Universidad Rey Juan Carlos

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Selección de Ejercicios de Lógica

PARA CIBERSEGURIDAD E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

CURSO 2022-2023

Autores: **Joaquín Arias**
Carmen Lancho

http://hdl.handle.net/10115/20119

1. Conjuntos

Ejercicio 1 *Dados los conjuntos* $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$ *y* $C = \emptyset$ *se pide:*

1. Calcular el cardinal de A. $|A| =$
2. Calcular el cardinal de A unión B. $|A \cup B| =$
3. Calcular el cardinal de A unión B unión C. $|A \cup B \cup C| =$
4. Completar la definición. $A \cap B = \{x \ : \ x \in A \qquad x \in B\}$

2. Formalizar en lenguaje proposicional

Ejercicio 2 *Traducir a lenguaje proposicional.*

1. Si se calientan los servidores o hay mucha inactividad durante el día hay una probabilidad muy alta de ciberataque.
2. Sólo si Pedro juega jugará también Alex.
3. Pedro irá al dentista, tanto si quiere como si no quiere.
4. La magia se revela sólo si Pinocho miente o Blancanieves muerde la manzana.
5. El certificado tiene validez si está firmado por el director o el tutor del proyecto.
6. La inflación aumentará a menos que baje la emisión de moneda u ocurra un milagro.
7. Leeré a Proust si me voy de vacaciones y encuentro sus libros en oferta.
8. Si hay un virus en el ordenador y no procede de un pendrive, entonces o hay un ciberatacante o procede de alguna descarga.
9. Te regalaré el cuadro que te gusta y viajaremos juntos a Italia cuando me toque la lotería o deje de llamarme Ernesto.
10. Es necesario que llueva o que haga viento para que disminuya la contaminación.
11. Si llueve y hace viento, disminuye la contaminación.
12. Si Sevilla está en Andalucía, Barcelona está en Cataluña. Barcelona está en Cataluña. Luego Sevilla está en Andalucía.
13. Si la niebla en Londres tiene cierto encanto (p), pasarás frío (q) o tendrás un desagradable encuentro con Jack (r). La niebla en Londres tiene cierto encanto. Por consiguiente, pasarás frío o tendrás un desagradable encuentro con Jack.

14. Si París es la capital de Francia (p), Madrid es la capital de España (q). París no es la capital de Francia. En consecuencia, Madrid no es la capital de España.

15. Juan no llora (p) pero gimotea (q) siempre que Luisa se marcha (r). Luisa se marcha. Por tanto, Juan no llora aunque gimotea.

16. O el testigo no dice la verdad (p) o Juan estaba en la casa antes de cometerse el crimen (q). Si Juan estaba en su casa antes de cometerse el crimen, vio al criminal (r). Si vio al criminal, sabe que no pudo ser el mayordomo (s). Por tanto, si el testigo dice la verdad, Juan sabe quién estuvo antes y sabe que no fue el mayordomo.

17. O bien el amor es ciego (p) y los hombres no son conscientes del hecho de que el amor es ciego (q), o bien el amor es ciego y las mujeres sacan ventaja de ello (r). Si los hombres no son conscientes de que el amor es ciego, entonces el amor no es ciego. En conclusión, las mujeres sacan ventaja de ello.

18. Si Guillermo estudia (p), obtiene buenas notas (q). Si no estudia, lo pasa bien en el colegio (r). Si no saca buenas notas, no lo pasa bien en el colegio. Así pues, Guillermo obtiene buenas notas.

19. O Juan va a París (p) o se queda en casa (q). Si viaja en barco (r), no va a París. Por consiguiente, si Juan se queda en casa, no viaja en barco.

20. Si Cuba no abandona el comunismo (p), EEUU no suspenderá el bloqueo (q). O Cuba no abandona el comunismo o encuentra aliados en oriente (r). Si Cuba encuentra aliados en oriente, la economía cubana no se recuperará (s). Por tanto, no es cierto que EEUU suspenda el bloqueo y la economía cubana se recupere.

21. No puede suceder a la vez que Serbia declare su independencia (p) y Croacia no lo haga (q). Si Serbia declara su independencia, la ONU tomará medias (r). Si Croacia declara su independencia, la ONU no tomará medidas. Así pues, Serbia no declarará su independencia.

