*Ciencias Experimentales*



José Luis Trueba Santander Nagi Khalil Rodríguez

T e o r í a y p r o b l e m a s r e s u e l t o s d e F í s i c a B á s i c a

ISBN: 978-84-09-46503-3

# Teor´ıa y problemas resueltos de F´ısica B´asica

Fundamentos de la Arquitectura Universidad Rey Juan Carlos

Jos´e Luis Trueba Santander Nagi Khalil Rodr´ıguez

Diciembre de 2022

Dep´osito

Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

@2022 Jos´e Luis Trueba Santander Nagi Khalil Rodr´ıguez Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Atribuci´on-CompartirIgual 4.0 Internacional” de Creative Commons, disponible en https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es

# Prefacio

Este texto est´a dirigido a los estudiantes de la asignatura F´ısica B´asica del Grado en Fundamentos de Arquitectura. La asignatura cubre temas de Termodin´amica, Ondas, Electromagnetismo y Circuitos El´ectricos y, al estar pensada para impartirse en la primera mitad del grado, no presupone m´as conocimientos que los usuales en estudios preuniversitarios.

En cada tema, se incluyen apuntes que explican la parte te´orica, ejemplos num´ericos intercalados, una tabla resumen con las cantidades y f´ormulas m´as importantes y una lista de problemas resueltos. El material se ha ido elaborando, modificando y completando durante los varios cursos en que los autores hemos impartido esta asignatura en la Universidad Rey Juan Carlos.

Nos sentimos muy agradecidos a cada uno de los estudiantes del Grado de Fundamentos de Arquitectura que han pasado por nuestras clases por su motivaci´on, cr´ıtica constructiva y esfuerzo, sin los cuales jam´as habr´ıamos completado este trabajo.

Los autores M´ostoles, 2022

i

ii

# ´Indice general

1. [Gases](#_bookmark0) 1
   1. [Gases ideales](#_bookmark1) 1
   2. [Presi´on cin´etica](#_bookmark3) 4
   3. [Energ´ıa interna de un gas ideal](#_bookmark7) 7
   4. [Dilataci´on t´ermica de s´olidos y l´ıquidos](#_bookmark12) 10
   5. [Tabla resumen](#_bookmark15) 12
   6. [Problemas resueltos](#_bookmark16) 13
2. [Calor](#_bookmark17) 19
   1. [El calor como forma de transferencia de energ´ıa](#_bookmark18) 19
   2. [Algunos mecanismos de transferencia de energ´ıa](#_bookmark19) 20
   3. [Capacidad calor´ıfica y calor espec´ıfico](#_bookmark24) 25
   4. [Calor latente](#_bookmark26) 28
   5. [Tabla resumen](#_bookmark28) 31
   6. [Problemas resueltos](#_bookmark29) 32
3. [Termodin´amica](#_bookmark30) 39
   1. [Contacto t´ermico y equilibrio t´ermico](#_bookmark31) 39
   2. [Trabajo de deformaci´on](#_bookmark32) 40
   3. [Procesos termodin´amicos](#_bookmark36) 42
   4. [Capacidades calor´ıficas de los gases ideales](#_bookmark39) 44
   5. [Procesos adiab´aticos de los gases ideales](#_bookmark48) 47
   6. [M´aquinas t´ermicas](#_bookmark52) 48
   7. [Bombas t´ermicas y frigor´ıficos](#_bookmark55) 51
   8. [M´aquina de Carnot](#_bookmark59) 54
   9. [Tabla resumen](#_bookmark65) 59
   10. [Problemas resueltos](#_bookmark66) 61

iii

iv ´INDICE GENERAL

1. [Ondas](#_bookmark67) 73
   1. [Propagaci´on de una perturbaci´on](#_bookmark68) 73
   2. [Ondas en una cuerda tensa](#_bookmark70) 75
   3. [Ondas de sonido](#_bookmark79) 79
   4. [Superposici´on e interferencia](#_bookmark87) 84
   5. [Tabla resumen](#_bookmark91) 87
   6. [Problemas resueltos](#_bookmark92) 89
2. [Acu´stica](#_bookmark93) 101
   1. [Intensidad de una onda de sonido arm´onica](#_bookmark94) 101
   2. [Impedancia acu´stica y transmisi´on del sonido](#_bookmark100) 104
   3. [Nivel sonoro y sensaci´on auditiva](#_bookmark105) 108
   4. [Tabla resumen](#_bookmark110) 111
   5. [Problemas resueltos](#_bookmark111) 112
3. [Carga y corriente el´ectrica](#_bookmark112) 121
   1. [Carga el´ectrica](#_bookmark113) 121
   2. [Campo el´ectrico](#_bookmark114) 124
   3. [Potencial el´ectrico](#_bookmark118) 126
   4. [Capacidad y condensadores](#_bookmark120) 131
   5. [Corriente el´ectrica](#_bookmark127) 137
   6. [Resistencia](#_bookmark129) 139
   7. [Fuentes de fuerza electromotriz](#_bookmark135) 144
   8. [Potencia el´ectrica](#_bookmark138) 146
   9. [Tabla resumen](#_bookmark141) 150
   10. [Problemas resueltos](#_bookmark142) 152
4. [Circuitos de corriente continua](#_bookmark143) 167
   1. [Leyes de Kirchhoff](#_bookmark144) 167
   2. [Circuitos equivalentes de Th´evenin y de Norton](#_bookmark150) 171
   3. [Circuitos de corriente continua con condensadores](#_bookmark160) 178
   4. [Tabla resumen](#_bookmark164) 182
   5. [Problemas resueltos](#_bookmark165) 183
5. [Magnetismo e inducci´on](#_bookmark166) 197
   1. [Imanes y solenoides](#_bookmark167) 197
   2. [Inducci´on electromagn´etica](#_bookmark171) 199
   3. [Autoinduccio´n](#_bookmark177) 202

´INDICE GENERAL v

* 1. [Generadores el´ectricos de corriente alterna](#_bookmark182) 205
  2. [Transformadores](#_bookmark186) 208
  3. [Tabla resumen](#_bookmark191) 212
  4. [Problemas resueltos](#_bookmark192) 214

1. [Circuitos de corriente alterna](#_bookmark193) 225
   1. [Resistencias en corriente alterna](#_bookmark194) 225
   2. [Condensadores en corriente alterna](#_bookmark197) 228
   3. [Inductores en corriente alterna](#_bookmark200) 231
   4. [Nu´meros complejos](#_bookmark203) 233
   5. [Fasores, impedancias y ley de Ohm genaralizada](#_bookmark205) 236
   6. [Potencias activa, reactiva y aparente](#_bookmark210) 239
   7. [Tabla resumen](#_bookmark211) 243
   8. [Problemas resueltos](#_bookmark212) 244

**Cap´ıtulo 1 Gases**

Estudiamos la ecuaci´on de estado del gas ideal que relaciona la presi´on con el nu´mero de part´ıculas, el volumen y la tempera- tura. A trav´es de ´esta, junto con una expresi´on cin´etica para la presi´on, obtenemos la energ´ıa interna del gas ideal que toma dis- tintas formas segu´n se trate de un gas monoat´omico, diat´omico o poliat´omico. Finalmente, analizamos la dilataci´on en l´ıquidos y solidos, lo que nos permite relacionar variaciones de volumen con cambios de temperatura.

## 1.1. Gases ideales

Debido a la pequen˜a densidad de los gases, sus mol´eculas est´an en pro- medio bastante separadas unas de otras en comparaci´on con su taman˜o. De este modo, las part´ıculas siguen un movimiento rectil´ıneo y uniforme excepto cuando colisionan de forma el´astica entre ellas o con las paredes del recipien- te que contiene el gas. Sin embargo, a pesar de la aparente simplicidad de los gases, una *descripci´on microsc´opica* de los mismos que nos proporcione la posiciones y velocidades de las mol´ecula en todo instante de tiempo es imposible, pues hay demasiadas (un cent´ımetro cu´bico de aire contiene unas 2*,*7 *·* 1019 mol´eculas).

Afortunadamente, au´n es posible recurrir a una *descripci´on macrosc´opica* de los gases que tiene en cuenta un conjunto pequen˜o de variables (ma- crosc´opicas), tales como la presi´on *p*, el volumen *V* y la temperatura *T* .

1

Estas variables o magnitudes determinan los estados de equilibrio del gas, es decir, situaciones estacionarias (independientes del tiempo) que los sistemas alcanzan cuando est´an aislados (no intercambian energ´ıa con su exterior). Vamos a estudiar estas propiedades macrosc´opicas y c´omo se relacionan con los valores medios de las cantidades microsc´opicas.

Como la cantidad de part´ıculas de un gas macrosc´opico es enorme, se usa tambi´en como unidad de cantidad de materia el *mol*, que es la cantidad de materia que contiene

*NA* = 6*,*022 *·* 1023 part´ıculas*,*

sean ´estas ´atomos, mol´eculas, iones, etc. El nu´mero *NA* se llama *nu´mero de Avogadro* y se defini´o inicialmente como el nu´mero de ´atomos que hay en 12 g de carbono. Como el nu´mero de moles se usa para part´ıculas muy diferentes, se suele especificar de qu´e part´ıculas se trata. As´ı, tenemos moles de ´atomos, de mol´eculas, etc.

La *masa molar* de un elemento es la masa de un mol. Usando la tabla peri´odica podemos ver, por ejemplo, que un mol de mol´eculas de O2 tiene una masa muy aproximada de 32 g. Para el aire, formado principalmente por un 76 % de N2, un 23 % de O2 y un 1 % de Ar, la masa molar es muy aproximadamente de 29 g*/*mol.

Supongamos *n* moles de gas dentro de un recipiente de volumen *V* a una temperatura *T* . El gas ejercer´a una presi´on *p* que obedecer´a, en buena aproximaci´on, la *ley de los gases ideales*

*nRT*

*p* = *,*

*V*

donde *R* = 8*,*31 J*/*(mol K) es la *constante universal de los gases*. En la ley de los gases ideales, la temperatura *T* se mide en la *escala absoluta de tem- peraturas (Kelvin)*, en la cual el punto de congelaci´on del agua corresponde a *T* = 273*,*15 K, y su punto de ebullici´on a *T* = 373*,*15 K. Aunque la escala absoluta de temperaturas es la u´nica con significado fundamental, es de uso comu´n la *escala Celsius*, definida tal que *TC* = *T* 273*,*15 *o*C. En ella, el punto de congelaci´on del agua es 0 *o*C y su punto de ebullici´on es 100 *o*C.

*·*

*−*

La ley de los gases ideales es una relaci´on simple entre las cantidades macrosc´opicas que caracterizan un gas. En condiciones normales de densidad y presi´on, los gases reales obedecen esta ley bastante bien, pero si un gas se comprime hasta llegar a tener una densidad muy alta, su comportamiento se

* 1. *GASES IDEALES* 3

desviar´a del de un gas ideal. Un *gas ideal* es uno que obedece exactamente la ecuaci´on anterior, y es el caso l´ımite de un gas real cuando la densidad y presi´on tienden a cero. Podemos pensar en un gas ideal como consistente en a´tomos o mol´eculas de taman˜o infinitesimal que no ejercen fuerzas entre ellas o sobre las paredes del recipiente que los contiene excepto en los brev´ısimos instantes en los que se produce una colisi´on.

La ley de los gases ideales se puede escribir tambi´en en t´erminos del *nu´mero de part´ıculas* (´atomos o mol´eculas) *N* . Como el mol es la cantidad de materia que contiene exactamente el nu´mero de Avogadro *NA* de part´ıculas, resulta que se puede escribir

*N* = *nNA,*

de manera que la ley de los gases ideales se expresa

*N*

*pV* = *nRT* =

*NA*

*R*

*RT* = *N*

*NA*

*T* = *NkBT,* (1.1)

donde la cantidad

*R*

*kB* =

*N*

= 1*,*38 *·* 10*−*23 J*/*K

*A*

se llama *constante de Boltzmann*.

**Ejemplo 1.1.1** *Un man´ometro es un aparato de medida que nos pro-*

*porciona la presi´on de un gas tomando como referencia (cero) la pre- si´on atmosf´erica. Uno de estos aparatos nos proporciona una medida de* 500 *kPa para un gas (ideal) cuando su temperatura es de* 10 *oC. Si el gas no sale ni entra de su recipiente y la presi´on atmosf´erica se mantiene a*

1 *atm ~* 101 *kPa, queremos calcular la presi´on del gas cuando el gas est´a*

*a* 40*oC.*

***Sol.*** *El nu´mero de moles y el volumen del gas en el interior del reci- piente se mantienen constantes. Segu´n la ecuaci´on de estado de los gases ideales, esto implica, entre un estado 1 y un estado 2, que*

*pV* = *nRT ⇒*

=

*T*

*p*

*nR*

*V*

= *constante ⇒ p*2 = *p*1 *T*

*T*2

1

*Un aspecto clave es que se nos pide la presi´on interna o manom´etrica del gas, que se define como la diferencia entre la presi´on del gas p y la*

*presi´on atmosf´erica p*0*, es decir, aquella presi´on pman tal que*

*p* = *p*0 + *pman.*

*En el estado 1,*

*p*1 = *p*0 + *pman,*1 = 101 *kPa* + 500 *kPa* = 601 *kPa.*

*Usando la primera ecuaci´on, en el estado 2,*

*p*2 = *p*1 *T* = 601 *kPa* 273*,*15 + 10 *~* 665 *kPa.*

*T*2

273*,*15 + 40

1

*La presi´on manom´etrica final es, entonces,*

*pman,*2 = *p*2 *− p*0 *~* 665 *−* 101 = 564 *kPa.*

## Presi´on cin´etica

La presi´on ejercida por un gas sobre el recipiente que lo contiene se debe a los impactos de las mol´eculas del gas contra las paredes. Se puede saber cu´anto vale esta presi´on a partir de los valores medios del movimiento de las mol´eculas, lo que permite comprender c´omo una propiedad macrosc´opica (la presi´on) emerge del comportamiento microsc´opico de las mol´eculas indivi- duales del gas.

