

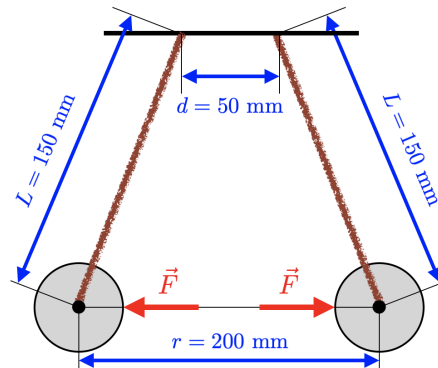
# Examen parcial de Física aplicada a estructuras e instalaciones, Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Nombre y DNI: \_\_\_\_\_

Instrucciones:

- El examen termina a las 14:00
- Sólo se puede usar calculadora científica no programable.
- No está permitido el uso de apuntes
- No está permitido el uso de móviles, al que se pille usando un móvil se le expulsará del aula y tendrá un cero, **voy a ser muy estricto e intransigente con esta regla**. Si estás esperando una llamada importante, dímelo y yo tendré tu móvil en mi mesa.
- Las mochilas, abrigos, bolsos y los móviles (silenciados) han de estar en la pared
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

1. Dos bolas cargadas eléctricamente, cada una con una masa de  $0,15g$ , están suspendidas de cuerdas delgadas de igual longitud. Determine la magnitud de la fuerza repulsiva horizontal  $F$ , que actúa sobre cada bola si la distancia medida entre ellas es  $r = 200mm$ .



**Solución:** El sistema se encuentra en equilibrio, por lo que cada una de las bolas se encuentran en equilibrio, así que las fuerzas sobre, por ejemplo, la bola de la izquierda verifican:  $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ . En nuestro caso:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{W} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } 0 - F + T \cos(\theta) = 0 \quad (1)$$

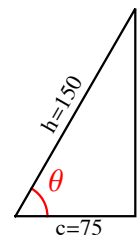
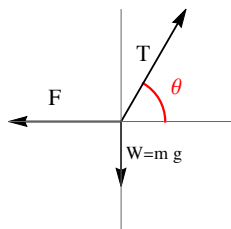
$$\text{eje y: } -mg + 0 + T \sin(\theta) = 0 \quad (2)$$

Del equilibrio en el eje y (Eq. (2)), podemos obtener la magnitud de la tensión  $T$  como

$$T \cos(\theta) = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\sin(\theta)}$$

Del equilibrio en el eje x (Eq. (1)), podemos obtener la magnitud de la tensión fuerza  $F$  como

$$F = T \cos(\theta) \Rightarrow F = \frac{mg}{\sin(\theta)} \cos(\theta) = \frac{mg}{\tan(\theta)}$$



Conociendo  $\tan(\theta)$ , podremos obtener el resultado pedido. Podemos obtener ese valor a partir de los datos de la figura. Si dibujamos el triángulo rectángulo con hipotenusa desde el soporte hasta el centro de la bola ( $h = 150\text{mm}$ ) y con lado paralelo al eje de la fuerza  $\vec{F}$ , tenemos que sus lados vertical ( $s$ ) y horizontal ( $c$ ) tienen una longitud de  $c = 75\text{mm}$ . A partir de aquí, dándonos cuenta de que  $\cos(\theta) = \frac{c}{h}$ , podemos obtener un valor para  $\theta$ , sustituirlo en la fórmula de  $F$  y obtener el resultado final.

Así, tenemos que

$$\cos(\theta) = \frac{c}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rads} = 60^\circ$$

Sustituyendo este resultado en las fórmulas de la tensión y de la fuerza repulsiva, se obtiene el resultado buscado

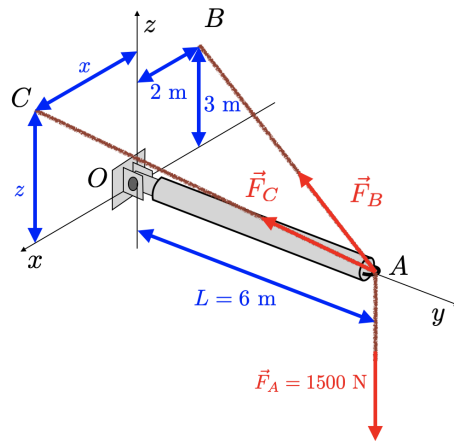
$$T = 1,69914 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F = 8,49571 \times 10^{-3} \text{ N}$$

En notación de ingeniería

$$\boxed{F = 0,850 \times 10^{-3} \text{ N}} \quad (3)$$

2. Se utilizan dos cables para asegurar la barra saliente en su posición y soportar la carga de  $1500\text{N}$ . Si la fuerza resultante está dirigida a lo largo de la barra desde el punto  $A$  hacia  $O$ , determine las magnitudes de la fuerza resultante y de las fuerzas  $\vec{F}_B$  y  $\vec{F}_C$ . Considere  $x = 3\text{m}$  y  $z = 2\text{m}$ .



**Solución:** En el problema se nos dice que

$$\vec{F}_R = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{W}, \quad (4)$$

por lo que, para poder obtener las magnitudes  $F_R$ ,  $F_B$  y  $F_C$ , necesitamos conocer las direcciones de todas las en el sistema. El peso está orientado hacia abajo en el eje  $z$ , por lo que  $\vec{W} = W(-\hat{k}) = -1500\text{N}\hat{k}$ .

Para obtener la dirección de las fuerzas de tensión  $\vec{F}_B$  y  $\vec{F}_C$ , que está dada por los vectores unitarios  $\hat{u}_{AB}$  y  $\hat{u}_{AC}$ , definidos como

$$\hat{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}},$$

$$\hat{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}},$$

donde  $\vec{r}_{AB} = B - A$  y  $\vec{r}_{AC} = C - A$ , por lo que necesitamos las posiciones de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Estas posiciones se

pueden obtener de la figura y del enunciado del problema como:

$$\begin{aligned} A &= (0, 6, 0)m, \\ B &= (-2, 0, 3)m, \\ C &= (x, 0, z)m = (3, 0, 2)m, \end{aligned}$$

por lo que

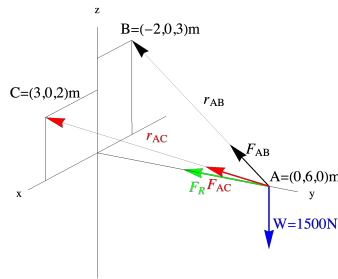
$$\begin{aligned} \vec{r}_{AB} &= (-2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}) \text{ m} \Rightarrow r_{AB} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} \text{ m} = 7 \text{ m} \\ \vec{r}_{AC} &= (3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ m} \Rightarrow r_{AC} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} \text{ m} = 7 \text{ m} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \hat{u}_{AB} &= \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-2}{7}\vec{i} + \frac{-6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k} \\ \hat{u}_{AC} &= \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{-6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \end{aligned}$$

Por tanto, las fuerzas de tensión  $\vec{F}_B$  y  $\vec{F}_C$  vendrán

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= F_B \hat{u}_{AB} = F_B \left( \frac{-2}{7}\vec{i} + \frac{-6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k} \right) \\ \vec{F}_C &= F_C \hat{u}_{AC} = F_C \left( \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{-6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right) \end{aligned}$$



Como en el enunciado se nos dice que *la fuerza resultante está dirigida a lo largo de la barra desde el punto A hacia O*, en la figura se ve que  $\vec{F}_R$  está orientada a lo largo del eje *y* (Un análisis similar al hecho con las otras 2 fuerzas nos daría que  $\vec{F}_R = F_R \hat{u}_{AO} = F_R(-\vec{j})$ ). Con todos estos resultados, descomponemos la Eq. (??) en sus 3 componentes escalares

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{W}, \\ \text{eje x: } 0 &= \frac{-2}{7}F_B + \frac{3}{7}F_C + 0 \\ \text{eje y: } -F_R &= \frac{-6}{7}F_B + \frac{-6}{7}F_C + 0 \\ \text{eje z: } 0 &= \frac{3}{7}F_B + \frac{2}{7}F_C - W \end{aligned}$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones para obtener las 3 magnitudes que se nos piden en el problema

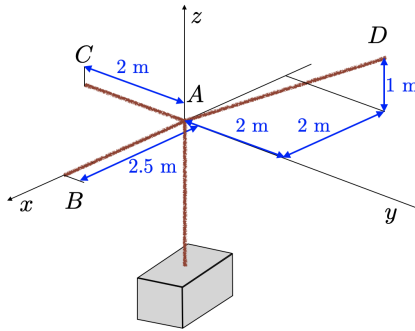
$$F_B = \frac{21}{13}W, \quad F_C = \frac{14}{13}W, \quad F_R = \frac{30}{13}W.$$

Sustituyendo  $W = 1500$  N, se obtienen los resultados finales que, en notación de ingeniería, son

$F_B = 2,42$ KN
$F_C = 1,62$ KN
$F_R = 3,46$ KN

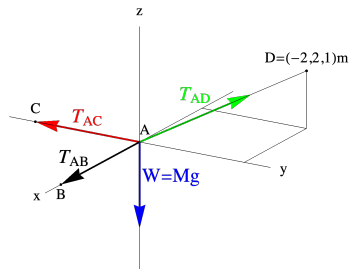
(5)

3. Determine la masa máxima que puede tener la caja si la tensión desarrollada en cada cable no debe exceder  $3kN$ .



**Solución:** Lo primero que deberíamos hacer es obtener las direcciones de cada una de las fuerzas que actúan en el sistema. Para las tensiones de las cuerdas  $AB$  y  $AC$  es fácil, porque los cables se encuentran en los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente. La tensión del cable  $AD$  hay que obtenerla a partir del vector unitario  $\hat{u}_{AD}$ , y el peso está orientado verticalmente hacia abajo. Teniendo en cuenta que el punto  $A$  es el origen de coordenadas ( $A = (0,0,0)$ ) y que  $D = (-2, 2, 1)m$ :

$$\begin{aligned} \vec{T}_{AB} &= T_{AB}\vec{i} \\ \vec{T}_{AC} &= T_{AC}(-\vec{j}) \\ \vec{T}_{AD} &= T_{AD}\hat{u}_{AD} = T_{AD}\frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}} = T_{AD}\frac{(-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = T_{AD}\left(\frac{-2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}\right) \\ \vec{W} &= Mg(-\vec{k}) \end{aligned}$$



Como el sistema se encuentra en equilibrio, por lo que en el punto  $A$ , donde actúan todas las fuerzas (el peso de la caja y las 3 tensiones de los 3 cables), se cumple que

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= \vec{0} = \vec{W} + \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AD} \\ \text{eje x: } 0 &= 0 + T_{AB} + 0 + T_{AD}\frac{-2}{3} \\ \text{eje y: } 0 &= 0 + 0 - T_{AC} + T_{AD}\frac{2}{3} \\ \text{eje z: } 0 &= -Mg + 0 + 0 + T_{AD}\frac{1}{3} \end{aligned}$$

A partir de este sistema, obtenemos las 3 magnitudes de las tensiones en función de  $Mg$

$$T_{AB} = 2Mg,$$

$$T_{AC} = 2Mg,$$

$$T_{AD} = 3Mg.$$

Está claro que la mayor tensión está soportada por el cable  $AD$ , por lo que si imponemos que dicha tensión ha de ser menor o igual que 3 kN, es decir,  $T_{AD} \leq 3 \text{ kN}$ , la masa soportada será

$$3 \text{ kN} \geq T_{AD} = 3Mg \Rightarrow 3 \times 10^3 \text{ N} \geq 3Mg \Rightarrow 10^3 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \geq Mg \Rightarrow \frac{10^3 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \geq M$$

$$\Rightarrow 101,936799185 \text{ Kg} \geq M$$

Por lo que la masa máxima que se puede soportar sin exceder una tensión de 3 kN es, en notación de ingeniería

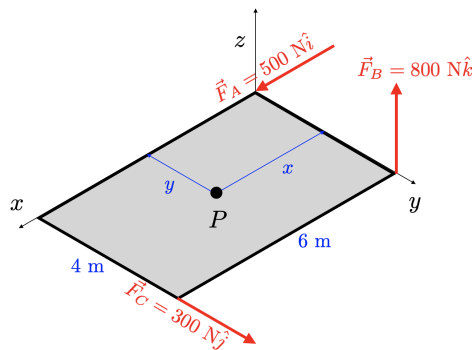
$$\boxed{M = 102 \text{ Kg}} \quad (6)$$

Para esta masa, la tensión desarrollada en cada cable (para verificar que se cumplen las condiciones que se nos piden) es

$$T_{AD} = 3 \text{ kN}$$

$$T_{AB} = T_{AC} = \frac{2}{3}T_{AD} = 2 \text{ kN}$$

4. Reemplace las tres fuerzas que actúan sobre la placa por una llave. Especifique la magnitud de la fuerza y del momento de par para la llave, así como el punto  $P = (x, y)$  donde su línea de acción interseca la placa.



**Solución:** La fuerza resultante que actúa sobre la placa es la suma de las 3 fuerzas que actúan sobre ella, es decir

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = (500\vec{i} + 300\vec{j} + 800\vec{k}) \text{ N.}$$

La magnitud de la fuerza es

$$F_R = \sqrt{500^2 + 300^2 + 800^2} \text{ N}$$

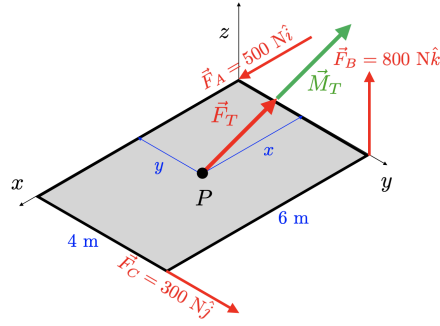
el resultado pedido, en notación de ingeniería, es

$$\boxed{F_R = 990 \text{ N}} \quad (7)$$

El vector director de la fuerza es

$$\hat{u}_F = \frac{\vec{F}_R}{F_R} = \frac{(500\vec{i} + 300\vec{j} + 800\vec{k}) \text{ N}}{990 \text{ N}} = \frac{5}{9,9}\vec{i} + \frac{3}{9,9}\vec{j} + \frac{8}{9,9}\vec{k}$$

Sabemos que la llave actuará en el punto  $P = (x, y)$ , y por la definición de llave, la fuerza y el momento resultantes en dicho punto son *paralelos*, es decir, tienen el mismo vector director ( $\vec{F}_R = F_R \hat{u}_F \parallel \vec{M}_R = M_R \hat{u}_F$ , recuerda que en cualquier otro punto del cuerpo, la fuerza y el momento resultantes **no** son paralelos).



Por todo ello, calculamos la resultante de los momentos de las 3 fuerzas desde el punto  $P$

$$\left(\vec{M}_R\right)_P = \sum_i \left(\vec{M}_i\right)_P = \vec{r}_{PA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{PB} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{PC} \times \vec{F}_C$$

Para obtener los vectores directores, necesitamos los puntos donde actúan las fuerzas

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0) \text{ m} \\ B &= (0, 4, 0) \text{ m} \\ C &= (6, 4, 0) \text{ m} \\ P &= (x, y, 0) \text{ m} \end{aligned}$$

Por lo que los vectores directores son (usando  $\vec{r}_{PA} = (x_A - x_P)\vec{i} + (y_A - y_P)\vec{j} + (z_A - z_P)\vec{k}$ ), por lo que

$$\begin{aligned} \vec{r}_{PA} &= (-x\vec{i} - y\vec{j}) \text{ m} \\ \vec{r}_{PB} &= (-x\vec{i} + (4 - y)\vec{j}) \text{ m} \\ \vec{r}_{PC} &= ((6 - x)\vec{i} + (4 - y)\vec{j}) \text{ m} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\left(\vec{M}_A\right)_P = \vec{r}_{PA} \times \vec{F}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & 0 \\ 500 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ N} \cdot \text{m} = 500y\vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\left(\vec{M}_B\right)_P = \vec{r}_{PB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & (4 - y) & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{vmatrix} \text{ N} \cdot \text{m} = [800(4 - y)\vec{i} + 800x\vec{j}] \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\left(\vec{M}_C\right)_P = \vec{r}_{PC} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (6 - x) & (4 - y) & 0 \\ 0 & 300 & 0 \end{vmatrix} \text{ N} \cdot \text{m} = 300(6 - x)\vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\vec{M}_R\right)_P &= \vec{r}_{PA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{PB} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{PC} \times \vec{F}_C \\ &= [800(4 - y)\vec{i} + 800x\vec{j} + (500y + 300(6 - x))\vec{k}] \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Como el momento resultante y la fuerza son paralelos en el punto  $P$ , el vector director del momento en dicho punto es el mismo que el vector director de la fuerza, por lo que se cumple que  $\left(\vec{M}_R\right)_P = M_R \hat{u}_F$ , por lo que tenemos el sistema

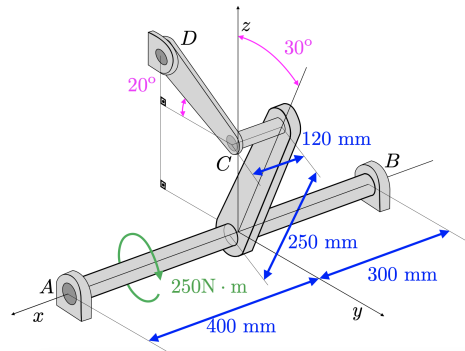
de 3 ecuaciones

$$\begin{aligned} M_R \frac{5}{9,9} \text{ N} \cdot \text{m} &= 800(4 - y) \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_R \frac{3}{9,9} \text{ N} \cdot \text{m} &= 800x \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_R \frac{8}{9,9} \text{ N} \cdot \text{m} &= (500y + 300(6 - x)) \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

A partir de este sistema, podemos obtener las 3 incógnitas restantes que se nos piden:  $x$ ,  $y$  y  $M_R$ .

$x = 1,16 \text{ m}$ $y = 2,06 \text{ m}$ $M_R = 3,70 \text{ KN} \cdot \text{m}$	(8)
--	-----

5. La flecha ensamblada está soportada por dos chumaceras lisas  $A$  y  $B$  y un eslabón corto  $DC$ . Si se aplica un momento de par a la flecha como se muestra, determine las componentes de fuerza de reacción en las chumaceras y la fuerza presente en el eslabón. El eslabón se encuentra en un plano paralelo al plano  $(y, z)$  y las chumaceras están adecuadamente alineadas con la flecha.



**Solución:** Las chumaceras lisas en  $A$  y en  $B$  sujetan a la flecha en las 3 direcciones del espacio, por lo que tenemos las fuerzas de reacción  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$  y  $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$ . Además, las chumaceras evitan rotaciones en los ejes  $y$  y  $z$ , pero no en el eje  $x$ , por lo que tenemos los momentos de reacción son  $\vec{M}_A = M_{A,y} \vec{j} + M_{A,z} \vec{k}$  y  $\vec{M}_B = M_{B,y} \vec{j} + M_{B,z} \vec{k}$ . Por la geometría del objeto, está claro que no aparecen giros alrededor de los ejes  $y$  y  $z$ , por lo que los momentos de reacción en dichos ejes son automáticamente nulos, es decir:  $\vec{M}_A = \vec{0}$  y  $\vec{M}_B = \vec{0}$ . Debido a que el momento angular representado en la figura es un forzamiento de giro en el sentido de las agujas del reloj alrededor del eje  $x$  mirado desde valores positivos de  $x$ , aplicando la regla de la mano derecha vemos que el vector momento angular  $\vec{M}_0$  asociado a ese forzamiento de giro está orientado hacia valores negativos de  $x$ , por lo que

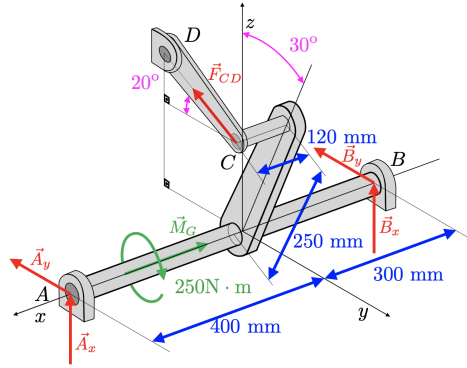
$$\vec{M}_0 = -250 \text{ N} \cdot \text{m} \vec{i}$$

El eslabón corto  $CD$  evita que el punto  $C$  se acerque al punto  $D$ , por lo que se genera una fuerza de reacción en la dirección  $CD$  que precisamente evita que el punto  $C$  se acerque o aleje del punto  $D$ . El vector director de  $C$  a  $D$  es, a partir de la figura adjunta,  $\vec{u}_{CD} = (\cos(20^\circ) \vec{j} + \sin(20^\circ) \vec{k})$ , por lo que la fuerza  $\vec{F}_{CD}$  es

$$\vec{F}_{CD} = F_{CD} \vec{u}_{CD} = F_{CD} (-\cos(20^\circ) \vec{j} + \sin(20^\circ) \vec{k})$$

Como  $\vec{F}_{CD}$  no tiene componente  $x$ , las chumaceras no tienen que reaccionar a ninguna fuerza dirigida a lo largo del eje  $x$ , por lo que también se tiene automáticamente que  $A_x = B_x = 0$ .





El equilibrio de fuerzas en el cuerpo impone que

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{F}_{CD}$$

$$\begin{aligned} \text{eje x: } 0 &= 0 + 0 + 0 \\ \text{eje y: } 0 &= A_y + B_y - F_{CD} \cos(20) \\ \text{eje z: } 0 &= A_z + B_z + F_{CD} \sin(20) \end{aligned}$$

Así tenemos la relación entre las reacciones en la chumacera en A y en la chumacera en B.

Como estamos estudiando el equilibrio de un cuerpo extenso, también se verifica el equilibrio del momento angular. Lo inteligente aquí es aplicar las ecuaciones de equilibrio del momento sobre una de las 2 chumaceras, pues así sus fuerzas de reacción no aparecerán en el sistema y este se nos simplificará. En este caso, yo elijo aplicar las ecuaciones de equilibrio de momento sobre la chumacera en B

$$\sum_i (\vec{M}_i)_B = \vec{0} = \vec{M}_0 + \vec{r}_{BC} \times \vec{F}_{CD} + \vec{r}_{BA} \times \vec{A}$$

Para obtener los vectores  $\vec{r}_{BA}$  y  $\vec{r}_{BC}$ , necesitamos la localización de los puntos A, B y C:

$$\begin{aligned} A &= (400, 0, 0) \text{ mm} \\ B &= (-300, 0, 0) \text{ mm} \\ C &= (120, 250 \sin(30), 250 \cos(30)) \text{ mm} \end{aligned}$$

Por lo que, usando que  $\sin(30) = \frac{1}{2}$  y que  $\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$C = (120, 125, 125\sqrt{3}) \text{ mm}$$

Los vectores directores son (usando  $\vec{r}_{BA} = (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}$ )

$$\begin{aligned} \vec{r}_{BA} &= 0,7\vec{i} \text{ m} \\ \vec{r}_{BC} &= (0,42\vec{i} + 0,125\vec{j} + 0,125\sqrt{3}\vec{k}) \text{ m} \end{aligned}$$

Por lo que

$$(\vec{M}_A)_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & A_y & A_z \end{vmatrix} \text{ N} \cdot \text{m} = (-0,7A_z\vec{j} + 0,7A_y\vec{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$(\vec{M}_C)_B = \vec{r}_{BC} \times \vec{F}_{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,42 & 0,125 & 0,125\sqrt{3} \\ 0 & -F_{CD} \cos(20^\circ) & F_{CD} \sin(20^\circ) \end{vmatrix} \text{ N} \cdot \text{m} = F_{CD} (0,246\vec{i} - 0,144\vec{j} - 0,395\vec{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$$

Así, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_i (\vec{M}_i)_B = \vec{0} = -250 \text{ N} \cdot \vec{m}_i + \vec{r}_{BC} \times \vec{F}_{CD} + \vec{r}_{BA} \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \text{eje x: } 0 &= -250 + 0,246F_{CD} + 0 \\ \text{eje y: } 0 &= 0 - 0,144F_{CD} - 0,7A_z \\ \text{eje z: } 0 &= 0 - 0,395F_{CD} + 0,7A_y \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones nos da 3 de los resultados buscados

$$A_y = 572,513, \quad A_z = -208,378, \quad F_{CD} = 1015,43.$$

En notación de ingeniería

$$\boxed{\begin{aligned} A_y &= 573 \text{ N} \\ A_z &= -208 \text{ N} \\ F_{CD} &= 1,02 \text{ KN} \end{aligned}} \quad (9)$$

A partir de estos resultados y del equilibrio de fuerzas, obtenemos las reacciones sobre la chumacera en  $B$

$$B_y = F_{CD} \cos(20) - A_y \Rightarrow B_y = 381,676 \text{ N},$$

$$B_z = -F_{CD} \sin(20) - A_z \Rightarrow B_z = -138,919 \text{ N}.$$

En notación de ingeniería, el resultado es

$$\boxed{\begin{aligned} B_y &= 382 \text{ N} \\ B_z &= -139 \text{ N} \end{aligned}} \quad (10)$$

Y tiene que quedar claro en la respuesta que

$$\boxed{A_x = B_x = 0 \text{ N}} \quad (11)$$

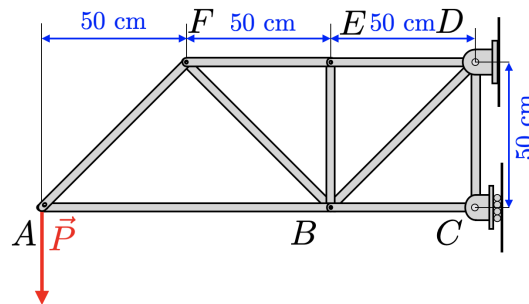
# Examen final de Física aplicada a estructuras e instalaciones, Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Nombre y DNI: \_\_\_\_\_

Instrucciones:

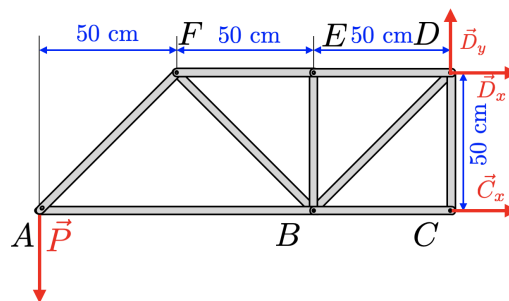
- El examen termina a las 14:00
- Sólo se puede usar calculadora científica no programable.
- No está permitido el uso de apuntes
- No está permitido el uso de móviles, al que se pille usando un móvil se le expulsará del aula y tendrá un cero, **voy a ser muy estricto e intransigente con esta regla**. Si estás esperando una llamada importante, dímelo y yo tendré tu móvil en mi mesa.
- Las mochilas, abrigos, bolsos y los móviles (silenciados) han de estar en la pared
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

1. Obtén la magnitud de la fuerza máxima  $\vec{P}$  que puede aplicarse a la armadura mostrada de manera que ninguno de los elementos esté sometido a una fuerza que exceda 80 N en tensión ni 60 N en compresión. Tenemos un Pasador Liso en D, y un rodillo en C.



**Solución:** Hay varias maneras de resolver este problema, yo aquí voy a exponer la que es, a mi criterio, la más sencilla conceptualmente. Lo primero que vamos a hacer es el Diagrama de Cuerpo Libre del objeto extenso, teniendo en cuenta las respuestas de sus soportes.

Tenemos un Pasador Liso en D, y un rodillo en C, por lo que tenemos 2 reacciones en D, una vertical y otra horizontal (que fijan al punto D en la posición en la que se encuentra), y una reacción en C horizontal (que sujeta el cuerpo impidiendo que atraviese la pared, pero que no le impide desplazarse paralelamente a ella). El resto de fuerzas internas que tenemos que obtener no aparecen en este DCL



Como se ve, tenemos 3 incógnitas, por lo que podemos resolver el sistema con las 3 ecuaciones de las condiciones de equilibrio en sistemas 2D. El equilibrio de fuerzas impone  $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ . En nuestro caso:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{D}_x + \vec{D}_y + \vec{C}_x = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } D_x + C_x = 0 \quad \Rightarrow \quad D_x = -C_x$$

$$\text{eje y: } -P + D_y = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = P.$$

Del equilibrio de rotaciones alrededor de un punto  $O$  cualquiera, se tiene

$$\sum_i (\vec{M}_i)_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{P} + \vec{r}_{OD} \times (\vec{D}_x + \vec{D}_y) + \vec{r}_{OC} \times \vec{C}_x = \vec{0}.$$

Elegimos como punto de rotación al punto  $D$  para simplificar rotaciones (recuerda que podríamos haber elegido cualquier punto del espacio y nos daría el mismo resultado, pero así nos quitamos las dependencias de las fuerzas  $D_x$  y  $D_y$  de los cálculos, simplificándolos mucho. Por lo que tenemos

$$\vec{r}_{DA} = (-1,50\vec{i} - 0,5\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{DC} = (-0,5\vec{j}) \text{ m}$$

Aplicando la regla de la mano derecha y la definición de la magnitud del producto vectorial tenemos que, en el eje  $z$ :

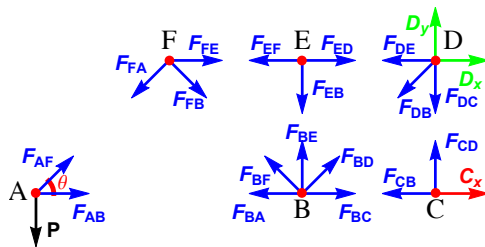
$$0,5C_x + 1,5P = 0 \Rightarrow C_x = -3P$$

Por lo que tenemos que las magnitudes de las 3 respuestas de los soportes son

$$\boxed{C_x = -3P \mid D_y = P \mid D_x = -C_x = +3P}$$

Nótese que un signo negativo indica que la dirección de la fuerza obtenida va en sentido contrario a la dirección que asumimos en el Diagrama de Cuerpo Libre del cuerpo.