22. Cuando Eduardo no juega al baloncesto (p), juega al tenis (q). Cuando juega al tenis, juega al fútbol (r). No juega al fútbol. Por tanto, Eduardo juega al baloncesto.

23. Si la tormenta continúa (p) o anochece (q), nos quedamos a cenar (r) o a dormir (s). Si nos quedamos a cenar o a dormir, no iremos mañana al concierto (t). Pero sí iremos al concierto. Por tanto, la tormenta no continúa.

24. Si no es cierto que se puede ser rico (p) y dichoso (q) a la vez, entonces la vida está llena de frustraciones (r) y no es un camino de rosas (s). Si se es feliz (t), no se puede tener todo (u). Por consiguiente, la vida está llena de frustraciones.

25. Si los españoles son europeos (p), los holandeses también lo son (q). Los españoles son europeos. Por consiguiente, los holandeses también son europeos.

Ejercicio 3 *Formaliza en lógica proposicional:*

1. Sólo si un servidor web es seguro, las comunicaciones que se establecen desde los navegadores garantizan la confidencialidad y también permiten al usuario garantizar la identidad de ese servidor.

2. A menos que sufra un ataque por denegación de servicio, el servidor de la URJC estará operativo el lunes por la mañana.

Ejercicio 4 *Traducir las siguientes frases a lenguaje proposicional.*

1. O está tronando y granizando, o está brillando el sol.

2. Cándida saldrá a pasear si José llega del campo y Carlos arregla el ordenador.

3. Supuesto que José llegue del campo y Carlos arregle el ordenador, Cándida saldrá a pasear.

4. 3 es un número primero porque sólo es divisible por sí mismo y la unidad.

5. Si $n > 0$, entonces $n^2 > 0$. Si $n < 0$, entonces $n^2 > 0$. O bien $n > 0$ o bien $n < 0$. En consecuencia, $n^2 > 0$.

Ejercicio 5 *Formaliza en lógica proposicional:*

1. El ordenador de Juan será atacado por el ciber-criminal, tanto si quiere como si no quiere

2. Es necesario que apagues el wi-fi o que desconectes el router para que disminuya el riesgo de ataque.

3. Cuando el hacker no juega con la PlayStation, juega con la Xbox. Cuando juega con la Xbox, juega al Fortnite. No juega al Fortnite. Por tanto, el hacker juega con la PlayStation.

3. Formalizar en lenguaje primer orden

Ejercicio 6 *Traducir 4 de las siguientes frases a lenguaje primer orden. Considerando que:* a *: Angustias,* b *: Bartolomé,* c *: Ceferino,* $S(x)$ *:* x *es ingeniero del software,* $C(x)$ *:* x *es ingeniero de la ciberseguridad y* $F(x,y)$ *:* x *es un conocido de* y*.*

1. Angustias, Bartolomé y Ceferino son todos ingenieros del software o todos ingenieros de la ciberseguridad.

2. Los ingenieros del software son conocidos de Angustias que es ingenieria de la ciberseguridad.

3. Algunos ingenieros del software son conocidos de Angustias que es ingeniera de la ciberseguridad.

4. Hay ingenieros del software conocidos de Ceferino que son también conocidos de Bartolomé que no es ingeniero del software.

5. Todos los conocidos de Bartolomé son conocidos de Angustias, pero si son conocidos de Ceferino y no son ingenieros de la ciberseguridad, entonces no son conocidos de Angustias.

Ejercicio 7 *Formaliza en lógica de primer orden:*

1. Todos los ingenieros de ciberseguridad son programadores. El padre de Juan es ingeniero de ciberseguridad o es analista de datos. Por tanto, si el padre de Juan no es programador, entonces es analista de datos.