Supondremos que el recipiente es un cubo de lado *L*, que las mol´eculas chocan con las paredes pero no lo hacen entre s´ı y que las colisiones con las paredes son el´asticas, as´ı que se conservan el momento lineal y la energ´ıa cin´etica en cada choque. Estas suposiciones no son absolutamente necesarias pero hacen los c´alculos m´as sencillos.

En la figura [1.1](#_bookmark4) vemos una representaci´on esquem´atica del recipiente lleno de mol´eculas de gas. El movimiento de cada mol´ecula se puede descomponer en componentes *x*, *y*, *z*, todas ellas equivalentes por la simetr´ıa de la situaci´on. Veamos el movimiento en el eje *x*.

Una mol´ecula dada tiene, a lo largo del eje *x*, una velocidad *vx* que su- pondremos positiva y cuyo valor permanece constante hasta colisionar con la pared en *x* = *L*, por sufrir s´olo colisiones el´asticas con las paredes. Cuando la mol´ecula choca con la pared en *x* = *L*, le transfiere un momento lineal igual

* 1. *PRESIO´N CINE´TICA* 5

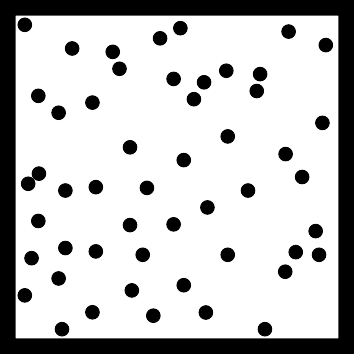


Figura 1.1: Representaci´on esquem´atica de un gas ideal.

a 2*mvx*, donde *m* es la masa de la mol´ecula. Si, ademas, suponemos que la mitad de las part´ıculas *N/*2 tienen velocidad *vx* y la otra mitad *vx*, enton- ces la fuerza promedio *f* ejercida por las mol´eculas del gas sobre la pared es igual al cambio de momento en cada colisi´on, 2*mvx*, multiplicado por *N/*2 y dividido por el tiempo que tardan en colisionar *L/vx*:

*−*

*m v*2

*x*

*f* = *N . L*

La presi´on del gas sobre la pared es la fuerza dividida por el a´rea *S* = *L*2 de la pared, de modo que

*f Nmv*2

*x*

=

*S L*3

*N mv*2

= *,*

*x*

*V*

donde *V* = *L*3 es el volumen total del gas.

Hemos supuesto en el c´alculo anterior que todas las mol´eculas tienen la misma velocidad en m´odulo, pero esto no es verdad: las velocidades de las mol´eculas tienen cierta distribuci´on. La fuerza promedio por unidad de a´rea proporciona la presi´on. De este modo, hemos de reemplazar la cantidad *v*2

*x*

en la f´ormula de la presi´on del gas por el valor medio *v*2, llegando a

*x*

*Nmv*2 *p* = *x .*

*V*

Por la simetr´ıa del problema, el movimiento en cada uno de los ejes *x*, *y*, *z*

es b´asicamente el mismo, por lo que los valores promedios de las velocidades

al cuadrado son todos iguales, esto es, *v*2

*x*

= *v*2

= *v*2. El valor medio del

cuadrado de la velocidad de las mol´eculas cumple entonces

*y*

*z*

*v*2 = *v*2 + *v*2 + *v*2 = 3*v*2*.*

*x y z x*

De aqu´ı, la presi´on se puede escribir como

*Nmv*2

*p* =

3*V*

*,* (1.2)

que es el resultado que busc´abamos, relacionando *p* con los valores promedio del movimiento de las mol´eculas. Se suele llamar a esta expresi´on la f´ormula de la *presi´on cin´etica*.

En el caso de un gas ideal, la f´ormula de la presi´on permite interpretar microsc´opicamente la temperatura, obteniendo un significado f´ısico para ella. Usamos la ley de los gases ideales en la forma *pV* = *NkBT* . Despejando *p* de aqu´ı e introduciendo el resultado en la f´ormula de la presi´on, obtenemos

*mv*2

*T* = *,*

3*kB*

o bien, en t´erminos del valor medio del cuadrado de la velocidad,

*v*2 = 3*kBT .*

*m*

La ra´ız cuadrada del valor medio *v*2 se llama *velocidad cuadr´atica media vrms*

y cumple

*vrms*

= *v*2 = 3*kBT ,* (1.3)

*m*

lo que indica que la velocidad cuadr´atica media de las mol´eculas de un gas au- menta cuando la temperatura del gas aumenta. Esto relaciona el concepto de temperatura con una medida de la rapidez del movimiento de las part´ıculas.

**Ejemplo 1.2.1** *Podemos aprovechar la relaci´on* [(1.3)](#_bookmark6) *para hacernos una idea de la velocidad a la que van las mol´eculas del aires en condiciones f´ısicas normales. Para ello, podemos calcular la velocidad cuadr´atica me- dia de la mol´ecula de nitr´ogeno y de ox´ıgeno a* 15*oC, por ejemplo.*

***Sol.*** *Para poder usar la ecuaci´on* [(1.3)](#_bookmark6)*, necesitamos la masa de la mol´ecu-*

*la en cuesti´on. La masa de una mol´ecula de N*2 *es*

*m* =

*M* (*N*2) 28 *·* 10*−*3

*NA*

=

6*,*022 *·* 1023

*~* 4*,*65 *·* 10 *kg,*

*−*26

*de modo que su velocidad cuadr´atica media es*

*v*(*N*2) =

3*k T* 3 *·* 1*,*38 *·* 10*−*23 *·* (273*,*15 + 15)

*B*

*m*

*~*

4*,*65 *·* 10*−*26

*~* 507 *m/s.*

*Para el ox´ıgeno,*

*m* =

*M* (*O*2) 32 *·* 10*−*3

*NA*

=

6*,*022 *·* 1023

= 5*,*31 *·* 10 *kg,*

*−*26

*por lo que*

*v*(*O*2) =

3*k T* 3 *·* 1*,*38 *·* 10*−*23 *·* (273*,*15 + 15)

*B*

*m*

=

5*,*31 *·* 10*−*26

= 474 *m/s.*

## Energ´ıa interna de un gas ideal

Consideremos un gas encerrado en un recipiente. La energ´ıa de este sis- tema tiene varias contribuciones. Una de ellas es la energ´ıa cin´etica del mo- vimiento macrosc´opico del sistema como un todo (podemos llevarnos el re- cipiente de un lado a otro a cierta velocidad, o rotarlo con cierta velocidad angular); otra es la energ´ıa potencial macrosc´opica del sistema, con sus contri- buciones gravitatoria, el´astica, electrost´atica, etc; y otra es la energ´ıa cin´etica y potencial microsc´opica de las mol´eculas del gas cuando el recipiente est´a en reposo. Esta u´ltima contribuci´on es la que nos interesa ahora, y se llama *energ´ıa interna U* del gas.

En un gas ideal, las mol´eculas no interaccionan entre s´ı a menos que choquen, de manera que su energ´ıa potencial de interacci´on no var´ıa y puede tomarse como nula eligiendo el origen de energ´ıas apropiadamente (en un gas real, en un l´ıquido o en un s´olido s´ı han de considerarse variaciones de energ´ıa potencial para la energ´ıa interna). Esto implica que s´olo hemos de tener en cuenta la energ´ıa cin´etica de las mol´eculas, pudiendo escribir la

energ´ıa interna como

*U* = *NEc,*

donde *N* es el nu´mero de mol´eculas y *Ec* la energ´ıa cin´etica media de cada una de ellas, que se expresa

*E* = 1 *mv*2*.*

*c* 2

Usando la relaci´on de *v*2 con *T* obtenida en el apartado anterior, llegamos a

*U* = 1 3*kBT* 3 3

*N* 2 *m m* = 2 *NkBT* = 2 *nRT.* (1.4)

En este c´alculo hemos supuesto impl´ıcitamente que las mol´eculas del gas son puntuales, sin estructura. Esto es v´alido en el caso de *gases monoat´omicos* como el helio o el arg´on, pero no en general.

Los *gases diat´omicos*, como los compuestos por *N*2 y *O*2, tienen, adem´as del movimiento traslacional de sus mol´eculas, otros movimientos posibles. Podemos ver las mol´eculas de estos gases como dos a´tomos puntuales unidos entre s´ı r´ıgidamente por una varilla, como se representa en la figura [1.2.](#_bookmark9) Al colisionar con la pared del recipiente, estas mol´eculas pueden empezar a rotar respecto a su centro de masas. As´ı, hay que tener en cuenta tambi´en la energ´ıa cin´etica de rotaci´on respecto a dos ejes perpendiculares entre s´ı y que pasan por el centro de masas de las mol´eculas, ejes que vemos en la figura [1.2.](#_bookmark9)



Figura 1.2: Representaci´on esquem´atica de una mol´ecula diat´omica.

En el caso de los gases monoat´omicos, los valores medios de las cantidades

*v*2, *v*2, *v*2 contribuyen de la misma manera a la energ´ıa interna del gas. Esto

*x y z*

ocurre tambi´en para el movimiento de rotaci´on. El resultado general se conoce

con el nombre de *teorema de equipartici´on de la energ´ıa*: cada componente traslacional o rotacional del movimiento de una mol´ecula tiene una energ´ıa

cin´etica media de valor 1 *kBT* . Aplicando este teorema, la energ´ıa cin´etica media de rotaci´on de una mol´ecula de un gas diat´omico ser´a

2

1 1

*Ec,rot* = 2 *kBT* + 2 *kBT* = *kBT,*

y la *energ´ıa interna de un gas diat´omico*, considerando tambi´en el movimiento de traslaci´on, ser´a

3 5 5

*U* = 2 *NkBT* + *NkBT* = 2 *NkBT* = 2 *nRT.* (1.5)

Para *gases poliat´omicos* con mol´eculas que no poseen simetr´ıa de rotaci´on, como la del vapor de agua, hay que tener en cuenta la posibilidad de rotaci´on respecto a un tercer eje. Esto implica que hemos de an˜adir un t´ermino m´as, de valor 1 *kBT* , con lo que la energ´ıa interna resulta

2

5 1

*U* = 2 *NkBT* + 2 *NkBT* = 3*NkBT* = 3*nRT.* (1.6)

*.*

**Ejemplo 1.3.1** *Podemos utilizar las expresiones obtenidas de la energ´ıa*

*interna para determinar cu´anta energ´ıa se necesita para calentar un gas ideal. Tomemos, por ejemplo,* 100 *g de helio a* 10 *oC y calculemos la energ´ıa necesaria para calentarlo hasta* 40*oC.*

***Sol.*** *El helio es un gas monoat´omico con una masa molar M* (*He*) = 4 *g/mol. Aunque no nos lo pidan, vamos a calcular tambi´en la energ´ıa interna de* 100 *g de helio a* 10*oC. Por ser monoat´omico, su energ´ıa in- terna se puede escribir como*

*U* = *nRT* =

3

2

3 *m*

2 *M* (*He*)

*RT* = *·*

3 0*,*1

4

2 4 *·* 10

*−*3

*·*8*,*31*·*(273*,*15+10) = 8*,*85*·*10 *J.*

*Cuando la temperatura del helio cambia, su variaci´on de energ´ıa interna*

*es*

∆*U* = *nR* ∆*T* =

3

2

3 *m*

2 *M* (*He*)

*R* ∆*T* = *·*

3 0*,*1

2 4 *·* 10

*−*3

*·*8*,*31*·*(40*−*10) = 9*,*35

*·*10 *J*

3

*Dado que la energ´ıa del gas crece al aumentar la temperatura, esta es la*

*energ´ıa que debemos proporcionarle para conseguirlo.*

## Dilatacio´n t´ermica de s´olidos y l´ıquidos

Segu´n la ley de los gases ideales que hemos estado estudiando, a presi´on constante el volumen de un gas crece linealmente con la temperatura. Tal au- mento de volumen ocurre tambi´en para s´olidos y l´ıquidos, aunque de forma mucho m´as modesta. Este fen´omeno se llama *dilataci´on t´ermica*. Durante la dilataci´on, el s´olido mantiene su forma pero sus dimensiones crecen propor- cionalmente. Los l´ıquidos no tiene que mantener ninguna forma y s´olo llenan m´as el recipiente que los contiene.

La dilataci´on t´ermica de un s´olido se puede describir matem´aticamente por el aumento de sus dimensiones lineales. Para muchos s´olidos, y en un intervalo de temperaturas cercanas a la temperatura ambiente, el aumento

∆*L* de su longitud *L*0 es proporcional al aumento de temperatura ∆*T* , de manera que

∆*L* = *αL*0∆*T ⇒ L* = *L*0 [1 + *α*(*T − T*0)] *.* (1.7)

La constante de proporcionalidad *α* se llama *coeficiente de dilataci´on lineal* y su unidad es K*−*1. De manera an´aloga, el incremento ∆*V* de volumen *V*0 de un s´olido sigue una ley similar,

∆*V* = *βV*0∆*T ⇒ V* = *V*0 [1 + *α*(*T − T*0)] *,* (1.8)

siendo *β*, tambi´en medido en K*−*1, el *coeficiente de dilataci´on volum´etrica*. Se puede demostrar que, para el mismo s´olido en las mismas condiciones,

*β* = 3*α.*

La f´ormula de la dilataci´on volum´etrica de los s´olidos sirve tambi´en para los l´ıquidos.

La dilataci´on t´ermica ha de tenerse en cuenta en el disen˜o de estructuras de grandes dimensiones, tales como puentes y v´ıas de tren. Las cubiertas de los puentes tienen normalmente juntas de dilataci´on con huecos que per- miten cambios de longitud, evitando que el puente se combe. Tambi´en se instalan juntas de dilataci´on entre los segmentos de las v´ıas de tren, pero si la temperatura excede las expectativas, los resultados pueden ser desastrosos.

