] · −→**n** = 0*,* donde la normal es el vector −→**n** = (−1*/*√2*,* 1*/*√2)*.*

Haciendo sencillos c´alculos, se tiene que:

−2 ( *∂u* )

+ (0*, u*

)(−1*/*√2*,* 1*/*√2) = 0*,* ( *∂u* )

= *uF*√3 − *uf*3 = 1 *u ,*

*∂n f* 3

*f* 3

*∂n f* 3

5 5

2*/*2

2√2 *f* 3

*uF* 3 = 4 *uf*3 = 8 (*u*6 + *u*1)*.*

Con los c´alculos anteriores, se tiene que la ecuaci´on resultante es,

5 7

− 4 *u*1 − 4*u*2 + 11*u*6 − 2*u*7 − 4 *u*9 = 0*.*

# EXA´MENES DE PRA´CTICAS CON OCTAVE/MATLAB

Los c´odigos utilizados han sido creados por los profesores A.I. Mun˜oz, A. Nolla y E. Schiavi y est´an publicados en https://burjcdigital.urjc.es, bajo el t´ıtulo *C´odigos en Matlab/Octave utilizados en las asignaturas M´etodos Matem´aticos aplicados a la Ingenier´ıa de Materiales en el Grado de Ingenier´ıa de Materiales y M´etodos Num´ericos (M´odulo I) en el M´aster universitario en Ingenier´ıa Industrial*, siendo la mayor parte de ellos, adaptaciones de las funciones del libro *C´alculo cient´ıfico con MATLAB y Octave* de A. Quarteroni, F. Saleri, que se pueden obtener en https://mox.polimi.it/qs/.

Toda l´ınea que comience por % indicar´a un comentario y lo que siga al s´ımbolo prompt del sistema,

*>*, es una l´ınea de comandos.

## Examen de Junio. M´etodos matem´aticos aplicados a la Ing. de Materiales.

**Curso 2021-2022.**

1. 3 puntos. Encontrar la ra´ız de la ecuaci´on *x*2 *sen*(*x*) 1 = 0, utilizando el m´etodo de bipartici´on con una tolerancia de 10*−*4.

— −

### Soluci´on

*>* fecu=@(x) x.^ 2-sin(x)-1;

* + I=[-2:0.1:2]; plot(I,fecu(I));% vemos por d´onde est´an las ra´ıces

%% Primera ra´ız

* + a=-1;b=-0.5; fecu(a),fecu(b) %% vemos que toman signos diferentes
	+ errorper=1e-4;maxitera=100;
	+ [sol1,itera1]=metbiseccion(fecu,a,b,errorper,maxitera)

%%%SOLUCIO´ N sol1=-0.6368; itera1=12;

%% Segunda ra´ız

* + a2=1;b2=1.5; fecu(a2),fecu(b2) %% vemos que toman signos diferentes
	+ [sol2,itera2]=metbiseccion(fecu,a2,b2,errorper,maxitera)

%%% SOLUCIO´ N sol2=1.4096, itera2=12;

1. 4 puntos. Se considera el PVI dado por:

{ −

*y′* = *y*3*et, y*(0) = 1*.*

1. Utilizar los esquemas num´ericos de Euler impl´ıcito (eulerimplicito.m) y Heun (heun.m) para obtener valores aproximados de la soluci´on en *t* = 0*.*01 y *t* = 0*.*6.
2. Dibujar las soluciones obtenidas en el intervalo temporal [0*,* 1], con los dos m´etodos en un mismo plot.

### Soluci´on

* + f=@(t,y) -(y.^ 3).\*exp(t); valorini=1; npasos=100;
	+ intiempo=[0,1];

%%% con Euler impl´ıcito

* + [solt,solyei]=eulerimplicito(f,intiempo,valorini,npasos);
	+ c1=find(solt==0.01);
	+ solyei(c1)%%% 0.9902
	+ c2=find(solt==0.6);
	+ solyei(c2)%%% 0.6163

%%%% con Heun

* + [solt,solyheun]=heun(f,intiempo,valorini,npasos);
	+ solyheun(c1)%%% 0.9901
	+ solyheun(c2)%%% 0.6150

%%%%

* + figure; plot(solt,solyei,’r’,solt,solyheun,’b’);

1

0.9

0.8

0.7

0.6

0.5

0.4

0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

Figure 4: Resultados: en rojo los valores obtenidos con Euler impl´ıcito y en azul con Heun. Las gr´aﬁcas se solapan.