Una vez que conocemos las respuestas en los soportes, estamos en condiciones de resolver, mediante el método de los nodos, todas las fuerzas sobre cada uno de los nodos de la armadura. Para ello, asumiremos que todas las fuerzas sobre los elementos de la armadura son de tensión, por lo que las reacciones sobre los nodos empujan a cada nodo hacia el extremo opuesto del elemento que lo une con cada otro nodo de la armadura como se indica en el gráfico, así, cuando obtengamos magnitudes positivas de estas fuerzas, eso significará que las fuerzas sobre los elementos serán de tensión, y magnitudes negativas indicarán fuerzas de compresión.



Para obtener los resultados correctos, necesitamos conocer el ángulo  $\theta$  indicado en el gráfico, que por trigonometría se ve que es  $\theta = 45^\circ$ , por lo que  $\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Así, vamos resolviendo nodo a nodo del sistema las condiciones de equilibrio de fuerzas.

- Empezamos por el nodo C

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{C}_x + \vec{F}_{CB} + \vec{F}_{CD} = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } C_x - F_{CB} = 0 \Rightarrow F_{CB} = C_x = -3P$$

$$\text{eje y: } F_{CD} = 0$$

Por lo que el elemento CD es un elemento de fuerza cero.

- Continuamos con el nodo D, suando que  $\vec{F}_{DC} = -\vec{F}_{CD} \Rightarrow F_{DC} = +F_{CD} = 0$ .

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{D}_x + \vec{D}_y + \vec{F}_{DC} + \vec{F}_{DE} + \vec{F}_{DB} = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } D_x - F_{DE} - F_{DB} \cos(\theta) = 0 \Rightarrow F_{DE} = D_x - F_{DB} \cos(\theta)$$

$$\text{eje y: } D_y - F_{DB} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow F_{DB} = \frac{D_y}{\sin(\theta)} = \sqrt{2}D_y = \sqrt{2}P.$$

Usando este último resultado, se obtiene

$$F_{DE} = D_x - F_{DB} \cos(\theta) = 3P - \frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{2}} = 2P$$

- A continuación, resolvemos el nodo E usando  $\vec{F}_{ED} = -\vec{F}_{DE} \Rightarrow F_{ED} = +F_{DE}$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{EF} + \vec{F}_{EB} + \vec{F}_{ED} = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } -F_{EF} + F_{ED} = 0 \Rightarrow F_{EF} = F_{ED} = 2P$$

$$\text{eje y: } -F_{EB} = 0$$

Por lo que obtenemos que el elemento EB es un elemento de fuerza cero.

- Resolvemos el nodo F usando  $\vec{F}_{FE} = -\vec{F}_{EF} \Rightarrow F_{FE} = +F_{EF}$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{FA} + \vec{F}_{FB} + \vec{F}_{FE} = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } -F_{FA} \cos(\theta) + F_{FB} \cos(\theta) + F_{FE} = 0 \Rightarrow -F_{FA} - F_{FB} = \frac{F_{FE}}{\cos(\theta)}$$

$$\text{eje y: } -F_{FA} \sin(\theta) - F_{FB} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow F_{FA} + F_{FB} = 0$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones metiendo el resultado de la segunda ecuación ( $F_{FB} = -F_{FA}$ ) en la primera, obteniendo

$$\frac{F_{FE}}{\cos(\theta)} = F_{FA} - F_{FB} = F_{FA} - (-F_{FA}) = 2F_{FA} \Rightarrow F_{FA} = \frac{F_{FE}}{2 \cos(\theta)} = \frac{F_{FE}}{\sqrt{2}}$$

Por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} F_{FE} &= +F_{EF} = 2P \\ F_{FA} &= \frac{F_{FE}}{2 \cos(\theta)} = \frac{2P}{2 \cos(\theta)} = \frac{P}{\cos(\theta)} = \sqrt{2}P \\ F_{FB} &= -F_{FA} = -\sqrt{2}P \end{aligned}$$

- Por último, resolvemos el nodo A usando  $\vec{F}_{AF} = -\vec{F}_{FA} \Rightarrow F_{AF} = +F_{FA}$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AF} = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } F_{AB} + F_{AF} \cos(\theta) = 0 \Rightarrow F_{AB} = -F_{AF} \cos(\theta)$$

$$\text{eje y: } -P + F_{AF} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow F_{AF} = \frac{P}{\sin(\theta)} = \sqrt{2}P$$

Por lo que vemos que el resultado en el eje  $y$  es consistente con lo que obtuvimos en el nodo F, y usando ese resultado, obtenemos en la ecuación del eje  $x$ :

$$F_{AB} = -F_{AF} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{2}} = -P$$

Así ya tenemos resueltas todas las fuerzas sobre los nodos, tal y como está construido el sistema, las fuerzas positivas corresponden a elementos en tensión y las negativas a elementos en compresión.

- Los elementos CD y EB son elementos de fuerza cero, pues  $F_{CD} = F_{EB} = 0$ .

- Las magnitudes de las fuerzas de los elementos en tensión son  $F_{BD} = F_{AF} = \sqrt{2}P$ ,  $F_{DE} = F_{EF} = 2P$

Ningún elemento puede estar sometido a una fuerza mayor de 80 N en tensión, por lo que se ha de cumplir que  $\{F_{BD}, F_{AF}, F_{DE}, F_{EF}\} \leq 80$  N, por lo que

$$2P \leq 80 \text{ N} \Rightarrow P \leq 40 \text{ N} \quad (12)$$

- Las magnitudes de las fuerzas de los elementos en compresión son  $F_{BF} = -\sqrt{2}P$ ,  $F_{AB} = -P$ ,  $F_{BC} = -3P$

Además, ningún elemento puede estar sometido a una fuerza mayor de 60 N en compresión, por lo que se ha de cumplir que  $\{|F_{BF}|, |F_{AB}|, |F_{BC}|\} \leq 60$  N, por lo que

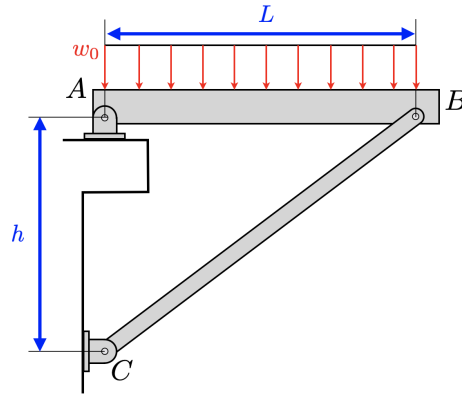
$$3P \leq 60 \text{ N} \Rightarrow P \leq 20 \text{ N} \quad (13)$$

Por lo que el resultado es que la magnitud máxima de  $\vec{P}$  es de 20 N.

$$P_{MAX} = 20 \text{ N}$$

(14)

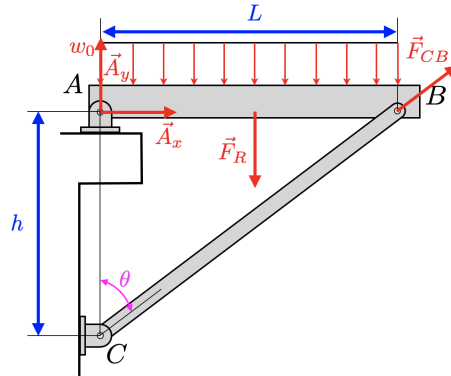
2. Obtener la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante sobre cada punto de la viga con  $L = h$ . Representar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante (cualitativos).



**Solución:** Para poder resolver este problema, vamos a necesitar conocer las fuerzas de reacción sobre cada uno de los soportes, por lo que necesitaremos el Diagrama de Cuerpo Libre del objeto extenso.

Tenemos un Pasador Liso en A, y una sujeción por el elemento de 2 fuerzas BC en B, por lo que tenemos 2 reacciones en A, una vertical y otra horizontal (que fijan al punto A en la posición en la que se encuentra), y una reacción en B paralela al elemento BC.

También necesitaremos la fuerza resultante de la carga  $w_0$  y su punto de aplicación. Así, el DCL de la viga es:



Para poder obtener las respuestas de los soportes, necesitamos obtener la fuerza resultante  $F_R$  de la carga y su punto de aplicación  $\bar{x}$ . Para ello, integramos la carga a lo largo de toda la viga, y el momento resultante  $M_R$  alrededor del punto A, obteniendo

$$F_R = \int_0^L w(x)dx = w_0 \int_0^L dx = w_0 L$$

$$M_R = \int_0^L xw(x)dx = w_0 \int_0^L xdx = w_0 \frac{L^2}{2}$$

Como sabemos que el momento y la fuerza resultante se pueden escribir como  $M_R = \bar{x}F_R$ , donde  $\bar{x}$  es la posición de  $F_R$  medida desde el punto A, se tiene

$$\bar{x} = \frac{M_R}{F_R} = \frac{w_0 \frac{L^2}{2}}{w_0 L} = \frac{L}{2}$$

Ahora, aplicando las condiciones de equilibrio de la viga, podemos resolver el problema. En este caso, primero calculamos

el momento resultante desde el punto A (así nos sacamos las respuestas en el pasador de A de la ecuación), usando

$$\begin{aligned}\vec{r}_{AA} &= \vec{0} \\ \vec{r}_{A\bar{x}} &= \bar{x}\vec{i} = \frac{L}{2}\vec{i} \\ \vec{r}_{AB} &= L\vec{i}\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\sum_i \left(\vec{M}_i\right)_A &= \vec{r}_{AA} \times \left(\vec{A}_x + \vec{A}_y\right) + \vec{r}_{A\bar{x}} \times \vec{F}_R + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_{CB} = \vec{0}, \\ \text{eje z:} \quad &0 - \frac{L}{2}w_0L + LF_{CB} \sin(90 - \theta) = 0.\end{aligned}\tag{15}$$

Usando que  $\sin(90 - \theta) = \cos(\theta)$  y  $\cos(90 - \theta) = \sin(\theta)$ , donde  $\tan(\theta) = \frac{L}{h} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$  rad = 45°, podemos despejar  $F_{CB}$

$$F_{CB} = \frac{Lw_0}{2 \cos(\theta)}\tag{16}$$

Si aplicamos ahora la condición de equilibrio de fuerzas, obtenemos las respuestas del soporte en A

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{F}_i &= \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{F}_R + \vec{F}_{CB} = \vec{0} \\ \text{eje x:} \quad &A_x + F_{CB} \cos(90 - \theta) = 0 \Rightarrow A_x = -F_{CB} \sin(\theta) = -\frac{Lw_0}{2} \tan(\theta) \\ \text{eje y:} \quad &A_y - F_R + F_{CB} \sin(90 - \theta) = 0 \Rightarrow A_y = w_0L - \frac{Lw_0}{2} = \frac{Lw_0}{2}\end{aligned}$$

Ahora, a partir de las relaciones diferenciales de la teoría, obtendremos la fuerza cortante y el momento flexionante

$$\begin{aligned}V(x) &= V(0) + \int_0^x w(x)dx \\ M(x) &= M(0) + \int_0^x V(x)dx\end{aligned}$$

Empezamos con la fuerza cortante, asumiendo que empezamos con  $V(0) = 0$ , pero tenemos una fuerza concentrada en  $x = 0$  ( $A_y$ ), por lo que tenemos que usar  $\Delta V(0) = A_y$ , por lo que  $V(0) = A_y$ , así que resolvemos (teniendo en cuenta el signo de la carga distribuida)

$$V(x) = A_y - w_0 \int_0^x dx = \frac{Lw_0}{2} - w_0x$$

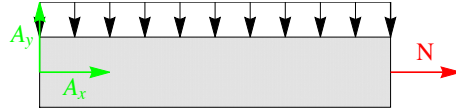
por lo que tendríamos  $V(L) = -\frac{Lw_0}{2}$ , pero tenemos otra carga puntual en  $x = L$ , que al tenerla en cuenta nos da  $\Delta V(L) = -F_{CB} \sin(90 - \theta) = \frac{Lw_0}{2}$ , por lo que se tiene que  $V(L) = 0$ .

En el cálculo del momento flexionante no tenemos pares concentrados en ningún punto, por lo que la resolución de la integral de la fuerza cortante será suficiente

$$M(x) = 0 + \int_0^x \left(\frac{Lw_0}{2} - w_0x\right) dx = w_0 \int_0^x \left(\frac{L}{2} - x\right) dx = w_0 \left(\frac{L}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)$$

Por último, la fuerza normal se obtiene haciendo un DCL de una sección de la viga desde el punto A hasta un punto intermedio cualquiera  $x$ , donde inmediatamente se ve que la normal ha de compensar a la componente horizontal de la respuesta en A ( $A_x$ ).





Por lo que, a lo largo de toda la viga, se tiene que  $N(x) = -A_x = \frac{Lw_0}{2} \tan(\theta) = \frac{Lw_0}{2}$ . Así que los resultados son que la fuerza normal es

$$N(x) = \frac{Lw_0}{2}$$

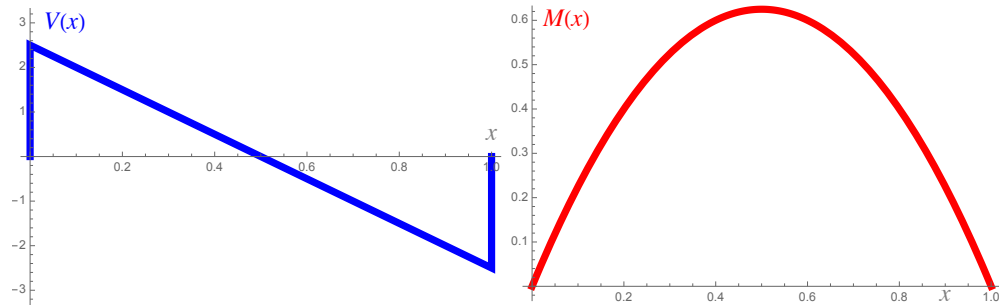
La fuerza cortante es

$$\begin{aligned} V(x) &= w_0 \left( \frac{L}{2} - x \right) \\ V(L) &= 0 \end{aligned}$$

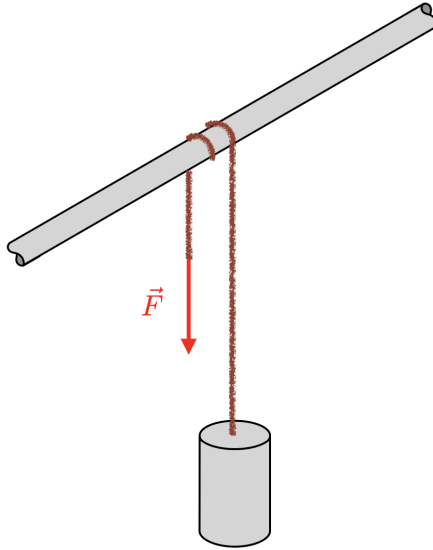
y el momento flexionante es

$$M(x) = \frac{w_0}{2} x(L - x)$$

Por último, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante son:



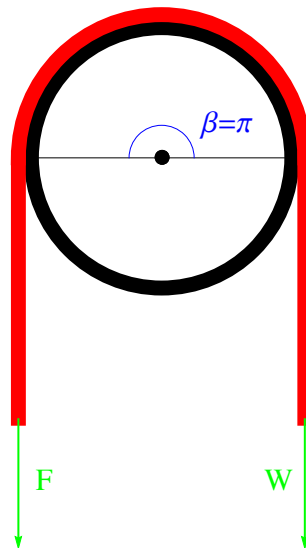
3. Obtener la fuerza mínima  $\vec{F}$  que se ha de aplicar a la cuerda del dibujo para elevar una masa  $m = 10 \text{ Kg}$  cuando el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el cilindro de sujeción es  $\mu_s = 0,2$ : a) al estar la cuerda sujeta sin estar enrollada en el cilindro de la gráfica, b) al estar enrollada una vez (como en el dibujo adjunto) y c) al estar enrollada dos veces en el cilindro.



**Solución:** Al aplicar la fuerza mínima para que el cuerpo se eleve, estamos en situación de movimiento inminente, por lo que en este caso podemos aplicar la teoría dada en clase para la transmisión de una tensión a lo largo de una banda plana sometida a fricción.

$$F = W e^{\mu_s \beta}, \tag{17}$$

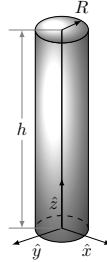
donde  $W = mg$  es el peso del cilindro. Observando el diagrama de cuerpo libre para el caso en el que la cuerda está sujeta por el cilindro, pero no enrollada, vemos que el ángulo de contacto entre la cuerda y el cilindro es  $\beta = \pi$  rad, por lo que, obviamente, cada vez que enrollamos la cuerda, hay que añadir  $2\pi$  rad a  $\beta$ , así, tenemos que  $\beta = (\pi + 2\pi n)$  rad, con  $n = \{0, 1, 2\}$  vueltas.



Obviamente, al tener que vencer la fuerza no sólo al peso  $W$ , si no también a la fricción de la cuerda, esta fuerza será mayor que el peso. Usando que  $\mu_s = 0,2$  y  $m = 10 \text{ Kg}$  ( $W = 98,1 \text{ N}$ ), se obtiene (ya en notación de ingeniería)

$n$	$\beta = (2n + 1)\pi$	$F = W e^{\mu_s \beta}$
0	$\pi$	183 N
1	$3\pi$	646 N
2	$5\pi$	2.27 KN

4. Tenemos un cilindro de radio  $R$  y altura  $h$ , obtener la posición del centro de gravedad, del centro de masas y del centroide del cilindro si la densidad del mismo es  $\rho(z) = \rho_0(h - z)$ .



**Solución:** Las definiciones del centro de gravedad  $\vec{R}_G$ , centro de masas  $\vec{R}_M$  y de centroide  $\vec{R}_C$  son las siguientes:

$$\vec{R}_G = \frac{\int_V \vec{r} dW}{\int_V dW}, \quad \vec{R}_M = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm}, \quad \vec{R}_C = \frac{\int_V \vec{r} dV}{\int_V dV}.$$

Teniendo en cuenta que  $dW = g dm$  y que se considera que el campo gravitatorio es **constante**, se tiene

$$\vec{R}_G = \frac{\int_V \vec{r} dW}{\int_V dW} = \frac{\int_V \vec{r} g dm}{\int_V g dm} = \frac{g \int_V \vec{r} dm}{g \int_V dm} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm} = \vec{R}_M,$$

por lo que, en este caso, el centro de gravedad y el centro de masas coinciden. Para calcular el centro de masas, usamos la definición de densidad

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho(\vec{r}) dV,$$

por lo que

$$\vec{R}_M = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV},$$

pero como en este caso la densidad no es constante, no podemos simplificar más.

Por simetría (y al ser la densidad sólo dependiente de la altura), es obvio que las componentes  $x$  e  $y$  de los tres centros están situadas sobre el eje de simetría del cilindro, por lo que sólo nos queda por calcular la componente  $z$ .

Al tener un cilindro, las coordenadas cilíndricas serán las adecuadas para calcular las componentes de los centros. Empezamos con las integrales del centroide por sencillez

$$\int_V dV = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R \varphi \Big|_0^{2\pi} z \Big|_0^h = \frac{R^2}{2} 2\pi h = \pi R^2 h,$$

$$\int_V z dV = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z dz = \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{z^2}{2} \Big|_0^h = \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{h^2}{2} = \frac{\pi}{2} R^2 h^2.$$

Seguimos con las integrales del centro de masas

$$\int_V \rho(z) dV = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho_0 (h - z) dz = \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R \varphi \Big|_0^{2\pi} \rho_0 \left( hz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^h = \frac{R^2}{2} 2\pi \rho_0 \left( h^2 - \frac{h^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2} R^2 \rho_0 h^2,$$

$$\int_V z \rho(z) dV = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z \rho_0 (h - z) dz = \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R \varphi \Big|_0^{2\pi} \rho_0 \left( \frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^h = \frac{R^2}{2} 2\pi \rho_0 \left( \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi}{6} R^2 \rho_0 h^3.$$

Ya dijimos que las componentes  $x$  e  $y$  son cero por simetría, comprobémoslo de todas maneras

$$\int_V \rho(z)x dV = \int_V \rho(z)\rho \cos(\varphi) dV = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi \int_0^h \rho(z) dz = 0$$

$$\int_V \rho(z)y dV = \int_V \rho(z)\rho \sin(\varphi) dV = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi \int_0^h \rho(z) dz = 0$$

porque

$$\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

Si  $\rho(z) = 1$ , tenemos el caso del centroide, y si  $\rho(z)$  es la densidad del cilindro del problema, tenemos el caso del centro de masas.

Agrupando los resultados, se tiene

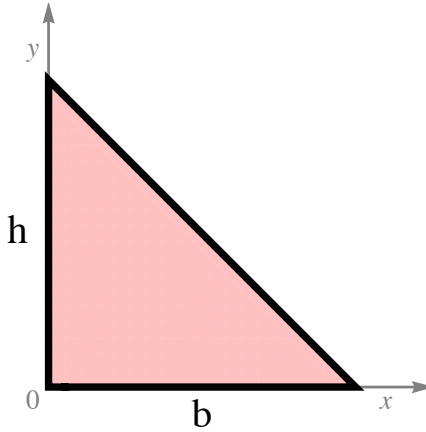
$$\vec{R}_C = \left( \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}, \frac{\int_V y dV}{\int_V dV}, \frac{\int_V z dV}{\int_V dV} \right) = \left( 0, 0, \frac{\frac{\pi}{2} R^2 h^2}{\pi R^2 h} \right) = \left( 0, 0, \frac{h}{2} \right)$$

$$\vec{R}_G = \vec{R}_M = \left( \frac{\int_V x \rho(z) dV}{\int_V \rho(z) dV}, \frac{\int_V y \rho(z) dV}{\int_V \rho(z) dV}, \frac{\int_V z \rho(z) dV}{\int_V \rho(z) dV} \right) = \left( 0, 0, \frac{\frac{\pi}{6} R^2 \rho_0 h^3}{\frac{\pi}{2} R^2 \rho_0 h^2} \right) = \left( 0, 0, \frac{h}{3} \right)$$

Así que la solución pedida es

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{R}_G = \vec{R}_M = \left( 0, 0, \frac{h}{3} \right) \\ \vec{R}_C = \left( 0, 0, \frac{h}{2} \right) \end{array}}$$

5. Obtener los segundos momentos de área respecto a los ejes  $x$  e  $y$  ( $I_x$  y  $I_y$ ), el producto de inercia  $I_{xy}$  y el momento de inercia polar  $I_0$  respecto a los ejes paralelos a los mostrados en el dibujo que se cruzan en el centroide del triángulo



**Solución:** La estrategia de este problema es sencilla:

- Obtendremos el centroide del triángulo
- Obtendremos los momentos de inercia del triángulo con respecto a los ejes  $x$  e  $y$  que nos dan.
- Por último, con el teorema de los ejes paralelos, obtendremos los momentos de inercia que nos piden usando los dos resultados anteriores.

La posición del centroide del área se calcula a partir de las siguientes integrales

$$\begin{aligned} \int_A dA &= \int_0^b dx \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} dy = \int_0^b h \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx = h \left(x - \frac{x^2}{2b}\right) \Big|_0^b = h \left(b - \frac{b}{2}\right) = \frac{bh}{2} \\ \int_A x dA &= \int_0^b x dx \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} dy = \int_0^b xh \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx = \int_0^b h \left(x - \frac{x^2}{b}\right) dx = h \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3b}\right) \Big|_0^b = h \left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3}\right) = \frac{b^2h}{6} \\ \int_A y dA &= \int_0^b dx \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} y dy = \int_0^b \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx = \frac{-bh^2}{2} \int_0^b \frac{-1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx = \frac{-bh^2}{2} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^3 \Big|_0^b = \frac{-bh^2}{2} \frac{1}{3} (0 - 1) = \frac{bh^2}{6} \end{aligned}$$

Por lo que el centroide del triángulo es

$$\vec{R}_C = \left( \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}, \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \right) = \left( \frac{\frac{b^2h}{6}}{\frac{bh}{2}}, \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} \right) = \left( \frac{b}{3}, \frac{h}{3} \right) = (d_{O,C,x}, d_{O,C,y})$$

Los segundos momentos de inercia de área con respecto a los ejes que intersectan en el punto  $O$  del gráfico son

$$\begin{aligned} I_{x,O} &= \int_A y^2 dA = \int_0^b dx \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} y^2 dy = \int_0^b dx \frac{y^3}{3} \Big|_0^{h(1-\frac{x}{b})} = \int_0^b dx \frac{h^3}{3} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^3 \\ &= \frac{-bh^3}{3} \int_0^b dx \frac{-1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^3 = \frac{-bh^3}{3} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^4 \Big|_0^b = \frac{-bh^3}{12} (0 - 1) = \frac{bh^3}{12} \\ I_{xy,O} &= \int_A xy dA = \int_0^b x dx \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} y dy = \int_0^b x dx \frac{y^2}{2} \Big|_0^{h(1-\frac{x}{b})} = \int_0^b x dx \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 \\ &= \frac{h^2}{2} \int_0^b dx \left(x - 2\frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right) = \frac{h^2}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3b} + \frac{x^4}{4b^2}\right) \Big|_0^b = \frac{h^2}{2} \left(\frac{b^2}{2} - 2\frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{b^2h^2}{24} \\ I_{y,O} &= \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 dx \int_0^{h(1-\frac{x}{b})} dy = \int_0^b x^2 dx y \Big|_0^{h(1-\frac{x}{b})} = \int_0^b x^2 dx h \left(1 - \frac{x}{b}\right) \\ &= h \int_0^b dx \left(x^2 - \frac{x^3}{b}\right) = h \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4b}\right) \Big|_0^b = h \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{4}\right) = \frac{b^3h}{12} \\ I_0 &= I_x + I_y = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{12} = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2) \end{aligned}$$

Por último, usando el Teorema de los Ejes Paralelos, podemos trasladar los momentos de inercia al centroide

$$\left. \begin{aligned} I_{x,O} &= I_{x,C} + d_{O,C,y}^2 A \\ I_{xy,O} &= I_{xy,C} + d_{O,C,x} d_{O,C,y} A \\ I_{y,O} &= I_{y,C} + d_{O,C,x}^2 A \\ I_O &= I_G + (d_{O,C,x}^2 + d_{O,C,y}^2) A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} I_{x,C} &= I_{x,O} - d_{O,C,y}^2 A \\ I_{xy,C} &= I_{xy,O} - d_{O,C,x} d_{O,C,y} A \\ I_{y,C} &= I_{y,O} - d_{O,C,x}^2 A \\ I_G &= I_O - (d_{O,C,x}^2 + d_{O,C,y}^2) A \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} I_{x,C} &= \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2} \\ I_{xy,C} &= \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b}{3} \frac{h}{3} \frac{bh}{2} \\ I_{y,C} &= \frac{b^3 h}{12} - \frac{b^2}{9} \frac{bh}{2} \\ I_G &= \frac{bh}{12} (h^2 + b^2) - \left( \frac{b^2}{9} + \frac{h^2}{9} \right) \frac{bh}{2} \end{aligned} \right.$$

Así que la solución pedida es

$$\boxed{\begin{aligned} I_{x,C} &= \frac{bh^3}{36} \\ I_{xy,C} &= -\frac{b^2 h^2}{72} \\ I_{y,C} &= \frac{b^3 h}{36} \\ I_G &= \frac{bh}{36} (b^2 + h^2) \end{aligned}}$$

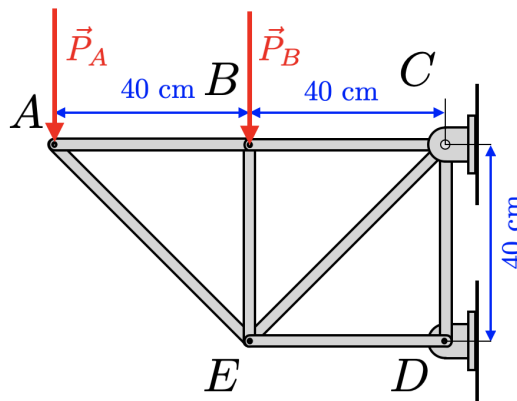
# Examen de recuperación de Física aplicada a estructuras e instalaciones, Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Nombre y DNI: \_\_\_\_\_

Instrucciones:

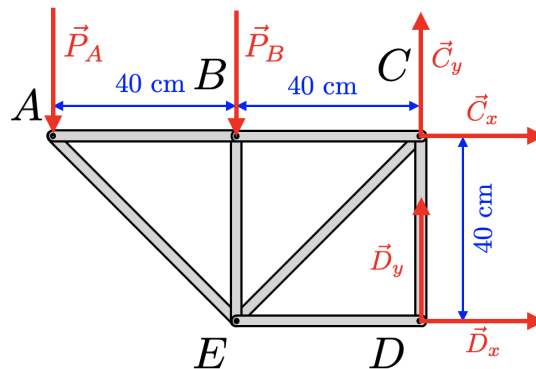
- El examen termina a las 14:00
- Sólo se puede usar calculadora científica no programable.
- No está permitido el uso de apuntes
- No está permitido el uso de móviles, al que se pille usando un móvil se le expulsará del aula y tendrá un cero, **voy a ser muy estricto e intransigente con esta regla**. Si estás esperando una llamada importante, dímelo y yo tendré tu móvil en mi mesa.
- Las mochilas, abrigos, bolsos y los móviles (silenciados) han de estar en la pared
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

1. La armadura mostrada, que soporta un balcón, está sujeta por los nodos C y E a la pared mediante pasadores fijos. Aproxima cada junta por un nodo, y determina cuáles elementos se encuentran en tensión y cuáles en compresión. Asume que  $P_A = 1000 \text{ N}$  y  $P_B = 600 \text{ N}$ . PISTA: Usa el método de los nodos.