* 1. *DILATACIO´N TE´RMICA DE SO´LIDOS Y L´IQUIDOS* 11

**Ejemplo 1.4.1** *Tomemos un material s´olido que tiene un coeficiente de*

*dilataci´on lineal de* 5 *·* 10*−*9*/oC. Calculemos el incremento de temperatura*

*necesario para aumentar su volumen en un* 10*−*4 %*.*

***Sol.*** *El coeficiente de dilataci´on volum´etrica del s´olido se relaciona con el lineal mediante*

*β* = 3*α* = 3 *·* 5 *·* 10*−*9 = 15 *·* 10*−*9 *K−*1*.*

*El aumento de volumen del s´olido es*

∆*V* = *βV*0 ∆*T*

*⇒*

∆*V*

*V*

= *β* ∆*T.*

0

*Despejando el aumento de temperatura,*

∆*T* =

1 ∆*V*

1

10*−*4

*o*

*β V*0 15 *·* 10*−*9 100

=

= 66*,*7 *C.*

## Tabla resumen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fo´rmula/magnitud | Definici´on | Ecuaci´on |
| *pV* = *nRT* = *NkBT*  *p* | Ecuaci´on de estado del gas ideal Presi´on | [(1.1)](#_bookmark2) |
| *V* | Volumen |  |
| *n* | Nu´mero de moles |  |
| *R* | Constante universal de los gases |  |
| *T* | Temperatura en escala absoluta |  |
| *N* | Nu´mero de mol´eculas |  |
| *kB* | Constante de Boltzmann |  |
| *p* = *Nmv*2  3*V*  *m v*2  *vrms* = 3*kBT*  *m* | Fo´rmula de la presi´on cin´etica | [(1.2)](#_bookmark5) |
| Masa de las mol´eculas |  |
| Valor medio del cuadrado de la |  |
| velocidad de las mol´eculas |  |
| Velocidad cuadr´atica media | [(1.3)](#_bookmark6) |
| *U* = 3 *nRT* 2  *U* = 5 *nRT* 2  *U* = 3*nRT* | Energ´ıa interna gas ideal monoat´omico | [(1.4)](#_bookmark8) |
| Energ´ıa interna gas ideal diat´omico | [(1.5)](#_bookmark10) |
| Energ´ıa interna gas ideal poliat´omico | [(1.6)](#_bookmark11) |
| ∆*L* = *L*0 [1 + *α*(*T − T*0)]  ∆*L* = *L − L*0 | Dilataci´on lineal de s´olidos Longitud a la temperatura *T* menos la longitud a la temperatura *T*0 | [(1.7)](#_bookmark13) |
| *α* | Coeficiente de dilataci´on lineal |  |
| ∆*V* = *V*0 [1 + *α*(*T − T*0)]  ∆*V* = *V − V*0 | Dilataci´on volum´etrica en s´olidos y l´ıquidos Volumen a la temperatura *T* menos  el volumen a la temperatura *T*0 | [(1.8)](#_bookmark14) |
| *β* | Coeficiente de dilataci´on volum´etrica |  |

## Problemas resueltos

* + 1. Un gas ideal est´a encerrado en un cilindro provisto de un pist´on a la presi´on ambiente (1 atm). Por medio del pist´on disminuimos el volumen del gas hasta una d´ecima parte de su valor inicial. Teniendo en cuenta que la temperatura final del gas es igual a la inicial, determina la lectura de presi´on manom´etrica.

**Sol.** El nu´mero de moles y la temperatura son iguales entre el estado inicial 1 y el final 2, de manera que, por la ecuaci´on de estado de los gases ideales,

*pV* = *nRT* = constante *⇒ p*2

= *p V*1 *.*

1 *V*

2

La presi´on inicial es la ambiental, por lo que *p*1 = *p*0 = 1 atm = 101 kPa. La presi´on en el estado 2 ser´a

*V*1

*p*2 = *p*1 = *p*

*V*

2

*V*1

0 *V /*10 = 10 *p*0*.*

1

La presi´on manom´etrica final estar´a dada por

*pman,*2 = *p*2 *− p*0 = 10 *p*0 *− p*0 = 9 *p*0 = 9 *·* 101 kPa = 909 kPa*.*

* + 1. Un litro de gas ideal tiene una presi´on y temperatura de 1 atm y 30 *o*C, respectivamente. Calcula la presi´on de la misma cantidad de gas si su volumen se reduce a medio litro y su temperatura se eleva hasta los 30 *o*C.

*−*

**Sol.** El nu´mero de moles se mantiene constante en el proceso, de manera que

*pV*

*pV* = *nRT ⇒ T*

= *nR* = constante *⇒ p*2

= *p V*1*T*2 *.*

1 *V T*

2 1

Poniendo los datos en la u´ltima ecuaci´on, resulta

10*−*3 (273*,*15 + 30)

*·*

*p*2 = 101 kPa 0*,* 5 *·* 10*−*3 *·* (273*,*15 *−* 30) *~* 252 kPa*.*

* + 1. Cierta cantidad de hidr´ogeno (gas ideal) ocupa 120 cm3, tiene una tem- peratura de 15 *o*C de temperatura y est´a a 150 kPa de presi´on. Calcula

su volumen cuando su temperatura es 15 *o*C y su presi´on vale 300 kPa.

*−*

**Sol.** Dado que el nu´mero de moles es constante,

*pV*

*pV* = *nRT ⇒ T*

= *nR* = constante *⇒ V*2

= *V p*1*T*2 *.*

1 *p T*

2 1

Con los datos del ejercicio,

*V* = 120 cm3 150 *·* (273*,*15 *−* 15) 53*,*8 cm3*.*

*~*

2

300 *·* (273*,*15 + 15)

* + 1. El gas de N2 se pude considerar un gas ideal en un rango muy amplio de presiones y temperaturas. Teniendo en cuenta que a 1 atm y 0 *o*C su densidad es de 1*,*25 kg*/*m3, calcula su densidad a 98 kPa y 15 *o*C.

**Sol.** La relaci´on entre la densidad de una masa *m* de gas en el estado 2 y la densidad de la misma masa en el estado 1 se puede obtener a partir de su cociente,

*ρ*2 = *m/V*2 *ρ*1 *m/V*1

= *V*1

*V*2

*⇒ ρ*2

*V*1

= *ρ*1

*V*

2

Usamos ahora la ecuaci´on de estado de los gases ideales para calcular *V*1*/V*2, teniendo en cuenta que el nu´mero de moles es el mismo en ambos estados (ya que la masa lo es),

Con todo esto,

*nR* = *p*1*V*1

*T*1

= *p*2*V*2

*T*2

*V*1

*⇒ V*2

= *p*2*T*1 *. p*1*T*2

*V*1

*ρ*2 = *ρ*1 *V*

2

*p*2*T*1

= *ρ*1 *p T*

1

2

= 1*,*25 98 *·* (273*,*15 + 0) 1*,*15 kg*/*m3*.*

101 *·* (273*,*15 + 15)

*~*

* + 1. Calcula la masa de ox´ıgeno contenida en un recipiente de 3 *,e* a una presi´on manom´etrica de 300 kPa y a una temperatura de 25 *o*C.

**Sol.** El nu´mero de moles de O2 en el tanque es

*pV*

*n* = *.*

*RT*

De aqu´ı, la masa de gas, conociendo su masa molar que en este caso es

*M* (O2) = 32 g*/*mol, se puede obtener como

*m* = *n M* (O ) = *pV M* (O2)

2 *RT*

(300 + 101) *·* 103 *·* 3 *·* 10*−*3 *·* 32 *·* 10*−*3 *−*3

= 8*,*31 *·* (273*,*15 + 25) *~* 15*,*5 *·* 10

kg*.*

* + 1. Un recipiente de 50 cm3 de volumen contiene 5 mg de nitr´ogeno l´ıquido. Si calentamos el sistema hasta que alcanza 25 *o*C, calcula la presi´on del gas en el nuevo estado.

**Sol.** El nitr´ogeno l´ıquido no es un gas ideal pero, al llegar el tubo a temperatura ambiente, todo el l´ıquido se ha convertido en gas de N2, cuya masa molar es *M* (N2) = 28 g*/*mol. El nu´mero de moles de este

gas en el recipiente es

*m*

*n* = *.*

*M* (N2)

La presi´on resulta

*nRT*

*mRT*

5 *·* 10*−*6 *·* 8*,*31 *·* (273*,*15 + 25)

*p* = = =

*V M* (N2)*V*

28 *·* 10*−*3 *·* 50 *·* 10*−*6 *~* 8850 Pa*.*

* + 1. Calcula la masa molar de un gas ideal sabiendo que, cuando su tempe- ratura es de 20 *o*C y su presi´on de 1 atm, ocupa 1*,*5 litros y su masa es de 2*,*8 g.

**Sol.** Tomando *m* = *n Mm*, donde *Mm* es la masa molar del gas, de la ecuaci´on de estado de los gases ideales, tenemos

*m*

*pV* = *nRT* = *RT*

*Mm*

*⇒ Mm* =

*mRT*

=

*pV*

2*,*8 10*−*3 8*,*31 (273*,*15 + 20)

101 *·* 103 *·* 1*,*5 *·* 10*−*3 *~* 0*,*0450 kg*/*mol*.*

*· · ·*

* + 1. Teniendo en cuenta que la masa molar del metano es de 16 g*/*mol, calcula su densidad a 25 *o*C y 4 atm.

**Sol.** De la ecuaci´on de los gases ideales,

*nRT*

*V* = *.*

*p*

La densidad del gas se puede escribir (usando *m* = *n Mm*) como

*m*

*ρ* = =

*V*

*mp nRT*

= *Mmp* =

*RT*

16 *·* 10*−*3 *·* 4 *·* 101 *·* 103

8*,*31 *·* (273*,*15 + 25)

= 2*,*61 kg*/*m3*.*

* + 1. Un recipiente de 2 m3de volumen contiene 3 moles de *N*2 en equlibrio a 400 kPa de presi´on. Calcula la velocidad cuadr´atica media de las

mol´eculas.

**Sol.** La velocidad cuadr´atica viene dada por

*vrms*

= 3*kBT*

*m*

donde la temperatura *T* = *pV*

*nR*

y la masa de una mol´ecula de *N*2 es

*m* = *M* , siendo *M* = 28 g/mol la masa molar de *N*2. Sustituyendo las

*N*

*A*

dos u´ltimas f´ormulas en la primera

*v* = 3*pV kBNA* = 3*pV ,*

donde hemos usado que *kBNA*

*R*

*rms*

*nM*

*R*

*nM*

= 1. Sustituyendo los valores

*vrms* =

3 400 103 2

3 *·* 28 *·* 10*−*3 *~* 5350 m/s*.*

*· · ·*

* + 1. Calentamos un dep´osito de gas que contiene 50 litros de N2 a 250 K y 200 atm hasta 350 K. Calcula el aumento de la energ´ıa interna del gas. **Sol.** El nu´mero de moles puede extraerse de la ecuaci´on de los gases ideales en su estado inicial,

*n* = *p*1*V*1 *.*

*RT*1

La variaci´on de energ´ıa interna, dado que el gas es diat´omico, es

∆*U* = 5 *nR* ∆*T* = 5 *p*1*V*1*R* (*T*

5*p*1*V*1

*— T* ) = (*T*

2

1

*— T* )

2 2 *RT*1 2*T*1

5 *·* 200 *·* 101 *·* 103 *·* 50 *·* 10*−*3 6

2

1

= 2 *·* 250 *·* (350 *−* 250) *~* 1*,*01 *·* 10 J*.*

* + 1. Teniendo en cuenta que al incrementar la temperatura de un s´olido en 2 *o*C su volumen aumenta en un 10*−*5 %, calcula su coeficiente de dilataci´on volum´etrica.

**Sol.** El aumento relativo de volumen de un s´olido se relaciona con el incremento de su temperatura segu´n la expresi´on

∆*V*

∆*V* = *βV*0 ∆*T ⇒*

= *β* ∆*T.*

*V*0

Despejando el coeficiente de dilataci´on, tenemos

∆*V* 1

10*−*5 1

*−*8 *−*1

*β* = =

*V*0 ∆*T*

100

2 = 5 *·* 10 K *.*

* + 1. Teniendo en cuenta que la densidad del mercurio a 0 *o*C es de 13600 kg*/*m3 y su coeficiente de dilataci´on volum´etrica es de 1*,*82 10*−*4 K*−*1, calcula su densidad a 20 *o*C.

*·*

**Sol.** La densidad de una masa *m* de mercurio a temperatura *T* se re- laciona con la densidad de la misma masa a temperatura *T*0 segu´n

*ρ m/V*

=

*ρ*0 *m/V*0

= *V*0

*V*

*ρ*0

*⇒ ρ* = *V/V .*

0

Para calcular *V/V*0, usamos la ley de dilataci´on volum´etrica:

*V*

*V* = *V*0 (1 + *β* ∆*T* ) *⇒*

= 1 + *β* ∆*T.*

*V*0

Poniendo esto en la ecuaci´on anterior, obtenemos

*ρ* = *ρ*0 = *ρ*0 = 13600 *~* 13551 kg*/*m3*.*

*V/V*0 1 + *β* ∆*T* 1 + 1*,*82 *·* 10*−*4 *·* 20

* + 1. Almacenamos aceite en una botella de vidrio de 1 *,e*. Teniendo en cuenta que la botella est´a completamente llena, calcula el aceite que se derrama si se aumenta la temperatura en 20 *o*C. Ten en cuenta que el coeficiente de dilataci´on volum´etrica del aceite es de 0*,*7 10*−*3*/o*C y el coeficiente de dilataci´on lineal del vidrio de 10*−*5*/o*C.