1. 3 puntos. Sea dado el Problema de transporte difusivo y convectivo deﬁnido por el PVC:

*u′′* + 2*u′* + *u* = 2(*cos*(*x*) + *sen*(*x*))*, x* (0*,* 2)*,*

{ − ∈

*u*(0) = 0*, u*(2) = *sen*(2)*,*

cuya soluci´on anal´ıtica es: *u*(*x*) = *sen*(*x*)*.* Aplicar el algoritmo bvpdirichlet.m para calcular la soluci´on en el intervalo [0*,* 2] con paso de discretizaci´on *h* = 0*.*125. Dibujar la soluci´on anal´ıtica junto con la soluci´on num´erica. Determinar los valores m´aximos y m´ınimos de la soluci´on num´erica, as´ı como su localizaci´on.

### Soluci´on

* a=0;b=2;ua=0;ub=sin(2);
* numeronodos=(2/0.125)+1;D=1;V=2;Q=1; fd=@(x) 2.\*(cos(x)+sin(x));
* [xh,uh]=bvpdirichlet(a,b,numeronodos,D,V,Q,fd,ua,ub);
* solexacta=@(x) sin(x); figure;
* plot(xh,uh,’r’,xh,solexacta(xh),’k’);

1

0.8

0.6

0.4

0.2

0

0 0.5 1 1.5 2

Figure 5: Resultados obtenidos. En rojo los valores num´ericos y en negro, los valores exactos. Las gr´aﬁcas de la soluci´on num´erica y la exacta, pr´acticamente se solapan.

* maximo=max(uh)%%% 0.993
* minimo=min(uh)%%% 0
* cmaximo=find(uh==maximo);
* xmax=xh(cmaximo)%%% 1.6250
* cminimo=find(uh==minimo);
* xmin=xh(cminimo)%%% 0

## Examen de Mayo. M´etodos matem´aticos aplicados a la Ing. de Materiales.

**Curso 2021-2022.**

1. 5 puntos. Se considera la ecuaci´on *f* (*x*) = *e−*2*x sen*(*x*) = 0. Encontrar una aproximaci´on de la ra´ız existente en el intervalo [0*,* 1], utilizando el m´etodo de Newton. Utilizar una tolerancia de 10*−*5.

−

### Soluci´on.

* + fecu=@(x) exp(-2.\*x)-sin(x);
	+ xx=[-1:0.1:1];
	+ plot(xx,fecu(xx))

%% entre 0.4 y 0.6 se observa que hay una ra´ız

* + dfecu=@(x) -2.\*exp(-2.\*x)-cos(x)
	+ x0=0.4; errorper=1e-5; maxitera=1000;
	+ [soln,iteran]=metnewton1ec(fecu,dfecu,x0,errorper,maxitera)

%% como soluci´on da soln=0.4336, iteran=3.

1. 10 puntos. Se considera el PVI dado por:

{

*y′* = *tcos*2(*y*)*, y*(0) = 0*.*

1. Utilizar los esquemas num´ericos de Euler expl´ıcito y Heun para obtener valores aproximados de la soluci´on en *t* = 0*.*25 y *t* = 0*.*5.
2. Dibujar las soluciones obtenidas en el intervalo temporal [0*,* 1] con los dos m´etodos y la soluci´on exacta en un mismo plot.

### Soluci´on.

* + f=@(t,y) t.\*(cos(y)).^ 2;
	+ intiempo=[0 1];valorini=0;npasos=100;%%% tomo h=0.01
	+ [solt,solyee]=eulerexplicito(f,intiempo,valorini,npasos);
	+ [solt,solyhe]=heun(f,intiempo,valorini,npasos);

*>* t1=min(find(solt>=0.25));%% tambi´en t1=ﬁnd(t==0.25);

* + t2=min(find(solt>=0.5));
	+ solyee(t1),solyhe(t1)% soluciones en 0.25, 0.029992, 0.031240
	+ solyee(t2),solyhe(t2) % soluciones en 0.5, 0.1219, 0.1244

%% soluci´on exacta

* + exac=@(tt) atan(0.5.\*tt.^ 2); figure;
	+ plot(solt,solyee,’ro’,solt,solyhe,’b\*’,solt,exac(solt),’g+’)

%%% Los resultados son similares y por eso, las tres gr´aﬁcas pr´acticamente se solapan.

0.6

0.5

0.4

0.3

0.2

0.1

0

0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

Figure 6: Resultados obtenidos con Euler expl´ıcito en rojo, con Heun en azul y valores exactos en verde. Las gr´aﬁcas pr´acticamente se solapan.

1. 5 puntos. Sea dado el Problema de transporte difusivo y convectivo deﬁnido por el PVC:

2*u′′* + 3*u′ u* = *sen*(*x*) + 3*cos*(*x*)*, x* (0*,* 1)*, u*(0) = 0*, u*(1) = *sen*(1)*,*

{ − − ∈

cuya soluci´on anal´ıtica es:

*u*(*x*) = *sen*(*x*)*.*

Aplicar el algoritmo bvpdirichlet.m para calcular la soluci´on en el intervalo [0*, π*] con paso de dis- cretizaci´on *h* = 0*.*125. Dibujar la soluci´on anal´ıtica junto con la soluci´on num´erica. Determinar los valores m´aximos y m´ınimos de la soluci´on num´erica.