**Solución:** En este problema **NO** se pueden obtener las respuestas a la armadura directamente a partir del Diagrama de Cuerpo Libre, pues tenemos 3 ecuaciones de equilibrio 2D y 4 incógnitas, las reacciones en C y en D, por lo que lo resolvemos con el método de los nodos.

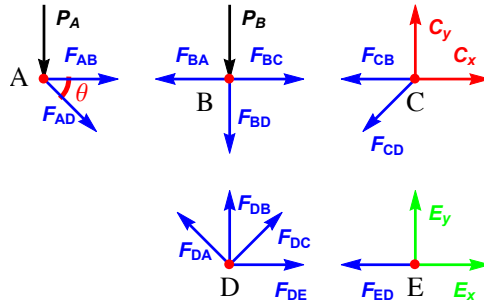
Para tener claro este punto, hagamos de todas maneras el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL) de la armadura. Tenemos 2 soportes fijos, uno en C y otro en E, por lo que tenemos 2 reacciones en cada uno, una vertical y otra horizontal (que fijan a cada soporte fijo en la posición en la que se encuentra). El resto de fuerzas que tenemos que obtener no aparecen en el DCL de la armadura al ser fuerzas internas.



Como vemos, tenemos 4 incógnitas y 3 ecuaciones, por lo que no podemos el sistema de fuerzas en equilibrio con el Diagrama de Cuerpo Libre. Por ello, pasamos directamente a resolver el problema por el método de los nodos. Para ello, hacemos un diagrama con todas las fuerzas sobre cada uno de los nodos. Asumiremos que todas las fuerzas sobre los elementos de la armadura son de tensión, por lo que las reacciones sobre los nodos empujan a cada nodo hacia el



extremo opuesto del elemento que lo une con cada otro nodo de la armadura como se indica en el gráfico, así, cuando obtengamos magnitudes positivas de estas fuerzas, eso significará que las fuerzas sobre los elementos serán de tensión, y magnitudes negativas indicarán fuerzas de compresión.



Usaremos que  $\theta = 45^\circ$ , por lo que  $\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

En el método de los nodos, para que cada nodo sea resoluble, teniendo en cuenta que tenemos 2 ecuaciones de equilibrio en cada nodo, necesitamos que en cada nodo haya como mucho 2 incógnitas. Así, el único nodo resoluble es el nodo A.

- Empezamos por el nodo A

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{P}_A + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AD} = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } F_{AB} + F_{AD} \cos(\theta) = 0 \Rightarrow F_{AB} = -F_{AD} \cos(\theta) = -\frac{F_{AD}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{eje y: } -P_A - F_{AD} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow F_{AD} = -\frac{P_A}{\sin(\theta)} = -\sqrt{2}P_A$$

Por lo que se obtiene

$$F_{AD} = -\sqrt{2}P_A$$

$$F_{AB} = P_A$$

- Continuamos con el nodo B, pues ahora solo tiene 2 incógnitas, pues  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \Rightarrow F_{BA} = +F_{AB}$ .

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{P}_B + \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{BD} = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } -F_{BA} + F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BC} = F_{BA} = P_A$$

$$\text{eje y: } -P_B - F_{BD} = 0 \Rightarrow F_{BD} = -P_B$$

Por lo que se obtiene

$$F_{BC} = P_A$$

$$F_{BD} = -P_B$$

- Acabamos de hacer al nodo D resoluble, pues tenemos que  $\vec{F}_{DA} = -\vec{F}_{AD} \Rightarrow F_{DA} = +F_{AD}$  y  $\vec{F}_{DB} = -\vec{F}_{BD} \Rightarrow F_{DB} = +F_{BD}$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{DA} + \vec{F}_{DB} + \vec{F}_{DC} + \vec{F}_{DE} = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } -F_{DA} \cos(\theta) + F_{DC} \cos(\theta) + F_{DE} = 0 \Rightarrow F_{DE} = (F_{DA} - F_{DC}) \cos(\theta) = -P_A - \frac{F_{DC}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{eje y: } F_{DA} \sin(\theta) + F_{DB} + F_{DC} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow F_{DC} = -\frac{F_{DB}}{\sin(\theta)} - F_{DA} = \sqrt{2}P_B + \sqrt{2}P_A$$

Por lo que se obtiene

$$F_{DC} = \sqrt{2}(P_A + P_B)$$

$$F_{DE} = -2P_A - P_B$$

- Al haber solucionado el nodo D, acabamos de hacer resolubles los nodos C y E, quedando cada uno con 2 incógnitas, por lo que, si nos pidieran conocer las respuestas de los soportes  $\{C_x, C_y, E_x, E_y\}$ , podríamos obtenerlas. Como lo que se nos pide es saber qué elementos se encuentran en tensión y cuáles en compresión, no seguimos con ese cálculo.

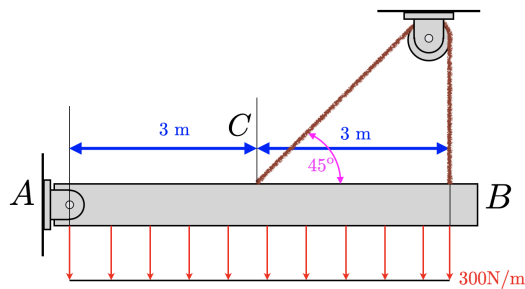
En este punto, ya tenemos resueltas todas las fuerzas sobre los elementos de la armadura, sustituyendo  $P_A = 1000$  N y  $P_B = 600$  N, se tiene, en notación de ingeniería:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{AB} = F_{BA} = P_A = +1 \text{ KN} \\ F_{AD} = F_{DA} = -\sqrt{2}P_A = -1,41 \text{ KN} \\ F_{BC} = F_{CB} = P_A = +1 \text{ KN} \\ F_{BD} = F_{DB} = -P_B = -0,6 \text{ KN} \\ F_{DC} = F_{CD} = \sqrt{2}(P_A + P_B) = +2,26 \text{ KN} \\ F_{DE} = F_{ED} = -2P_A - P_B = -2,60 \text{ KN} \end{array} \right.$$

Tal y como está construido el sistema, las fuerzas positivas corresponden a elementos en tensión y las negativas a elementos en compresión.

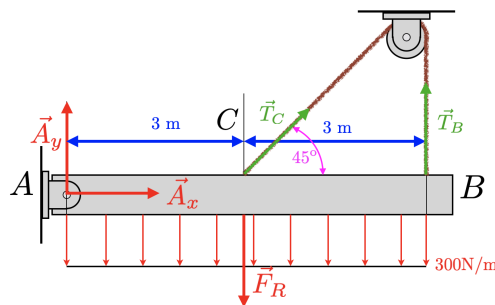
- No hay ningún elemento de fuerza cero.
- Los elementos en tensión (con fuerzas con signo positivo) son los elementos  $\{AB, BC, CD\}$
- Los elementos en compresión (con fuerzas con signo negativo) son los elementos  $\{AD, BD, DE\}$

2. Obtener la fuerza cortante y el momento flexionante sobre cada punto de la viga. Representar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante (cualitativos).



**Solución:** Para poder resolver este problema, vamos a necesitar conocer las fuerzas de reacción sobre cada uno de los soportes, por lo que necesitaremos el Diagrama de Cuerpo Libre del objeto extenso.

Tenemos un Pasador Liso en A, lo que genera 2 reacciones, una vertical  $A_y$  y otra horizontal  $A_x$ , y una sujeción doble por los 2 lados de una polea en B y en D. Como el cable está en tensión, sabemos que la magnitud de la fuerza de cada lado de la cuerda es la misma (por lo que se tiene que  $T_D = T_B = T$ ) y que la fuerza en cada extremo del cable es paralela al cable (por lo que  $\vec{T}_B$  apunta hacia arriba y  $\vec{T}_D$  está girada un ángulo  $\theta = 45^\circ$  respecto a la horizontal). También necesitaremos la fuerza resultante de la carga  $w_0$  y su punto de aplicación. Así, el DCL de la viga es:



Calculemos primero la fuerza resultante  $F_R$  de la carga y su punto de aplicación  $\bar{x}$ . Para ello, integramos la carga a lo largo de toda la viga, y el momento resultante  $M_R$  alrededor del punto A, obteniendo

$$F_R = \int_0^L w(x) dx = w_0 \int_0^L dx = w_0 L$$

$$M_R = \int_0^L x w(x) dx = w_0 \int_0^L x dx = w_0 \frac{L^2}{2}$$

Como sabemos que el momento y la fuerza resultante se pueden escribir como  $M_R = \bar{x} F_R$ , donde  $\bar{x}$  es la posición de  $F_R$  medida desde el punto A, se tiene

$$\bar{x} = \frac{M_R}{F_R} = \frac{w_0 \frac{L^2}{2}}{w_0 L} = \frac{L}{2},$$

por lo que el punto de aplicación de  $\vec{F}_R$  es D. Ahora, aplicando las condiciones de equilibrio de la viga, podemos resolver el problema. En este caso, primero calculamos el momento resultante desde el punto A (así nos sacamos las respuestas en el pasador de A de la ecuación), usando

$$\vec{r}_{AA} = \vec{0}$$

$$\vec{r}_{AD} = \vec{r}_{A\bar{x}} = \bar{x} \vec{i} = \frac{L}{2} \vec{i}$$

$$\vec{r}_{AB} = L \vec{i}$$

Se tiene

$$\sum_i (\vec{M}_i)_A = \vec{r}_{AA} \times (\vec{A}_x + \vec{A}_y) + \vec{r}_{AD} \times (\vec{F}_R + \vec{T}_D) + \vec{r}_{AB} \times \vec{T}_B = \vec{0},$$

$$\text{eje } z: 0 + |\vec{r}_{AD}| (F_R \sin(-90^\circ) + T_D \sin(45^\circ)) + |\vec{r}_{AB}| T_B \sin(90^\circ) = 0.$$

Usando que  $\sin(90^\circ) = 1$ ,  $\sin(-90^\circ) = -1$  y que  $\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , podemos despejar  $T = T_B = T_D$

$$\frac{L}{2} \left( -w_0 L + \frac{T}{\sqrt{2}} \right) + LT = 0 \Rightarrow \boxed{T = w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}}}$$

Si aplicamos ahora la condición de equilibrio de fuerzas, obtenemos las respuestas del soporte en A

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{F}_R + \vec{T}_D + \vec{T}_B = \vec{0}$$

$$\text{eje } x: \quad A_x + T \cos(45^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = -T \cos(45^\circ) = -\frac{w_0 L}{1 + 2\sqrt{2}}}$$

$$\text{eje } y: A_y - F_R + T \sin(45^\circ) + T = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = F_R - T \sin(45^\circ) - T = w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}}}$$

Ahora, a partir de las relaciones diferenciales de la teoría, obtendremos la fuerza cortante y el momento flexionante

$$V(x) = V(0) + \int_0^x w(x) dx,$$

$$M(x) = M(0) + \int_0^x V(x) dx,$$

fórmulas que tienen que ser corregidas donde tengamos fuerzas concentradas. Empezamos con la fuerza cortante, asumiendo que empezamos con  $V(0) = 0$ , pero tenemos una fuerza concentrada en  $x = 0$  ( $A_y$ ), por lo que tenemos que usar  $\Delta V(0) = A_y$ , por lo que  $V(0) = A_y$ , así que resolvemos (teniendo en cuenta el signo de la carga distribuida), para todo  $x$  situado a la izquierda de la siguiente fuerza concentrada ( $x < \frac{L}{2}$ )

$$V(x) = A_y - w_0 \int_0^x dx = w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} - w_0 x.$$

En  $x = \frac{L}{2}$  tendríamos

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} - w_0 \frac{L}{2} = -\frac{L w_0}{4\sqrt{2} + 2},$$

pero tenemos otra fuerza concentrada, por lo que en este punto hay que añadir la contribución de su componente vertical, es decir, tenemos

$$\Delta V\left(\frac{L}{2}\right) = T \sin(45^\circ) = \frac{w_0 L}{1 + 2\sqrt{2}},$$

así que, a la izquierda de  $x = \frac{L}{2}$  tenemos el resultado mostrado arriba, e inmediatamente a la derecha, tenemos

$$\begin{aligned} V\left(\frac{L}{2}\right)_{\text{derecha}} &= V\left(\frac{L}{2}\right)_{\text{izquierda}} + \Delta V\left(\frac{L}{2}\right) \\ &= -\frac{L w_0}{4\sqrt{2} + 2} + \frac{w_0 L}{1 + 2\sqrt{2}} \\ &= +\frac{L w_0}{4\sqrt{2} + 2} \end{aligned}$$

Para los puntos  $x > \frac{L}{2}$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 V(x) &= V\left(\frac{L}{2}\right)_{\text{derecha}} - w_0 \int_{\frac{L}{2}}^x dx \\
 &= \frac{Lw_0}{4\sqrt{2} + 2} - w_0 \left[x\right]_{\frac{L}{2}}^x \\
 &= \frac{Lw_0}{4\sqrt{2} + 2} - w_0 \left[x - \frac{L}{2}\right] \\
 &= Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} - w_0 x
 \end{aligned}$$

Por último, en  $x = L$  tendríamos  $V(L) = -Lw_0 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$ , pero tenemos otra carga puntual en  $x = L$ , que al tenerla en cuenta nos da  $\Delta V(L) = T = +Lw_0 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$ , por lo que se tiene que  $V(L) = 0$ .

En el cálculo del momento flexionante no tenemos pares concentrados en ningún punto, por lo que la resolución de la integral de la fuerza cortante es suficiente a priori, pero para hacer el cálculo bien hay que tener en cuenta de forma correcta la contribución de las fuerzas concentradas en puntos intermedios de la viga (las fuerzas concentradas en los extremos de la viga tienen contribución nula en el momento flexionante, como se ve con el método de las secciones). Por ello, tenemos que resolver la integral a trozos, primero para los puntos  $x < \frac{L}{2}$  y luego para los puntos  $x > \frac{L}{2}$ .

Para los puntos  $x < \frac{L}{2}$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 M(x) &= 0 + \int_0^x \left( w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} - w_0 x \right) dx \\
 &= \int_0^x w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} dx - \int_0^x w_0 x dx \\
 &= w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} \int_0^x dx - w_0 \int_0^x x dx \\
 &= w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} [x]_0^x - w_0 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^x \\
 &= w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} [x - 0] - w_0 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \\
 &= w_0 L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} x - w_0 \frac{x^2}{2}
 \end{aligned}$$

y para los puntos  $x > \frac{L}{2}$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 M(x) &= M\left(\frac{L}{2}\right) + \int_{\frac{L}{2}}^x \left( Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} - w_0x \right) dx \\
 &= -\frac{L^2w_0}{8} \frac{1 - 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} + \int_{\frac{L}{2}}^x Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} dx - \int_{\frac{L}{2}}^x w_0x dx \\
 &= -\frac{L^2w_0}{8} \frac{1 - 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} + Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} \int_{\frac{L}{2}}^x dx - w_0 \int_{\frac{L}{2}}^x x dx \\
 &= -\frac{L^2w_0}{8} \frac{1 - 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} + Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} \left[ x \right]_{\frac{L}{2}}^x - w_0 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{L}{2}}^x \\
 &= -\frac{L^2w_0}{8} \frac{1 - 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} + Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} \left[ x - \frac{L}{2} \right] - w_0 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} \right] \\
 &= -\frac{L^2w_0}{8} \frac{1 - 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} + Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} x - \frac{L}{2} Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} - w_0 \frac{x^2}{2} + w_0 \frac{L^2}{8} \\
 &= -\frac{L^2w_0}{2 + 4\sqrt{2}} + Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} x - w_0 \frac{x^2}{2}
 \end{aligned}$$

Así que los resultados de la fuerza cortante y del momento flexionante están definidos a trozos, y son

$$V(x) = \begin{cases} w_0L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} & : x = 0 \\ w_0L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} - w_0x & : 0 < x < \frac{L}{2} \\ w_0L \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} - w_0x & : \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

y el momento flexionante es

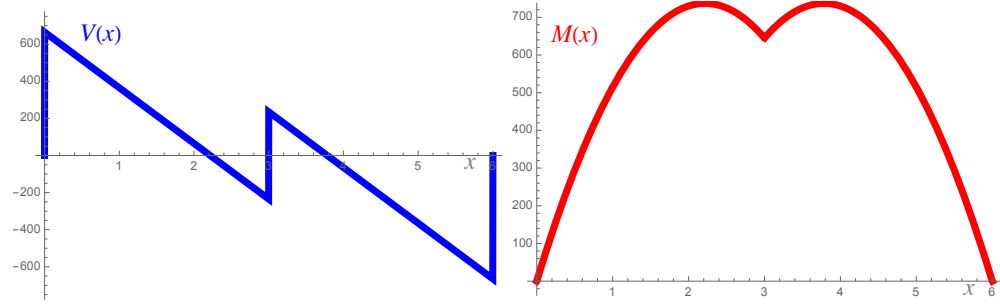
$$M(x) = \begin{cases} w_0L \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} x - w_0 \frac{x^2}{2} & : 0 < x < \frac{L}{2} \\ -\frac{L^2w_0}{2 + 4\sqrt{2}} + Lw_0 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} x - w_0 \frac{x^2}{2} & : \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

Usando que  $L = 6$  m y  $w_0 = 300$  N/m, el resultado final es

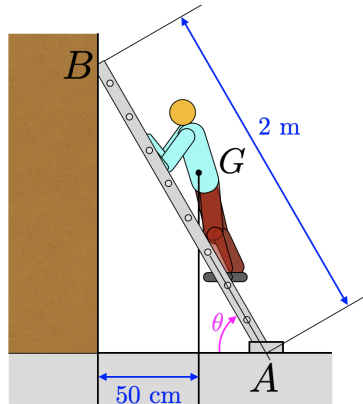
$$V(x) = \begin{cases} 665 \text{ N} & : x = 0 \text{ m} \\ 665 \text{ N} - 300x \text{ N/m} & : 0 \text{ m} < x < 3 \text{ m} \\ 1135 \text{ N} - 300x \text{ N/m} & : 3 \text{ m} < x \leq 6 \text{ m} \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} 665x - 150x^2 \text{ N/m} & : 0 \text{ m} < x < 3 \text{ m} \\ -1410 + 1135x - 150x^2 \text{ N/m} & : 3 \text{ m} < x \leq 6 \text{ m} \end{cases}$$

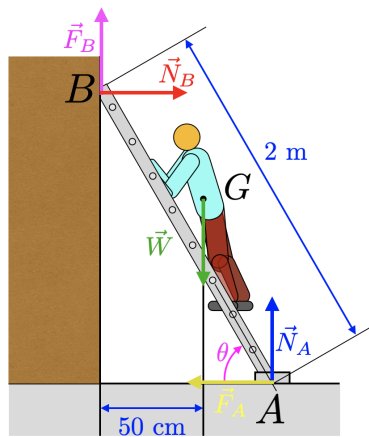
Por último, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante son:



3. Una persona de 80 Kg sube por la escalera y se detiene en la posición mostrada después de sentir que la escalera está a punto de deslizarse. Determine el coeficiente de fricción estática entre la almohadilla de fricción  $A$  y el suelo si la inclinación de la escalera es de  $\theta = 60^\circ$  y la pared en  $B$  es lisa. El centro de gravedad para el hombre está en  $G$ . Ignore el peso de la escalera.



**Solución:** Para resolver este problema, necesitamos el DCL del sistema. Comenzamos con las reacciones de los soportes de la escalera en  $A$  y en  $B$ , que son normales a las paredes de apoyo ( $\vec{N}_A$  y  $\vec{N}_B$  en el DCL). También tenemos el peso de la persona ( $\vec{W}$ ) que actúa desde su centro de gravedad de altura  $y$  desconocida (que veremos que es irrelevante). Para dibujar las fuerzas de fricción, lo primero que tenemos que tener en cuenta es que el problema nos dice que "la persona se detiene en cuanto siente que la escalera está a punto de deslizarse", lo que significa que nos encontramos en situación de movimiento inminente, por lo que las posibles fricciones de contacto serán  $F_A = \mu_A N_A$  y  $F_B = \mu_B N_B$ . En el DCL tenemos que dar la dirección de acción de la fricción en  $A$ , que será aquella que se oponga al movimiento de la escalera al caerse. Como es obvio que la escalera, al empezar a caer, se deslizaría en  $A$  hacia la derecha y en  $B$  hacia abajo, la fricción en  $A$  actúa hacia la izquierda y en  $B$  hacia arriba, como se indica en el siguiente DCL



Además, al decirnos que la pared en  $B$  es lisa, sabemos que el coeficiente de fricción en dicho punto es  $\mu_B = 0$ , por lo que no tenemos fricción en  $B$ , es decir, se tiene que  $F_B = \mu_B N_B = 0$ .

Así tenemos un sistema de 4 fuerzas 2D con 3 incógnitas, por lo que es resoluble. Si aplicamos ahora la condición de equilibrio de fuerzas, obtenemos las magnitudes de las respuestas normales

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{W} + \vec{N}_B + \vec{N}_A + \vec{F}_R = \vec{0}$$

$$\text{eje x: } 0 + N_B + 0 - F_A = 0 \Rightarrow \boxed{N_B = F_A}$$

$$\text{eje y: } -W + 0 + N_A + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{N_A = W}$$



Usando la condición de equilibrio bajo rotaciones en torno al punto  $B$ , se obtiene

$$\sum_i (\vec{M}_i)_B = \vec{r}_{BG} \times \vec{W} + \vec{r}_{BB} \times \vec{N}_B + \vec{r}_{BA} \times \vec{N}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_A = \vec{0},$$

$$\text{eje } z: \quad -dW + 0 + L \cos(\theta)N_A - L \sin(\theta)F_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_A = \frac{L \cos(\theta)N_A - dW}{L \sin(\theta)}}$$

donde se ha definido  $d = 50 \text{ cm}$  y  $L = 2 \text{ m}$ . Nótese aquí que, para obtener  $\vec{r}_{BG} \times \vec{W}$ , hay que resolver el determinante

$$\vec{r}_{BG} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d & y - L \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -W & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} [-dW - 0 \times (y - L \sin(\theta))] = \vec{k} [-dW]$$

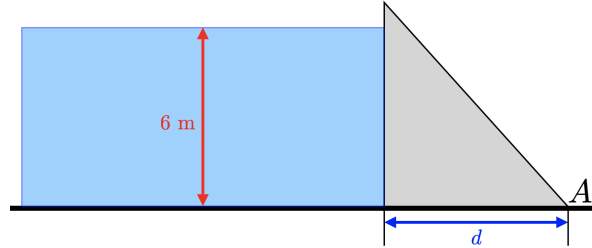
Usando ahora que  $N_A = W$  y que, en movimiento inminente, se tiene que  $F_A = \mu_A N_A$ , podemos despejar  $\mu_A$  de la expresión anterior obteniendo

$$\mu_A W = \frac{L \cos(\theta)W - dW}{L \sin(\theta)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_A = \frac{\cos(\theta) - \frac{d}{L}}{\sin(\theta)}}$$

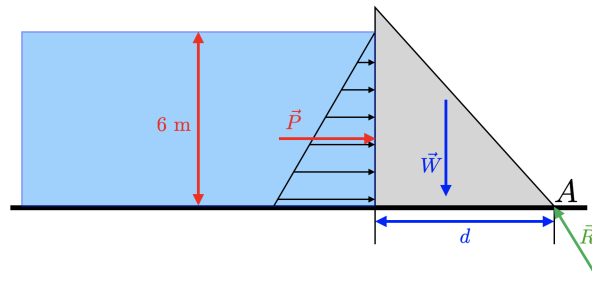
Usando  $d = 0,5 \text{ m}$ ,  $L = 2 \text{ m}$  y  $\theta = 60^\circ$  (por lo que  $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  y  $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ ), se obtiene, en notación de ingeniería

$$\boxed{\mu_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,289}$$

4. La presa de “gravidad” de concreto se mantiene en su lugar por su propio peso. Si la densidad del concreto es  $\rho_c = 2,5 \text{ Mg/m}^3$ , y el agua tiene una densidad de  $\rho_a = 1,0 \text{ Mg/m}^3$ , determine la dimensión  $d$  más pequeña que impedirá que la presa se voltee con respecto a su extremo A. La presa tiene un ancho (en la dirección perpendicular a la representación en el papel) de 1 m.



**Solución:** Definiremos a la profundidad del agua como  $h = 6 \text{ m}$ , y a la profundidad como  $Y = 1 \text{ m}$ . Para resolver este problema, necesitamos el Diagrama de Cuerpo Libre del bloque de hormigón. Por un lado, tenemos que el peso de cada partícula del bloque es atraído a la Tierra, con una fuerza equivalente a la del peso total  $\vec{W}$  que actúa en el centro de gravedad del bloque  $\vec{R}_G$ . Por otro lado, tenemos que la columna de agua que la presa mantiene, genera una presión  $p(z) = \rho_a g(h - z)$  en cada punto del área de contacto entre el bloque y el agua a una altura  $z$ . Esta fuerza distribuida es equivalente a una presión total  $\vec{P}$  que actúa sobre el centro de presión. Por último, tenemos que, en movimiento inminente, la respuesta  $\vec{R}$  del suelo se encuentra desplazada hasta el mismo vértice del bloque A (si estuviera más cerca del centro de gravedad, no estaríamos en movimiento inminente, y si estuviera más lejos, la respuesta ya no estaría en la superficie de contacto entre el bloque y el suelo, por lo que generaría un par de fuerzas con el resto de fuerzas que haría que el cuerpo se desplazara). Por lo que tenemos el siguiente Diagrama de Cuerpo Libre



Para poder aplicar la condición de equilibrio respecto a rotaciones, tenemos que obtener los vectores de presión sobre el bloque y peso del bloque y sus puntos de aplicación.