*·*

**Sol.** El volumen inicial de aceite que est´a dentro de la botella es *V*0 = 10*−*3 m3. El volumen final es

*Vaceite* = *V*0(1 + *β* ∆*T* ) = 1 + 0*,*7 *·* 10*−*3 *·* 5 = 1*,*014 *,e.*

Por su parte, el interior de la botella de vidrio aumenta como si fuera maciza, es decir,

*Vhueco* = *V*0(1 + 3*α* ∆*T* ) = 1 + 3 *·* 10*−*5 *·* 20 = 1*,*00006 *,e.*

El aceite que se derrama al aumentar la temperatura es, por tanto,

*Vderramado* = *Vaceite − Vhueco* = 1*,*014 *−* 1*,*00006 = 1*,*34 *·* 10*−*2 *,e.*

# Cap´ıtulo 2 Calor

Estudiamos los mecanismos m´as frecuentes de transmisi´on del calor: conducci´on, convecci´on y radiaci´on. En el primer caso, la conducci´on t´ermica se establece a trav´es de uno o m´as materiales sometidos a una diferencia de temperaturas, tal como establece la ley de Fourier. En el caso de la radiaci´on, el flujo de calor se produce por una diferencia de temperaturas entre el cuerpo radiante y su entorno, de acuerdo con la ley de radiaci´on de

Stefan-Boltmzann. En la u´ltima parte del tema vemos que las

consecuencias m´as notorias de la absorci´on de calor en l´ıquidos o solidos son el cambio de temperatura y/o de fase.

## El calor como forma de transferencia de energ´ıa

La *energ´ıa interna* de un cuerpo es la que poseen sus part´ıculas (´atomos, mol´eculas, etc) en un sistema de referencia en que el cuerpo est´a en reposo. En la energ´ıa interna se incluyen la energ´ıa cin´etica del movimiento de las part´ıculas del cuerpo y la energ´ıa potencial interna de las part´ıculas (por interacciones entre sus componentes y con otras part´ıculas).

Llamamos *calor* a la transferencia de energ´ıa a trav´es de la frontera de un cuerpo debida a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y su entorno. Cuando calentamos un cuerpo, le transferimos energ´ıa interna poni´endolo en contacto con otro cuerpo que est´a a una temperatura mayor. Veremos que

19

tambi´en se transfiere calor a un cuerpo cuando ´este cambia de estado (de s´olido a l´ıquido, por ejemplo).

La energ´ıa interna de un sistema se puede cambiar mediante m´etodos que no implican calor. Por ejemplo, cuando se realiza un trabajo macrosc´opico sobre ´el.

El calor, como el trabajo y la energ´ıa, se mide en julios en el SI. Histo´ri- camente se utiliza tambi´en otra unidad, llamada *calor´ıa*, y es tal que 1 cal = 4*,*187 J.

## Algunos mecanismos de transferencia de energ´ıa

Vamos a explorar c´omo se transfiere energ´ıa de un cuerpo a otro por medio de calor cuando est´an en contacto. Este proceso se llama conducci´on t´ermica. Adema´s, estudiaremos otros procesos de transferencia que involu- cran frecuentemente cambios de temperatura: convecci´on (por transferencia de materia) y radiaci´on electromagn´etica.

### Conducci´on

En la *conducci´on t´ermica*, la transferencia de energ´ıa se puede repre- sentar a escala microsc´opica como un intercambio de energ´ıa cin´etica entre part´ıculas, en donde las part´ıculas “fr´ıas” ganan energ´ıa al colisionar con las part´ıculas “calientes”, que pierden parte de su energ´ıa en el proceso. Se necesita, pues, contacto para que haya conducci´on t´ermica.

La conducci´on ocurre s´olo si hay una diferencia de temperatura entre dos partes del medio. Consideremos un material de longitud o espesor ∆*x*

y secci´on de a´rea *S*, como vemos en la figura [2.1.](#_bookmark20) Un extremo o cara del

material se mantiene fr´ıo a una temperatura baja *T*1 y el otro se mantiene caliente a una temperatura alta *T*2.

La transferencia de energ´ıa interna o *flujo de calor* ocurre desde el extremo m´as caliente al extremo m´as fr´ıo del material. Si *Q* es el calor transferido de un extremo a otro en un intervalo de tiempo ∆*t*, el flujo de calor es la rapidez *P* = *Q/*∆*t* con la que se transfiere (es decir, la potencia) y sigue la *ley de conducci´on t´ermica* de Fourier

*P* = *kS* ∆*T ,*

∆*x*

S

S

T1

T2

x

Figura 2.1: Material de secci´on *S* y espesor ∆*x* con su cara izquierda a temperatura *T*1 y su cara derecha a temperatura *T*2.

donde *k* es la *conductividad t´ermica* (una propiedad del material) y ∆*T/*∆*x* es el *gradiente de temperatura*. Los materiales que son buenos conductores t´ermicos tienen altos valores de *k*, mientras que los buenos aislantes t´ermicos tienen valores bajos de *k*. La unidad de conductividad t´ermica en el SI es 1 J*/*(m *·* s *·* K).

**Ejemplo 2.2.1** *Consideremos el caso sencillo de una placa de* 5 *mm*

*de espesor cuyas caras tienen una diferencia de temperaturas de* 50 *oC. Calculemos la conductividad t´ermica de la placa sabiendo que transmite* 3 *cal/s a trav´es de un ´area de* 6 *cm*2*.*

***Sol.*** *En primer lugar, pasemos la potencia que nos dan a unidades del Sistema Internacional:*

*P* = 3 *cal/s* =

3 *cal* 4*,*187 *J*

*s*

1 *cal*

= 12*,*561 *J/s* = 12*,*561 *W.*

*Ahora podemos usar la ecuaci´on de conducci´on:*

*P* = *kS .*

∆*T*

∆*x*

*Despejando la conductividad t´ermica llegamos al resultado buscado*

*P* ∆*x*

*k* = =

*S* ∆*T*

12*,*561 5 10*−*3

6 *·* 10*−*4 *·* 50 *~* 2*,*09 *W/*(*m · K*)*.*

*· ·*

Una de las aplicaciones de la ley de conductividad t´ermica es el *aislamien- to t´ermico* de viviendas. En una situaci´on gen´erica, la pared de una vivienda, por ejemplo, est´a dividida en distintas capas paralelas de igual secci´on pero con distintos espesores y conductividades. Usando que el flujo de calor que atraviesa cada una de las capas es el mismo, podemos escribir el flujo de calor a trav´es la pared con *N* capas como

*P* = *S |*∆*T | ,* (2.1)

*R*

donde se define la *resistencia t´ermica R* de la pared mediante la expresi´on

*N*

L ∆*x*

*R* = *i ,* (2.2)

*ki*

*i*=1

es decir, se calcula sumando los valores de los cocientes ∆*x/k* en cada capa de la pared. La unidad de *R* en el SI es 1 (m2 s K)*/*J. En las superficies abiertas al aire, se adhiere una capa de aire estancado cuyo grosor depende de la velocidad del viento. Este efecto ha de tenerse en cuenta al calcular el valor *R* que se quiere conseguir, ya que la p´erdida de energ´ıa interna de una casa en un d´ıa con viento fuerte es mayor que la misma en un d´ıa de viento suave.

**Ejemplo 2.2.2** *Consideremos un caso pr´actico: calcular el flujo de calor*

*por unidad de tiempo (potencia) por conducci´on a trav´es de una pared de una vivienda, de* 25 *m*2 *de ´area, con y sin aislamiento, cuando el interior est´a a* 22 *oC y el exterior a* 12 *oC. La pared est´a hecha de madera contra-*

*chapada de espesor* 3 *cm y conductividad* 0*,*08 *W/*(*m · K*)*. El aislamiento*

*t´ermico tiene* 8 *cm de espesor y conductividad* 0*,*02 *W/*(*m · K*)*.*

***Sol.*** *Sin el aislamiento, la potencia de conducci´on a trav´es de la pared*

*est´a debida solamente a la placa de madera*

*P* = *kmS* ∆*x* = 0*,*08 *·* 25 *·*

∆*T*

22 *−* 12

*m*

0*,*03

*~* 667 *W.*

*Con el aislamiento, al tener la pared dos capas, primero calculamos el*

*· ·*

*valor R de la pared,*

*R* =

∆*xm*

*km*

+

∆*xa* 0*,*03

*ka* 0*,*08

=

0*,*08

+ = 4*,*375 (*m*2 *· s · K*)*/J.*

0*,*02

*La potencia por conducci´on es*

*P* = *S*

*I*

∆*T*

*R*

= 25 *·*

22

4*,*375

*−*

12

*~* 57*,*1 *W.*

### Conveccio´n

La *convecci´on* es el proceso de transferencia de energ´ıa interna por el que uno se puede calentar las manos coloc´andolas cerca de una llama. Las mol´eculas de aire cercanas a la llama adquieren energ´ıa interna, es decir, se calientan y, por la ley de los gases ideales, esta porci´on de aire se expande. Al expandirse, su densidad se hace menor que la del aire de alrededor y, por tanto, asciende. Mientras lo hace, llega hasta las manos que est´an cerca y las calienta. La energ´ıa transferida por el *movimiento de una sustancia caliente* se dice que ha sido transferida por convecci´on.

Cuando este movimiento, como en el caso de la llama, ocurre por dife- rencias de densidad, tenemos una *convecci´on natural*. Cuando la sustancia caliente es obligada a moverse por un ventilador o una bomba, como en al- gunos sistemas de calefacci´on por aire o agua caliente, el proceso se llama *convecci´on forzada*. Otro ejemplo de convecci´on ocurre cuando una habita- ci´on es calentada por un radiador. El radiador calienta el aire de las zonas m´as bajas de la sala. Este aire se expande y sube hacia el techo por su menor densidad. El aire fr´ıo del techo desciende hacia el suelo y as´ı es calentado, estableci´endose lo que se conoce como *corriente de convecci´on*.

### Radiaci´on

Un tercer mecanismo de transferencia de energ´ıa es la *radiaci´on*, que es el u´nico posible en el vac´ıo. Los campos el´ectricos y magn´eticos son capaces de generar ondas que se propagan a la velocidad de la luz (en el vac´ıo, esta velocidad tiene un valor muy aproximado a 3 108 m*/*s), constituyendo lo que llamamos radiaci´on electromagn´etica.

*·*

El *espectro electromagn´etico* est´a formado por las diferentes formas en que aparecen las ondas electromagn´eticas, que podemos caracterizar por su

frecuencia *f* . Una de las zonas del espectro electromagn´etico, la *radiaci´on infrarroja*, se genera t´ıpicamente por las vibraciones de los ´atomos o mol´eculas de los cuerpos. Debido a esta caracter´ıstica, la radiaci´on infrarroja es tambi´en f´acilmente absorbida por la mayor parte de los materiales y se transforma en energ´ıa interna de esos materiales, ya que la absorci´on agita sus ´atomos o mol´eculas y aumenta su temperatura.

La mayor´ıa de los cuerpos emiten radiaci´on electromagn´etica en la zona infrarroja debido a su temperatura (esto ocurre, por ejemplo, en la emisi´on de un radiador o de un calefactor el´ectrico). No es la u´nica radiaci´on capaz de aumentar la temperatura del cuerpo que la absorba y, de hecho, todas las ondas electromagn´eticas pueden causar el incremento de la temperatura de un sistema, pero nos vamos a centrar en ella por ser la m´as comu´n y eficiente en las aplicaciones t´ermicas. Veamos c´omo cuantificar su emisi´on y su absorci´on.

La rapidez con la que un cuerpo que est´a a una cierta temperatura emite energ´ıa (potencia) viene dada por la *ley de Stefan-Boltzmann*,

*P* = *σSeT* 4*,*

donde *σ* = 5*,*67 10*−*8 W*/*(m2 K4) es la *constante de Stefan-Boltzmann*, *S* es el a´rea de la superficie del cuerpo, *e* es la *emisividad* (una cantidad adimensional entre 0 y 1 caracter´ıstica del cuerpo) y *T* es la temperatura medida en escala absoluta de la superficie del cuerpo.

*· ·*

Cuando un cuerpo irradia segu´n la ley anterior, tambi´en absorbe energ´ıa. De lo contrario, perder´ıa toda su energ´ıa interna y su temperatura llegar´ıa al cero absoluto. La energ´ıa que un cuerpo absorbe depende de su entorno, formado por otros cuerpos que tambi´en emiten. Si un cuerpo est´a a una temperatura *T* y su entorno est´a a una temperatura *T*0, entonces la *potencia neta* emitida por el cuerpo es

*P* = *σSe* (*T − T .* (2.3)

4 4

0

Si el cuerpo est´a en equilibrio con su entorno, irradia y absorbe energ´ıa al mismo ritmo, de tal manera que su temperatura permanece constante. Si, por el contrario, el cuerpo est´a m´as caliente que el entorno, irradia m´as energ´ıa de la que absorbe, por lo que su temperatura disminuye. Un *absorbente ideal* es un cuerpo que absorbe todo lo que incide sobre ´el, por lo que su emisividad es *e* = 1. Tambi´en es un radiador ideal de energ´ıa, y se le llama *cuerpo negro*. Un cuerpo para el que *e* = 0 es un *reflector ideal* y no absorbe nada de lo que incide sobre ´el.

**Ejemplo 2.2.3** *Determinemos la emisividad de un material utilizando*

*la ley de Stefan-Boltzmann. Para ello, necesitamos su superficie (*5 *m*2*), la potencia emitida (*104 *J por minuto) y las temperaturas del material (*30 *oC) y del ambiente (*24*oC).*

***Sol.*** *La potencia emitida por por radiaci´on es*

*P* = =

*E* 104 500

*t* 60

=

3

*W.*

*A partir de la ley de Stefan-Boltzmann,*

*P* = *σSe T − T*

*Utilizando los datos, tenemos*

(

4

4

0

*P*

*⇒ e* = *.*

*σS* (*T − T* )

4

4

0

500

*e* = 3 *~* 0*,*906*.*

5*,*67 *·* 10*−*8 *·* 5 *·* [(273*,*15 + 30)4 *−* (273*,*15 + 24)4]

Los tres mecanismos de transferencia de energ´ıa interna que hemos es- tudiado aparecen en un sistema de calefacci´on por agua caliente. En este sistema, el calor se transfiere de la caldera a los radiadores de las habitacio- nes por medio del agua que fluye por las tuber´ıas (convecci´on); se difunde luego a trav´es del metal de los radiadores (conducci´on), de la superficie de

´estos al aire cercano a ellos (radiaci´on), y de este aire al resto del aire de la habitaci´on (de nuevo, convecci´on).