2. Hay un hacker al que todo el mundo admira.

4. Clasificación semántica

Ejercicio 8 *Clasifique, atendiendo a su semántica, las siguientes fórmulas (usando las tablas de verdad):*

1. $\neg(\neg p \to \neg q)$
2. $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
3. $(p \to \neg q) \vee (q \to \neg r)$

Ejercicio 9 *Clasifique, atendiendo a su semántica, las siguientes fórmulas (usando las tablas de verdad):*

1. $p \vee (p \to q \wedge r)$
2. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Ejercicio 10 *Analiza si se cumple la relación de consecuencia lógica. Si no se cumple, indicar la interpretación que lo demuestra (contramodelo).*

1. $\{\neg p \vee q\} \models p \leftrightarrow q$
2. $\{p \to q, p \vee \neg r, q \to \neg s\} \models \neg r \vee \neg s$
3. $\{(p \to r) \vee (q \to r)\} \models r \vee (p \wedge \neg q)$

Ejercicio 11 *Verifique si la siguiente formula es consecuencia lógica mediante un método semántico.*

$$\{(p \to q) \land (q \to r),\ p \lor s,\ (s \to t) \land (t \to u)\} \vDash \neg r \to u$$

Ejercicio 12 *Analiza si se cumple la relación de consecuencia lógica. Si no se cumple, indicar la interpretación que lo demuestra (contramodelo).*

1. $\{(p \lor \neg q) \to r,\ \neg p \to t,\ s \to \neg q,\ r \to q\} \vDash s \to t$
2. $\{s \lor t,\ q \to p,\ t \to \neg p,\ \neg s\} \vDash \neg q$

5. Deducción Natural

Ejercicio 13 *Dado el siguiente párrafo:*

> *Si te ataca un hacker, intentará vulnerar tu seguridad pero saldrás airoso porque eres un experto en Ciberseguridad. Hay dos opciones: o te ataca un hacker o un ordenador. Si el atacante es un ordenador, tardarás más en detectar el Ciberataque y perderás información. Por lo tanto, si no eres experto en Ciberseguridad, perderás información.*

Cuya formalización en lenguaje proposicional es:

$$\{(p \to q) \land (q \to r),\ p \lor s,\ (s \to t) \land (t \to u)\} \vDash \neg r \to u$$

Siendo
p = un hacker te ataca,
q = intentar vulnerar tu seguridad,
r = salir airoso por ser experto en Ciberseguridad,
s = el atacante es otro ordenador,
t = tardar más en detectar el ciberataque,
u = perder información,

Verifique si es consecuencia lógica mediante deducción natural.

Ejercicio 14 *Verificar que es consecuencia lógica mediante deducción natural:*

$\{p \to (q \lor \neg r), \neg r \to \neg s\} \vDash p \to (\neg q \to \neg s)$

Ejercicio 15 *Demostrar la corrección de la siguiente deducción mediante deducción natural: Utilizando sólo reglas básicas:*

$$T[p \lor q, \neg p] \ \vdash \ q$$

Ejercicio 16 *Demostrar la corrección de la siguiente deducción mediante deducción natural:*

$$T[p \lor q, q \lor r \to s, \neg r \to \neg p] \ \vdash \ s$$

Ejercicio 17 *Demostrar la corrección de la siguiente deducción mediante deducción natural:*

1. $\{p \to (q \to r),\ \neg s \vee p,\ q\} \vDash s \to r$

Ejercicio 18 *Verificar que es consecuencia lógica mediante deducción natural:*

$$\{\forall x(Q(x) \to \neg R(x)), \forall x(P(x) \to Q(x) \vee S(x)), \exists x(P(x) \wedge R(x))\} \vDash \exists x(P(x) \wedge S(x))$$

Ejercicio 19 *Demostrar la corrección de la siguiente deducción mediante deducción natural:*

$$T[\exists x(\ P(x) \to Q(x)\ )] \vdash \neg\forall x(\ P(x) \wedge \neg Q(x)\ )$$

6. Simplificación de Fórmulas

Ejercicio 20 *Escribir en Forma Normal de Skolem: (i) Forma Prenex, (ii) Cierre Existencial, (iii) Forma Normal Conjuntiva y (iv) Eliminar cuantificadores existenciales:*

1. $\neg\,(\exists x[P(x) \to \forall x P(x)])$
2. $\forall x\,(\exists y T(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y) \to \neg(\exists y T(x,y) \wedge Q(z)))$
3. $\neg\,(\forall x \exists y F(a,x,y) \to \exists x(\neg\forall y G(y,b) \to H(x)))$