La presión total del agua sobre el bloque es la suma de todas las presiones sobre todos los puntos de contacto entre el agua y el bloque, y es igual a

$$P = \int_A p(z) dA = \int_0^Y dy \int_0^h p(z) dz = [y]_0^Y \int_0^h \rho_a g (h - z) dz = [Y - 0] \rho_a g \left[ hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h = Y \rho_a g \left[ h^2 - \frac{h^2}{2} \right] = Y \rho_a g \frac{h^2}{2}$$

Para obtener el centro de presión, necesitamos calcular también el momento total generado por la presión

$$M_P = \int_A p(z) z dA = \int_0^Y dy \int_0^h p(z) z dz = [y]_0^Y \int_0^h \rho_a g (hz - z^2) dz = Y \rho_a g \left[ h \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h = Y \rho_a g \left[ \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right] = Y \rho_a g \frac{h^3}{6}$$

La relación entre el momento y la fuerza resultante es

$$M_P = \bar{z} P \Rightarrow \bar{z} = \frac{M_P}{P} = \frac{h}{3},$$

por lo que el efecto de la presión es equivalente al de la fuerza  $\vec{P}$  concentrada en el punto de presión  $p = (0, \frac{h}{3})$

El peso total del bloque se calcula como

$$\begin{aligned} W &= \int_V \rho_c dV = \rho_c \int_0^Y dy \int_0^d dx \int_0^{h(1-\frac{x}{d})} dz = Y\rho_c \int_0^d dx [z]_0^{h(1-\frac{x}{d})} = Y\rho_c \int_0^d dx \left[ h \left( 1 - \frac{x}{d} \right) - 0 \right] \\ &= Y\rho_c h \int_0^d dx \left( 1 - \frac{x}{d} \right) = Y\rho_c h \left[ x - \frac{x^2}{2d} \right]_0^d = Y\rho_c h \left[ d - \frac{d^2}{2d} - 0 \right] = Y\rho_c h \frac{d}{2} \end{aligned}$$

Solo vamos a necesitar la componente  $x$  del centro de gravedad, por lo que evaluamos

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_W &= \int_V \rho_c x dV = \rho_c \int_0^Y dy \int_0^d x dx \int_0^{h(1-\frac{x}{d})} dz = Y\rho_c \int_0^d x dx [z]_0^{h(1-\frac{x}{d})} = Y\rho_c \int_0^d x dx \left[ h \left( 1 - \frac{x}{d} \right) - 0 \right] \\ &= Y\rho_c h \int_0^d x dx \left( 1 - \frac{x}{d} \right) = Y\rho_c h \int_0^d dx \left( x - \frac{x^2}{d} \right) = Y\rho_c h \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3d} \right]_0^d = Y\rho_c h \left[ \frac{d^2}{2} - \frac{d^3}{3d} - 0 \right] = Y\rho_c h \frac{d^2}{6} \end{aligned}$$

Así se tiene que la componente  $x$  del centro de gravedad es

$$\bar{x} = \frac{\langle x \rangle_W}{W} = \frac{d}{3}$$

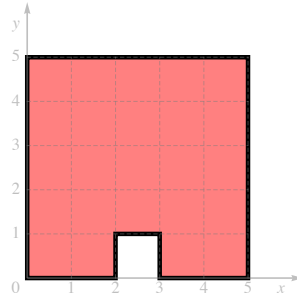
Con estos resultados, como estamos en movimiento inminente, podemos calcular las condiciones de equilibrio. Como el problema nos pide el ancho  $d$  mínimo para el cual la presa no se voltee con respecto al punto  $A$ , usamos la condición de equilibrio con respecto a rotaciones respecto a dicho punto  $A$ , así se tiene

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \vec{M}_i \right)_A &= \vec{r}_{Ap} \times \vec{P} + \vec{r}_{Aw} \times \vec{W} + \vec{r}_{AA} \times \vec{R} = \vec{0}, \\ \text{eje z:} \quad &- \frac{Y}{6} \rho_a g h^3 + \frac{Y}{3} \rho_c g d^2 h + 0 = 0 \end{aligned}$$

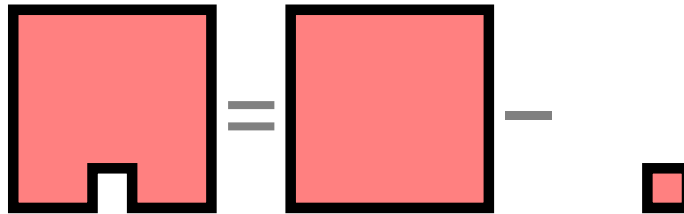
Nótese que estamos justo en la posición de movimiento inminente porque la respuesta  $R$  se encuentra en  $A$ , por lo que la ecuación obtenida es una condición que se tiene que cumplir justo en movimiento inminente. Así a partir de dicha condición, se puede despejar el valor de  $d$  que, en notación de ingeniería es

$$\boxed{d = h \sqrt{\frac{\rho_a}{2\rho_c}} = 2,68 \text{ m}} \quad (18)$$

5. Obtener el segundo momento de área respecto al eje  $x$  mostrado en el dibujo, y respecto al eje paralelo al eje  $x$  que cruza al centroide del objeto.



**Solución:** Para realizar todos los cálculos, la manera más sencilla es considerar que nuestro objeto es una superficie cuadrada a la que hemos quitado 3 cuadrados más pequeños, es decir



Para ahorrarnos cálculos, es importante ver el Teorema de los Ejes Paralelos aplicado al momento de inercia de área  $I_x$

$$I_{x,O} = I_{x,C} + d_{O,C,y}^2 A \Rightarrow I_{x,C} = I_{x,O} - d_{O,C,y}^2 A.$$

Está claro que vamos a necesitar la distancia vertical entre el punto  $O$  y el centroide, y como  $O = (0, 0)$ , esta distancia no es más que la componente  $y$  del centroide, que se calcula como

$$R_{C,y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = d_{O,C,y}$$

Empecemos a aplicar esto en la obtención de la posición del centroide del área, que se calcula a partir de las siguientes integrales

$$\begin{aligned} \int_A dA &= \int_0^5 dx \int_0^5 dy - \int_2^3 dx \int_0^1 dy \\ &= [x]_0^5 [y]_0^5 - [x]_2^3 [y]_0^1 \\ &= [5 - 0] [5 - 0] - [3 - 2] [1 - 0] \\ &= [5] [5] - [1] [1] \\ &= 25 - 1 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_A y dA &= \int_0^5 dx \int_0^5 y dy - \int_2^3 dx \int_0^1 y dy \\ &= [x]_0^5 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^5 - [x]_2^3 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= [5 - 0] \left[ \frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] - [3 - 2] \left[ \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \\ &= [5] \left[ \frac{25}{2} \right] - [1] \left[ \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{125}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 62 \end{aligned}$$

Por lo que la componente  $y$  del centroide de la figura es

$$R_{C,y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{62}{24} = \frac{31}{12} = d_{O,C,y}$$

El segundo momento de inercia de area  $I_x$  con respecto a los ejes que intersectan en el punto  $O$  del gráfico es

$$\begin{aligned}
 I_{x,O} = \int_A y^2 dA &= \int_0^5 dx \int_0^5 y^2 dy - \int_2^3 dx \int_0^1 y^2 dy \\
 &= [x]_0^5 \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^5 - [x]_2^3 \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= [5 - 0] \left[ \frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] - [3 - 2] \left[ \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] \\
 &= [5] \left[ \frac{5^3}{3} \right] - [1] \left[ \frac{1}{3} \right] \\
 &= \frac{5^4}{3} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{5^4 - 1}{3} \\
 &= 208
 \end{aligned}$$

Así que, usando el Teorema de los Ejes Paralelos, trasladamos el resultado obtenido del segundo momento de inercia de Area  $I_x$  del punto  $O$  al centroide

$$I_{x,O} = I_{x,C} + d_{O,C,y}^2 A \Rightarrow I_{x,C} = I_{x,O} - d_{O,C,y}^2 A \Rightarrow I_{x,C} = 208 - \left( \frac{31}{12} \right)^2 24$$

Así que la solución pedida es

$$I_{x,C} = \frac{287}{6} = 47,8$$

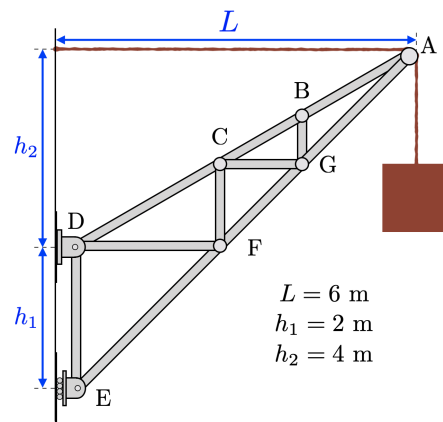
# Examen final de Física aplicada a estructuras e instalaciones, Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Nombre y DNI: \_\_\_\_\_

Instrucciones:

- El examen empieza a las 9:00 y termina a las 12:00
- Sólo se puede usar calculadora científica no programable.
- No está permitido el uso de apuntes
- No está permitido el uso de móviles, al que se pille usando un móvil se le expulsará del aula y tendrá un cero, **voy a ser muy estricto e intransigente con esta regla**. Si estás esperando una llamada importante, dímelo y yo tendré tu móvil en mi mesa.
- Las mochilas, estuches, abrigo, bolsos y los móviles (silenciados) han de estar en la pared
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

1. Obtener la masa máxima  $M$  que puede sostener esta grúa de tal manera que ningún elemento exceda los 30 kN en tensión o los 25 kN en compresión.



**Solución:** Es obvio que los elementos BG, GC, CF y FD son elementos de fuerza cero, por lo que podemos simplificar el sistema a estudiar por:

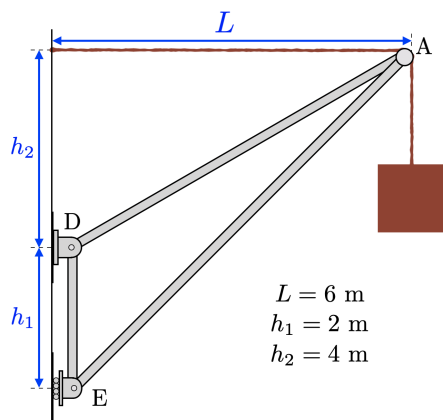


Figura 1. Estructura a estudiar, simplificada al eliminar los elementos de fuerza cero.

Este es un sistema con 3 incógnitas, por lo que sería resoluble, pero es más rápido estudiar el equilibrio de esta armadura por el método de los nodos. Empezamos realizando un Diagrama de Cuerpo Libre del nodo A, teniendo en cuenta que la polea en A sostiene a una cuerda, la cual tenemos que asumir que no tiene fricción, por lo que la tensión a los 2 lados tiene la misma magnitud y está orientada en el sentido de la cuerda. Además, tenemos las reacciones de los elementos sobre el nodo que lo mantienen quieto en su posición. Estas sabemos que están orientadas como los elementos de la estructura, y asumimos que son positivas cuando salen del nodo hacia el elemento, con lo que nos aseguramos que, si obtenemos un resultado positivo, el elemento se encontrará en tensión, mientras que si obtenemos un resultado negativo tendremos que el elemento se encuentra en compresión.

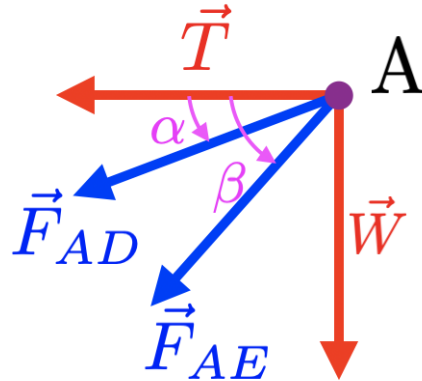


Figura 2. DCL del nodo A

Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  los podemos obtener a partir de la geometría de la armadura, en concreto, sabemos que

$$\tan(\alpha) = \frac{h_2}{L} = \frac{2}{3}, \quad \tan(\beta) = \frac{h_1 + h_2}{L} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$$

En un nodo puntual, sólo se aplica la condición de equilibrio respecto a desplazamientos, es decir, que

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{W} + \vec{T} + \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{AE} = \vec{0}$$

eje x:  $-W - F_{AD} \cos(\alpha) - F_{AE} \cos(\beta) = 0$   
eje y:  $-W - F_{AD} \sin(\alpha) - F_{AE} \sin(\beta) = 0$

Este sistema es resoluble, en concreto, se puede despejar (por ejemplo)  $F_{AD}$  en la ecuación del eje  $x$  y sustituirlo en la ecuación del eje  $y$  para obtener  $F_{AE}$ . La solución del sistema es:

$$F_{AD} = W \frac{\sin(\beta) - \cos(\beta)}{\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)}$$

$$F_{AE} = W \frac{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)}$$

En nuestro caso, es inmediato que  $F_{AD} = 0$ , pues  $\sin(\beta) = \cos(\beta)$ , por lo que

$$F_{AE} = \frac{-W}{\sin(\beta)} = -\sqrt{2}W$$

Ya sólo nos queda por estudiar el carácter del elemento DE. Por sencillez (el rodillo en E sólo tiene restricciones en la dirección  $x$ , mientras que el bastidor en D tiene 2 restricciones, una en la dirección  $x$  y la otra en la dirección  $y$ ), nos centraremos en el DCL del nodo E

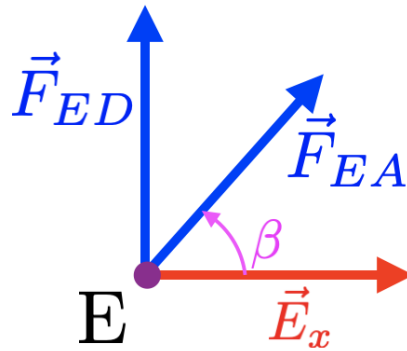


Figura 3. DCL del nodo E

En un nodo puntual, sólo se aplica la condición de equilibrio respecto a desplazamientos, es decir, que

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{E}_x + \vec{F}_{ED} + \vec{F}_{EA} = \vec{0}$$

eje x:  $E_x + F_{EA} \cos(\beta) = 0$   
eje y:  $F_{ED} + F_{EA} \sin(\beta) = 0$

Usando aquí que  $F_{EA} = F_{AE} = -\sqrt{2}W$ , a partir de la ecuación escalar en la componente  $y$  obtenemos que

$$F_{ED} = -F_{EA} \sin(\beta) = W$$

Ahora que ya tenemos todas las fuerzas a las que se hayan sometidos todos los elementos de la armadura y, por tanto, si son elementos de tensión o de compresión, podemos ver cuál será el peso máximo ( $W = mg$ ) que puede soportar cada uno de ellos.

- $F_{ED} = +W$ , por lo que ED es un elemento de tensión, por lo que

$$|F_{ED}| = mg < 30 \text{ KN} \Rightarrow m < \frac{30 \text{ KN}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 3058,1 \text{ kg}$$

- $F_{AE} = -\sqrt{2}W$ , por lo que AE es un elemento de compresión, por lo que

$$|F_{AE}| = \sqrt{2}mg < 25 \text{ KN} \Rightarrow m < \frac{25 \text{ KN}}{\sqrt{2} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 1802,01 \text{ kg}$$

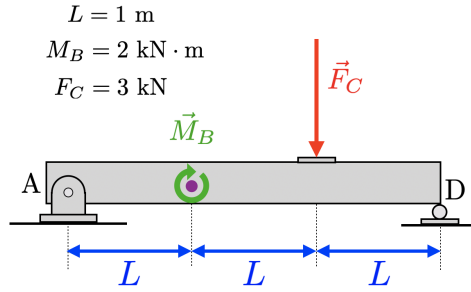
Por lo que la respuesta (en notación de ingeniería) es que la grúa puede sostener hasta una masa de

$$m = 1,80 \cdot 10^3 \text{ kg.}$$

Masas entre 1802,01 kg y 3058,1 kg provocarán que el elemento en compresión AE falle, y masas mayores que 3058,1 kg provocarán que tanto los elementos AE y ED fallen.



2. Representar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante de la viga de la figura.



**Solución:** Para poder obtener bien estos diagramas, primero tenemos que obtener las reacciones de los soportes de la viga. A partir del modelo idealizado dado, vemos que tenemos un pasador en A, lo que provoca 2 fuerzas de reacción, una porque el pasador evita desplazamientos verticales, y otra porque evita desplazamientos horizontales, por otro lado, tenemos un cilindro en D, que básicamente sostiene a la viga en D impidiendo que se caiga al suelo, y esto sólo lo puede hacer con una fuerza de reacción en la dirección perpendicular a la superficie de contacto entre el cilindro y la viga, por todo ello, obtenemos que el Diagrama de Cuerpo Libre de la viga es:

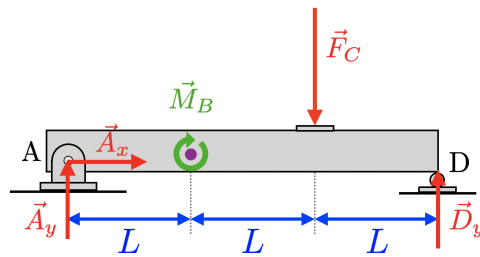


Figura 4. DCL de la viga en estudio, no se han eliminado los soportes por claridad de la exposición

Si la viga se mantiene en equilibrio, ha de verificar las condiciones de equilibrio respecto a desplazamientos:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{F}_C + \vec{D}_y = \vec{0}$$

eje x:  $A_x = 0$

eje y:  $A_y - F_C + D_y = 0$

De la ecuación escalar en el eje  $y$ , se obtiene que

$$A_y + D_y = F_C$$

Como la viga es un objeto 2D extenso, también verifica la condición de equilibrio respecto de giros. Teniendo en cuenta que los momentos de par externos son vectores libres, vamos a aplicar dicha condición sobre el punto A, es decir, se verifica en equilibrio que:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{M}_i)_A = \vec{r}_{AA} \times (\vec{A}_x + \vec{A}_y) + \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C + \vec{r}_{AD} \times \vec{D}_y + \vec{M}_B = \vec{0}$$

eje z:  $0 - 2LF_C + 3LD_y - M_B = 0$

(19)

En la obtención de la ecuación escalar en el eje  $z$  hemos usado la regla de la mano derecha, y hemos obtenido que  $\vec{M}_B = -M_B \vec{k}$  al ver que el sentido de rotación inducido por  $\vec{M}_B$  es en el sentido de las agujas del reloj. A partir de

esta última ecuación se obtiene que

$$D_y = \frac{2LF_C + M_B}{3L} = \frac{8}{3}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación del eje  $y$ , se tiene que

$$A_y = \frac{LF_C - M_B}{3L} = \frac{1}{3}$$

Ahora, para obtener el Diagrama de Fuerza Cortante, tenemos que tener en cuenta que todas las fuerzas que actúan sobre la viga son fuerzas puntuales, no extensas, por lo que, por la teoría dada en clase, sabemos que si tenemos una fuerza  $\vec{F}_0 = F_0\vec{j}$  en el punto  $x = x_0$  tenemos un salto en la función de fuerza cortante dado por

$$\Delta V(x_0) = F_0 \quad (20)$$

Por ello, tenemos que:

- $x = 0$ , tenemos un salto desde  $V(0) = 0$  hasta  $\Delta V(0) = A_y$ , por lo que  $V(0) = A_y = \frac{1}{3}$  entre  $x = 0$  y  $x = 2L$ .
- $x = 2L$ , tenemos un salto desde  $V(2L) = \frac{1}{3}$  de  $\Delta V(2L) = -F_C = -3$ , por lo que  $V(x) = A_y - F_C = \frac{-8}{3}$  entre  $x = 2L$  y  $x = 3L$ .
- $x = 3L$ , tenemos un salto desde  $V(3L) = \frac{-8}{3}$  de  $\Delta V(3L) = D_y = \frac{8}{3}$ , por lo que  $V(3L) = A_y - F_C + D_y = 0$  en el punto final de la viga  $x = 3L$ .

Por todo ello, nos queda el siguiente Diagrama de Fuerza Cortante:

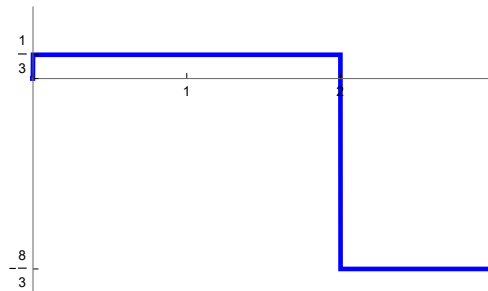


Figura 5. Diagrama de Fuerza Cortante

Para el Diagrama de Momento Flexionante, sabemos que tenemos 2 contribuciones, por un lado, se verifica que

$$M(x) = \int_0^x V(x)dx,$$

pero además hay que tener en cuenta que, cuando tenemos un momento de par  $\vec{M}_0 = M_0\vec{j}$  aplicado en el punto  $x = x_0$  tenemos un salto en la función de momento flexionante dado por

$$\Delta M(x_0) = M_0 \quad (21)$$

Por ello, tenemos

- Entre  $x = 0$  y  $x = L$ , tenemos  $V(x) = \frac{1}{3}$ , por lo que  $M(x) = \int_0^x \frac{1}{3}dx = \frac{x}{3}$ , por lo que se tiene que  $M(1) = \frac{1}{3}$ .
- En  $x = L$ , tenemos un salto desde  $M(L) = \frac{1}{3}$  de  $\Delta M(L) = M_D = 2$ , por lo que  $M(L) = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ .
- Entre  $x = L$  y  $x = 2L$ , tenemos  $V(x) = \frac{1}{3}$ , por lo que  $M(x) = M(1) + \int_1^x \frac{1}{3}dx = \frac{7}{3} + \frac{x-1}{3}$ , por lo que se tiene que  $M(2) = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ .

- Entre  $x = 2L$  y  $x = 3L$ , tenemos  $V(x) = -\frac{8}{3}$ , por lo que  $M(x) = M(2) + \int_2^x -\frac{8}{3} dx = \frac{8}{3} - \frac{8}{3}(x-2) = \frac{8}{3}(3-x)$ , por lo que se tiene que  $M(3) = 0$ .

Por todo ello, nos queda el siguiente Diagrama de Momento Flexionante:

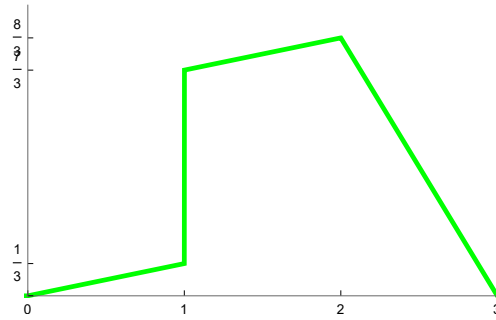
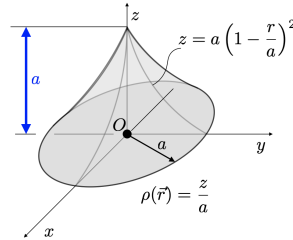


Figura 6. Diagrama de Momento Flexionante

3. Obtener el centro de gravedad, el centro de masa, el centroide y el volumen de la siguiente figura.



**Solución:** Como no se nos ha especificado la gravedad, tenemos que asumir que  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  es constante en todos los puntos de la figura geométrica, por lo que se tiene que el centro de gravedad y el centro de masas coinciden.

Además, la figura que estamos estudiando tiene simetría radial con respecto al eje  $z$ , por lo que sus 3 centros pertenecen a dicho eje, es decir, las componentes  $x$  e  $y$  serán nulas, y sólo nos queda calcular la componente  $z$ . Como es más fácil, vamos a empezar calculando la componente  $z$  del centroide

$$\vec{R}_C = \left( 0, 0, \frac{\int_V z dV}{\int_V dV} \right) \quad (22)$$

Empezamos calculando el volumen de la figura y, para hacerlo, vamos a usar coordenadas cilíndricas (así que tenemos que usar que el jacobiano de la transformación es  $J = r$ ) y que  $z(r) = a \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2$ :

$$\begin{aligned} V &= \int_V dV = \int_0^a dr \int_0^{z(r)} dz \int_0^{2\pi} d\varphi r = \int_0^a dr \int_0^{z(r)} dz [\varphi]_0^{2\pi} r \\ &= \int_0^a dr \int_0^{z(r)} dz [2\pi - 0] r = \int_0^a dr \int_0^{z(r)} dz 2\pi r \\ &= 2\pi \int_0^a r dr \int_0^{z(r)} dz = 2\pi \int_0^a r dr [z]_0^{z(r)} \\ &= 2\pi \int_0^a r dr [z(r) - 0] = 2\pi \int_0^a r a \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 dr \\ &= 2\pi a \int_0^a \left( r - 2\frac{r^2}{a} + \frac{r^3}{a^2} \right) dr = 2\pi a \left[ \frac{r^2}{2} - 2\frac{r^3}{3a} + \frac{r^4}{4a^2} \right]_0^a \\ &= 2\pi a \left[ \frac{a^2}{2} - 2\frac{a^3}{3a} + \frac{a^4}{4a^2} - 0 \right] = 2\pi a \left[ \frac{a^2}{2} - 2\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} \right] \\ &= 2\pi a^3 \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{6} a^3 \end{aligned}$$

Por lo que el volumen de la figura es

$$V = \frac{\pi}{6} a^3$$

La siguiente integral a calcular es

$$\begin{aligned}
 \int_V z dV &= \int_0^a dr \int_0^{z(r)} z dz \int_0^{2\pi} d\varphi r \\
 &= \int_0^a dr \int_0^{z(r)} z dz \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} r \\
 &= \int_0^a dr \int_0^{z(r)} z dz \left[ 2\pi - 0 \right] r \\
 &= \int_0^a dr \int_0^{z(r)} z dz 2\pi r \\
 &= 2\pi \int_0^a r dr \int_0^{z(r)} z dz \\
 &= 2\pi \int_0^a r dr \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{z(r)} \\
 &= 2\pi \int_0^a r dr \left[ \frac{z(r)^2}{2} - 0 \right] \\
 &= 2\pi \int_0^a r dr \frac{a^2}{2} \left( 1 - \frac{r}{a} \right)^4 \\
 &= 2\pi \frac{a^2}{2} \int_0^a r dr \left( 1 - 4\frac{r}{a} + 6\frac{r^2}{a^2} - 4\frac{r^3}{a^3} + \frac{r^4}{a^4} \right) \\
 &= \pi a^2 \int_0^a dr \left( r - 4\frac{r^2}{a} + 6\frac{r^3}{a^2} - 4\frac{r^4}{a^3} + \frac{r^5}{a^4} \right) \\
 &= \pi a^2 \left( \frac{r^2}{2} - 4\frac{r^3}{3a} + 6\frac{r^4}{4a^2} - 4\frac{r^5}{5a^3} + \frac{r^6}{6a^4} \right)_0^a \\
 &= \pi a^2 \left( \frac{a^2}{2} - 4\frac{a^3}{3a} + 6\frac{a^4}{4a^2} - 4\frac{a^5}{5a^3} + \frac{a^6}{6a^4} \right) \\
 &= \pi a^2 \left( \frac{a^2}{2} - 4\frac{a^2}{3} + 6\frac{a^2}{4} - 4\frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{6} \right) \\
 &= \pi a^4 \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{6}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \right) \\
 &= \frac{\pi}{30} a^4
 \end{aligned}$$

Así que se obtiene

$$\frac{\int_V z dV}{\int_V dV} = \frac{\frac{\pi}{30} a^4}{\frac{\pi}{6} a^3} = \frac{6}{30} a = \frac{a}{5} \quad (23)$$

Por lo que el centroide de la figura se encuentra localizado en

$$\boxed{\vec{R}_C = \left( 0, 0, \frac{a}{5} \right)}$$

Vamos ahora con los cálculos del centro de masa. Como la densidad del objeto también tiene simetría con respecto al eje  $z$ , también en este caso tenemos que las componentes  $x$  e  $y$  del centro de masas son cero, al encontrarse este situado

en el eje  $z$  de simetría, por todo ello, tenemos

$$\vec{R}_G = \vec{R}_M = \left( 0, 0, \frac{\int_V z\rho(z)dV}{\int_V \rho(z)dV} \right) \quad (24)$$

La masa total del objeto es

$$\begin{aligned} M &= \int_V \rho(z)dV = \int_0^a r dr \int_0^{z(r)} \rho(z) dz \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^a r dr \int_0^{z(r)} \left(\frac{z}{a}\right) dz \\ &= 2\pi \int_0^a r dr \left[\left(\frac{z^2}{2a}\right)\right]_0^{z(r)} \\ &= 2\pi \int_0^a r dr \frac{z(r)^2}{2a} \\ &= 2\pi \int_0^a r dr \left[\frac{a^2}{2a} \left(1 - \frac{r}{a}\right)^4\right] \\ &= 2\pi \int_0^a r dr \left[\frac{a}{2} \left(1 - 4\frac{r}{a} + 6\frac{r^2}{a^2} - 4\frac{r^3}{a^3} + \frac{r^4}{a^4}\right)\right] \\ &= \pi a \int_0^a dr \left(r - 4\frac{r^2}{a} + 6\frac{r^3}{a^2} - 4\frac{r^4}{a^3} + \frac{r^5}{a^4}\right) \\ &= \pi a \left(\frac{r^2}{2} - 4\frac{r^3}{3a} + 6\frac{r^4}{a^2} - 4\frac{r^5}{a^3} + \frac{r^6}{a^4}\right)_0^a \\ &= \pi a \left(\frac{a^2}{2} - 4\frac{a^3}{3a} + 6\frac{a^4}{4a^2} - 4\frac{a^5}{5a^3} + \frac{a^6}{6a^4}\right) \\ &= \pi a \left(\frac{a^2}{2} - 4\frac{a^2}{3} + 6\frac{a^2}{4} - 4\frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{6}\right) \\ &= \pi a^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{6}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{30} a^3 \end{aligned}$$

Y la última integral a calcular es

$$\begin{aligned}
 \int_V z\rho(z)dV &= \int_0^a r dr \int_0^{z(r)} z\rho(z)dz \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= 2\pi \int_0^a r dr \int_0^{z(r)} \left(\frac{z^2}{a}\right) dz \\
 &= 2\pi \int_0^a r dr \left(\frac{z^3}{3a}\right)_0^{z(r)} \\
 &= 2\pi \int_0^a r dr \left(\frac{z(r)^3}{3a}\right) \\
 &= 2\pi \int_0^a r dr \left(\frac{a^3}{3a} \left(1 - \frac{r}{a}\right)^6\right) \\
 &= 2\pi \int_0^a r dr \frac{a^2}{3} \left(1 - 6\frac{r}{a} + 15\frac{r^2}{a^2} - 20\frac{r^3}{a^3} + 15\frac{r^4}{a^4} - 6\frac{r^5}{a^5} + \frac{r^6}{a^6}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{3} a^2 \int_0^a dr \left(r - 6\frac{r^2}{a} + 15\frac{r^3}{a^2} - 20\frac{r^4}{a^3} + 15\frac{r^5}{a^4} - 6\frac{r^6}{a^5} + \frac{r^7}{a^6}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{3} a^2 \left(\frac{r^2}{2} - 6\frac{r^3}{3a} + 15\frac{r^4}{4a^2} - 20\frac{r^5}{5a^3} + 15\frac{r^6}{6a^4} - 6\frac{r^7}{7a^5} + \frac{r^8}{8a^6}\right)_0^a \\
 &= \frac{2\pi}{3} a^2 \left(\frac{a^2}{2} - 6\frac{a^3}{3a} + 15\frac{a^4}{4a^2} - 20\frac{a^5}{5a^3} + 15\frac{a^6}{6a^4} - 6\frac{a^7}{7a^5} + \frac{a^8}{8a^6}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{3} a^2 \left(\frac{a^2}{2} - 6\frac{a^2}{3} + 15\frac{a^2}{4} - 20\frac{a^2}{5} + 15\frac{a^2}{6} - 6\frac{a^2}{7} + \frac{a^2}{8}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{3} a^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{6}{3} + \frac{15}{4} - \frac{20}{5} + \frac{15}{6} - \frac{6}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
 &= \frac{2\pi}{3} a^4 \frac{1}{56} \\
 &= \frac{\pi}{84} a^4
 \end{aligned}$$

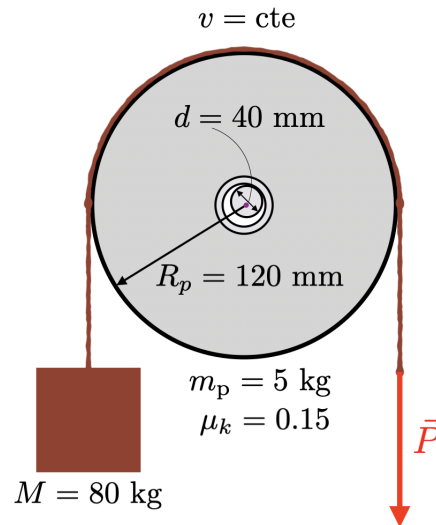
Así que se obtiene

$$\frac{\int_V z\rho(z)dV}{\int_V \rho(z)dV} = \frac{\frac{\pi}{84}a^4}{\frac{\pi}{30}a^3} = \frac{30}{84}a = \frac{5}{14}a$$

Por lo que el centro de masas y, por tanto, el centro de la figura se encuentran localizados en

$$\boxed{\vec{R}_M = \vec{R}_G = \left(0, 0, \frac{5}{14}a\right)}$$

4. La polea de 5 kg tiene un diámetro de 240 mm, mientras que su eje tiene un diámetro de 40 mm. Si el coeficiente de fricción cinética entre el eje y la polea es  $\mu_k = 0,15$ , obtén la fuerza vertical  $P$  sobre la cuerda requerida para levantar el bloque de 80 kg a velocidad constante. PISTA: Desprecia la fricción entre la polea y la cuerda.