## Capacidad calor´ıfica y calor espec´ıfico

La absorci´on/cesi´on de calor por un cuerpo, con independencia del meca- nismo que lo ha propiciado (conducci´on, convecci´on o radiaci´on), tiene como consecuencias posibles cambios en su temperatura, volumen, presi´on y/o, incluso, de fase.

Vamos a centrarnos ahora en la relaci´on que hay entre la cantidad de calor que absorbe un cuerpo y su aumento de temperatura. Se define la *capacidad calor´ıfica C* de una sustancia como el calor necesario para aumentar 1 *o*C su temperatura. Podemos escribir, para un rango de temperaturas suficiente-

mente pequen˜o,

*Q* = *C* ∆*T* (2.4)

cuando el cuerpo absorbe un calor *Q* y aumenta su temperatura ∆*T* . La unidad de capacidad calor´ıfica en el SI es 1 J*/*K. Esta cantidad depende, para cada sustancia, del rango de temperaturas, de la presi´on, de la masa y, adem´as, del proceso seguido para cambiar la temperatura (manteniendo el volumen constante, la presi´on constante u otros posibles).

Debido a la dependencia de *C* con la masa, se define el *calor espec´ıfico c* como la capacidad calor´ıfica por unidad de masa. De esta manera, el calor transferido a un cuerpo, de masa *m* y calor espec´ıfico *c* (supuesto indepen- diente de la temperatura), para que sufra una variaci´on de temperatura ∆*T* se puede escribir

*Q* = *mc* ∆*T.*

El agua tiene un calor espec´ıfico muy alto comparado, por ejemplo, con el aire. Esto significa que un cambio en la temperatura de cierta masa de agua requiere m´as calor que el mismo cambio en la misma masa de la mayor´ıa de sustancias. Se dice por eso que el agua tiene una gran *inercia t´ermica*, lo que la hace apropiada para el almacenamiento y transporte de energ´ıa interna, por ejemplo en el sistema de calefacci´on de una casa (donde el agua conduce energ´ıa interna desde la caldera hasta los radiadores).

**Ejemplo 2.3.1** *Sabemos que con el calor Q podemos elevar la tem-*

*peratura en* 50 *oC de una masa de aluminio, cuyo calor espec´ıfico es*

*cal* = 902 *J/*(*kg · K*)*. Veamos cu´al ser´ıa el aumento de temperatura de*

*la misma masa de cobre, con calor espec´ıfico cco* = 390 *J/*(*kg · K*)*, utili-*

*zando el mismo calor Q.*

***Sol.*** *Usando la relaci´on entre el calor absorbido y la variaci´on de tem- peratura, tenemos*

*Q* = *m cal* ∆*Tal,*

*Q* = *m cco* ∆*Tco.*

*Como el calor absorbido por ambos es el mismo, y tambi´en lo es la masa, igualando ambas expresiones obtenemos el aumento de temperatura del*

*cobre:*

*m cal* ∆*Tal* = *m cco* ∆*Tco ⇒* ∆*Tco* = *c* ∆*T*

*cal*

*al*

=

*co*

902

390

50 *~* 116 *C.*

*o*

Una t´ecnica para medir el calor espec´ıfico de un cuerpo consiste en ca- lentarlo hasta una temperatura *Tc*, ponerlo en un recipiente con agua a una temperatura menor *Ta* y esperar a que llegue el equilibrio, midiendo entonces la temperatura final *Teq*. Esta t´ecnica se llama *calorimetr´ıa*, y los dispositivos usados se llaman *calor´ımetros*. Si el sistema formado por el cuerpo y el agua est´a *aislado*, la cantidad de energ´ıa perdida por el cuerpo debe ser igual a la ganada por el agua. Usando la ecuaci´on *Q* = *mc*∆*T* , el calor transferido al agua ha sido

*Qa* = *maca* (*Teq − Ta*) *,*

y el calor transferido al cuerpo ha sido

*Qc* = *mccc* (*Teq − Tc*) *,*

que es negativo porque el cuerpo se ha enfriado. La suma de estos dos calores ha de ser cero para que ninguna energ´ıa entre ni salga del sistema, as´ı que se llega a

*Q* = 0 = *maca* (*Teq − Ta*) + *mccc* (*Teq − Tc*) *,*

y de aqu´ı, despejando, obtenemos el calor espec´ıfico del cuerpo,

*c* = *c*

*−ma* (*Teq − Ta*) *.*

*c a*

*m*

*c*

(*Teq*

*— Tc*)

Para que este c´alculo sea correcto, es necesario que la masa de agua sea mucho mayor que la del recipiente que la contiene. En caso contrario, el recipiente tambi´en se calienta y este efecto habr´a de tenerse en cuenta.

**Ejemplo 2.3.2** *Veamos un ejemplo en el que tenemos que tener en cuenta el material del que est´a hecho el calor´ımetro. Queremos obtener el calor espec´ıfico del aluminio cal . Para ello, introducimos* 50 *g de aluminio a* 200 *oC en un calor´ımetro de cobre de* 500 *g que contiene* 200 *g de aceite a* 20 *oC. Todo el sistema llega a una temperatura final de* 34*,*54 *oC. El calor espec´ıfico del cobre es cco* = 390 *J/*(*kg·K*) *y del aceite cac* = 0*,*38 *cal/*(*g·K*)*.*

***Sol.*** *Primero, pasamos el calor espec´ıfico del aceite a unidades del SI:*

*cac* =

0*,*38 *cal* 4*,*187 *J* 103 *g*

*g · K*

1 *cal*

1 *kg*

*~* 1591 *J/*(*kg · K*)*.*

*En este caso, el recipiente es de cobre y hay que tener en cuenta tambi´en*

*c´omo absorbe calor y cambia su temperatura. Dado que no se transfiere calor al exterior, si llamamos T a la temperatura de equilibrio del sistema,*

*Q* = 0 = *mcocco*(*T − Tco*) + *malcal*(*T − Tal*) + *maccac*(*T − Tac*)*.*

*Despejando cal, tenemos*

*cal*

= *−*

*mcocco*(*T − Tco*) + *maccac*(*T − Tac*)

*m* (*T − T* )

*al*

*al*

*~* 902 *J/*(*kg · K*)*.*

## Calor latente

En los *cambios de fase* sufridos por una sustancia se transfiere calor pero no hay variaci´on de temperatura (si el proceso se hace de forma suficien- temente lenta). Esto ocurre, por ejemplo, en el cambio de s´olido a l´ıquido, en el de l´ıquido a gas, y en el cambio de estructura cristalina de un s´olido. En general, en estos casos la energ´ıa potencial intermolecular de la sustancia var´ıa en la medida en que se transfiere el calor, resultando en un cambio de energ´ıa interna sin necesidad de afectar a la temperatura del cuerpo (dado que el cambio de fase se produce a una temperatura constante).

El calor *Q* necesario para cambiar la fase de una sustancia pura de masa

*m* es

*Q* = *mL,* (2.5)

donde *L* se denomina *calor latente*. El *calor latente de fusi´on Lf* es el em- pleado cuando el cambio de fase es de s´olido a l´ıquido. Si el cambio es de l´ıquido a s´olido (solidificaci´on), el calor latente es el de fusi´on, pero con signo negativo, indicando que el sistema transfiere calor al medio. El *calor latente de vaporizaci´on Lv* es el que entra en juego cuando el cambio de fase es de l´ıquido a gas. Si el cambio es de gas a l´ıquido (condensaci´on), el calor latente es el mismo que el de vaporizaci´on, pero con signo negativo.

Veamos el caso de un cambio de l´ıquido a gas. Las mol´eculas de los l´ıquidos est´an cercanas entre s´ı y las fuerzas entre ellas son mucho m´as intensas que

* 1. *CALOR LATENTE* 29

las que hay entre las mol´eculas de los gases, muy alejadas unas de otras. Necesitamos realizar trabajo en el l´ıquido contra estas fuerzas moleculares para poder separarlas. La energ´ıa por unidad de masa necesaria para lograr esta separaci´on es el calor latente de vaporizaci´on.

Por su parte, la transferencia de energ´ıa a un s´olido causa un aumento de la amplitud de vibraci´on de las mol´eculas respecto a sus posiciones de equilibrio hasta que los enlaces entre mol´eculas se rompen y ´estas se mue- ven a nuevas posiciones de equilibio, con menor intensidad de interacci´on entre ellas, caracter´ısticas del estado l´ıquido. La energ´ıa por unidad de masa necesaria para realizar este cambio de configuraci´on es el calor latente de fusi´on.

En general, el calor latente de vaporizaci´on es mayor que el de fusi´on para una sustancia dada. Esto es debido a que las distancias moleculares en un gas son mucho mayores que en l´ıquidos y s´olidos. En la fusi´on hay que transformar enlaces se estado s´olido en enlaces de estado l´ıquido, ligeramente menos intensos. Pero en la vaporizaci´on hay que romper los enlaces de estado l´ıquido y llegar a una situaci´on en que las mol´eculas, b´asicamente, no est´en ligadas.

**Ejemplo 2.4.1** *En general, cuando una sustancia absorbe o cede calor*

*se calienta o enfr´ıa y tambi´en cambia de fase. Esto ocurre, por ejemplo, cuando* 100 *g de vapor de agua a* 100 *oC se condensan y luego se enfr´ıan hasta* 15 *oC. Vamos a calcular el calor que cede el sistema al medio. Para*

*y su calor latente de vaporizaci´on Lv* = 283 *J/kg.*

***Sol.*** *El calor absorbido (cedido) por el sistema tiene dos contribuciones: el absorbido (cedido) en el cambio de estado de gas a l´ıquido y el absorbido (cedido) en el aumento (disminuci´on) de temperatura del l´ıquido. Por tanto,*

*ello, debemos saber que el calor espec´ıfico del agua es c* = 4187 *J/*(*kg · K*)

*Q* = *mLc* + *mc* ∆*T* = *−mLv* + *mc* ∆*T*

= *−*0*,*1 *·* 283 + 0*,*1 *·* 4187 *·* (15 *−* 100) *~ −*35600 *J.*

*salido negativo. Esto quiere decir que no se transfiere calor al sistema sino*

*que es el sistema quien transfiere calor al exterior. El calor transmitido*

*En la ecuaci´on anterior, se ha usado Lc* = *−Lv. El calor absorbido ha*

*al medio es*

*Qsist* = *−Q ~* 35600 *J.*

* 1. *TABLA RESUMEN* 31

## Tabla resumen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fo´rmula/magnitud | Definici´on | Ecuaci´on |
| *P* = *S |*∆*T |*  *R*  *P*  *S*  ∆*T*  *R* = *N* ∆*xi*  *i*=1 *ki*  *N*  ∆*xi*  *ki* | Ley de la conducci´on t´ermica | [(2.1)](#_bookmark21) |
| Flujo de calor por unidad de tiempo A´rea de la secci´on |  |
| Diferencia de temperaturas |  |
| Resistencia t´ermica | [(2.2)](#_bookmark22) |
| Nu´mero de capas |  |
| Espesor de la capa *i*-´esima |  |
| Conductividad t´ermica de la capa *i*-´esima |  |
| *P* = *σSe*(*T* 4 *− T* 4)  0  *P* | Ley de la radiaci´on Potencia emitida | [(2.3)](#_bookmark23) |
| *σ* | Constante de Stefan-Boltzmann |  |
| *e* | Emisividad |  |
| *T* | Temperatura (en Kelvin) del cuerpo |  |
| *T*0 | Temperatura (en Kelvin) del entorno |  |
| *Q* = *C*∆*T* | Calor y cambio de temperatura | [(2.4)](#_bookmark25) |
| *Q* | Calor absorbido |  |
| ∆*T* | Variaci´on de temperatura |  |
| *C* = *mc* | Capacidad calor´ıfica |  |
| *m* | Masa del cuerpo |  |
| *c* | Calor espec´ıfico |  |
| *Q* = *mL* | Calor y cambio de fase | [(2.5)](#_bookmark27) |
| *Q* | Calor absorbido |  |
| *m* | Masa del cuerpo |  |
| *L* | Calor latente |  |

## Problemas resueltos

* + 1. Tenemos dos placas de secci´on *S* = 100 cm2 pegadas, siendo las tem- peraturas de las caras libres *T*1 = 50 *o*C y *T*2 = 10 *o*C, respectiva- mente. Adem´as, los espesores y conductividades t´ermicas respectivas son ∆*x*1 = 1 mm, *k*1 = 0*,*1 cal*/*(cm *·* s *·* K) y ∆*x*2 = 2 mm, *k*2 = 0*,*2 cal*/*(cm *·* s *·* K).
       1. Calcula la temperatura de la zona de contacto entre las placas.
       2. Determina el flujo de energ´ıa a trav´es de las placas.

**Sol.** La situaci´on se muestra en el dibujo, en el que se ve una seccion transversal de las dos placas. El flujo de calor *P* se dirige desde la cara libre de la primera placa, que est´a a temperatura *T*1, hacia la cara libre de la segunda placa, a temperatura menor *T*2. El empalme entre las placas tiene temperatura *T* .