Ejercicio 21 *Escribir en Forma Normal de Skolem: (i) Forma Prenex, (ii) Cierre Existencial, (iii) Forma Normal Conjuntiva y (iv) Eliminar cuantificadores existenciales:*

$$\exists x P(x,a) \to Q(x) \wedge \exists x \forall y(\ R(y) \wedge S(x,y)\ )$$

7. Unificación

Ejercicio 22 *Justifique si las siguientes parejas de fórmulas son unificables o no. En caso de serlo, indique el UMG. Nótese que a y b son constantes.*

1. $R(f(x), f(x))$ y $R(y, f(y))$
2. $T(u, f(x), x)$ y $T(g(z), z, a)$
3. $R(a, x)$ y $R(b, y)$
4. $P(f(y,a), y, f(x, g(b)))$ y $P(x, g(b), f(z, y))$

8. Método de Resolución de Robinson

Ejercicio 23 *Demostrar la insatisfacibilidad del siguiente conjunto de cláusulas mediante resolución lineal, empezando por la cláusula $C0$. Nota: v, x, y, z símbolos de variable, a, b, c símbolos de constante, f, g símbolos de función.*

- C0: $\neg P(f(y), a, x)$
- C1: $P(x, y, z) \vee \neg Q(g(x), f(y), v)$
- C2: $T(a, b, c)$
- C3: $T(b, a, c)$
- C4: $Q(x, x, y) \vee \neg R(z, v, v)$
- C5: $Q(g(z), v, y) \vee \neg L(z, v, y)$
- C6: $L(g(y), f(x), z) \vee \neg R(a, b, x)$
- C7: $L(z, z, b) \vee \neg S(z, v, a)$
- C8: $S(a, b, c)$
- C9: $S(f(x), y, a) \vee \neg T(x, y, z)$

Ejercicio 24 *Demostrar, mediante resolución con unificación, la insatisfacibilidad del siguiente conjunto de cláusulas.*

- C1: $P(x, a) \vee Q(x) \vee \neg R(b, x)$
- C2: $Q(x) \vee \neg P(f(x), x)$
- C3: $R(x, a) \vee \neg Q(x)$
- C4: $R(x, y)$
- C5: $\neg Q(a)$
- C6: $\neg Q(f(x))$

A. Soluciones

Solución de Ejercicio 1

1. $|A| = 2$
2. $|A \cup B| = 3$
3. $|A \cup B \cup C| = 3$
4. $A \cap B = \{x \ : \ x \in A \ \ y \ \ x \in B\}$

Solución de Ejercicio 3

1. Sólo si un servidor web es seguro (p), las comunicaciones que se establecen desde los navegadores garantizan la confidencialidad (q) y también permiten al usuario garantizar la identidad de ese servidor (r). $q \wedge r \rightarrow p$
2. A menos que sufra un ataque por denegación de servicio (p), el servidor de la URJC estará operativo el lunes por la mañana (q). $p \vee q$

   También válidos:
   $\neg p \rightarrow q$
   $\neg q \rightarrow p$

Solución de Ejercicio 6

1. $(S(a) \wedge S(b) \wedge S(c)) \vee (C(a) \wedge C(b) \wedge C(c))$
2. $\forall x\, (S(x) \rightarrow F(x,a) \wedge C(a))$
3. $\exists x\, (S(x) \wedge F(x,a) \wedge C(a))$
4. $\exists x\, (S(x) \wedge F(x,c) \wedge F(x,b) \wedge \neg S(b))$
5. $\forall x\, (F(x,b) \rightarrow F(x,a)) \wedge (F(x,c) \wedge \neg C(x) \rightarrow \neg F(x,a))$

Solución Ejercicio 7

1. Predicados. C(x): x es ingeniero/a de ciberseguridad; P(x): x es programador/-a; D(x): x es analista de datos.

   Función. p(x): el padre de x.

   Constante. j: juan.