**Solución:** Por la teoría dada en clase, la posición de la reacción de la flecha se encuentra en el punto de contacto de la flecha con el radio menor de la polea, esto define al radio de giro de la polea, que se calcula como (usando  $\phi_k = \arctan(\mu_k)$ )

$$r_g = r \sin(\phi_k)$$

Como el coeficiente de rozamiento cinemático es relativamente pequeño, el radio de giro se podría aproximar por  $r_g = r\mu_k$ , y el resultado no cambiará al nivel de precisión requerido. Aquí no vamos a realizar dicha aproximación. El diagrama de cuerpo libre de la polea queda como

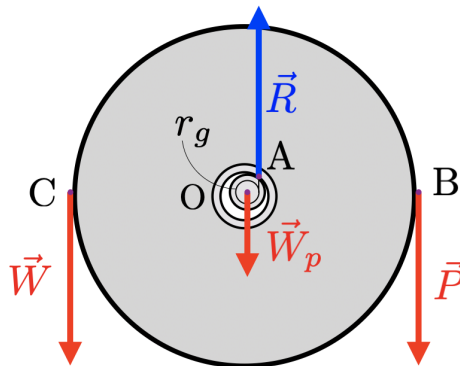


Figura 7. DCL de la polea en estudio, se ha usado que las fuerzas son vectores deslizantes.

Si la polea se mantiene girando a velocidad constante, se pueden aplicar las condiciones de equilibrio a la misma. Usando la condición de equilibrio respecto a desplazamientos, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{W} + \vec{W}_p + \vec{R} = \vec{0}$$

eje x:  $0 = 0$   
eje y:  $-P - W - W_p + R = 0$



De la ecuación escalar en el eje  $y$ , se obtiene que

$$\boxed{R = P + W + W_p}$$

La polea también verifica la condición de equilibrio respecto de giros, en concreto, aplicamos dicha ecuación en el eje de rotación de la polea (punto O en el DCL), obteniendo

$$\sum_{i=1}^N (\vec{M}_i)_O = \vec{r}_{OO} \times \vec{W}_p + \vec{r}_{OA} \times \vec{R} + \vec{r}_{OB} \times \vec{P} + \vec{r}_{OC} \times \vec{W} = \vec{0}$$

eje z:  $0 + r_g R - R_p P + R_p W = 0$

(25)

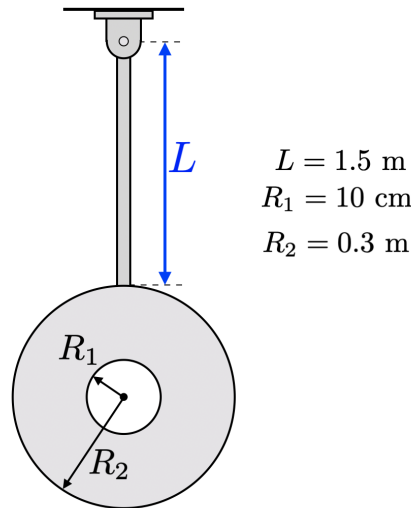
De esta ecuación escalar, y usando la ecuación anterior para sustituir la respuesta  $R$ , se obtiene la fuerza que hay que aplicar como

$$r_g (P + W + W_p) - R_p P + R_p W = 0 \Rightarrow \boxed{P = \frac{r_g + R_p}{R_p - r_g} W + \frac{r_g}{R_p - r_g} W_p}$$

Usando los datos del problema, no queda más que sustituir para obtener el resultado buscado que, en notación de ingeniería es

$$\boxed{P = 826 \text{ N}}$$

5. El péndulo de la figura consiste en una barra delgada con una masa por unidad de longitud de 3 kg/m, y un disco delgado que tiene una masa por unidad de área de 12 kg/m<sup>2</sup>. Obtén el momento de inercia del péndulo con respecto al eje perpendicular a la página que pasa por el centro de masas del péndulo.



**Solución:** Para poder resolver este problema, lo primero que necesitamos es saber la posición del centro de masas  $\vec{R}_M$  del péndulo, para obtenerlo, calcularemos la posición del centro de masas de cada parte del péndulo por separado y luego, a partir de dicho resultado, obtendremos la posición del centro de masas del objeto compuesto.

Por comodidad, vamos a tomar como origen de coordenadas al centro del disco. Empezamos con la barra usando que  $w_b(y) = 3 \text{ kg/m}$ , por lo que su masa será

$$M_b = \int_{R_2}^{R_2+L} w_b dy = w_b \int_{R_2}^{R_2+L} dy = w_b [y]_{R_2}^{R_2+L} = w_b [(R_2 + L) - R_2] = w_b L. \quad (26)$$

Para obtener la posición del centro de masas de la barra, también necesitamos resolver la integral

$$\int_{R_2}^{R_2+L} y w_b dy = w_b \int_{R_2}^{R_2+L} y dy = w_b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{R_2}^{R_2+L} = w_b \left[ \frac{(R_2 + L)^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} \right]. \quad (27)$$

Por lo que el centro de masas de la barra se encuentra a una altura

$$Y_b = \frac{\int_L y \rho(L) dL}{\int_L \rho(L) dL} = \frac{w_b \left[ \frac{(R_2+L)^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} \right]}{w_b L} = \frac{(R_2 + L)^2 - R_2^2}{2L} \quad (28)$$

Para el caso del disco, está claro por simetría que, como tiene densidad constante, el centro de masas se encuentra en su punto de simetría, es decir, en la posición  $\vec{R}_{M,d} = (0,0)$ , pues es ese punto justo el origen de coordenadas elegido. De todas maneras, vamos a necesitar obtener la masa del disco para poder obtener el centro de masas del péndulo. Usando  $w_d(y) = 12 \text{ kg/m}^2$ :

$$M_d = \int_{R_1}^{R_2} r w_d dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi w_d \int_{R_1}^{R_2} r dr = 2\pi w_d \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} = 2\pi w_d \left( \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \right) \quad (29)$$

La altura del centro de masas del péndulo, compuesto por el disco y la barra, es:

$$Y_p = \frac{Y_b M_b + Y_d M_d}{M_b + M_d} = \frac{Y_b M_b + 0}{M_b + M_d} \quad (30)$$

Sustituyendo las variables por los datos dados del problema, se obtiene que

$$M_b = 4,50 \text{ kg}$$

$$Y_b = 1,05 \text{ m}$$

$$M_d = 3,01 \text{ kg}$$

$$Y_d = 0 \text{ m}$$

$$Y_p = 0,629 \text{ m}$$

Usando el Teorema de los Ejes Paralelos, podremos mover cada momento de inercia que calculemos al centro de masas que acabamos de obtener, por lo que necesitamos los momentos de inercia de la barra y del disco, que vamos a obtener en el sistema de referencia centrado en el centro del disco.

Empezamos con el momento de inercia de la barra

$$I_{b,O} = \int_{R_2}^{R_2+L} w_b y^2 dy = w_b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{R_2}^{R_2+L} = w_b \left[ \frac{(R_2 + L)^3 - R_2^3}{3} \right]$$

Seguimos con el momento de inercia del disco

$$I_{d,O} = \int_{R_1}^{R_2} r w_d r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi w_d \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi w_d \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} = 2\pi w_d \left[ \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right]$$

Como tenemos los 2 momentos de inercia calculados en el mismo punto O, los podemos sumar para obtener el momento de inercia total del péndulo

$$I_{p,O} = I_{b,O} + I_{d,O} = w_b \left[ \frac{(R_2 + L)^3 - R_2^3}{3} \right] + \pi w_d \left[ \frac{R_2^4 - R_1^4}{2} \right] \quad (31)$$

Sustituyendo las variables por los datos dados del problema, se obtiene que

$$I_{b,O} = 5,80 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{d,O} = 0,151 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{p,O} = 5,956 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Usando el Teorema de los Ejes Paralelos, obtenemos el momento de inercia del péndulo en su centro de gravedad G como

$$I_{p,O} = I_{p,G} + M_p d_{O,G}^2$$

Despejando, en nuestro caso se tiene

$$I_{p,G} = I_{p,O} - (M_b + M_d) Y_p^2$$

Sustituyendo las variables por los datos dados del problema, se obtiene el resultado final pedido

$$I_{p,G} = 2,99 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

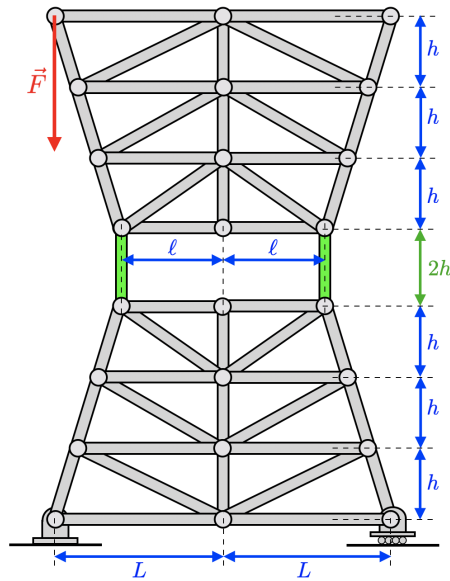
# Examen de recuperación de Física aplicada a estructuras e instalaciones, Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Nombre y DNI: \_\_\_\_\_

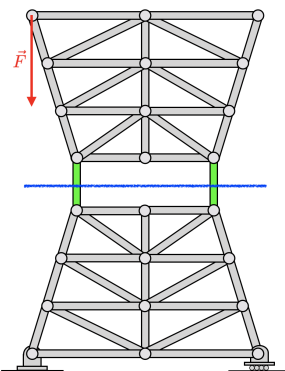
Instrucciones:

- El examen empieza a las 9:00 y termina a las 12:00
- Sólo se puede usar calculadora científica no programable.
- No está permitido el uso de apuntes
- No está permitido el uso de móviles, al que se pille usando un móvil se le expulsará del aula y tendrá un cero, **voy a ser muy estricto e intransigente con esta regla**. Si estás esperando una llamada importante, dímelo y yo tendré tu móvil en mi mesa.
- Las mochilas, estuches, abrigo, bolsos y los móviles (silenciados) han de estar en la pared
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

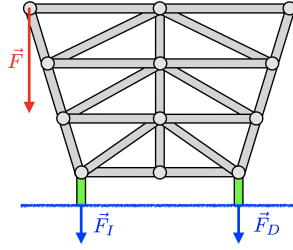
1. Usando **sólo el método de las secciones** (sin usar en ningún momento el método de los nodos), obtén las fuerzas a las que se hayan sometidos los elementos dibujados en verde de la torre de tensión de la figura, e indica si son elementos de tensión o de compresión



**Solución:** La manera más rápida de solucionar este problema es eligiendo como sección la mitad de arriba de la torre de tensión, con el corte virtual hecho sobre los elementos de los que necesitamos conocer las fuerzas, así que aplicamos el corte



Con lo que nos queda el Diagrama de Cuerpo Libre de la sección elegida (donde hemos expuesto las fuerzas internas de los elementos problema derecha e izquierda)



Como la torre se encuentra en equilibrio, la sección también se encuentra en equilibrio, por lo que ha de verificar las condiciones de equilibrio 2D, en concreto, la condición de equilibrio respecto a traslaciones implica que

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{F}_I + \vec{F}_D = \vec{0}$$

eje x:  $0 = 0$   
eje y:  $-F - F_I - F_D = 0$

Para aplicar la condición de equilibrio de la sección respecto a giros, necesitamos los vectores posición de los puntos de aplicación de cada una de las 3 fuerzas del sistema. En concreto, asumiendo que el origen de coordenadas se encuentra en el pasador de la torre (abajo a la izquierda en el diagrama de la figura), las posiciones de los nodos de las fuerzas  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_D$  y  $\vec{F}_I$  son, respectivamente:

- $\vec{r}_A = 8h\vec{j}$
- $\vec{r}_D = (L + \ell)\vec{i} + 5h\vec{j}$
- $\vec{r}_I = (L - \ell)\vec{i} + 5h\vec{j}$

Por lo que, aplicando la condición de equilibrio respecto a giros de la sección sobre el nodo izquierdo  $\vec{r}_I$  (recuerda que  $\vec{r}_{I,B} = \vec{r}_B - \vec{r}_I$ ) y la regla de la mano derecha, se tiene

$$\sum_{i=1}^N (\vec{M}_i)_I = \vec{r}_{I,A} \times \vec{F} + \vec{r}_{I,I} \times \vec{F}_I + \vec{r}_{I,D} \times \vec{F}_D = \vec{0}$$

eje z:  $(L - \ell)F - (2\ell)F_D + 0 = 0$

De esta última ecuación, se deduce que

$$F_D = \frac{L - \ell}{2\ell} F > 0$$

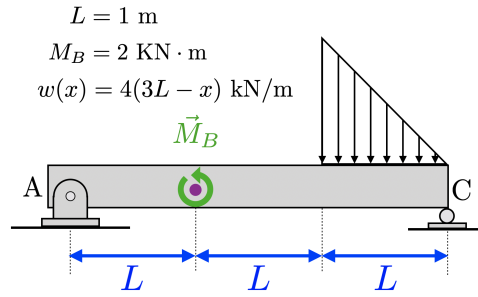
Pues  $F > 0$  y  $L > \ell$ . Usando esta solución en la condición de equilibrio respecto a traslaciones, se obtiene que

$$F_I = -\frac{L + \ell}{2\ell} F < 0$$

Por último, dado que hemos elegido que  $\vec{F}_D$  y  $\vec{F}_I$  salgan hacia fuera de la sección cortada, por la teoría dada en clase sabemos que un resultado positivo nos da que el elemento es de tensión y uno negativo que el elemento es de compresión, por lo que tenemos que

- El elemento de la derecha es de tensión.
- El elemento de la izquierda es de compresión.

2. Representar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante de la viga de la figura.



**Solución:** Para poder obtener bien estos diagramas, primero tenemos que obtener las reacciones de los soportes de la viga. A partir del modelo idealizado dado, vemos que tenemos un pasador en A, lo que provoca 2 fuerzas de reacción, una porque el pasador evita desplazamientos verticales ( $\vec{A}_y$ ), y otra porque evita desplazamientos horizontales ( $\vec{A}_x$ ), por otro lado, tenemos un cilindro en C, que básicamente sostiene a la viga en C impidiendo que se caiga al suelo, y esto sólo lo puede hacer con una fuerza de reacción en la dirección perpendicular a la superficie de contacto entre el cilindro y la viga ( $\vec{C}_y$ ), además, necesitamos la fuerza equivalente  $\vec{F}_R$  a la carga distribuida  $w(x)$ , por todo ello, obtenemos que el Diagrama de Cuerpo Libre de la viga es:

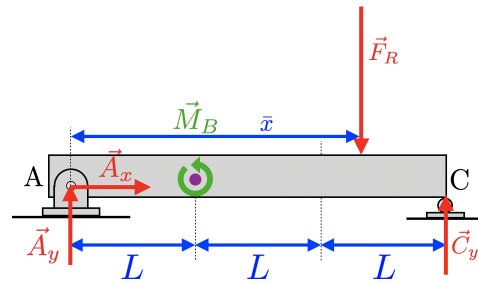


Figura 8. DCL de la viga en estudio, no se han eliminado los soportes por claridad de la exposición

Está claro que lo primero que necesitamos es conocer la magnitud de  $\vec{F}_R$  y su punto de aplicación  $\bar{x}$ , así que calculamos tanto  $\vec{F}_R$  como el momento resultante  $\vec{M}_R$

$$F_R = \int_0^{3L} w(x)dx = \int_{2L}^{3L} 4(3L - x)dx = 4 \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right)_{2L}^{3L} = 4 \left( 3L(3L - 2L) - \frac{(3L)^2 - (2L)^2}{2} \right) = 4 \left( 3L^2 - \frac{5L^2}{2} \right) = 2L^2$$

$$M_R = \int_0^{3L} xw(x)dx = \int_{2L}^{3L} 4(3Lx - x^2) dx = 4 \left( 3L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)_{2L}^{3L} = 4 \left( 3L \frac{(3L)^2 - (2L)^2}{2} - \frac{(3L)^3 - (2L)^3}{3} \right) = \frac{14}{3}L^3$$

Por lo que la posición de aplicación de la fuerza equivalente a la carga  $w(x)$  es

$$\bar{x} = \frac{M_R}{F_R} = \frac{\frac{14}{3}L^3}{2L^2} = \frac{7L}{3}$$

Si la viga se mantiene en equilibrio, ha de verificar las condiciones de equilibrio respecto a desplazamientos:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{F}_R + \vec{C}_y = \vec{0}$$

eje x:  $A_x = 0$   
 eje y:  $A_y - F_R + C_y = 0$

De la ecuación escalar en el eje  $y$ , se obtiene que

$$A_y + C_y = F_R$$

Como la viga es un objeto 2D extenso, también verifica la condición de equilibrio respecto de giros. Teniendo en cuenta que los momentos de par externos son vectores libres, vamos a aplicar dicha condición sobre el punto A, es decir, se verifica en equilibrio que:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{M}_i)_A = \vec{r}_{AA} \times (\vec{A}_x + \vec{A}_y) + \vec{M}_R + \vec{r}_{AC} \times \vec{C}_y + \vec{M}_B = \vec{0}$$

eje  $z$ :  $0 - M_R + 3LC_y + M_B = 0$

Donde hemos usado que  $\vec{M}_R = \vec{r}_{A\bar{x}} \times \vec{F}_R$ , la regla de la mano derecha y hemos obtenido que  $\vec{M}_B = +M_B\vec{k}$  al ver que el sentido de rotación inducido por  $\vec{M}_B$  es en el sentido contrario al de las agujas del reloj. De esta ecuación escalar se obtiene que

$$C_y = \frac{M_B - M_R}{3L} = \frac{8}{9} \text{ KN} = 0,889 \text{ KN}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación del eje  $y$ , se tiene que

$$A_y = F_R - C_y = \frac{10}{9} \text{ KN} = 1,11 \text{ KN}$$

Ahora, para obtener el Diagrama de Fuerza Cortante, tenemos que tener en cuenta que todas las reacciones que actúan sobre la viga son fuerzas puntuales, mientras que la carga a la que se haya sometida sí es una distribución extensa. Por lo que, por la teoría dada en clase, sabemos que si tenemos una carga  $w(x)$ , la fuerza cortante se calcula como

$$\Delta V = V(x_2) - V(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx,$$

mientras que cuando tenemos una fuerza  $\vec{F}_0 = F_0\vec{j}$  en el punto  $x = x_0$  tenemos un salto en la función de fuerza cortante dado por

$$\Delta V(x_0) = F_0$$

Por ello, tenemos que:

- $x = 0$ , tenemos un salto desde  $V(0) = 0$  hasta  $\Delta V(0) = A_y$ , por lo que  $V(0) = A_y = \frac{10}{9}$  entre  $x = 0$  y  $x = 2L$ .
- Entre  $x = 2L$  y  $x = 3L$ , tenemos la carga  $w(x) = -4(3L - x)$  (el signo negativo porque la carga está orientada hacia abajo), por lo que

$$V(x) = V(2L) + \int_{2L}^x w(x)dx = \frac{10}{9} - 4 \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right)_{2L}^x = \frac{10}{9} - 4 \left( 3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + 16L^2 = \frac{154}{9} - 12Lx + 2x^2,$$

por lo que se tiene que  $V(3L) = \frac{-8}{9}$ .

- $x = 3L$ , tenemos un salto desde  $V(3L) = \frac{-8}{9}$  de  $\Delta V(3L) = C_y = \frac{8}{9}$ , por lo que  $V(3L) = \frac{-8}{9} + \frac{8}{9} = 0$  en el punto final de la viga  $x = 3L$ .

Por todo ello, nos queda el siguiente Diagrama de Fuerza Cortante:

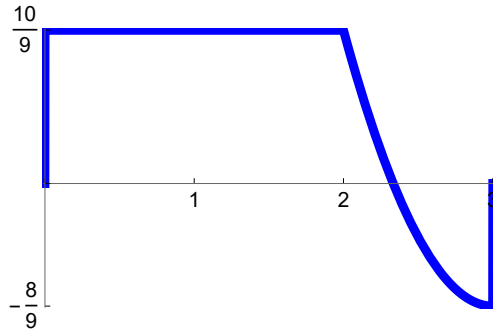


Figura 9. Diagrama de Fuerza Cortante

Para el Diagrama de Momento Flexionante, sabemos que tenemos 2 contribuciones, por un lado, se verifica que

$$\Delta M = M(x_2) - M(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} V(x) dx,$$

pero además hay que tener en cuenta que, cuando tenemos un momento de par  $\vec{M}_0 = M_0 \vec{j}$  aplicado en el punto  $x = x_0$  tenemos un salto en la función de momento flexionante dado por

$$\Delta M(x_0) = M_0$$

Por ello, tenemos

- Entre  $x = 0$  y  $x = L$ , tenemos  $V(x) = \frac{10}{9}$ , por lo que  $M(x) = \int_0^x \frac{10}{9} dx = \frac{10}{9}x$ , por lo que se tiene que  $M(0) = 0$  y  $M(1) = \frac{10}{9}$ .
- En  $x = L$ , tenemos un salto desde  $M(L) = \frac{10}{9}$  de  $\Delta M(L) = M_D = -2$  (al ser la rotación en el sentido **contrario** de las agujas del reloj), por lo que  $M(L) = \frac{10}{9} - 2 = \frac{-8}{9}$ .
- Entre  $x = L$  y  $x = 2L$ , tenemos  $V(x) = \frac{10}{9}$ , por lo que  $M(x) = M(1) + \int_1^x \frac{10}{9} dx = -\frac{8}{9} + \frac{10}{9}(x - 1)$ , por lo que se tiene que  $M(2) = -\frac{8}{9} + \frac{10}{9} = \frac{2}{9}$ .
- Entre  $x = 2L$  y  $x = 3L$ , tenemos  $V(x) = \frac{154}{9} - 12Lx + 2x^2$ , por lo que

$$\begin{aligned} M(x) &= M(2) + \int_2^x \left[ \frac{154}{9} - 12Lx + 2x^2 \right] dx \\ &= \frac{2}{9} + \left[ \frac{154}{9}x - 12L \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^3}{3} \right]_{2L}^x \\ &= \frac{2}{9} + \left[ \frac{154}{9}x - 12L \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^3}{3} \right] - \left[ \frac{308}{9}L - 24L^3 + \frac{16L^3}{3} \right] \\ &= -\frac{46}{3} + \frac{154}{9}x - 6x^2 + \frac{2}{3}x^3, \end{aligned}$$

por lo que se tiene que  $M(3) = 0$ .

Por todo ello, nos queda el siguiente Diagrama de Momento Flexionante:



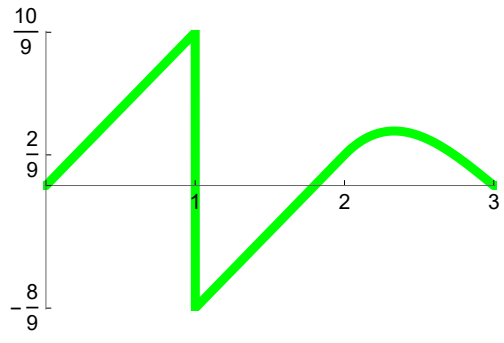
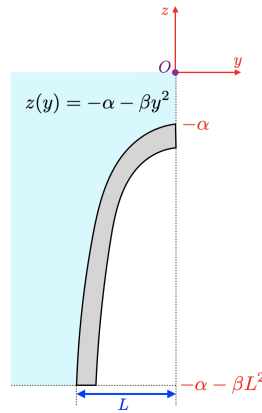


Figura 10. Diagrama de Momento Flexionante

3. Obtener la magnitud de la fuerza total que ejerce el agua  $\rho = 10^3 \text{ Kg/m}^3$  sobre la siguiente ventana de acuario usando que  $\alpha = 1 \text{ m}$ ,  $\beta = 4 \text{ m}^{-1}$  y  $L = 1 \text{ m}$ .



**Solución:** Como no nos dan la profundidad de la ventana, le damos un valor  $X$  en función del cual dejaremos los resultados. Este problema se resuelve por el método de las cargas equivalentes, por lo que sabemos que la fuerza total sobre nuestra placa es igual a la suma de 3 contribuciones:

- El peso del agua sostenida sobre la placa curva  $\vec{W}$
- La presión del agua situada por encima de la placa y del agua que sostiene  $\vec{F}_\alpha$
- La presión del agua que empuja lateralmente a la placa y al agua que sostiene  $\vec{F}_\beta$

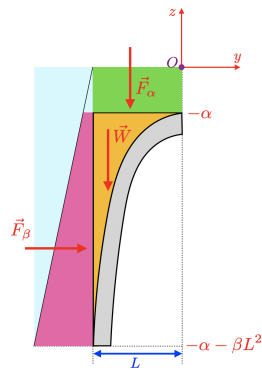


Figura 11. Diagrama en el que se muestran las 3 cargas equivalentes a la fuerza total sobre la carga del acuario.