T

T1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| k1 |  | k2  P |
|  |  |  |

x1

T2

x2

Conviene pasar las conductividades a unidades del SI:

cal

*k*1 = 0*,*1 cm s K

*· ·*

cal

*k*2 = 0*,*2 cm *·* s *·* K

4*,*187 J

1 cal

4*,*187 J

1 cal

102 cm

1 m = 41*,*87 J*/*(m *·* s *·* K)*,*

102 cm

1 m = 83*,*74 J*/*(m *·* s *·* K)*.*

1. Para calcular la temperatura *T* en el empalme, usamos que no se pierde potencia al fluir la energ´ıa de la primera placa a la segunda. La potencia *P*1 a trav´es de la primera placa (con una diferencia de temperaturas *T*1 *T* ) ha de ser, por tanto, igual a la potencia a trav´es de la segunda placa (con una diferencia de temperaturas

*−*

*T T*2). Como ambas placas tienen, adem´as, la misma secci´on *S*, tenemos

*−*

*P* = *P*

*⇒ k S T*1 *− T*

= *k S T − T*2 *.*

1 2 1

∆*x*1

2 ∆*x*

Observemos que la relaci´on anterior es cierta con independencia de si las temperaturas est´as expresadas en *o*C ´o *K*, por lo que la siguiente ecuaci´on tambi´en lo ser´a. Despejando con cuidado *T* , se obtiene

2

*T* =

1

*T*

+

2

*T*

∆*x*1

∆*x*2

*.*

2

*k*

1

+

∆*x*

1

*k*

∆*x*

2

*k k*

∆*x*

1

*k*1 *T*1 + *k*2 *T*2

2

*k*1 + *k*2

Usando los datos num´ericos del ejercicio, llegamos a

*⇒ T* =

∆*x*

1

2

∆*x*1

∆*x*2

41*,*87 50 + 83*,*74 10

*T* = 10*−*3 2*·*10*−*3 = 30 *o*C*.*

41*,*87 + 83*,*74

10*−*3

2*·*10*−*3

1. La potencia *P* a trav´es de las placas se puede calcular s´olo con la primera, s´olo con la segunda o con ambas, pues *P* = *P*1 = *P*2. Usamos la primera:

*P* = *k S T*1 *− T*

= 41*,*87 *·* 100 *·* 10*−*4 *·* 50 *−* 30 = 8374 W*.*

1 ∆*x*

1

10*−*3

* + 1. Una pared est´a formada por dos capas de madera, cada una de espesor 5 cm y conductividad t´ermica 0*,*15 W/(m*·*K), separadas por una capa de aislante de espesor 1 cm y conductividad t´ermica 0*,*05 W/(m*·*K). Si

la pared tiene 10 cm2 de a´rea, calcula el flujo de calor (potencia) a

trav´es de la pared cuando entre los extremos de ´esta hay una diferencia de temperaturas de 15 *o*C.

**Sol.** El flujo de calor viene dado por:

*P* = *S* ∆*T* = 10 *·* 10*−*4 15 *~* 0*,*0173 W*.*

2 ∆*xm* + ∆*xa*

20*,*05 + 0*,*01

*κm κa*

0*,*15

0*,*05

* + 1. Una caban˜a tiene un tejado de dimensiones de 10 m 8 m formado por dos capas: una de madera de pino de 3 cm de espesor y conducti- vidad t´ermica de 0*,*2 W*/*(m *·* K) y otra de tejas de 5 mm de espesor y conductividad t´ermica 0*,*8 W*/*(m *·* K).

*×*

* + - 1. Calcula la potencia por conducci´on a trav´es del tejado si la tempe- ratura interior de la caban˜a es de 15 *o*C y la exterior es de *−*15 *o*C.
      2. Aislamos el tejado con una nueva capa de 1 cm de espesor y una conductividad t´ermica de 0*,*05 W*/*m K. Determina qu´e porcentaje de la potencia se ha reducido.

*·*

###### Sol.

1. Calculamos primero el valor *R* del tejado y, con ´el, el flujo de calor:

∆*xm* ∆*xa*

3 *·* 10*−*2

5 *·* 10*−*3 2

*R* = + =

*km ka*

+

0*,*2

0*,*8 *~* 0*,*156 (m

*·* s *·* K)*/*J*.*

∆*T*

*P* = *S*

*R*

10 8 15 *−* (*−*15) 15400 W*.*

0*,*156

*~ · · ~*

1. Cuando se coloca el aislamiento, los nuevos valores son

*I* ∆*xm* ∆*xa*

∆*xais*

3 *·* 10*−*2

5 *·* 10*−*3

1 *·* 10*−*2 2

*R* = +

*km ka*

+ =

*kais*

+

0*,*2

+

0*,*8

0*,*05 *~* 0*,*356 (m *·*s*·*K)*/*J*.*

*P I* = *S* ∆*T*

*RI*

10 8 15 *−* (*−*15) 6740 W*.*

0*,*356

*~ · · ~*

El flujo de calor se ha reducido en aproximadamente

15400 *−* 6740 = 0*,*562 (es decir, un 56*,*2 %)*.*

15400

* + 1. La pared del sal´on de una vivienda tiene una ventana en su parte central. La pared tiene 4 m de altura y 6 m de anchura, mientras que la ventana mide 1*,*5 m de altura y 2 m de anchura. La pared est´a hecha de una capa de ladrillo (0*,*63 W*/*(m K) de conductividad t´ermica y 30 cm de espesor) y otra de fibra de vidrio (0*,*042 W*/*(m K); 3 cm). El espesor del vidrio de la ventana es de 2 cm y su conductividad t´ermica 1*,*1 W*/*(m K). Teniendo en cuenta que la temperatura interior de la vivienda es de 22 *o*C y la exterior es de 5 *o*C, calcula el flujo de calor a trav´es de la ventana (sin incluir el resto de la pared), el flujo de calor a trav´es del resto de la pared (sin incluir la ventana) y el flujo de calor total hacia el exterior.

*·*

*·*

*−*

*·*

**Sol.** La ventana s´olo tiene una capa de vidrio, de modo que el flujo de calor a trav´es de ella es

*Pv* = *kvS*

∆*T*

*v* ∆*x*

*v*

= 1*,*1 (1*,*5 2) 22 *−* (*−*5) = 4455 W*.*

0*,*02

*· · ·*

El resto de la pared tiene una capa de ladrillo y otra de aislante. Su *R*

es

*R* = ∆*xlad* + ∆*xais*

2

0*,*3

=

0*,*03

+

*~* 1*,*19 (m *·* K)*/*W*.*

*klad*

*kais*

0*,*63

0*,*042

El flujo de calor a trav´es de esta parte de la pared es

∆*T Pr* = *Sr R*

*~* (4 *·* 6 *−* 1*,*5 *·* 2) *·* 22 *−* (*−*5) *~* 476 W*.*

El flujo de calor *P* a trav´es de toda la pared es la suma de los dos anteriores

1*,*19

*P* = *Pv* + *Pr ~* 4455 + 476 = 4931 W*.*

* + 1. Una caban˜a cu´bica, de 5 m de lado, consta de cuatro paredes, un tejado y un suelo, todos de madera. La madera, de conductividad t´ermica 0*,*15 W/(m K), tiene un espesor de 20 cm. Teniendo en cuenta que el exterior de la caban˜a est´a a 10*o*C y el interior a 20*o*C, calcula el espesor de un revestimiento de conductividad t´ermica 0*,*05 W/(m K) si queremos reducir la potencia que sale de la caban˜a a la mitad.

*·*

*−*

*·*

**Sol.** Calculemos primero la potencia *P*0 sin revestimiento:

*P* = *κ S ,*

0

∆*T*

0

0

∆*x*

donde *S* = 25 6 m2 es la superficie total, *κ*0 es la conductividad de la madera, ∆*T* = 30*o*C y ∆*x*0 = 20 cm. La potencia con revestimiento resulta

*×*

∆*T* ∆*x*0 ∆*x*

*P* = *S , R* = + *,*

*R κ*0 *κ*

donde ∆*x* y *κ* son el espesor y conductividad t´ermica del revestimiento, respectivamente. Como nos dicen que

1

*P* = 2 *P*0*,*

tenemos la siguiente ecuaci´on para ∆*x*:

∆*T* 1 ∆*T*

*S* = *κ S*

∆*x*0 20

*⇒* ∆*x* = *κ* = 0*,*05 *~* 6*,*67 cm*.*

∆*x*0 + ∆*x*

2 0 ∆*x*

*κ* 0*,*15

*κ*0 *κ* 0 0

¡El resultado es independiente de *S* y ∆*T* !

* + 1. Estima la energ´ıa que pierde una persona por radiaci´on en cinco minu- tos. Para ello, sup´on que tiene 2 m2 de piel a 36 *o*C con una emisividad de 0*,*9 y que su entorno est´a a 25 *o*C.

**Sol.** Usamos la ley de Stefan-Boltzmann, la potencia neta emitida es

( *P* = *σSe T − T*

4 4

0

= 5*,*67 *·* 10*−*8 *·* 2 *·* 0*,*9 *·* [(273*,*15 + 36)4 *−* (273*,*15 + 25)4] *~* 126 W*.*

La p´erdida de energ´ıa en 5 minutos es

*E*

4

*P* = *t ⇒ E* = *P t ~* 126 *·* 5 *·* 60 *~* 3*,*77 *×* 10 J*.*

* + 1. Calcula la temperatura del filamento de una bombilla sabiendo que emite 4 W de luz, tiene una superficie de 0*,*5 mm2 y una emisividad de 0*,*96.

**Sol.** A partir de la ley de Stefan-Boltzmann,

*P* = *σSeT* 4 *⇒ T* =

*P σSe*

1*/*4

=

4 1*/*4

5*,*67 *·* 10*−*8 *·* 0*,*5 *·* 10*−*6 *·* 0*,*96

*~* 3480 K*.*

El filamento de una bombilla debe tener un punto de fusi´on suficiente- mente alto, como por ejemplo el del tungsteno que es de 3683 K.

* + 1. El agua de un recipiente absorbe 5 109 J de energ´ıa. Teniendo en cuenta que la densidad del agua es de 103 kg*/*m3, su calor espec´ıfico es 4187 J*/*(kg K) y su coeficiente de dilataci´on volum´etrica es 207 10*−*6 K*−*1, calcula el aumento de volumen del agua.

*·*

*· ·*

**Sol.** El cambio en la temperatura del agua se puede obtener a partir del calor que absorbe:

*Q Q*

*Q* = *mc* ∆*T ⇒* ∆*T* = *mc* = *ρV c.*

0

En la u´ltima ecuaci´on, se ha usado que *ρ* = *m/V*0, donde *V*0 es el

volumen inicial de agua. El cambio de volumen del agua, por la ley de dilataci´on t´ermica, es

*Q Qβ*

5 *·* 109 *·* 207 *·* 10*−*6 3

∆*V* = *V*0*β* ∆*T* = *V*0*β ρV c* = *ρ c* =

0

1000 *·* 4187 *~* 0*,*247 m *.*

* + 1. Introducimos 100 g de metal a 100 *o*C en 250 g de agua a 5 *o*C. Teniendo en cuenta que el calor espec´ıfico del agua es 4187 J*/*(kg K) y que la temperatura final del agua y el metal es de 20 *o*C, calcula el calor espec´ıfico del metal.

*·*

**Sol.** Consideramos que agua y metal est´an aislados del exterior. Por tanto, si *Ta* es la temperatura inicial del agua, *Tm* es la temperatura inicial del metal y *T* es la temperatura final de ambos, tendremos

*Q* = 0 = *maca* (*T − Ta*) + *mmcm* (*T − Tm*) Despejando el calor espec´ıfico del metal,

*c* = *−maca* (*T − Ta*) = *−*0*,*25 *·* 4187 *·* (20 *−* 5) *~* 1960 J*/*(kg *·* K)*.*

*m*

*mm* (*T − Tm*) 0*,*1 *·* (20 *−* 100)

* + 1. Echamos cierta cantidad de hielo a 0 *o*C en 1 *,e* de agua a 90 *o*C. La mezcla, que permanece aislada del exterior, alcanza una temperatura de equilibrio de 50 *o*C. Teniendo en cuenta que la densidad del agua es de 103 kg*/*m3, el calor espec´ıfico del agua es 4187 J*/*(kg K) y el calor latente de fusi´on del hielo es 3*,*3 105 J*/*kg, calcula la masa de hielo. **Sol.** Inicialmente, tenemos una masa de agua *ma* = *ρaVa* = 103 kg. Dado que no se transfiere calor al exterior,

*×*

*·*

*Q* = 0 = *maca*(*T − Ta*) + *mhca*(*T − Th*) + *mhLf .*

No´tese que toda la masa de hielo *mh* se transforma en agua a una temperatura *Th* = 0 *o*C, de manera que el aumento de temperatura de esta masa se produce con el calor espec´ıfico del agua, como hemos escrito. Despejando la masa de hielo,

*m* = *−maca*(*T − Ta*)

*h*

= *−*1 *·* 4187 *·* (50 *−* 90) *~* 0*,*311 kg*.*

*ca*(*T − Th*) + *Lf*

4187 *·* (50 *−* 0) + 3*,*3 *·* 105

# Cap´ıtulo 3 Termodin´amica

En este cap´ıtulo terminamos el estudio de los sistemas termo- din´amicos. Para ello, comenzamos definiendo la condici´on de equi- librio t´ermico y enunciando el principio cero de la Termodin´ami- ca. Tras introducir el concepto de trabajo, formulamos el primer principio de la Termodin´amica para lo que necesitaremos los con- ceptos de energ´ıa interna y de calor definidos en los cap´ıtulos an- teriores. El primer principio los usaremos para calcular las capa- cidades calor´ıficas de distintos procesos en gases ideales, as´ı como para estudiar los procesos adiab´atico cuasiest´aticos. Finalmente, abordamos el estudio de las m´aquinas t´ermicas, incluyendo la de

Carnot. En esta u´ltima parte, presentaremos varios enunciados

del segundo principio de la Termodin´amica.

## Contacto t´ermico y equilibrio t´ermico

Dos cuerpos est´an en *contacto t´ermico* si pueden intercambiar energ´ıa debido a diferencias de temperatura entre ellos. En el tema anterior vimos ejemplos de este tipo de intercambios de energ´ıa.

El *equilibrio t´ermico* es una situaci´on en la que dos objetos no inter- cambian energ´ıa si se ponen en contacto. La temperatura se define como la propiedad que determina si un objeto est´a en equilibrio t´ermico con otro. As´ı, dos cuerpos est´an en equilibrio t´ermico si est´an a la misma temperatura.

El *principio cero* de la Termodin´amica asegura que si ponemos en contacto

39

t´ermico dos cuerpos, ´estos alcanzan el equilibrio t´ermico.

En Termodin´amica, se describe el *estado macrosc´opico* de un sistema mediante variables como la presi´on, el volumen, la temperatura y la energ´ıa interna. Estas cantidades reciben el nombre de *variables de estado* porque en cualquier configuraci´on del sistema se puede encontrar su valor. Para ello, es necesario que el sistema est´e en equilibrio interno, es decir, que cada parte del sistema est´e en equilibrio con el resto. Por ejemplo, en un gas hace falta que cada parte del gas est´e a la misma presi´on y temperatura.