   Variable. x.

   $$\{\ \forall x(\ C(x) \rightarrow P(x)\ ),\ C(p(j)) \vee D(p(j))\ \} \vdash \neg P(p(j)) \rightarrow D(p(j))$$

2. Predicados. H(x): x es hacker; A(x,y): x admira a y.

   Variables. x; y.

   $$\exists x \forall y(\ H(x) \wedge A(y,x)\ )$$

Solución Ejercicio 8

1. Es contingente puesto que es Verdadero al menos en una ocasión y Falso en otra.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$\neg(\neg p \to \neg q)$
F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F
V	V	F	F	V	F

2. Es tautología (válida) dado que todos sus valores son Verdadero.

p	q	r	$q \vee r$	A $p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	B $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \leftrightarrow B$
F	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V

3. Es contingente puesto que es Verdadero al menos en una ocasión y Falso en otra.

p	q	r	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg r$	$q \to \neg r$	$(p \to \neg q) \vee (q \to \neg r)$
F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F

Solución Ejercicio 10

1. i(p)=F, i(q)=V
2. Se cumple
3. i(p)=F, i(r)=F, i(q)=V

   También válida: i(p)=F, i(r)=F, i(q)=F

Solución Ejercicio 11

Tratamos de definir un contramodelo del argumento:

1. $\text{i}((p \to q) \wedge (q \to r)) = V$ sii

a) $\text{i}((p \to q)) = V$ sii

a1) $\text{i}(p) = V$ y $\text{i}(q) = V$ o

a2) $\text{i}(p) = F$ y $\text{i}(q) = F$ o

a3) $\text{i}(p) = F$ y $\text{i}(q) = V$

b) y $\text{i}((q \to r)) = V$ sii

b1) $\text{i}(q) = V$ y $\text{i}(r) = V$ o

b2) $\text{i}(q) = F$ y $\text{i}(r) = F$ o

b3) $\text{i}(q) = F$ y $\text{i}(r) = V$

2. $\text{i}(p \vee s) = V$ sii

a) $\text{i}(p) = V$ y $\text{i}(s) = V$ o

b) $\text{i}(p) = V$ y $\text{i}(s) = F$ o

c) $\text{i}(p) = F$ y $\text{i}(s) = V$

3. $\text{i}((s \to t) \wedge (t \to u)) = V$ sii

a) $\text{i}((s \to t)) = V$ sii

a1) $\text{i}(s) = V$ y $\text{i}(t) = V$ o

a2) $\text{i}(s) = F$ y $\text{i}(t) = F$ o

a3) $\text{i}(s) = F$ y $\text{i}(t) = V$

b) y $\text{i}((t \to u)) = V$ sii

b1) $\text{i}(t) = V$ y $\text{i}(u) = V$ o

b2) $\text{i}(t) = F$ y $\text{i}(u) = F$ o

b3) $\text{i}(t) = F$ y $\text{i}(u) = V$

4. $\text{i}(\neg r \to u) = F$ sii

a) $\text{i}(\neg r) = V$ sii $\text{i}(r) = F$

b) y $\text{i}(u) = F$

Es decir, tendríamos un contramodelo si $\text{i}(r) = F$ y $\text{i}(u) = F$, esto es, si r y u fueran falsas simultáneamente. Pero esto lleva a contradicción puesto que:

- Si $\text{i}(u) = F$, estaríamos en el caso **3b2)** y, con ello, $\text{i}(t) = F$.
- Esto nos lleva al caso **3a2)** que es el único en el que $\text{i}(t) = F$. Por tanto, tendríamos que $\text{i}(s) = F$.

- Si $\mathrm{i}(s) = F$, el único caso posible en **2** es **2b**, luego $\mathrm{i}(p) = V$.
- Si $\mathrm{i}(p) = V$, la única opción compatible en **1** es **1a1)**, lo que implica que $\mathrm{i}(q) = V$.
- Que $\mathrm{i}(q) = V$ significa que la única opción posible en **1b** es la **1b1)** que implica que $\mathrm{i}(r) = V$ y esto es incompatible con $\mathrm{i}(r) = F$ que es lo que se conlcuye de **4b**.

Luego, como no es posible definir un contramodelo, se tiene que el argumento es correcto.