Pasemos a calcular dichas fuerzas. Empezamos con  $\vec{F}_\alpha = F_\alpha(-\vec{k})$ , que se calcula como la presión ( $p(z) = \rho g z$ ) ejercida sobre el area de la superficie situada a la profundidad  $\alpha$  sobre la placa

$$F_\alpha = \int_{A_\alpha} p(z) dA = \int_0^X dx \int_{-L}^0 dy p(\alpha) = \rho g \alpha X L = 9810 X \text{ N}$$

La presión lateral del agua, dada por  $\vec{F}_\beta = F_\beta \vec{j}$  se calcula como

$$F_\beta = \int_{A_\beta} p(z) dA = \int_0^X dx \int_{z(-L)}^{z(0)} dz p(z) = X \int_{-\alpha - \beta L^2}^{-\alpha} dz \rho g z = \rho g X \left. \frac{z^2}{2} \right|_{-\alpha - \beta L^2}^{-\alpha} = \rho g X \frac{(\alpha - \beta L^2)^2 - \alpha^2}{2} = 117720 X \text{ N}$$

Por último, el peso del agua sostenida por la placa  $\vec{W} = W(-\vec{k})$  se calcula como

$$\begin{aligned} W &= \int_V \rho g dV = \rho g \int_0^X dx \int_{-L}^0 dy \int_{z(y)}^{z(0)} dz = \rho g X \int_{-L}^0 dy [z(y) - z(0)] = \rho g X \int_{-L}^0 dy [-\beta y^2] = -\beta \rho g X \int_{-L}^0 dy y^2 \\ &= -\beta \rho g X \frac{y^3}{3} \Big|_{-L}^0 = \beta \rho g X \frac{L^3}{3} = 13080X \text{ N} \end{aligned}$$

Y la fuerza total a la que se encuentra sometida la placa no es más que la suma vectorial de estas 3 fuerzas, es decir

$$\vec{F}_T = \vec{F}_\alpha + \vec{F}_\beta + \vec{W} = F_\beta \vec{j} - (F_\alpha + W) \vec{k} = (117720X \vec{j} - 22890X \vec{k}) \text{ N}$$

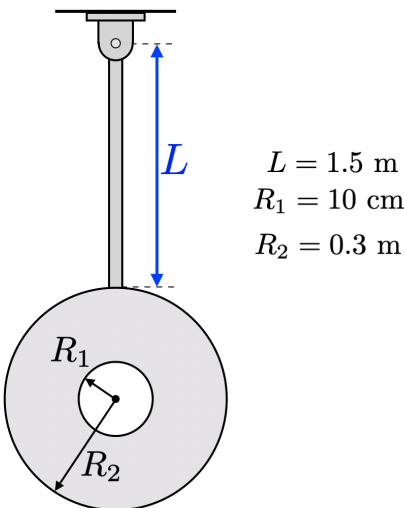
Por lo que la magnitud de esta fuerza total (que es lo que nos piden) es su módulo

$$F_T = \sqrt{F_\beta^2 + (F_\alpha + W)^2} = 119925X \text{ N}$$

En notación de ingeniería, el resultado final es

$$\boxed{F_T = 120X \text{ KN}}$$

4. El péndulo de la figura consiste en una barra delgada con una masa por unidad de longitud de 3 kg/m, y un disco delgado que tiene una masa por unidad de área de 12 kg/m<sup>2</sup>. Obtén el momento de inercia del péndulo con respecto al eje perpendicular a la página que pasa por el centro de masas del péndulo.



**Solución:** Para poder resolver este problema, lo primero que necesitamos es saber la posición del centro de masas  $\vec{R}_M$  del péndulo, para obtenerlo, calcularemos la posición del centro de masas de cada parte del péndulo por separado y luego, a partir de dicho resultado, obtendremos la posición del centro de masas del objeto compuesto.

Por comodidad, vamos a tomar como origen de coordenadas al centro del disco. Empezamos con la barra usando que  $w_b(y) = 3 \text{ kg/m}$ , por lo que su masa será

$$M_b = \int_{R_2}^{R_2+L} w_b dy = w_b \int_{R_2}^{R_2+L} dy = w_b [y]_{R_2}^{R_2+L} = w_b [(R_2 + L) - R_2] = w_b L. \quad (32)$$

Para obtener la posición del centro de masas de la barra, también necesitamos resolver la integral

$$\int_{R_2}^{R_2+L} y w_b dy = w_b \int_{R_2}^{R_2+L} y dy = w_b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{R_2}^{R_2+L} = w_b \left[ \frac{(R_2 + L)^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} \right]. \quad (33)$$

Por lo que el centro de masas de la barra se encuentra a una altura

$$Y_b = \frac{\int_L y \rho(L) dL}{\int_L \rho(L) dL} = \frac{w_b \left[ \frac{(R_2+L)^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} \right]}{w_b L} = \frac{(R_2 + L)^2 - R_2^2}{2L} \quad (34)$$

Para el caso del disco, está claro por simetría que, como tiene densidad constante, el centro de masas se encuentra en su punto de simetría, es decir, en la posición  $\vec{R}_{M,d} = (0,0)$ , pues es ese punto justo el origen de coordenadas elegido. De todas maneras, vamos a necesitar obtener la masa del disco para poder obtener el centro de masas del péndulo. Usando  $w_d(y) = 12 \text{ kg/m}^2$ :

$$M_d = \int_{R_1}^{R_2} r w_d dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi w_d \int_{R_1}^{R_2} r dr = 2\pi w_d \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} = 2\pi w_d \left( \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \right) \quad (35)$$

La altura del centro de masas del péndulo, compuesto por el disco y la barra, es:

$$Y_p = \frac{Y_b M_b + Y_d M_d}{M_b + M_d} = \frac{Y_b M_b + 0}{M_b + M_d} \quad (36)$$

Sustituyendo las variables por los datos dados del problema, se obtiene que

$$M_b = 4,50 \text{ kg}$$

$$Y_b = 1,05 \text{ m}$$

$$M_d = 3,01 \text{ kg}$$

$$Y_d = 0 \text{ m}$$

$$Y_p = 0,629 \text{ m}$$

Usando el Teorema de los Ejes Paralelos, podremos mover cada momento de inercia que calculemos al centro de masas que acabamos de obtener, por lo que necesitamos los momentos de inercia de la barra y del disco, que vamos a obtener en el sistema de referencia centrado en el centro del disco.

Empezamos con el momento de inercia de la barra

$$I_{b,O} = \int_{R_2}^{R_2+L} w_b y^2 dy = w_b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{R_2}^{R_2+L} = w_b \left[ \frac{(R_2 + L)^3 - R_2^3}{3} \right]$$

Seguimos con el momento de inercia del disco

$$I_{d,O} = \int_{R_1}^{R_2} r w_d r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi w_d \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi w_d \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} = 2\pi w_d \left[ \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right]$$

Como tenemos los 2 momentos de inercia calculados en el mismo punto O, los podemos sumar para obtener el momento de inercia total del péndulo

$$I_{p,O} = I_{b,O} + I_{d,O} = w_b \left[ \frac{(R_2 + L)^3 - R_2^3}{3} \right] + \pi w_d \left[ \frac{R_2^4 - R_1^4}{2} \right] \quad (37)$$

Sustituyendo las variables por los datos dados del problema, se obtiene que

$$I_{b,O} = 5,80 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{d,O} = 0,151 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{p,O} = 5,956 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Usando el Teorema de los Ejes Paralelos, obtenemos el momento de inercia del péndulo en su centro de gravedad G como

$$I_{p,O} = I_{p,G} + M_p d_{O,G}^2$$

Despejando, en nuestro caso se tiene

$$I_{p,G} = I_{p,O} - (M_b + M_d) Y_p^2$$

Sustituyendo las variables por los datos dados del problema, se obtiene el resultado final pedido

$$I_{p,G} = 2,99 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

# Examen parcial de Física aplicada a estructuras e instalaciones, Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Nombre y DNI: \_\_\_\_\_

Instrucciones:

- El exámen termina a las 15:00
- Sólo se puede usar calculadora científica no programable.
- No está permitido el uso de apuntes
- No está permitido el uso de móviles, al que se pille usando un móvil se le expulsará del aula y tendrá un cero.
- $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1. (2 puntos) Un año luz es la distancia que recorre la luz durante un año Juliano (de 365.25 días de 24 horas cada uno). Sabiendo que la velocidad de la luz es  $c = 299792458 \text{ m/s}$ , ¿cuántos km son un año luz?, escribe el resultado en notación de ingeniería. **Solución:** Teniendo en cuenta que 1 Año Luz (1 A.L. a partir de ahora) es la longitud que recorre la luz a su velocidad ( $c$ ) durante un año ( $T$ ), tenemos que

$$1 \text{ A.L.} = \text{Tiempo} * \text{Velocidad de la luz} = 1 \text{ Año} * c$$

Y este es un problema de transformación de unidades de longitud y tiempo. Veamos primero cuántos segundos es un año Juliano:

$$1 \text{ Año} = 1 \text{ Año} \frac{365,25 \text{ día}}{\text{Año}} \left( \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \right) \left( \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \right) \left( \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) = 31557600 \text{ s} = 3,15576 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Por otro lado, la velocidad de la luz, en km/s, es

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left( \frac{1 \text{ km}}{10^3 \text{ m}} \right) = 299792,458 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

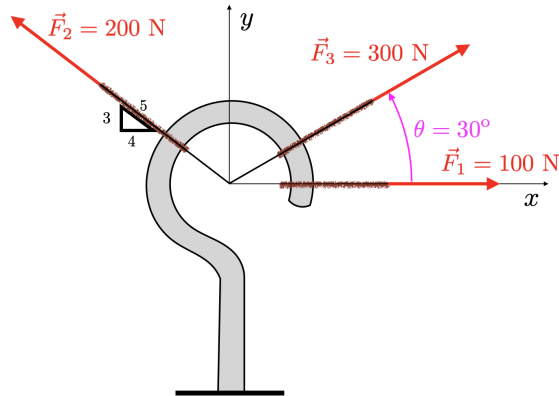
Por tanto:

$$1 \text{ A.L.} = 1 \text{ Año} * c = 3,15576 \cdot 10^7 \text{ s} * 299792,458 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 9460730472,58 \text{ km} = 9,460730472 \cdot 10^9 \text{ km}$$

Por lo que, en notación de ingeniería, el resultados que nos piden es:

$$1 \text{ A.L.} = 9,46 \cdot 10^9 \text{ km}$$

2. (2 puntos) Obtén la magnitud y vector unitario de dirección de la fuerza total que actúa sobre el clavo de gancho.



**Solución:** En este problema tenemos 3 fuerzas tirando de un gancho en distintas direcciones dentro de un plano, y nos piden la magnitud y dirección de la fuerza total sobre el gancho.

A partir de la gráfica del gancho, en el sistema de coordenadas  $x - y$ , tenemos que las 3 fuerzas son:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cos(30)\vec{i} + F_1 \sin(30)\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = -F_2 \frac{3}{5}\vec{i} + F_2 \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = F_3\vec{i}$$

La suma de fuerzas que actúa sobre el gancho es

$$\vec{F}_T = \sum_{n=1}^3 \vec{F}_n = 266,603 \text{ N}\vec{i} + 210 \text{ N}\vec{j}$$

Por lo que su magnitud (su valor absoluto) es

$$F_T = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 339,377 \text{ N}$$

Y su dirección viene dada por el vector director, que es igual a

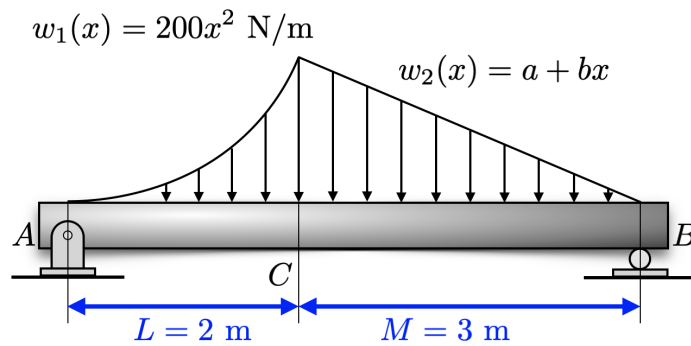
$$\vec{u}_{F_T} = \frac{\vec{F}_T}{F_T} = 0,785564\vec{i} + 0,61878\vec{j}$$

Por lo que, en notación de ingeniería, los resultados que nos piden son:

$$F_T = 339 \text{ N}$$

$$\vec{u}_{F_T} = 0,786\vec{i} + 0,619\vec{j}$$

3. (2 puntos) Reemplaza la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente, y especifica su ubicación, medida desde el punto A.



**Solución:** La fuerza equivalente se calcula integrando la carga distribuida a lo largo de toda la viga. En este caso, como toda la carga tiene la misma dirección, podemos obtener directamente la magnitud de la misma

$$F_R = \int_0^{L+M} w(x) dx$$

En este caso, la distribución de carga entre  $x = 0$  y  $x = L$  verifica que  $w(x) = w_1(x) = 200x^2$ , mientras que entre  $x = L$  y  $x = M$  verifica  $w_2(x) = a + bx$ . Por suerte, como sabemos por la gráfica adjunta que  $w_1(L) = w_2(L) = 200L^2 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 800 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ , y que  $w_2(L+M) = 0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ , podemos obtener los valores de  $a$  y de  $b$  que definen a  $w_2(x)$ .

$$\begin{aligned} w_2(L) &= 800 = a + bL \\ w_2(L+M) &= 0 = a + b(L+M) \end{aligned}$$

De la primera condición, obtenemos que  $a = 800 - bL$ , dato que, incrustado en la segunda, nos da

$$0 = a + b(L+M) = 800 - bL + bL + bM = 800 + bM$$

por lo que se obtiene que  $b = \frac{-800}{M} = -267$  y, por tanto, que  $a = 800 + \frac{800}{M}L = 800 \frac{L+M}{M} = 1330$ .

Ahora si procedemos a resolver la integral

$$\begin{aligned} F_R &= \int_0^L w_1(x) dx + \int_L^{L+M} w_2(x) dx \\ &= \int_0^L 200x^2 dx + \int_L^{L+M} a + bx dx \\ &= 200 \int_0^L x^2 dx + a \int_L^{L+M} dx + b \int_L^{L+M} x dx \\ &= 200 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^L + a x \Big|_L^{L+M} + b \left. \frac{x^2}{2} \right|_L^{L+M} \\ &= 200 \left[ \frac{L^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] + a [(L+M) - L] + b \left[ \frac{(L+M)^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right] \\ &= 200 \frac{L^3}{3} + aM + b \frac{M^2 + 2LM}{2} \end{aligned}$$



Sustituyendo  $a$  y  $b$  por su valor, se tiene que

$$\begin{aligned}
 F_R &= 200 \frac{L^3}{3} + 800 \frac{L+M}{M} M + \frac{-800}{M} \frac{M^2 + 2LM}{2} \\
 &= 200 \frac{L^3}{3} + 800(L+M) - 800 \left( L + \frac{M}{2} \right) \\
 &= 200 \frac{L^3}{3} + 400M \\
 &= \frac{5200}{3} \text{ N} = 1733,33 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Así ya tenemos la magnitud de la fuerza, para saber la posición de la misma sobre la viga, tenemos que calcular la integral de momentos generados por cada carga para obtener el momento resultante

$$\begin{aligned}
 M_R &= \int_0^{L+M} xw(x)dx \\
 &= \int_0^L xw_1(x)dx + \int_L^{L+M} xw_2(x)dx \\
 &= \int_0^L 200x^3 dx + \int_L^{L+M} ax + bx^2 dx \\
 &= 200 \int_0^L x^3 dx + a \int_L^{L+M} x dx + b \int_L^{L+M} x^2 dx \\
 &= 200 \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^L + a \left. \frac{x^2}{2} \right|_L^{L+M} + b \left. \frac{x^3}{3} \right|_L^{L+M} \\
 &= 200 \left[ \frac{L^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right] + a \left[ \frac{(L+M)^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right] + b \left[ \frac{(L+M)^3}{3} - \frac{L^3}{3} \right] \\
 &= 200 \frac{L^4}{4} + a \frac{M^2 + 2LM}{2} + b \left[ \frac{3L^2M + 3LM^2 + M^3}{3} \right] \\
 &= 200 \frac{L^4}{4} + 800 \frac{L+M}{M} \frac{M^2 + 2LM}{2} + \frac{-800}{M} \left[ \frac{3L^2M + 3LM^2 + M^3}{3} \right] \\
 &= 200 \frac{L^4}{4} + 800(L+M) \left( L + \frac{M}{2} \right) - 800 \left[ \frac{3L^2 + 3LM + M^2}{3} \right] \\
 &= 3600 \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Con este último dato, y recordando que

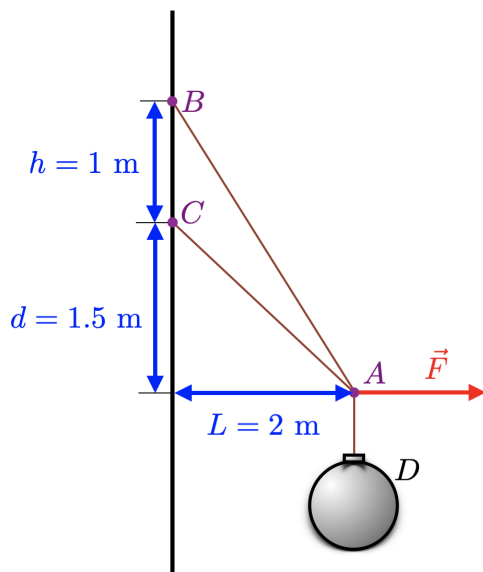
$$M_R = \bar{x}F_R \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_R}{F_R} = \frac{3600 \text{ N} \cdot \text{m}}{\frac{5200}{3} \text{ N}} = \frac{27}{13} \text{ m} = 2,07692 \text{ m}$$

Por lo que, en notación de ingeniería, los datos que nos piden son

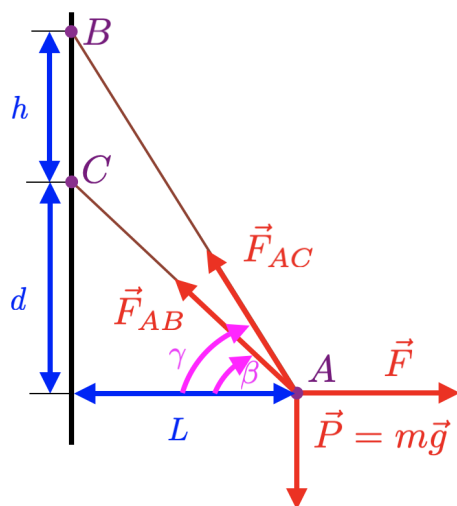
$$F_R = 1,73 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\bar{x} = 2,08 \text{ m}$$

4. (2 puntos) Obtén las fuerzas que ejercen los cables  $AB$  y  $AC$  para mantener en equilibrio la bola de la figura de masa  $m = 20 \text{ kg}$ , si  $F = 300 \text{ N}$ .



**Solución:** A partir del diagrama simplificado adjunto, podemos hacer un Diagrama de Cuerpo Libre del punto  $A$ , donde tenemos el efecto de la fuerza  $\vec{F}$  horizontal, el peso  $\vec{P} = m\vec{g}$ , que tira hacia abajo (verticalmente), y las fuerzas de soporte de los cables  $AB$  y  $AC$ , que podemos suponer que tiran del punto  $A$  en la dirección de cada cable respectivo.



Los ángulos  $\beta$  y  $\gamma$  se pueden deducir a partir del diagrama simplificado usando trigonometría:

$$\sin(\gamma) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + L^2}} = 0,6 \quad \cos(\gamma) = \frac{L}{\sqrt{d^2 + L^2}} = 0,8 \quad \tan(\gamma) = \frac{d}{L} = 0,75$$

$$\sin(\beta) = \frac{d + h}{\sqrt{(d + h)^2 + L^2}} = 0,780 \quad \cos(\beta) = \frac{L}{\sqrt{(d + h)^2 + L^2}} = 0,625 \quad \tan(\beta) = \frac{d + h}{L} = 1,25$$

Como el sistema se encuentra en equilibrio, el punto  $A$  también se encuentra en equilibrio, por lo que la condición de

equilibrio del punto  $A$  es, descomponiendo la condición en componentes horizontal y vertical, tenemos:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$$

eje x):  $F + 0 - F_{AB} \cos(\beta) - F_{AC} \cos(\gamma) = 0$   
eje y):  $0 - P + F_{AB} \sin(\beta) + F_{AC} \sin(\gamma) = 0$

Este sistema se puede resolver, dando como resultado

$$F_{AB} = \frac{P \cos(\gamma) - F \sin(\gamma)}{\sin(\beta) \cos(\gamma) - \cos(\beta) \sin(\gamma)}$$

$$F_{AC} = \frac{F \sin(\beta) - P \cos(\beta)}{\sin(\beta) \cos(\gamma) - \cos(\beta) \sin(\gamma)}$$

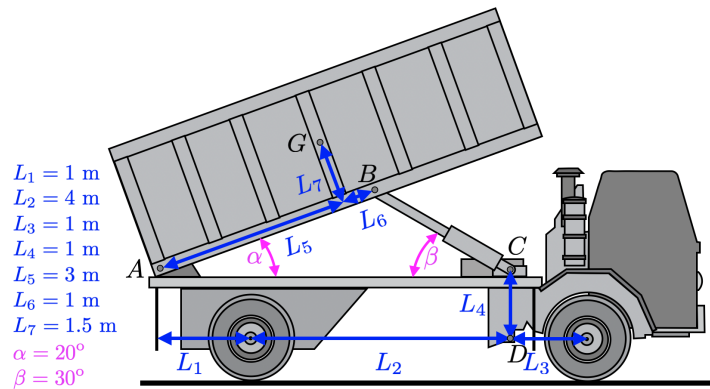
Sustituyendo en estos resultados, se obtiene, en notación de ingeniería, que

$$\boxed{F_{AB} = -92,2 \text{ N}}$$

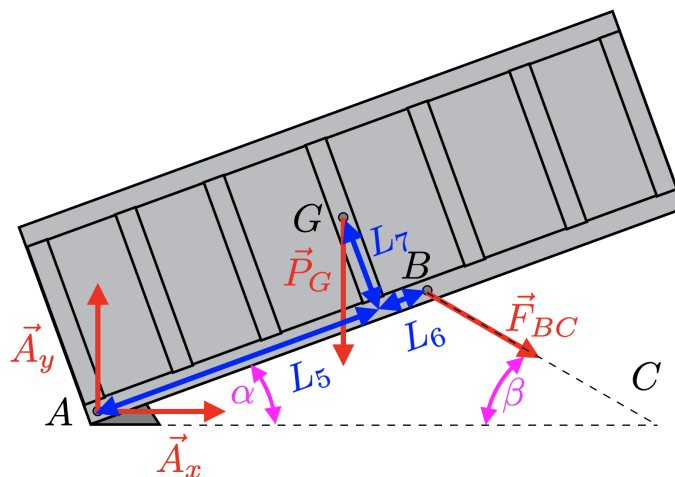
$$\boxed{F_{AC} = 447 \text{ N}}$$

5. (2 puntos) Traza el Diagrama de Cuerpo Libre de:

- La caja de volteo del camión, la cual tiene un peso de 3000 kg y su centro de gravedad en el punto  $G$ . La caja está soportada por un pasador en  $A$  y un cilindro hidráulico  $BC$  (eslabón corto).
- Del cilindro hidráulico  $BC$  (eslabón corto).
- Del camión sin caja ni cilindro hidráulico  $BC$ , el cual tiene un peso de 2500 kg y su centro de gravedad en el punto  $D$ .

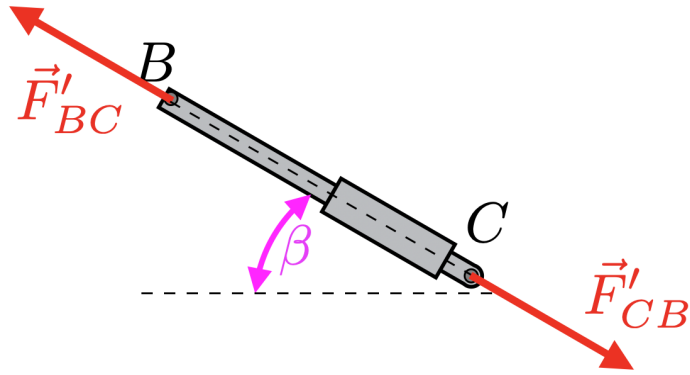


**Solución:** Para hacer el DCL de la caja, tenemos en cuenta que en  $A$  tenemos un pasador, por lo que esta restricción evita desplazamientos horizontales y verticales, pero NO evita giros, por lo que nos genera 2 reacciones, las fuerzas  $\vec{A}_x$ , que evita desplazamientos horizontales, y la fuerza  $\vec{A}_y$ , que evita desplazamientos verticales. Nos dan también el centro de gravedad de la caja en el punto  $G$ , por lo que ahí situamos el peso  $\vec{P}_G = m\vec{g}$  de la caja, vertical hacia abajo. Por último, tenemos el cilindro hidráulico  $BC$ , que actúa como un eslabón sin peso, cuya reacción  $\vec{F}_{BC}$  es una fuerza que actúa a lo largo del eje del mismo eslabón. Por todo ello, nos queda el siguiente Diagrama de Cuerpo Libre:

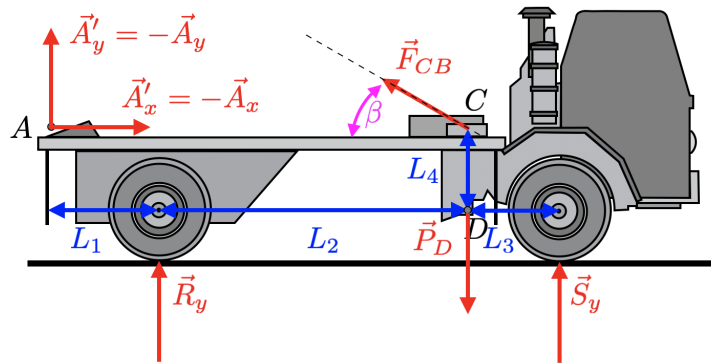


Para el DCL del cilindro hidráulico  $BC$ , tenemos en cuenta que este cilindro hidráulico es un elemento de 2 fuerzas, actuando una sobre cada extremo, por lo que estas fuerzas tienen que ser **colineales** a lo largo del eje que une a los puntos de aplicación de las fuerzas  $B$  y  $C$ , y **antiparalelas** para que se cumplan las condiciones de equilibrio sobre el cilindro.

Además, dichas fuerzas, por el tercer principio de la dinámica de Newton, tienen que ser opuestas a las fuerzas que ejercen sobre la caja y sobre el camión, por lo que se ha de verificar que  $\vec{F}'_{BC} = -\vec{F}_{BC}$  y que  $\vec{F}'_{CB} = -\vec{F}_{CB}$ , por lo que el Diagrama de Cuerpo Libre del Cilindro Hidráulico  $BC$  es:



Por último, nos queda el camión sin caja. Como nos dan su centro de gravedad  $D$ , sobre él situamos el peso  $\vec{P}_D = m\vec{g}$  vertical hacia abajo. Tenemos también que el camión está sostenido sobre sus ruedas en un suelo plano, por lo que dicho suelo genera una resistencia sobre cada rueda perpendicular hacia arriba,  $\vec{R}_y$  y  $\vec{S}_y$ , pues nada en el problema nos dice a priori que dichas fuerzas sean iguales. Además, tenemos el pasador en  $A$ , que nos genera 2 reacciones  $\vec{A}'_x$  y  $\vec{A}'_y$  iguales, pero de dirección opuesta a las que generaba sobre la caja, por lo que se tiene que  $\vec{A}'_x = -\vec{A}_x$  y  $\vec{A}'_y = -\vec{A}_y$ . Con todo esto, nos queda el último Diagrama de Cuerpo Libre pedido:



# Examen final de Física aplicada a estructuras e instalaciones, Grado en Fundamentos de la Arquitectura

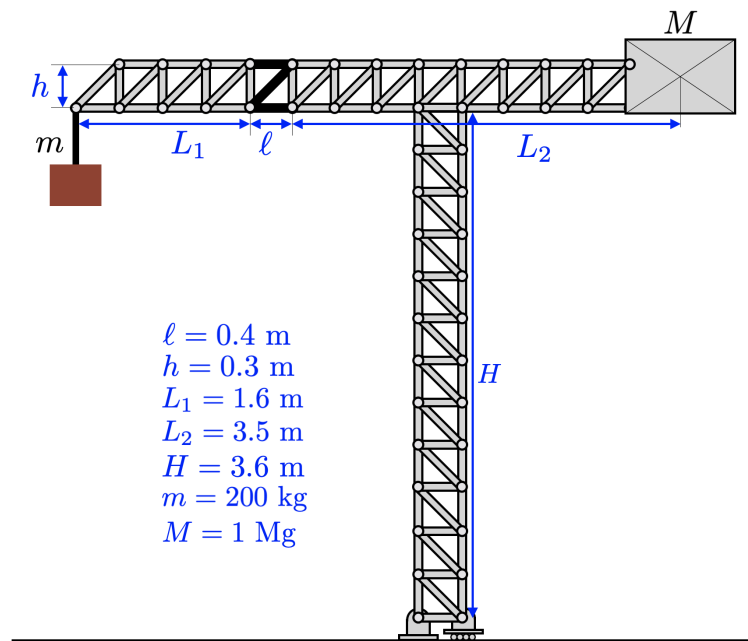
Examen del 12 de Enero del 2022 de Física Aplicada de Fundamentos de Arquitectura

Nombre y DNI: \_\_\_\_\_

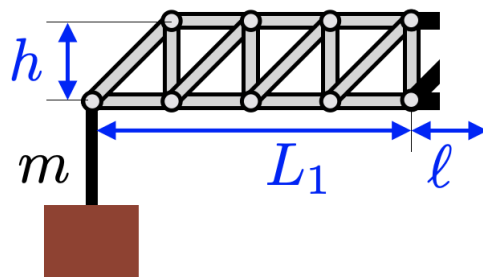
Instrucciones:

- El examen empieza a las 9:00 y termina a las 12:00
- Sólo se puede usar calculadora científica no programable.
- No está permitido el uso de apuntes
- No está permitido el uso de móviles, al que se pille usando un móvil se le expulsará del aula y tendrá un cero, **voy a ser muy estricto e intransigente con esta regla**. Si estás esperando una llamada importante, dímelo y yo tendré tu móvil en mi mesa.
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

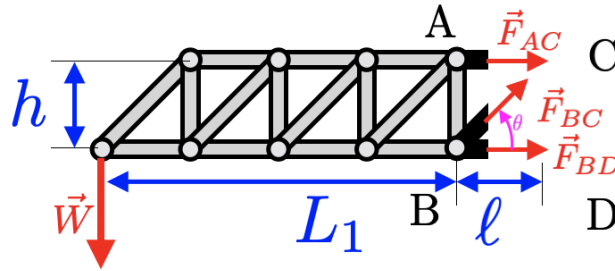
1. Obtén las fuerzas a las que se hayan sometidos los elementos dibujados en negro de la grúa de la figura, e indica si son elementos de tensión o de compresión.