### Soluci´on.

* a=0; b=1; D=1; V=3; Q=-1;
* fd=@(x) sin(x)+3.\*cos(x); ua=0; ub=sin(1);
* numeronodos=(2/0.125)+1;
* [xh,uh]=bvpdirichlet(a,b,numeronodos,D,V,Q,fd,ua,ub);
* solexac=sin(xh); figure;
* plot(xh,uh,’r’,xh,solexac,’g’)
* max(uh)% m´aximo de la soluci´on num´erica 0.8415
* min(uh)% m´ınimo de la soluci´on num´erica 0.

1

0.8

0.6

0.4

0.2

0

0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

Figure 7: Resultados obtenidos: en rojo, la soluci´on num´erica y en verde, la exacta.

## Examen de Junio. M´etodos matem´aticos aplicados a la Ing. de Materiales.

**Curso 2020-2021.**

1. 5 puntos Se considera el PVI dado por:

{

*y′* = *te−*2*y, y*(0) = *ln*(2)*.*

* 1. Utilizar los esquemas num´ericos de Euler expl´ıcito y Heun para obtener valores aproximados de la soluci´on en *t* = 0*.*01, *t* = 0*.*42 y *t* = 0*.*5.
	2. Dibujar las soluciones obtenidas en el intervalo temporal [0*,* 0*.*5] con los dos m´etodos y la soluci´on exacta en un mismo plot.

### Soluci´on.

* f=@(t,y) t.\*exp(-2.\*y); valorini=log(2); npasos=50;
* intiempo=[0 0.5];

%%% con euler expl´ıcito

* [solt,solyee]=eulerexplicito(f,intiempo,valorini,npasos);
* c1=find(solt==0.01);
* solyee(c1) %%% 0.6931

*>* c2=min(find(solt*>*=0.42));

* solyee(c2) %%% 0.7142
* c3=min(*find*(*solt >*= 0*.*5));
* solyee(c3) %%% 0.7229

%%%con Heun

* [solt,solyheun]=heun(f,intiempo,valorini,npasos);
* solyheun(c1)%%%0.6932
* solyheun(c2)%%%0.7147
* solyheun(c3)%%%0.7235

%%% soluci´on exacta *y* = 0*.*5 *ln*(*t*2 + 4);

∗

* solexac=0.5.\*log(solt.^2+4); figure;
* plot(solt,solyee,’r’,solt,solyheun,’b’,solt,solexac,’c’)

0.725

0.72

0.715

0.71

0.705

0.7

0.695

0.69

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5

Figure 8: Resultados obtenidos con Euler expl´ıcito en rojo, con Heun en azul y valores exactos en cian. Las gr´aﬁcas pr´acticamente se solapan.

1. 5 puntos. Sea dado el PVIC:



*∂u* = 1 *∂*2 *u* + *f* (*x, t*)*,*

*∂t*

4 *∂x*2

donde

*u*(*x, t*) = *g*(*x, t*)*, x* = 0*, x* = 0*.*5*,*

 *u*(*x,* 0) = *u*0(*x*)*, x* ∈ (0*,* 0*.*5)*,*

*f* (*x, t*) = *x, g*(*x, t*) = *t, u*0(*x*) = 0*.*

* 1. Obtener los valores de las soluciones en *x* = 0*.*25 y *x* = 0*.*5 para *t* = 1, utilizando el algoritmo ecucalor.m con *θ* = 0*.*5 (Crank-Nicholson), tomando como pasos de discretizaci´on espacial y temporal ∆*x* = 0*.*05 y ∆*t* = 0*.*02, respectivamente.
	2. Dibujar la soluci´on obtenida para *t* = 1.

### Soluci´on.

* C=0.25; intespacio=[0 0.5]; intiempo=[0 1];
* pasosespacio=0.5/0.05; pasostiempo=1/0.02; theta=0.5;
* u0=@(x) 0.\*x; g=@(t,x) t; f=@(t,x) x;
* [xf,uf]=ecucalor(C,intespacio,intiempo,pasosespacio,...
* pasostiempo,theta,u0,g,f); plot(xf,uf)

*>* c4=min(find(xf>=0.25));

* uf(c4)%%% 0.9063

*>* c5=min(find(xf>=0.5));

* uf(c5)%%% 1

1

0.98

0.96

0.94

0.92

0.9

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5

Figure 9: Resultados obtenidos para t=1.