Solución Ejercicio 13

1.	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	Premisa
2.	$p \vee s$	Premisa
3.	$(s \to t) \wedge (t \to u)$	Premisa
4.	$\neg r$	Supuesto
5.	$p \to r$	Transitividad(1)
6.	$s \to u$	Transitividad(3)
7.	$\neg p$	Modus Tollens$(4,5)$
8.	s	Corte$(2,7)$
9.	u	$E_{\to}(6,8)$
10.	$\neg r \to u$	$I_{\to}(4,9)$

Solución Ejercicio 15

1.	$p \vee q$	Premisa
2.	$\neg p$	Premisa
3.	p	Supuesto
4.	$\neg q$	Supuesto
5.	$p \wedge \neg p$	$I_{\wedge}(2,3)$
6.	$\neg q \to p \wedge \neg p$	$I_{\to}(4,5)$
7.	$\neg\neg q$	$I_{\neg}(6)$
8.	q	$E_{\neg}(7)$
9.	$p \to q$	$I_{\to}(3,8)$
10.	q	Supuesto
11.	$q \to q$	$I_{\to}(10,10)$
12.	q	$E_{\vee}(1,9,11)$

Solución Ejercicio 16

1.	$p \vee q$	Premisa
2.	$q \vee r \to s$	Premisa
3.	$\neg r \to \neg p$	Premisa
4.	p	Supuesto

5.		$\neg\neg r$	Modus Tollens(3,4)
6.		r	$E_{\neg}(5)$
7.		$q \vee r$	$I_{\vee}(6)$
8.		s	$E_{\rightarrow}(2,7)$
9.	$p \rightarrow s$		$I_{\rightarrow}(4,8)$
10.		q	Supuesto
11.		$q \vee r$	$I_{\vee}(10)$
12.		s	$E_{\rightarrow}(2,11)$
13.	$q \rightarrow s$		$I_{\rightarrow}(10,13)$
14.	s		$E_{\vee}(1,9,13)$

También válida:

1.	$p \vee q$		Premisa
2.	$q \vee r \rightarrow s$		Premisa
3.	$\neg r \rightarrow \neg p$		Premisa
4.		$\neg s$	Supuesto
5.		$\neg(q \vee r)$	Modus Tollens(2,4)
6.		$\neg q \wedge \neg r$	De Morgan(5)
7.		$\neg r$	$E_{\wedge}(6)$
8.		$\neg p$	$E_{\rightarrow}(3,7)$
9.		q	Corte(1,8)
10.		$\neg q$	$E_{\wedge}(6)$
11.		$q \wedge \neg q$	$I_{\wedge}(9,10)$
12.	$\neg s \rightarrow q \wedge \neg q$		$I_{\rightarrow}(4,11)$
13.	$\neg\neg s$		$I_{\neg}(12)$
14.	s		$E\neg(13)$

Solución de Ejercicio 18

1.	$\forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$		Premisa
2.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \vee S(x))$		Premisa
3.	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$		Premisa
4.	$P(a*) \wedge R(a*)$		$E_{\exists}(3)$
5.	$P(a*) \rightarrow Q(a*) \vee S(a*)$		$E_{\forall}(2)$
6.	$P(a*)$		$E_{\wedge}(4)$
7.	$Q(a*) \vee S(a*)$		$E_{\rightarrow}(5,6)$
8.		$Q(a*)$	Supuesto
9.		$Q(a*) \rightarrow \neg R(a*)$	$E_{\forall}(1)$
10.		$\neg R(a*)$	$E_{\rightarrow}(8,9)$
11.		$R(a*)$	$E_{\wedge}(4)$
12.		$R(a*) \wedge \neg R(a*)$	$I_{\wedge}(10,11)$
13.	$Q(a*) \rightarrow R(a*) \wedge \neg R(a*)$		$I_{\rightarrow}(8,12)$
14.	$\neg Q(a*)$		$I_{\neg}(13)$
15.	$S(a*)$		Corte(14,7)
16.	$P(a*) \wedge S(a*)$		$I_{\wedge}(6,15)$
17.	$\exists x(P(x) \wedge S(x))$		$I_{\exists}(16)$