En general, la Termodin´amica estudia los estados de equilibrio de un sistema y c´omo se pasa de uno a otro. El paso de un estado de equilibrio a otro se llama *proceso termodin´amico*. En un proceso, las variables de estado de un sistema pueden cambiar, pero este cambio es independiente del proceso mismo, y tiene en cuenta s´olo los estados inicial y final. A menudo, los estados de un sistema se representan mediante puntos en un diagrama *pV* (o en diagramas *pT* , *TV* , etc) y los procesos como trayectorias en estos diagramas.

Una segunda catagor´ıa de variables en Termodin´amica es la de *variables de transferencia*. Estas variables son nulas a menos que ocurra un proceso en que se transfiera energ´ıa a trav´es de la frontera del sistema. Por tanto, no est´an asociadas a un estado dado del sistema, sino a un cambio. Ejemplos de variables de transferencia son el calor y el trabajo.

## Trabajo de deformacio´n

El trabajo realizado por una fuerza **F** sobre una part´ıcula que se desplaza entre los puntos *A* y *B* a lo largo de la trayectoria *C* se define como

- *B*

*W* (**F***, C*) =

*A*

**F** *· d***r***,*

donde *d***r** es el desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria *C*. Por tanto, excepto en el caso particular en que la fuerza **F** sea conservativa, el trabajo depende expl´ıcitamente de la trayectoria a lo largo de la cual cambia la posici´on de la part´ıcula.

Consideremos, por su uso frecuente en Termodin´amica, el caso del trabajo realizado sobre un sistema deformable (un gas, por ejemplo). Para verlo, suponemos un gas contenido en un cilindro equipado con un pist´on m´ovil como el de la figura [3.1.](#_bookmark33)

* 1. *TRABAJO DE DEFORMACIO´N* 41

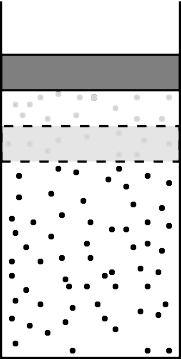


Figura 3.1: Esquema de un cilindro con pist´on m´ovil que contiene un gas.

En equilibrio, el gas ocupa un volumen *V* y ejerce una presi´on *p* sobre las paredes del recipiente. Si el pist´on tiene una secci´on transversal de a´rea *S*, la fuerza ejercida por el gas sobre ´el es *F* = *pS*. Supongamos que el pist´on comprime el gas *cuasiest´aticamente*, es decir, con suficiente lentitud para permitir que el gas est´e en equilibrio en todo momento. Si el pist´on es empujado mediante una fuerza **F** = *F* **j** hacia abajo, el desplazamiento infinitesimal es *d***r** = *dy* **j**, de modo que el trabajo infinitesimal, definido como *dW* = **F** *· d***r**, es

*−*

*dW* = **F** *· d***r** = *−F dy* = *−pS dy* = *−p dV.*

Para calcular el trabajo total realizado sobre el gas, hay que integrar la expresi´on anterior entre el volumen inicial *V*1 y el volumen final *V*2,

- *V*2

*W* = *−*

*p dV.* (3.1)

*V*1

Necesitamos conocer c´omo var´ıa *p* con *V* para calcular la integral. Esto es un reflejo de que el trabajo depende de los detalles del proceso y no s´olo de los estados inicial y final, pues es una variable de transferencia.

**Ejemplo 3.2.1** *Cuando la presi´on se mantiene constante (proceso isob´ari- co), es f´acil calcular el trabajo mediante la expresi´on anterior, pues po- demos sacar p de la integral, resultando*

*W* = *−p*(*V*2 *− V*1)*.*

*Usemos este resultado para calcular el trabajo realizado sobre un cubo*

*met´alico de* 5 *cm de arista y* 12 *·* 10*−*6 *K−*1 *de coeficiente de dilataci´on*

*lineal, cuando lo calentamos a una presi´on constante de* 1 *atm desde* 15 *oC*

*hasta* 150 *oC.*

***Sol.*** *Para calcular el trabajo W necesitamos la variaci´on de volumen*

*V*2 *− V*1*. Usando la ley de dilataci´on t´ermica con β* = 3*α y V*1 *el volumen*

*inicial, llegamos a*

*V*2 *− V*1 = *V*1*β* ∆*T* = (5 *·* 10*−*2)3 *·* 3 *·* 12 *·* 10*−*6 *·* (150 *−* 15) *~* 6*,*08 *·* 10*−*7 *m*3*.*

*Ahora, el trabajo resulta*

*W* = *−p* ∆*V ~ −*101 *·* 10 *·* 6*,*08 *·* 10 *~ −*0*,*0614 *J.*

*Es decir, el exterior realiza trabajo negativo sobre el cubo (el trabajo rea- lizado por el cubo es, entonces, Wsist* = *−W ~* 0*,*0614 *J).*

3

*−*7

## Procesos termodin´amicos

En general, la variaci´on de la energ´ıa de un sistema es igual a la suma de todas las transferencias de energ´ıa que ocurren a trav´es de la frontera del sistema. La primera ley de la Termodin´amica es un caso especial de la afirmaci´on anterior, que incluye variaciones de la energ´ıa interna del sistema y transferencias de energ´ıa por calor y trabajo. Esta ley se puede aplicar a muchos procesos y proporciona un enlace entre las visiones microsc´opica y macrosc´opica.

Consideremos el cambio de un sistema entre un estado inicial, que su- pondremos caracterizado por las variables de estado (*pi, Vi, Ti*), y otro estado final (*pf , Vf , Tf* ). Durante este cambio, se realiza transferencia de energ´ıa al sistema mediante calor *Q* y trabajo *W* . Se verifica:

*Primer/a ley/principio de la Termodin´amica*: La cantidad *Q* + *W* es independiente de la trayectoria seguida por un proceso termodin´amico, y coincide con la variaci´on de la energ´ıa interna del sistema, es decir,

∆*U* = *Q* + *W.* (3.2)

Si el sistema experimenta un *cambio de estado infinitesimal* en el que se le aplica un calor *dQ* y se realiza sobre ´el un trabajo *dW* , su energ´ıa interna

* 1. *PROCESOS TERMODINA´MICOS* 43

sufrir´a una variaci´on *dU* . Podemos escribir la primera ley en versi´on infinite- simal como

*dU* = *dQ* + *dW.*

Hay que hacer un comentario sobre esta ecuaci´on. En ella aparece la variable de estado *U* , de manera que *dU* tiene el significado de cambio de pequen˜a magnitud, pero *dQ* y *dW* no implican el cambio de ninguna variable de estado, sino transferencias infinitesimales. Por ello se dice a veces que *dQ* y *dW* son *diferenciales inexactas*. No usaremos esta terminolog´ıa en este curso por no ser estrictamente necesaria: ya hemos dejado claro que el calor y el trabajo no son variables de estado y ya sabemos que no tiene ningu´n sentido escribir cosas como ∆*Q* ni ∆*W* .

Se puede considerar la primera ley de la Termodin´amica como una ecua- ci´on de conservaci´on de la energ´ıa. Veamos algunos casos:

Consideremos primero un *sistema aislado*, es decir, uno que no inter- acciona con su entorno. En este caso, el calor transmitido al sistema es cero y el trabajo realizado sobre ´el tambi´en. Como consecuencia, *Q* + *W* = 0 y ∆*U* = 0.

Otro caso es el de un *ciclo*, que es un proceso que empieza y acaba en el mismo estado. Como la energ´ıa interna es una variable de estado, en un ciclo ha de ser ∆*U* = 0, por lo que *Q* = *W* . En un diagrama *pV* , un ciclo aparece como una curva cerrada.

*−*

Un *proceso adiab´atico* es uno en el que no se transfiere calor al sistema, de manera que *Q* = 0 y ∆*U* = *W* . Un proceso as´ı se puede conseguir, por ejemplo, aislando t´ermicamente las paredes del sistema.

Un *proceso isob´arico* es uno que ocurre a presi´on constante en todo momento, como en el ejemplo [3.3.1.](#_bookmark38)

Un *proceso isoc´orico* ocurre a volumen constante. En este caso, el tra- bajo sobre el sistema ha de ser nulo, *W* = 0, de modo que ∆*U* = *Q*.

Un proceso que ocurre a temperatura constante se llama *proceso isot´ermi- co*. En el caso de un gas ideal, como la energ´ıa interna depende s´olo de la temperatura, un proceso isot´ermico implica que ∆*U* = 0, por lo que *Q* = *−W* . Este proceso no es necesariamente un ciclo.

**Ejemplo 3.3.1** *Retomando el ejemplo* [*3.2.1,*](#_bookmark35) *calculemos la variaci´on de*

*energ´ıa interna del cubo de hierro. Para ello, admitamos que el bloque*

*pesa* 2 *kg y que su calor espec´ıfico vale* 445 *J/*(*kg · K*)*.*

***Sol.*** *Para calcular* ∆*U s´olo necesitamos conocer Q, el calor absorbido*

*por el bloque, pues el trabajo realizado sobre el bloque, W, ya lo hab´ıamos obtenido. Usando los resultados del tema anterior,*

*Q* = *C* ∆*T* = *mc* ∆*T* = 2 *·* 445 *·* (150 *−* 15) *~* 1*,*20 *×* 10 *J.*

*As´ı, la variaci´on de energ´ıa interna del cubo es*

5

∆*U* = *Q* + *W* = 1*,*20 *×* 10 *−* 0*,*0614 *~* 1*,*20 *×* 10 *J.*

*El resultado ilustra la raz´on por la que, en la mayor´ıa de situaciones, podemos despreciar la contribuci´on del trabajo de deformaci´on en la va- riaci´on de energ´ıa interna de s´olidos y l´ıquidos.*

5

5

## Capacidades calor´ıficas de los gases idea- les

Nos preguntamos c´omo calcular el calor para un proceso de gas ideal con un cambio dado de temperatura. En el tema anterior vimos que el calor absorbido por una sustancia se puede escribir *Q* = *C* ∆*T* , donde *C* es la capacidad calor´ıfica. En el caso de un gas ideal, es muy u´til definir las capa- cidades calor´ıficas de un par de procesos especiales: el isoc´orico y el isob´arico. En un proceso isoc´orico, el calor ser´a

*Q*(*V* =*cte*) = *CV* ∆*T,* (3.3)

donde *CV* es la *capacidad calor´ıfica del gas a volumen constante*. De forma an´aloga, en un proceso isob´arico,

*Q*(*p*=*cte*) = *Cp* ∆*T,* (3.4)

siendo *Cp* la *capacidad calor´ıfica del gas a presi´on constante*. Calculemos *CV*

y *Cp* para un gas ideal.

Consideremos primero el proceso a volumen constante y, para empezar, supongamos que el gas es monoat´omico. Ya estudiamos la energ´ıa interna de

* 1. *CAPACIDADES CALOR´IFICAS DE LOS GASES IDEALES* 45

un gas monoat´omico y vimos que *U* = 3 *nRT* . Su variaci´on es

2

∆*U* =

3

*nR* ∆*T.*

2

Si este gas realiza un proceso isoc´orico, su volumen no var´ıa, de manera que

*W*(*V* =*cte*) = 0. De aqu´ı, el calor a volumen constante *Q*(*V* =*cte*) debe cumplir

3

2 *nR* ∆*T* = *CV* ∆*T,*

con lo que la *capacidad calor´ıfica a volumen constante* de un gas ideal mono- at´omico es

3

*CV* = 2 *nR.* (3.5)

De manera an´aloga, para un gas diat´omico,

5

*CV* = 2 *nR,* (3.6)

y, para un gas poliat´omico,

*CV* = 3 *nR.* (3.7)

Pasemos ahora a un proceso a presi´on constante *p*0. En este caso, como vimos en el ejemplo [3.2.1,](#_bookmark35) el trabajo es

*W*(*p*=*cte*) = *−* - *p*0 *dV* = *−p*0 ∆*V.*

Usando la ley de los gases ideales en la forma *p*0*V* = *nRT* , como *p*0 es constante podemos hacer una variaci´on en ambos lados de la igualdad y obtener *p*0 ∆*V* = *nR* ∆*T* . De aqu´ı,

*W*(*p*=*cte*) = *−nR* ∆*T.*

Si tenemos en cuenta que la variaci´on de energ´ıa interna para un gas mono- at´omico es ∆*U* = 3 *nR* ∆*T* y que el calor es *Q*(*p*=*cte*) = *Cp* ∆*T* , la primera ley de la Termodin´amica da lugar a

2

3

2 *nR* ∆*T* = *Cp* ∆*T − nR* ∆*T,*

con lo que la *capacidad calor´ıfica a presi´on constante* de un gas ideal mono- at´omico es

5

*Cp* = *CV* + *nR* = 2 *nR.*

Igualmente, para un gas diat´omico,

7

*Cp* = *CV* + *nR* = 2 *nR,*

y, para un gas poliat´omico,

*Cp* = *CV* + *nR* = 4 *nR.*

El cociente entre capacidades calor´ıficas de un gas ideal es una cantidad adimensional *γ* que se denomina *coeficiente adiab´atico* del gas (veremos por qu´e se llama as´ı en el siguiente apartado). Para un gas monoat´omico,

Para un gas diat´omico,

Para un gas poliat´omico,

*γ* = *Cp*

*CV*

*γ* = *Cp*

*CV*

*γ* = *Cp*

*CV*

5

= 3 *~* 1*,*67*.* (3.8)

7

= = 1*,*40*.* (3.9)

5

4

= 3 *~* 1*,*33*.* (3.10)

Los valores obtenidos para *CV* , *Cp* y *γ* est´an en excelente acuerdo con los datos experimentales de gases monoat´omicos, pero difieren de ellos en el caso de gases m´as complejos. Usaremos las expresiones obtenidas a pesar de estas diferencias.

Finalmente, en el caso de *s´olidos* y *l´ıquidos*, cuando se calientan a presi´on constante el trabajo realizado sobre ellos es muy pequen˜o, debido a que el cambio de volumen lo es. En consecuencia, para s´olidos y l´ıquidos podemos tomar *Cp ~ CV* .