**Solución:** Podríamos hacer este problema por el método de los nodos, empezando en la carga  $m$  que soporta la grúa hasta llegar a los elementos que nos interesan, pero es mucho más cómodo utilizar el método de las secciones, pues si la grúa está en equilibrio, una parte de la misma también lo está, por lo que nos quedamos con la siguiente sección a estudiar:



Cuyo Diagrama de Cuerpo Libre es:



Donde hemos sustituido al resto de la grúa por las fuerzas internas de los elementos que nos interesa obtener. Además, usamos los datos del problema para obtener las funciones trigonométricas que de seguro vamos a necesitar:

$$\sin(\theta) = \frac{h}{\sqrt{\ell^2 + h^2}} = \frac{3}{5}, \quad \cos(\theta) = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + h^2}} = \frac{4}{5}, \quad \tan(\theta) = \frac{h}{\ell} = \frac{3}{4}.$$

Ahora podemos aplicar las condiciones de equilibrio respecto a desplazamientos y respecto a giros de esta sección de la grúa

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= \vec{W} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{BD} = \vec{0} \\ \text{eje x)} \quad &F_{AC} + F_{BC} \cos(\theta) + F_{BD} = 0 \\ \text{eje y)} \quad &-W + F_{BC} \sin(\theta) = 0 \end{aligned}$$

La condición de equilibrio respecto a giros se simplifica mucho si la estudiamos en torno al nodo  $B$

$$\begin{aligned} \sum_i (\vec{M}_i)_B &= \vec{r}_{BP} \times \vec{W} + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_{AC} + \vec{r}_{BB} \times [\vec{F}_{BC} + \vec{F}_{BD}] = \vec{0} \\ \text{eje z)} \quad &+ L_1 W \sin(90) - h F_{AC} \sin(90) + 0 = 0 \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones en los ejes  $y$  y  $z$ , obtenemos directamente

$$F_{BC} = \frac{W}{\sin(\theta)}$$

$$F_{AC} = \frac{L_1}{h} W$$

Y, sustituyendo en la ecuación del eje  $x$ , obtenemos

$$F_{BD} = -W \left[ \frac{L_1}{h} + \frac{1}{\tan(\theta)} \right] = -W \frac{L_1 + \ell}{h}$$

Sustituyendo por lo datos del problema, se tiene

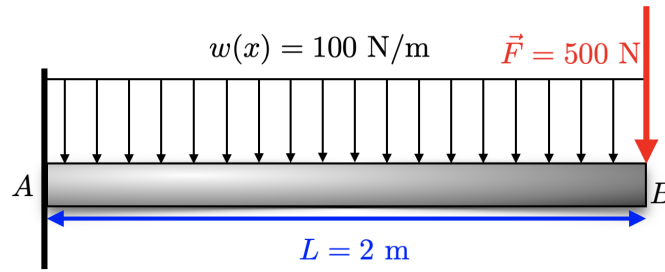
$$F_{BC} = 10,5 \text{ kN}$$

$$F_{AC} = 3,27 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$F_{BD} = -13,1 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Por el criterio de signos usado, los elementos  $AC$  y  $BC$  son elementos en tensión, y el elemento  $BD$  es un elemento en compresión.

2. Representar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante de la viga en voladizo de la figura.



**Solución:** Para poder representar estos diagramas, necesitamos conocer todas las reacciones que actúan sobre la viga. Para ello será útil obtener la fuerza equivalente a la distribución de carga  $w(x)$  dada:

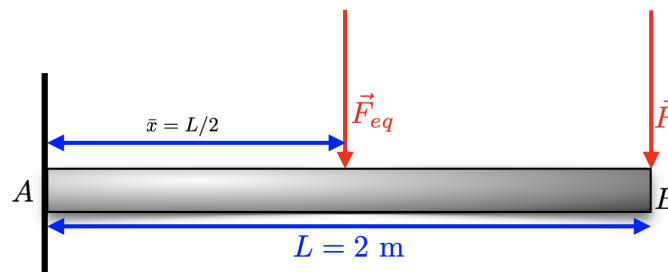
$$F_{eq} = \int_0^L w(x)dx = \int_0^L w_0 dx = w_0 \int_0^L dx = w_0 L = 200 \text{ N}$$

$$M_{eq} = \int_0^L xw(x)dx = \int_0^L w_0 x dx = w_0 \int_0^L x dx = w_0 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^L = w_0 \frac{L^2}{2} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

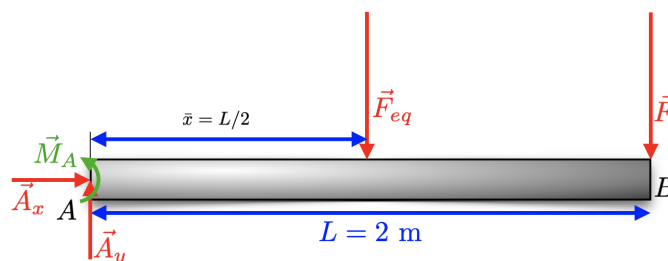
Por lo que podemos obtener el punto de aplicación de la fuerza usando

$$\bar{x} = \frac{M_{eq}}{F_{eq}} = \frac{L}{2} = 1 \text{ m}$$

Así que ya podemos sustituir la distribución de carga por  $\vec{F}_{eq}$ , situada a una distancia  $\bar{x}$  del punto A.



Además, podemos sustituir el soporte fijo de la viga en voladizo por 2 fuerzas que impiden el desplazamiento horizontal ( $\vec{A}_x$ ) y vertical ( $\vec{A}_y$ ) de la viga, y por un momento de par ( $\vec{M}_A$ ) que impide que la viga gire. Por lo que tenemos el siguiente Diagrama de Cuerpo Libre:





Ahora podemos aplicar las condiciones de equilibrio respecto a desplazamientos y respecto a giros de la viga

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{A} + \vec{F}_{eq} + \vec{F} = \vec{0}$$

eje x)  $A_x = 0$

eje y)  $A_y - F_{eq} - F = 0$

Estudiamos la condición de equilibrio respecto a giros en torno al punto A

$$\sum_i (\vec{M}_i)_A + \sum_j \vec{M}_j = \vec{r}_{AA} \times \vec{A} + \vec{r}_{A\bar{x}} \times \vec{F}_{eq} + \vec{r}_{AB} \times \vec{F} + \vec{M}_A = \vec{0}$$

eje z)  $0 + M_{eq} - LF - M_A = 0$

Así que obtenemos las siguientes resistencias

$$A_x = 0$$

$$A_y = F + F_{eq} = 700 \text{ N}$$

$$M_A = M_{eq} + LF = 1200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Con estos datos, ya tenemos información suficiente para construir los 2 diagramas que se nos piden. Empezamos por el Diagrama de Fuerza Cortante, para lo que recordamos que, para fuerzas  $\vec{F}_0$  compactas hacia arriba en  $x = x_0$ , se tiene que  $\Delta V(x_0) = F_0$ , y para cargas distribuidas (también hacia arriba), se verifica que

$$V(x) = V(x_0) + \int_{x_0}^x w(x) dx$$

Nosotros empezariamos el estudio con  $V(0) = 0$ , pero ya en  $x = 0$  tenemos una fuerza compacta hacia arriba  $\vec{A}_y$ , por lo que tenemos que  $V(0) = A_y$ , en el resto de la viga tenemos una carga distribuida hacia abajo, por lo que

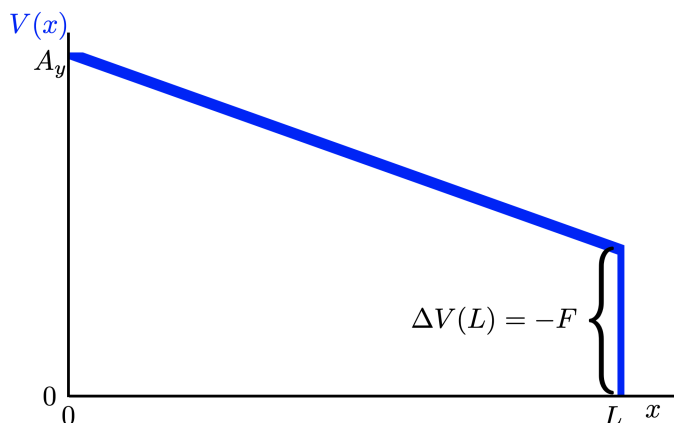
$$V(x) = A_y - \int_0^x w(x) dx = F + F_{eq} - \int_0^x w_0 dx = F + w_0 L - w_0 \int_0^x dx = F + w_0 (L - x)$$

Sustituyendo por los valores numéricos nos queda

$$V(x) = 100 (7 - x) \text{ N}$$

Por último, en el extremos final de la viga tenemos otra carga compacta hacia abajo, por lo que  $\Delta V(L) = -F$ , lo que hace que, en el punto final, se tenga  $V(L) = 0$ .

Con todo esto, nos queda el siguiente Diagrama de Fuerza Cortante:



Para el Diagrama de Momento Flexionante, recordamos que, para momentos de par  $\vec{M}_0$  (paralelos a  $\vec{k}$ ) compactos en

$x = x_0$ , se tiene que  $\Delta M(x_0) = -M_0$ , además, se verifica que

$$M(x) = M(x_0) + \int_{x_0}^x V(x) dx$$

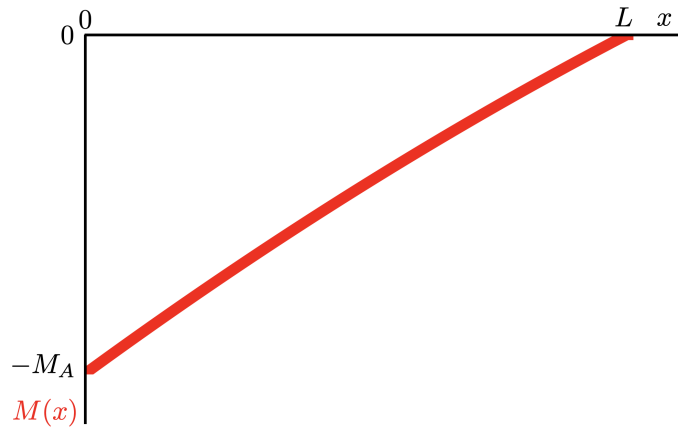
Otra vez, nosotros empezariamos el estudio con  $M(0) = 0$ , pero ya en  $x = 0$  un momento de par compacto  $\vec{M}_A$ , por lo que  $M(0) = M_A$ , en el resto de la viga tenemos fuerzas cortantes, por lo que

$$\begin{aligned} M(x) &= -M_A + \int_0^x V(x) dx \\ &= -M_A + \int_0^x [F + w_0(L - x)] dx \\ &= -M_A + \int_0^x (F + w_0L) dx - \int_0^x w_0x dx \\ &= -M_A + (F + w_0L) \int_0^x dx - w_0 \int_0^x x dx \\ &= -M_A + (F + w_0L) x \Big|_0^x - w_0 \frac{x^2}{2} \Big|_0^x \\ &= -M_A + (F + w_0L)(x - 0) - w_0 \frac{x^2 - 0^2}{2} \\ &= -M_A + (F + w_0L)x - w_0 \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

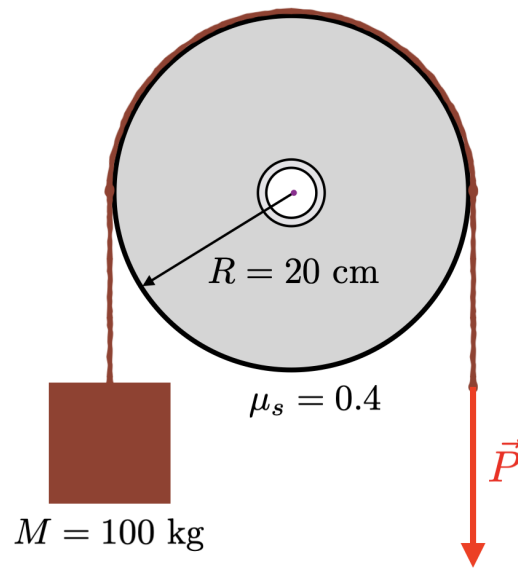
La fuerza compacta en el extremo final de la viga no contribuye al momento flexionante, pues nunca queda a la derecha de ningún punto de la viga. Sustituyendo por los valores numéricos nos queda

$$M(x) = [-1200 + 700x - 50x^2] \text{ N} \cdot \text{m}$$

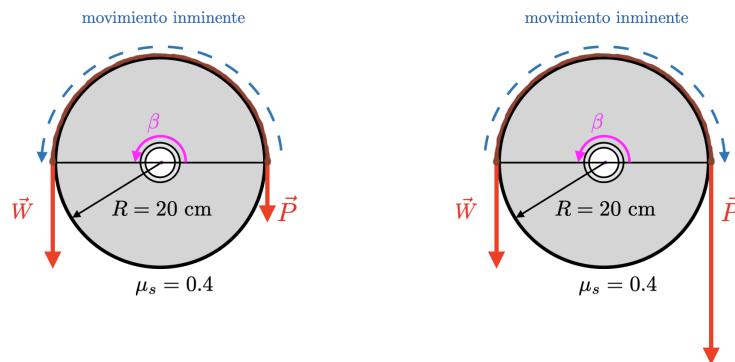
Con todo esto, nos queda el siguiente Diagrama de Momento Flexionante:



3. Obtén la fuerza mínima  $\vec{P}_{min}$  que puede ejercer el motor de la figura para sostener la cabina de masa  $M$  sin que se caiga, y la fuerza máxima  $\vec{P}_{max}$  que ha de ejercer sin elevar la cabina si el coeficiente de rozamiento estático de la cuerda con la rueda fija (que no gira) es  $\mu_s$ .



**Solución:** En este problema tenemos un motor que ejerce una fuerza  $\vec{P}$  sobre una cuerda sujeta a una rueda fija, para subir o bajar una carga de masa  $M$ . Lo fundamental de este problema es darse cuenta de que la rueda NO gira, por lo que la cuerda está en equilibrio siempre que la carga y la fuerza del motor sean tales que la cuerda NO arrastre. Por ello, tenemos que pensar en la cuerda como en una banda plana, por lo que sabemos que la fuerza transmitida de un lado a otro de la cuerda en movimiento inminente será  $T_2 = T_1 e^{\beta \mu_s}$ . Los 2 casos que nos interesan a nosotros son los siguientes



Para sujetar la carga, nos sostenemos con la fricción, por lo que en movimiento inminente se tiene

$$W = P_{min} e^{\beta \mu_s}$$

Mientras que, para elevar la carga, la fuerza ejercida por el motor ha de superar a la fricción, por lo que se tiene en movimiento inminente que

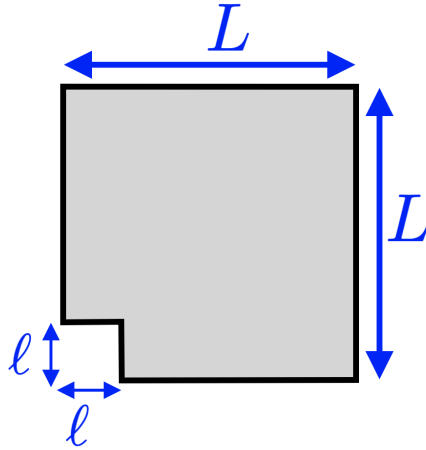
$$P_{max} = W e^{\beta \mu_s}$$

En nuestro caso, se tiene que  $\beta = 180 = \pi$  rad, por lo que las fuerzas que nos piden son

$$P_{min} = W e^{-\beta \mu_s} = 279 \text{ N}$$

$$P_{max} = W e^{\beta \mu_s} = 3,45 \cdot 10^3 \text{ N}$$

4. Obtén la posición del centroide de área de la figura, usando  $L = 5$  m y  $\ell = 1$  m.



**Solución:** No hay más que aplicar las fórmulas dadas en clase, empezamos calculando el área y la posición del centroide del cuadrado de lado  $L$

$$A(L) = \int_A dA = \int_0^L dx \int_0^L dy = L^2$$

También necesitamos las siguientes integrales

$$A_{1,0}(L) = \int_A x dA = \int_0^L x dx \int_0^L dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^L L = \frac{L^3}{2}$$

$$A_{0,1}(L) = \int_A y dA = \int_0^L dx \int_0^L y dy = L \frac{y^2}{2} \Big|_0^L = \frac{L^3}{2}$$

Se obtienen resultados equivalentes para el hueco cuadrado de lado  $\ell$ , por lo que se tiene que el area de la figura es

$$A = A(L) - A(\ell) = L^2 - \ell^2 = 24 \text{ m}^2$$

De la misma manera, cuando se estudian objetos compuestos, hemos aprendido que la contribución de los huecos se resta, por lo que las coordenadas del centroide de la figura son:

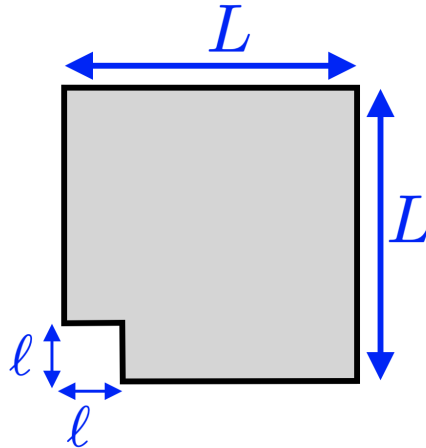
$$X_C = \frac{A_{1,0}(L) - A_{1,0}(\ell)}{A} = \frac{1}{2} \frac{L^3 - \ell^3}{L^2 - \ell^2}$$

$$Y_C = \frac{A_{0,1}(L) - A_{0,1}(\ell)}{A} = \frac{1}{2} \frac{L^3 - \ell^3}{L^2 - \ell^2}$$

Si sustituimos por los valores que nos dan, se obtiene el resultado pedido:

$$X_C = Y_C = \frac{1}{2} \frac{L^3 - \ell^3}{L^2 - \ell^2} = 2,58 \text{ m}$$

5. Obtén los momentos de inercia principales de área de la figura, usando  $L = 5 \text{ m}$  y  $\ell = 1 \text{ m}$ .



**Solución:** Para resolver este problema se puede usar el resultado del anterior, por lo que ya tenemos que

$$A = L^2 - \ell^2 = 24 \text{ m}^2$$

$$X_C = Y_C = \frac{1}{2} \frac{L^3 - \ell^3}{L^2 - \ell^2} = 2,58 \text{ m}$$

Pero ahora necesitamos calcular los segundos momentos de área del cuadrado para estudiar la figura compuesta

$$A_{2,0}(L) = \int_A x^2 dA = \int_0^L x^2 dx \int_0^L dy = \frac{x^3}{3} \Big|_0^L \cdot L = \frac{L^4}{3}$$

$$A_{1,1}(L) = \int_A xy dA = \int_0^L x dx \int_0^L y dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^L \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^L = \frac{L^4}{4}$$

$$A_{0,2}(L) = \int_A y^2 dA = \int_0^L dx \int_0^L y^2 dy = L \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^L = \frac{L^4}{3}$$

Otra vez tenemos que utilizar que, cuando se estudian objetos compuestos, la contribución de los huecos se resta, por lo que los segundos momentos de área de nuestra figura, medidos desde el origen de coordenadas  $O = (0, 0)$ , son

$$I_{O,y} = I_{O,xx} = A_{2,0}(L) - A_{2,0}(\ell) = \frac{L^4 - \ell^4}{3} = 208 \text{ m}^4$$

$$I_{O,xy} = A_{1,1}(L) - A_{1,1}(\ell) = \frac{L^4 - \ell^4}{4} = 156 \text{ m}^4$$

$$I_{O,x} = I_{O,yy} = A_{0,2}(L) - A_{0,2}(\ell) = \frac{L^4 - \ell^4}{3} = 208 \text{ m}^4$$

Siempre que se piden los momentos principales de área, hay que asumir que uno se refiere a los momentos principales de área medidos en el centroide de la figura, por lo que necesitamos usar el Teorema de los Ejes Paralelos para obtener los segundos momentos de área en el centroide (para a partir de ellos obtener los resultados que nos piden)

El Teorema de los Ejes Paralelos es

$$I_{O,ij} = I_{C,ij} + r_{OC,i} r_{OC,j} A,$$

donde  $i, j = \{x, y\}$ . A partir de este resultado obtenemos

$$I_{C,y} = I_{C,xx} = I_{O,xx} - r_{OC,x}r_{OC,x}A = \frac{L^4 - \ell^4}{3} - \left(\frac{1}{2} \frac{L^3 - \ell^3}{L^2 - \ell^2}\right)^2 (L^2 - \ell^2) = 47,8 \text{ m}^4,$$

$$I_{C,xy} = I_{O,xy} - r_{OC,x}r_{OC,y}A = \frac{L^4 - \ell^4}{4} - \left(\frac{1}{2} \frac{L^3 - \ell^3}{L^2 - \ell^2}\right)^2 (L^2 - \ell^2) = -4,17 \text{ m}^4,$$

$$I_{C,x} = I_{C,yy} = I_{O,yy} - r_{OC,y}r_{OC,y}A = \frac{L^4 - \ell^4}{3} - \left(\frac{1}{2} \frac{L^3 - \ell^3}{L^2 - \ell^2}\right)^2 (L^2 - \ell^2) = 47,8 \text{ m}^4,$$

Por último, a partir de estos segundos momentos de área medidos desde el centroide, podemos obtener los momentos principales de inercia de la figura que nos piden usando

$$I_{\pm} = \frac{I_{C,x} + I_{C,y}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{C,y} - I_{C,x}}{2}\right)^2 + I_{C,xy}^2}.$$

De donde se obtiene que

$$I_{Max} = I_+ = \frac{L^4 + \ell^4}{12}$$

$$I_{Min} = I_- = \frac{1}{12} \left[ L^4 - 13\ell^4 + 12L\ell^3 - 6L^2\ell^2 + 12\frac{\ell^5}{L + \ell} \right]$$

Sustituyendo los resultados numéricos, se obtiene

$$\boxed{I_{Max} = I_+ = 52,0 \text{ m}^4}$$

$$\boxed{I_{Min} = I_- = 43,7 \text{ m}^4}$$

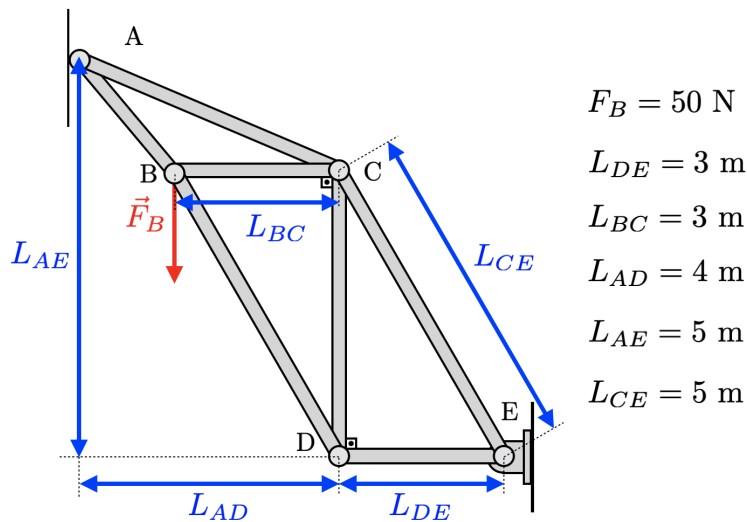
# Convocatoria Extraordinaria de Física aplicada a estructuras e instalaciones, Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Nombre y DNI: \_\_\_\_\_

Instrucciones:

- El examen empieza a las 11:00 y termina a las 14:00
- Sólo se puede usar calculadora científica no programable.
- No está permitido el uso de apuntes
- No está permitido el uso de móviles, al que se pille usando un móvil se le expulsará del aula y tendrá un cero, **voy a ser muy estricto e intransigente con esta regla**. Si estás esperando una llamada importante, dímelo y yo tendré tu móvil en mi mesa.
- Todas las preguntas puntúan igual (2 puntos).
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

1. Resuelve la armadura de la figura, e indica si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.



### Solución:

Vamos a resolver este problema por el método de los nodos. Por lo que lo primero que tenemos que hacer es obtener la posición relativa de cada nodo. Asumiendo que el nodo  $E$  sea el origen de coordenadas, tenemos que:

$$A = (-L_{DE} - L_{AD}, L_{AE}, 0) = (-7, 5) \text{ m}$$

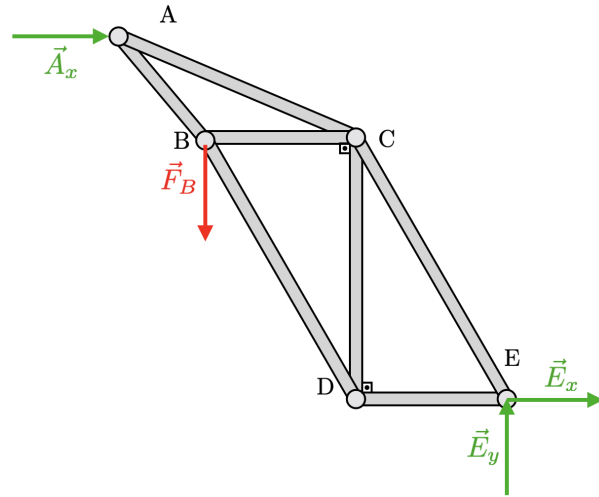
$$B = \left(-L_{DE} - L_{BC}, \sqrt{L_{CE}^2 - L_{DE}^2}\right) = (-6, 4) \text{ m}$$

$$C = \left(-L_{DE}, \sqrt{L_{CE}^2 - L_{DE}^2}\right) = (-3, 4) \text{ m}$$

$$D = (-L_{DE}, 0) = (-3, 0) \text{ m}$$

$$E = (0, 0) = (0, 0) \text{ m}$$

Lo siguiente es aplicar las 3 condiciones de equilibrio 2D a la armadura completa para obtener las resistencias en el pasador en  $E$  y en la pared plana en  $A$ . Para ello, construimos el Diagrama de Cuerpo Libre de la armadura:



Y, por tanto, las condiciones de equilibrio respecto a desplazamientos y respecto a giros son

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_B + \vec{A} + \vec{E} = \vec{0}$$

eje x)  $0 + A_x + E_x = 0$   
eje y)  $-F_B + E_y = 0$

La condición de equilibrio respecto a giros centrada en el nodo  $E$  es:

$$\sum_i (\vec{M}_i)_E = \vec{r}_{EA} \times \vec{A} + \vec{r}_{EB} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{EE} \times \vec{E} = \vec{0}$$

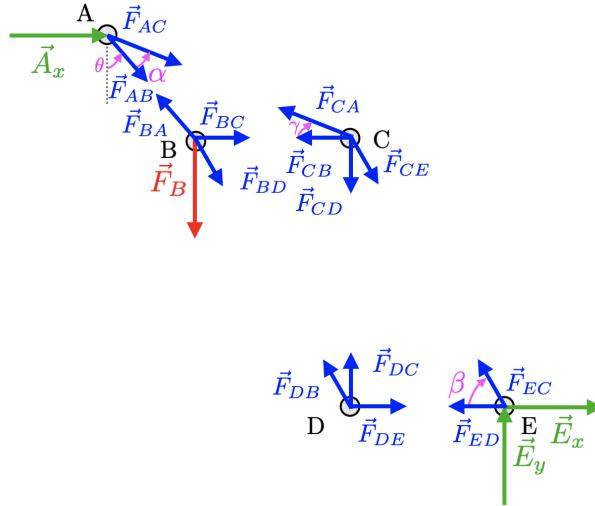
eje z)  $-5A_x + 6F_B + 0 = 0$

De donde obtenemos directamente que

$$\boxed{E_y = F_B = 50 \text{ N}} \quad \boxed{A_x = -E_x = \frac{6}{5} F_B = 60 \text{ N}}$$

Una vez que tenemos las resistencias de los soportes, la armadura es resoluble por el método de los nodos. Como vimos en clase, a priori asumiremos que todos los elementos de la armadura se encuentran en tensión (por lo que, si obtenemos resultados negativos, serán elementos de compresión), así que la fuerza de reacción sobre los nodos los empujan hacia el extremo opuesto del elemento que soportan, tal y como indica el siguiente gráfico.