Solución de Ejercicio 19

1.	$\exists x(\ P(x) \to Q(x)\ )$	Premisa
2.	$P(a^*) \to Q(a^*)$	$E_\exists(1)$
3.	$\qquad \forall x(\ P(x) \wedge \neg Q(x)\ )$	Supuesto
4.	$\qquad P(a^*) \wedge \neg Q(a^*)$	$E_\forall(3)$
5.	$\qquad P(a^*)$	$E_\wedge(4)$
6.	$\qquad \neg Q(a^*)$	$E_\wedge(4)$
7.	$\qquad Q(a^*)$	$E_\to(2,5)$
8.	$\qquad Q(a^*) \wedge \neg Q(a^*)$	$I_\wedge(6,7)$
9.	$\forall x(\ P(x) \wedge \neg Q(x)\ ) \to Q(a^*) \wedge \neg Q(a^*)$	$I_\to(3,8)$
10.	$\neg \forall x(\ P(x) \wedge \neg Q(x)\ )$	$I_\neg(9)$

Solución de Ejercicio 20

1.

(i) $\exists x \exists y\ \neg(\ P(x) \to P(y)\ )$

$\downarrow$

(ii) $\exists x \exists y\ \neg(\ P(x) \to P(y)\ )$

$\downarrow$

(iii) $\exists x \exists y\ (\ P(x) \wedge \neg P(y)\ )$

$\downarrow$

(iv) $P(a) \wedge \neg P(b)$

2.

(i) $\forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3\ (\ T(x,y_1) \wedge \neg S(x,y_2) \to \neg(\ T(x,y_3) \wedge Q(z)\ )\ )$

$\downarrow$

(ii) $\exists z \forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3\ (\ T(x,y_1) \wedge \neg S(x,y_2) \to \neg(\ T(x,y_3) \wedge Q(z)\ )\ )$

$\downarrow$

(iii) $\exists z \forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3\ (\ \neg T(x,y_1) \vee S(x,y_2) \vee \neg T(x,y_3) \vee \neg Q(z)\ )$

$\downarrow$

(iv) $\forall x \forall y_1 \forall y_3\ (\ \neg T(x,y_1) \vee S(x,f(x,y_1)) \vee \neg T(x,y_3) \vee \neg Q(a)\ )$

3.

(i) $\forall x \exists y \forall x_1 \exists y_1\ \neg(\ \ F(a,x,y) \to \neg G(y_1,b) \to H(x_1)\ )$

$\downarrow$

(ii) $\forall x \exists y \forall x_1 \exists y_1 \neg(\ F(a,x,y) \to \neg G(y_1,b) \to H(x_1) \ )$

$$\downarrow$$

(iii) $\forall x \exists y \forall x_1 \exists y_1 \ (\ F(a,x,y) \wedge \neg G(y_1,b) \wedge \neg H(x_1) \ )$

$$\downarrow$$

(iv) $\forall x \forall x_1 \ (\ F(a,x,f(x)) \wedge \neg G(g(x,x_1),b) \wedge \neg H(x_1) \ )$

Solución Ejercicio 21

(i) $\forall x \exists x_1 \forall y(\ P(x,a) \to Q(x_2) \wedge R(y) \wedge S(x_1,y) \ )$

(ii) $\exists x_2 \forall x \exists x_1 \forall y(\ P(x,a) \to Q(x_2) \wedge R(y) \wedge S(x_1,y) \ )$

(iii) $\exists x_2 \forall x \exists x_1 \forall y(\ (\ \neg P(x,a) \vee Q(x_2) \ ) \wedge (\ \neg P(x,a) \vee R(y) \ ) \wedge (\ \neg P(x,a) \vee S(x_1,y) \ ) \ )$

(iv) $\forall x \forall y(\ (\ \neg P(x,a) \vee Q(b) \ ) \wedge (\ \neg P(x,a) \vee R(y) \ ) \wedge (\ \neg P(x,a) \vee S(f(x),y) \ ) \ )$

Solución de Ejercicio 22

1. No es unificable.

α	A	B	(t_A,t_B)
λ	$R(f(x),f(x))$	$R(y,f(y))$	$(y,f(x))$
$\{y/f(x)\}$	$R(f(x),f(x))$	$R(f(x),f(f(x)))$	$(f(x),f(f(x)))$
FALLO			

2. UMG = $\{u/g(f(a)),z/f(a),x/a\}$.

α	A	B	(t_A,t_B)
λ	$T(u,f(x),x)$	$T(g(z),z,a)$	$(u,g(z))$
$\{u/g(z)\}$	$T(g(z),f(x),x)$	$T(g(z),z,a)$	$(z,f(x))$
$\{u/g(f(x)),z/f(x)\}$	$T(g(f(x)),f(x),x)$	$T(g(f(x)),f(x),a)$	(x,a)
$\{u/g(f(a)),z/f(a),x/a\}$	$T(g(f(a)),f(a),a)$	$T(g(f(a)),f(a),a)$	ÉXITO

3. No es unificable.

α	A	B	(t_A,t_B)
λ	$R(a,x)$	$R(b,y)$	(a,b)
FALLO			

4. UMG = $\{x/f(g(b),a), y/g(b), z/f(g(b),a)\}$.

α	A	B	(t_A, t_B)
λ	$P(f(y,a),y,f(x,g(b)))$	$P(x,g(b),f(z,y))$	$(x,f(y,a))$
$\{x/f(y,a)\}$	$P(f(y,a),y,f(f(y,a),g(b)))$	$P(f(y,a),g(b),f(z,y))$	$(y,g(b))$
$\{x/f(g(b),a), y/g(b)\}$	$P(f(g(b),a),g(b),f(f(g(b),a),g(b)))$	$P(f(g(b),a),g(b),f(z,g(b)))$	$(z,f(g(b),a))$
$\{x/f(g(b),a), y/g(b), z/f(g(b),a)\}$	$P(f(g(b),a),g(b),f(f(g(b),a),g(b)))$	$P(f(g(b),a),g(b),f(f(g(b),a),g(b)))$	ÉXITO

Solución de Ejercicio 23

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{C1: } P(x,y,z)\lor\neg Q(g(x),f(y),v) \arrow[d, "{\{x_1/f(y_0),y_1/a,z_1/x_0\}}"] \\
\text{C0: } \neg P(f(y),a,x) \arrow[r] & \neg Q(g(f(y_0)),f(a),v_1) \arrow[d, "{\{z_5/f(y_0),v_5/f(a),y_5/v_1\}}"] \\
\text{C5: } Q(g(z),v,y)\lor\neg L(z,v,y) \arrow[r] & \neg L(f(y_0),f(a),v_1) \arrow[d, "{\{z_7/f(a),y_0/a,v_1/b\}}"] \\
\text{C7: } L(z,z,b)\lor\neg S(z,v,a) \arrow[r] & \neg S(f(a),v_7,a) \arrow[d, "{\{x_9/a,y_9/v_7\}}"] \\
\text{C9: } S(f(x),y,a)\lor\neg T(x,y,z) \arrow[r] & \neg T(a,v_7,z_9) \arrow[d, "{\{v_7/b,z_9/c\}}"] \\
\text{C2: } T(a,b,c) \arrow[r] & []
\end{tikzcd}
$$

Solución de Ejercicio 24

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{C5: } \neg Q(a) \arrow[d, "\{x/a\}"] \\
\text{C2: } Q(x) \vee \neg P(f(x),x) \arrow[r] & \neg P(f(a),a) \arrow[d, "\{x/f(a)\}"] \\
\text{C1: } P(x,a) \vee Q(x) \vee \neg R(b,x) \arrow[r] & Q(f(a)) \vee \neg R(b,f(a)) \arrow[d, "\{x/b,y/f(a)\}"] \\
\text{C4: } R(x,y) \arrow[r] & Q(f(a)) \arrow[d, "\{x/a\}"] \\
\text{C6: } \neg Q(f(x)) \arrow[r] & [\,]
\end{tikzcd}
$$

Agradecimientos

Para elaborar esta obra nos hemos inspirado en transparencias, apuntes y compendios de ejercicios de diversas fuentes, incluyendo trabajos de: Pepa Hernández (UPM'11), Lila Kari (UWO, Canada), Juan Carlos León (UM'12), Alessandra Gallinari (URJC'06), Eulalia Pérez Sedeño (CSIC'01), María Jesús Castel de Haro (UA'11), Fernando Sancho Caparrini (US'21), José A. Alonso Jiménez et al. (US'13).