Recordamos que, en el método de los nodos, para que cada nodo sea resoluble, teniendo en cuenta que tenemos 2 ecuaciones de equilibrio en cada nodo, necesitamos que en cada nodo haya como mucho 2 incógnitas. Empezamos aplicando las condiciones de equilibrio del nodo  $E$ :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{E} + \vec{F}_{ED} + \vec{F}_{EC} = \vec{0}$$

$$\text{eje x) } E_x - F_{ED} + \sin(\beta)F_{EC} = 0$$

$$\text{eje y) } E_y + \cos(\beta)F_{EC} = 0$$

Usando que  $\cos(\beta) = \frac{L_{DE}}{L_{CE}} = \frac{3}{5}$  y que  $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{L_{CE}^2 - L_{DE}^2}}{L_{CE}} = \frac{4}{5}$ , obtenemos que

$$F_{EC} = -\frac{5}{3}E_y = -\frac{250}{3} \text{ N} = -83,33 \text{ N}$$

$$F_{ED} = E_x + \frac{4}{5}F_{EC} = \frac{380}{3} \text{ N} = 126,67 \text{ N}$$

Seguimos con el nodo  $D$ , usando que  $F_{DE} = F_{ED}$ , por lo que tenemos, en el equilibrio:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{DB} + \vec{F}_{DC} + \vec{F}_{DE} = \vec{0}$$

$$\text{eje x) } \sin(\beta)F_{DB} + 0 - F_{DE} = 0$$

$$\text{eje y) } \cos(\beta)F_{DB} + F_{DC} + 0 = 0$$

De donde obtenemos que

$$F_{DB} = \frac{5}{4}F_{DE} = \frac{475}{3} \text{ N} = 158,33 \text{ N}$$

$$F_{DC} = -\frac{3}{5}F_{DB} = -\frac{3}{5}F_{DB} = -95 \text{ N}$$

Ahora vamos con el nodo  $C$ , para lo que usaremos que  $F_{CD} = F_{DC}$  y que  $F_{CE} = F_{EC}$ , además, necesitamos saber los valores de  $\sin(\gamma)$  y  $\cos(\gamma)$ . Para ello, lo más fácil es obtener el vector que une al nodo  $C$  con el nodo  $A$  como  $\vec{r}_{CA} = \vec{A} - \vec{C} = (4, 1) \text{ m}$ , su vector unitario tendrá como componentes a  $\hat{u}_{CA} = \frac{\vec{r}_{CA}}{|\vec{r}_{CA}|} = (\cos(\gamma), \sin(\gamma))$ , por lo que obtenemos que  $\sin(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{17}}$  y  $\cos(\gamma) = \frac{4}{\sqrt{17}}$ , así que tenemos que, si el nodo  $C$  se encuentra en equilibrio, se ha de

verificar que:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{CB} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{CE} = \vec{0}$$

$$\text{eje x) } -\cos(\gamma)F_{CA} - F_{CB} + 0 - \sin(\beta)F_{CE} = 0$$

$$\text{eje y) } \sin(\gamma)F_{CA} + 0 - F_{CD} - \cos(\beta)F_{CE} = 0$$

De donde obtenemos que

$$\sin(\gamma)F_{CA} = F_{CD} + \cos(\beta)F_{CE} \Rightarrow F_{CA} = -\sqrt{17} \left( 95 + \frac{3}{5} \frac{250}{3} \right) = -145\sqrt{17} \text{ N} = -597,85 \text{ N}$$

$$F_{CB} = -\cos(\gamma)F_{CA} - \sin(\beta)F_{CE} = \frac{1940}{3} \text{ N} = 646,67 \text{ N}$$

Por último, usando  $F_{BC} = F_{CB}$  y  $F_{BD} = F_{DB}$ , aplicando las condiciones de equilibrio sobre el nodo  $B$  obtenemos la tensión del elemento  $AB$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{BD} + \vec{F}_B = \vec{0}$$

$$\text{eje x) } F_{BA,x} + F_{BC} - \sin(\beta)F_{BD} + 0 = 0$$

$$\text{eje y) } F_{BA,y} + 0 - \cos(\beta)F_{BD} - F_B = 0$$

De donde obtenemos que

$$F_{BA,x} = \sin(\beta)F_{BD} - F_{BC} = -520 \text{ N}$$

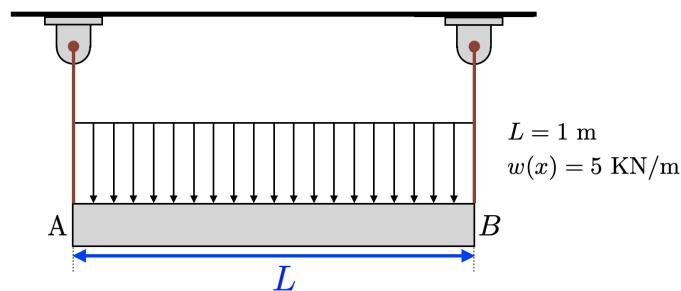
$$F_{BA,y} = \cos(\beta)F_{BD} + F_B = 145 \text{ N}$$

Por lo que tenemos que  $F_{BA} = \sqrt{F_{BA,x}^2 + F_{BA,y}^2} = 539,84 \text{ N}$ , y por la orientación de las componentes  $x$  e  $y$  vemos que  $AB$  es un elemento de tensión.

Recapitulando, teniendo en cuenta que si obtenemos  $F_{ij} > 0$  tenemos un elemento de tensión y, en caso contrario, un elemento de compresión, tenemos que:

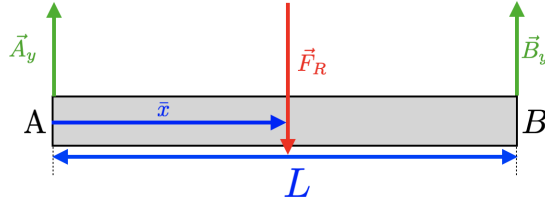
- Elementos de tensión:  $AB$ ,  $BC$ ,  $BD$  y  $DE$
- Elementos de compresión:  $AC$ ,  $CD$  y  $CE$

2. Representar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante de la viga sostenida por cuerdas de la figura.



**Solución:**

Para resolver este problema, necesitamos conocer la fuerza de reacción sobre cada uno de los soportes, por lo que necesitamos el Diagrama de Cuerpo Libre del objeto extenso, donde también hemos sustituido ya la carga extensa por la fuerza equivalente situada en un punto situado una distancia  $x$  a la derecha del punto  $A$ .



Para poder resolver las fuerzas sobre las cuerdas, necesitamos conocer la magnitud de la fuerza resultante  $F_R$  de la carga y su punto de aplicación  $\bar{x}$ . Para ello, integramos la carga a lo largo de toda la viga, y el momento resultante  $M_R$  alrededor del punto  $A$ , obteniendo

$$F_R = \int_0^L w(x)dx = w_0 \int_0^L dx = w_0 L = 5 \text{ KN}$$

$$M_R = \int_0^L w(x)x dx = w_0 \int_0^L x dx = w_0 \frac{L^2}{2} = 5 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Como sabemos que el momento y la fuerza resultante se pueden escribir como  $M_R = \bar{x}F_R$ , donde  $\bar{x}$  es la posición de  $F_R$  medida desde el punto  $A$ , se tiene

$$\bar{x} = \frac{M_R}{F_R} = \frac{w_0 \frac{L^2}{2}}{w_0 L} = \frac{L}{2} = 0,50 \text{ m}$$

Por lo que el punto de aplicación de la fuerza resultante  $F_R$  es el punto medio de la viga. Ahora, aplicando las condiciones de equilibrio respecto a desplazamientos y respecto a giros de la viga, podemos resolver las fuerzas de los cables que la sostienen.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{A} + \vec{F}_R + \vec{B} = \vec{0}$$

eje x)  $0 + 0 + 0 = 0$

eje y)  $A_y - F_R + B_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = F_R$

La condición de equilibrio respecto a giros centrada en el nodo  $A$  es:

$$\sum_i (\vec{M}_i)_A = \vec{r}_{AA} \times \vec{A} + \vec{r}_{A\bar{x}} \times \vec{F}_R + \vec{r}_{AE} \times \vec{B} = \vec{0}$$

eje z)  $0 - M_R + LB_y = 0$

De donde obtenemos directamente que

$$A_y = B_y = \frac{F_R}{2} = w_0 \frac{L}{2} = 2,5 \text{ KN}$$

Así ahora ya tenemos todo lo necesario para resolver el problema. A partir de las relaciones diferenciales dadas en clase, se obtienen la fuerza cortante  $V(x)$  y el momento flexionante  $M(x)$  como

$$V(x) = V(x_0) + \int_{x_0}^x w(x)dx$$

$$M(x) = M(x_0) + \int_{x_0}^x V(x)dx$$

Además, cuando tenemos fuerzas concentradas  $\vec{F}(x_0)$  en un punto  $x_0$ , tenemos que *corregir* estas fórmulas usando

$$\Delta V(x_0) = F(x_0),$$

donde asumimos signo positivo si  $\vec{F}(x_0)$  está orientada hacia arriba, y negativo en caso contrario. Empecemos con la fuerza cortante. En nuestro caso, por defecto, tenemos que empezar nuestro análisis con  $V(0) = 0$ ,

pero justo en  $x = 0$  tenemos una fuerza concentrada  $\vec{A}_y$ , por lo que tenemos que usar  $\Delta V(0) = A_y$ , así que resolvemos (teniendo en cuenta el signo de la carga distribuida), para todo  $x$  situado a la izquierda de la siguiente fuerza concentrada en  $x = L$

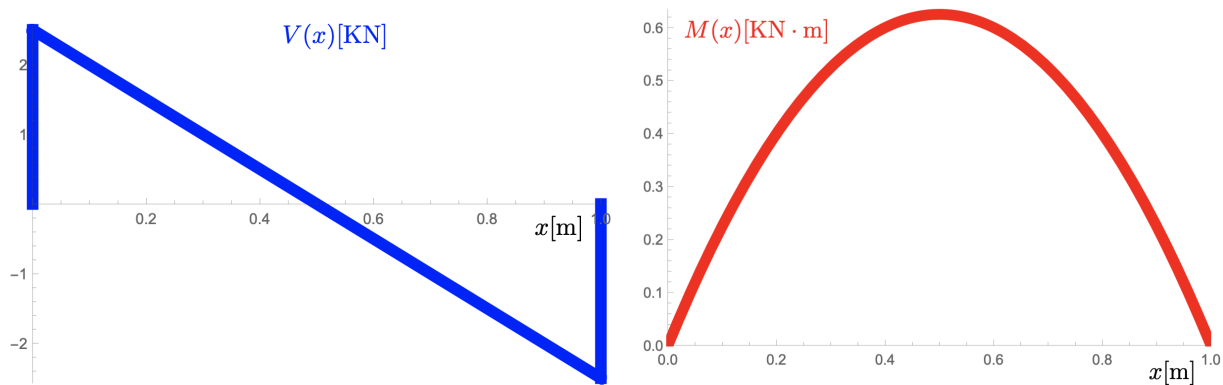
$$V(x) = A_y - \int_0^x w(x)dx = w_0 \left( \frac{L}{2} - x \right)$$

En  $x = L$  tendríamos que  $V(L) = -w_0 \frac{L}{2}$ , pero tenemos otra fuerza concentrada que hay que añadir usando  $\Delta V(L) = B_y = w_0 \frac{L}{2}$ , por lo que se obtiene al final que  $V(L) = 0$ .

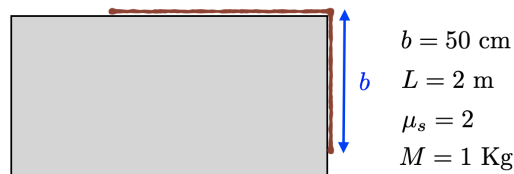
En el cálculo del momento flexionante no tenemos pares concentrados en ningún punto, por lo que la resolución de la integral de la fuerza cortante es suficiente, así que tenemos, empezando como siempre con  $M(0) = 0$ :

$$M(x) = M(0) + \int_0^x V(x)dx = 0 + \int_0^x [A_y - w_0x] dx = A_y \int_0^x dx - w_0 \int_0^x x dx = w_0 \frac{L}{2} x - w_0 \frac{x^2}{2} = \frac{w_0}{2} x (L - x)$$

Para pintar los resultados, es útil ver que  $V(0) = A_y = 2,5$  KN,  $V(\frac{L}{2}) = 0$  y que  $\lim_{x \rightarrow L} V(x) = -A_y = -2,5$  KN, mientras que  $V(L) = 0$ , por otro lado, tenemos que  $M(0) = M(L) = 0$  y que  $M(\frac{L}{2}) = \frac{w_0 L^2}{8} = 0,625$  KN · m. Por lo que los Diagramas de Fuerza Cortante y de Momento Flexionante son:



3. Tenemos una cuerda de  $M = 1$  kG de peso y  $L = 2$  m con  $b = 50$  cm colgados de un precipicio y el resto estirados, tal y como se muestra en el gráfico. Teniendo en cuenta que la fricción estática de la cuerda con el suelo es  $\mu_s = 2$ . ¿Se caerá la cuerda por el precipicio?



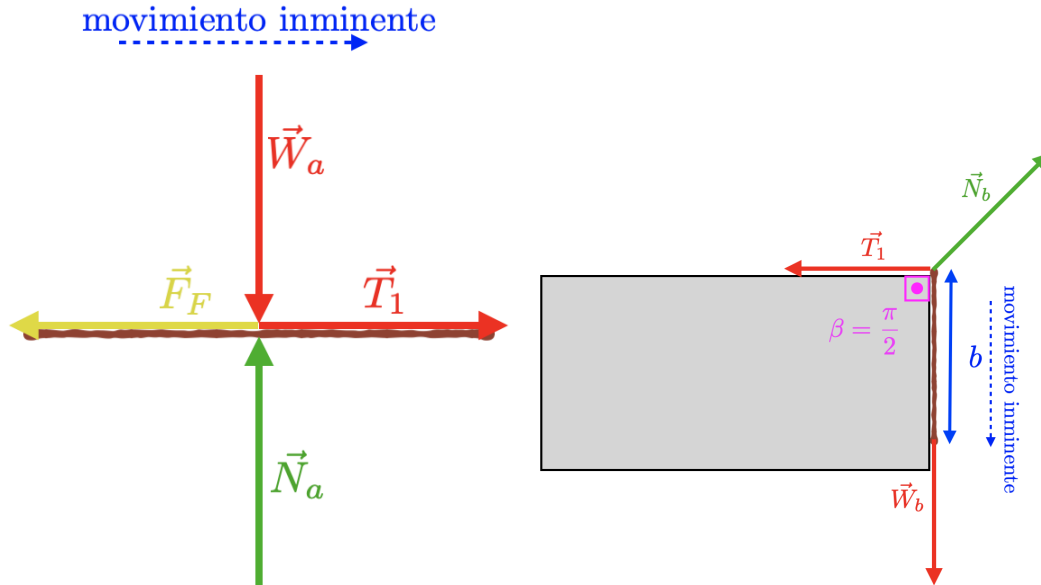
### Solución:

Para resolver este problema, hay que darse cuenta de que la cuerda está sujeta por el suelo en toda la extensión  $a = L - b$ , mientras que el extremo colgante de longitud  $b$  no está sujeta, por lo que tenemos un peso actuando en dicho extremo de magnitud

$$W = \int_0^b \rho(x)dx = \frac{M}{L} b$$

Si hacemos el Diagrama de Cuerpo Libre de la parte de la cuerda colgada del precipicio, vemos que el peso de la cuerda tirante se transmite hasta el extremo superior (el borde), donde tiene que estar sujeta por el suelo (si no, se caería). Es

muy importante darse cuenta de que el vértice donde está sujeta la cuerda actúa como una polea donde la cuerda sufre fricción seca sobre la superficie y, por tanto, se transmite una fuerza en movimiento inminente igual a  $T_1 = T_2 e^{-\mu_s \beta}$ , donde  $T_2$  es la magnitud de la fuerza aplicada sobre la cuerda en el extremo colgante, que es igual al peso de la parte de la cuerda colgada en el precipicio,  $T_1$  es la fuerza transmitida al otro lado de la cuerda,  $\mu_s$  es el coeficiente de fricción estática y  $\beta = \frac{\pi}{2}$  rad es el ángulo de la polea (que el radio de la polea sea cero es irrelevante aquí).



La fuerza  $T_1$  transmitida a la parte de la cuerda sobre el precipicio tira de ella hacia el borde horizontalmente hacia la derecha, por lo que la cuerda sólo puede estar en equilibrio si una fuerza de la misma magnitud y de sentido contrario actúa sobre la misma, esa fuerza es una fuerza de fricción  $\vec{F}_F$ , cuyo máximo valor en equilibrio viene dado por  $F_F = \mu_s N_a$ , donde  $N_a$  es la magnitud de la fuerza normal que soporta al extremo de la cuerda  $a$  que se encuentra sobre el precipicio, tal y como se muestra en el Diagrama de Cuerpo Libre de arriba.

En movimiento inminente, tenemos que la tensión que se transmite al extremo izquierdo de la cuerda es (usando  $T_2 = W_b = M \frac{b}{L}$ ,  $\mu_s = 2$  y  $\beta = \frac{\pi}{2}$  rad)

$$T_1 = T_2 e^{-\mu_s \beta} = M \frac{b}{L} e^{-\pi}$$

Para que el extremo  $a$  se mantenga en equilibrio, se ha de cumplir que

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{W}_a + \vec{T}_1 + \vec{N}_a + \vec{F}_F = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \text{eje x)} \quad & T_1 - F_F = 0 \\ \text{eje y)} \quad & N_a - W_a = 0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$F_F = T_1 = M \frac{b}{L} e^{-\pi}$$

$$N_a = W_a = M \frac{a}{L} = M \frac{L-b}{L}$$

El máximo que la fuerza de fricción puede soportar es cuando nos encontramos en situación de movimiento inminente, cuando  $F_F = F_s = \mu_s N_a$ , por lo que, para que la cuerda no caiga, se ha de verificar que

$$\mu_s N_a \geq M \frac{b}{L} e^{-\mu_s \beta}$$

Despejando en esta igualdad, se llega a

$$b \leq L \frac{\mu_s}{\mu_s + e^{-\mu_s}}$$

Sustituyendo los datos del problema, obtenemos que

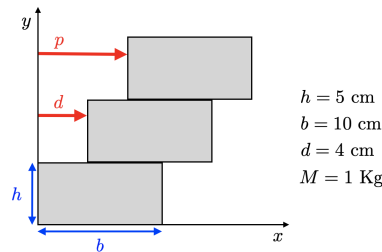
$$b \leq 0,979 \text{ m}$$

Es decir, como se verifica que

$$0,5 \text{ m} \leq 0,979 \text{ m},$$

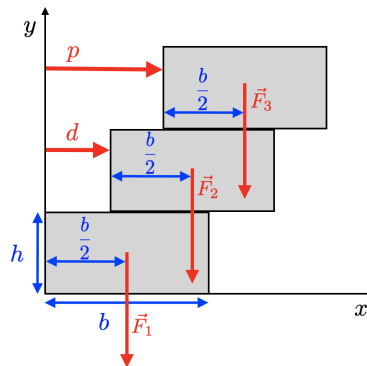
la cuerda no se caerá por el precipicio.

4. Obtén la posición máxima  $p$  a la que se puede colocar el tercer bloque sin que se caiga ninguno.



**Solución:**

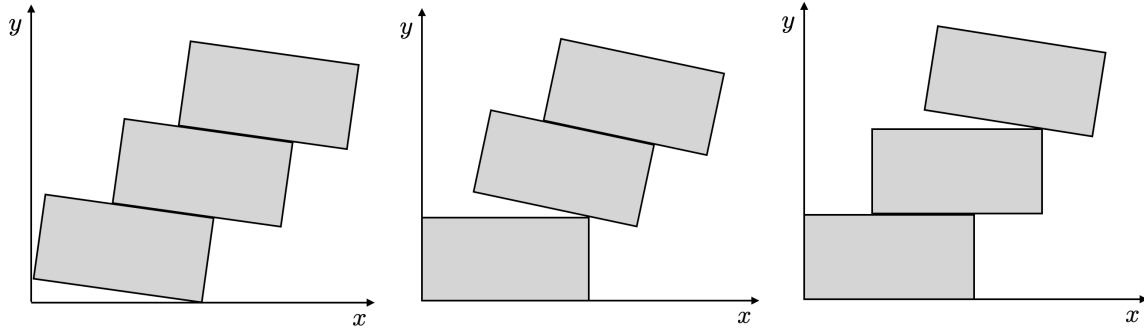
En este problema será importante ver la posición del vector peso de cada uno de los bloques. Podemos asumir que la posición de aplicación del peso es el centro de gravedad, que en este caso homogéneo coincide con el centroide de cada bloque en el medio del mismo, tal y como indica el siguiente gráfico:



Para solucionar este problema, tenemos que comprobar que los 3 bloques se encuentren en equilibrio para una posición  $p$  del tercer bloque. La única manera de la que nos podemos salir del equilibrio es que la fuerza resultante de los bloques se encuentre aplicada en un punto a la derecha de la superficie de contacto de los bloques. En este caso, tenemos que comprobar 3 posibles casos:

- a) Que el conjunto de 3 bloques no gire alrededor del eje situado abajo a la derecha del bloque de abajo.
- b) Que el conjunto de los 2 bloques superiores no gire en torno al eje situado arriba a la derecha del bloque de abajo
- c) Que el bloque superior no gire alrededor del eje situado arriba a la derecha del bloque intermedio

En la siguiente figura vemos ejemplos de estos 3 posibles giros:



En el primer caso, tenemos que la fuerza resultante de los 3 bloques es  $\vec{F}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ , por lo que

$$F_{123} = F_1 + F_2 + F_3 = 3Mg$$

Para obtener la posición  $\bar{x}_1$  de la fuerza resultante del sistema de 3 bloques, calculamos el momento resultante en torno al punto  $x = 0$ , teniendo en cuenta que podemos asumir que la posición de aplicación del peso es el centro de gravedad, por lo que se obtiene

$$M_{123} = \frac{b}{2}F_1 + \left(d + \frac{b}{2}\right)F_2 + \left(p + \frac{b}{2}\right)F_3 = \bar{x}_1F_{123}$$

Por lo que

$$\bar{x}_1 = \frac{\frac{b}{2}Mg + \left(d + \frac{b}{2}\right)Mg + \left(p + \frac{b}{2}\right)Mg}{3Mg} = \frac{b}{2} + \frac{d+p}{3}$$

La condición de equilibrio del sistema de 3 bloques es que  $\bar{x}_1 < b$ , por lo que,

$$\frac{b}{2} + \frac{d+p}{3} < b,$$

despejando, obtenemos la primera condición, que se ha de cumplir para que el conjunto de 3 bloques no gire en torno a la base y se acabe cayendo:

$$p < \frac{3b}{2} - d = 9 \text{ cm}$$

Actuamos exactamente de la misma manera en los siguientes casos. La fuerza resultante de los 2 bloques superiores es

$$F_{23} = F_2 + F_3 = 2Mg$$

Para obtener la posición  $\bar{x}_2$  del sistema de 2 bloques superiores, calculamos el momento resultante en torno al punto  $x = 0$ ,

$$M_{23} = \left(\frac{b}{2} + d\right)F_2 + \left(p + \frac{b}{2}\right)F_3 = \bar{x}_2F_{23},$$

de donde se obtiene que

$$\bar{x}_2 = \frac{\left(\frac{b}{2} + d\right)Mg + \left(p + \frac{b}{2}\right)Mg}{2Mg} = \frac{d+p+b}{2}$$

La condición de equilibrio del sistema de 2 bloques superiores es que  $\bar{x}_2 < b$ , por lo que,

$$\frac{d+p+b}{2} < b$$

despejando, obtenemos la segunda condición, que se ha de cumplir para que el conjunto de 2 bloques superiores no gire

en torno a la arista del de abajo y el conjunto se acabe cayendo:

$$p < b - d = 6 \text{ cm}$$

Por último, la fuerza sobre el bloque superior es  $F_3 = Mg$ , y la posición  $\bar{x}_3$  del bloque superior medida desde  $x = 0$  es  $\bar{x}_3 = p + \frac{b}{2}$ . La condición de equilibrio del bloque superiores es que  $\bar{x}_3 < d + b$ , por lo que, despejando, obtenemos que

$$p < d + \frac{b}{2} = 9 \text{ cm}$$

Estas 3 desigualdades se han de cumplir a la vez, pues en el momento en el que una no se verifique, el caso del que proviene dicha desigualdad tendrá lugar y al menos un bloque girará y terminará cayendo.

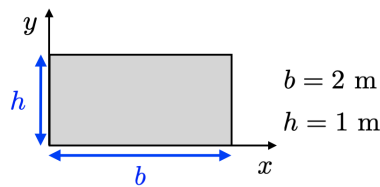
En nuestro caso, se ha de cumplir que

$$p < b - d = 6 \text{ cm,}$$

pues, en caso contrario, el conjunto de 2 bloques superiores girará en torno a la arista del bloque inferior.

5. Obtén, de la figura mostrada (usando  $b = 2 \text{ m}$  y  $h = 1 \text{ m}$ ):

- La posición del centroide de área respecto a los ejes  $x$  e  $y$ .
- Los momentos de inercia principales de área.



**Solución:**

a) Las componentes del centroide de área se calculan a partir de la siguiente fórmula:

$$\vec{C} = (C_x, C_y) = \left( \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}, \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \right)$$

Resolvamos las distintas integrales

$$A = \int_A dA = \int_0^b dx \int_0^h dy = bh = 2 \text{ m}^2$$

$$C_x = \frac{1}{A} \int_A x dA = \frac{1}{bh} \int_0^b x dx \int_0^h dy = \frac{1}{bh} \frac{b^2}{2} h = \frac{b}{2} = 1 \text{ m}$$

$$C_y = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{bh} \int_0^b dx \int_0^h y dy = \frac{1}{bh} b \frac{h^2}{2} = \frac{h}{2} = 0,5 \text{ m}$$

Por lo que la posición del centroide es

$$\vec{C} = \frac{1}{2} (b, h) = (1, 0,5) \text{ m}$$

b) Para poder obtener los momentos principales de área, vamos a proceder con la siguiente estrategia:

- Calcularemos los momentos de área  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$  y  $I_{yy}$  en torno a los ejes  $y$  y  $x$  respectivamente.
- Con el Teorema de los Ejes Paralelos, obtendremos el valor de estos 3 momentos de inercia en ejes paralelos a los ejes  $y$  y  $x$ , pero que ahora pasen por el centroide de la figura.



c) Finalmente, aplicando las fórmulas dadas en clase, obtenemos los valores de los momentos de área del objeto. Empecemos calculando los momentos de inercia  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$  y  $I_{yy}$  en torno a los ejes  $y$  y  $x$  que se cortan en el punto  $O$ :

$$I_{y,O} = I_{xx,O} = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 dx \int_0^h dy = \frac{b^3}{3} h = \frac{8}{3} \text{ m}^4$$

$$I_{x,O} = I_{yy,O} = \int_A y^2 dA = \int_0^b dx \int_0^h y^2 dy = b \frac{h^3}{3} = \frac{2}{3} \text{ m}^4$$

$$I_{xy,O} = \int_A xy dA = \int_0^b x dx \int_0^h y dy = \frac{b^2}{2} \frac{h^2}{2} = 1 \text{ m}^4$$

Ahora, aplicamos el Teorema de los Ejes Paralelos para obtener los mismos momentos de área, pero ahora sobre los ejes paralelos a los ejes  $y$  y  $x$  que se cortan en el centroide  $\vec{C} = \frac{1}{2}(b, h)$

$$\begin{aligned} I_{xx,O} &= I_{xx,C} + |C_x|^2 A \\ I_{yy,O} &= I_{yy,C} + |C_y|^2 A \\ I_{xy,O} &= I_{xy,C} + |C_x||C_y|A \end{aligned}$$

Por lo que obtenemos que

$$I_{xx,C} = I_{xx,O} - |C_x|^2 A = \frac{b^3}{3} h - b^3 h = \frac{b^3 h}{12} = \frac{2}{3} \text{ m}^4 = 0,667 \text{ m}^4$$

$$I_{yy,C} = I_{yy,O} - |C_y|^2 A = b \frac{h^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{6} \text{ m}^4 = 0,167 \text{ m}^4$$

$$I_{xy,C} = I_{xy,O} - |C_x||C_y|A = \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{b^2 h^2}{4} = 0 \text{ m}^4$$

Por último, tendríamos que aplicar la fórmula dada en clase para el cálculo de los momentos principales de área, pero esto no es necesario, ya que nos encontramos justo en la orientación de los ejes en la que  $I_{xy,C} = 0$ , por lo que ya tenemos los momentos principales de área como:

$$I_{max} = 0,667 \text{ m}^4$$

$$I_{min} = 0,167 \text{ m}^4$$

©2022 Pablo Rodríguez López

Algunos derechos reservados.

Este documento se distribuye bajo la licencia "Atribución 4.0 Internacional (CC by 4.0)" de Creative Commons, disponible en

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.es>

<http://hdl.handle.net/10115/20171>