**Ejemplo 3.4.1** *Un recipiente contiene* 0*,*5 *m*3 *de un gas ideal mono-*

*at´omico a* 25 *oC y* 1 *atm. El sistema se calienta a volumen constante hasta alcanzar una temperatura de* 35 *oC. Determinemos el calor absor- bido por el gas, el trabajo realizado sobre ´el y su variaci´on de su energ´ıa interna.*

***Sol.*** *Dado que el proceso es a volumen constante, el trabajo realizado sobre el gas es cero. Por tanto,*

∆*U* = *Q* + *W* = *Q* = *CV* ∆*T* = 2 *nR* ∆*T.*

3

* 1. *PROCESOS ADIABA´TICOS DE LOS GASES IDEALES* 47

*En la u´ltima igualdad, hemos usado que el gas es monoat´omico, por lo*

*que CV* = (3*/*2)*nR. Nos hace falta el nu´mero de moles, que obtenemos de la ecuaci´on de los gases ideales aplicada al estado inicial,*

*nR* =

*p*1*V*1

*T*1

*.*

*Con esto,*

3 *p*1*V*1

∆*U* = *Q* = (*T*2 *− T*1) = 2 *T*1

3 *·* 101 *·* 103 *·* 0*,*5

2 *·* (273*,*15 + 25)

*·* (35 *−* 25) *~* 2540 *J.*

## Procesos adiab´aticos de los gases ideales

Supongamos que un gas ideal experimenta un proceso adiab´atico, por lo que *Q* = 0 y ∆*U* = *W* . En su forma infinitesimal, la ecuaci´on anterior se escribe *dU* = *dW* .

La energ´ıa interna es una variable de estado, por lo que su variaci´on no depende del proceso sino s´olo de los estados inicial y final. No obstante, para calcular la variaci´on de energ´ıa interna de un gas ideal, conviene tomar el proceso isoc´orico que produce la misma variaci´on de temperatura, pues como *W* = 0 y *QV* = *CV* ∆*T* , tenemos

∆*U* = *CV* ∆*T,* (3.11)

o, en su forma infinitesimal, *dU* = *CV dT* .

Por su parte, el trabajo infinitesimal en cualquier proceso es *dW* = *pdV* . Usa´ndola con la ecuaci´on infinitesimal del proceso adiab´atico *dU* = *dW* se llega a

*−*

*CV dT* + *p dV* = 0*.*

Si combinamos la ecuaci´on anterior con la ley de los gases ideales *pV* = *nRT* , llegaremos a

*dT*

*CV* + *nR T*

*dV*

= 0*.*

*V*

Integrando, tenemos que en un *proceso adiab´atico y cuasiest´atico de un gas ideal* entre un estado inicial 1 y un estado final 2, se cumple la ecuaci´on

*p*2*V γ* = *p*1*V γ,* (3.12)

2 1

o, usando de nuevo la ecuaci´on del gas ideal, en t´erminos de la temperatura y el volumen,

*T*2*V γ−*1 = *T*1*V γ−*1*.* (3.13)

2 1

Notemos que, al haber usado la ecuaci´on del gas ideal, en la f´ormula anterior las temperaturas deben expresarse en Kelvin.

De estas expresiones [(3.12)](#_bookmark50) y [(3.13)](#_bookmark51) podemos obtener algunas conclusio- nes. Primero, si el gas realiza una compresi´on adiab´atica, el volumen decrece, as´ı que la temperatura crece y, por tanto, lo hace la energ´ıa interna. El trabajo es positivo en este caso. Segundo, si el gas realiza una expansi´on adiab´atica, el volumen crece y la temperatura y la energ´ıa interna decrecen, de modo que el trabajo es negativo, lo que es lo mismo que decir que el gas realiza trabajo en una expansi´on adiab´atica sin calentar el exterior, algo que es muy u´til en las aplicaciones.

La curva de un proceso adiab´atico en un diagrama *pV* es similar a la de un proceso isot´ermico, pero tiene un descenso m´as pronunciado debido a que su ecuaci´on es *pV γ* = constante, con *γ >* 1, en lugar de la isot´ermica *pV* = constante.

**Ejemplo 3.5.1** *Un gas ideal monoat´omico se comprime adiab´atica y*

*cuasiest´aticamente desde un volumen inicial de* 1 *,e hasta un volumen final de* 0*,*1 *,e. Calculemos la temperatura final sabiendo que la inicial va- le* 40 *oC.*

***Sol.*** *La temperatura final T*2 *la podemos obtener usando la ecuaci´on* [(3.13)](#_bookmark51)*, pues conocemos la temperatura inicial T*1*, los volu´menes inicial V*1 *y final V*2 *y el coeficiente adiab´atico γ* = 5*/*3*:*

*T*2 =

*V*

*V*

1

*γ−*1

1

2

3

*o*

2

*T*1 *~*

0*,*1

(273*,*15 + 40) *~* 1450 *K ~* 1180 *C.*

## M´aquinas t´ermicas

La primera ley de la Termodin´amica es una aplicaci´on de la conservaci´on de la energ´ıa. Expresa que el cambio de energ´ıa interna de un sistema puede ocurrir por aplicar calor sobre el sistema, por realizar trabajo sobre ´el, o por ambos, de manera que el calor y el trabajo tienen el mismo resultado. Pero en las aplicaciones hay una diferencia fundamental entre calor y trabajo que no se vislumbra en la primera ley. Veamos esta diferencia.

* 1. *MA´QUINAS TE´RMICAS* 49

Una *m´aquina t´ermica* es un aparato que adquiere energ´ıa al transfer´ırsele calor y, operando c´ıclicamente, es capaz de transformar parte de esta energ´ıa y transferirla en forma de trabajo. Las m´aquinas t´ermicas utilizan *ban˜os t´ermicos*, que son sistemas con una capacidad calor´ıfica enorme, de manera que su temperatura no var´ıa cuando se ponen en contacto con la sustancia de trabajo de las m´aquinas. Un recipiente bien grande y lleno de agua puede funcionar como ban˜o t´ermico en muchas ocasiones.

Toda m´aquina t´ermica tiene cierta *sustancia de trabajo* que realiza un proceso c´ıclico. El proceso es tal que (1) la sustancia de trabajo absorbe cierta energ´ıa por transferencia de un calor *Qa* al ponerla en contacto con un ban˜o t´ermico de alta temperatura *Ta*, (2) la m´aquina realiza un trabajo *W* , y (3) la sustancia expulsa el resto de la energ´ıa previamente ganada al transferir un calor *Qb* a un ban˜o t´ermico de baja temperatura *Tb*. La figura [3.2](#_bookmark53) que vemos a continuaci´on muestra un esquema de este funcionamiento. En estas cantidades, se considera siempre el valor absoluto de calores y trabajos, ignorando el signo negativo que deber´ıamos escribir cuando los realiza el sistema.

Ta

Qa

W

Qb

Tb

Figura 3.2: Esquema de m´aquina t´ermica que trabaja entre un foco t´ermico caliente a temperatura *Ta* y otro fr´ıo a *Tb*. En cada ciclo, la m´aquina absorbe un calor *Qa* del foco caliente, cede un calor *Qb* al foco fr´ıo y realiza un trabajo *W* .

Por ejemplo, en una m´aquina de vapor, la sustancia de trabajo es agua. En una caldera, el agua absorbe calor de la combusti´on de un carburante y

se convierte en vapor. Este vapor realiza trabajo por expansi´on al empujar un ´embolo. Despu´es, el vapor se enfr´ıa y condensa. El agua l´ıquida se hace regresar a la caldera y el ciclo se repite.

Si observamos la figura [3.2,](#_bookmark53) notaremos que se cumple la igualdad *Qa* =

*W* + *Qb*. De aqu´ı, el *trabajo neto* realizado por la m´aquina en cada ciclo es

*W* = *Qa − Qb.*

Se define la *eficiencia o rendimiento e* de una m´aquina t´ermica como el cociente entre el trabajo neto y el calor absorbido del ban˜o caliente, es decir,

*e* = *W* = *Qa − Qb*

*Qa Qa*

= 1 *Qb .* (3.14)

*Qa*

*−*

Se puede interpretar la eficiencia de una m´aquina t´ermica como el cociente entre lo que produce (el trabajo) y lo que absorbe (el calor del ban˜o t´ermico caliente). En la pr´actica, las m´aquinas t´ermicas producen como trabajo s´olo una fracci´on de la energ´ıa que absorben como calor, de manera que su eficien- cia es siempre menor del 100 %. Por ejemplo, los motores de gasolina suelen tener eficiencias del 20 % y los diesel del 40 %. La ecuaci´on de la eficiencia muestra que un valor del 100 % s´olo ser´ıa posible si la sustancia de trabajo no transfiriese calor al ban˜o t´ermico fr´ıo, es decir, si *Qb* = 0, con lo que *W* = *Qa*. Esto no ocurre nunca, como se indica en el siguiente enunciado:

*Segunda/o ley/principio de la Termodin´amica (enunciado de Kelvin- Planck)*: Es imposible construir una m´aquina t´ermica que, operando en un ciclo, no produzca otro efecto m´as que la realizaci´on de una cantidad de trabajo a partir de la entrada de la misma cantidad de energ´ıa por calor desde un ban˜o.

**Ejemplo 3.6.1** *Calculemos la eficiencia de una m´aquina t´ermica que*

*recibe* 1 *kJ de calor del ban˜o caliente y transfiere* 500 *J de calor al ban˜o fr´ıo.*

***Sol.*** *Usando la f´ormula* [(3.14)](#_bookmark54)*, la eficiencia es*

*e* = =

*Qa*

*W Qa − Qb* 1 *−* 0*,*5

*Qa*

=

1

= 0*,*5*.*

*Tambi´en podemos calcular el trabajo que realiza la m´aquina en un ciclo*

*es*

*W* = *Qa − Qb* = 1000 *−* 500 = 500 *J,*

*y con ´este el trabajo en un nu´mero de ciclos, por ejemplo en* 10 *resulta*

*W*10 = 10 *W* = 10 *·* 500 = 5 *kJ.*

## Bombas t´ermicas y frigor´ıficos

El papel de una m´aquina t´ermica es procesar la energ´ıa extra´ıda del ban˜o caliente para realizar trabajo u´til, de tal manera que el flujo de energ´ıa va en el sentido natural: del ban˜o caliente al ban˜o fr´ıo. Podemos pensar si es posible construir una m´aquina en la que el flujo de energ´ıa vaya en sentido opuesto, dirigi´endose del ban˜o fr´ıo al ban˜o caliente. Obviamente, como no es el sentido natural har´a falta alimentar energ´eticamente la m´aquina para que haga esto. Las m´aquinas que se comportan de este modo se llaman *bombas t´ermicas* o *frigor´ıficos*. Una de ellas es el aparato de aire acondicionado, que extrae calor del interior fr´ıo de una casa y lo transfiere al exterior caliente.

En la figura [3.3](#_bookmark56) vemos un esquema energ´etico de un frigor´ıfico o una bom- ba t´ermica. La m´aquina extrae un calor *Qb* de un ban˜o a baja temperatura *Tb* y transfiere un calor *Qa* a un ban˜o a alta temperatura *Ta*. Esto s´olo se puede lograr si se realiza un trabajo *W* sobre la m´aquina.

No ocurre nunca que un frigor´ıfico o una bomba t´ermica funcionen sin aplicar un trabajo, y as´ı lo establece el siguiente enunciado, totalmente equi- valente al de Kelvin-Planck:

*Segunda/o ley/principio de la Termodin´amica (enunciado de Clausius)*:

Es imposible construir una m´aquina c´ıclica cuyo u´nico efecto sea la

transferencia de energ´ıa por calor, desde un objeto hasta otro a mayor temperatura, sin la entrada en la m´aquina de energ´ıa por trabajo.

Los frigor´ıficos usan como sustancia de trabajo un fluido refrigerante tal como el R15, que ha reemplazado al Fre´on por sus efectos perjudiciales para el medio ambiente. Este fluido refrigerante tiene una temperatura de vapori- zaci´on cercana a la ambiental cuando est´a sometido a presiones altas, pero a bajas presiones su temperatura de vaporizaci´on es inferior a 0 *o*C.

El fluido refrigerente en estado l´ıquido y a baja presi´on entra en los tubos de enfriamiento del interior del frigor´ıfico y absorbe calor de los alimentos mientras se evapora. El gas fluye entonces hacia un compresor, donde su

Qa

W

Qb

Ta

Tb

Figura 3.3: Esquema de m´aquina frigor´ıfica que trabaja entre un foco t´ermico caliente a temperatura *Ta* y otro fr´ıo a *Tb*. En cada ciclo, la m´aquina absorbe un calor *Qb* del foco fr´ıo, cede un calor *Qa* al foco caliente y absorbe un trabajo *W* .

presi´on se eleva por medio de un pist´on. Este gas a alta presi´on circula entonces hacia los tubos de condensaci´on exteriores, situados en la parte de atr´as del frigor´ıfico y expuestos al aire de la cocina. All´ı, el gas se condensa transfiriendo calor al aire. Finalmente, el l´ıquido a alta presi´on pasa a trav´es de una v´alvula de expansi´on y su presi´on se reduce hasta la del inicio del ciclo para volver a entrar en los tubos de enfriamiento.

Las *bombas t´ermicas* se usan para calentar casas y edificios. Una bomba t´ermica contiene dos juegos de tubos met´alicos que pueden intercambiar calor con el entorno: un juego en el exterior del edificio, en contacto con el aire, y el otro en el interior. En el modo de calefacci´on, el fluido que circula por los tubos exteriores absorbe calor de la atm´osfera y lo libera en el interior del edificio desde los tubos interiores. El fluido est´a fr´ıo y a baja presi´on cuando est´a en los tubos exteriores, donde absorbe calor del aire. El resultante fluido caliente se comprime entonces y entra en los tubos interiores como fluido caliente y de alta presi´on, y libera energ´ıa en el aire interior. Como vemos, el funcionamiento es muy similar al del frigor´ıfico, pero con los tubos intercambiados.

Un *aparato de aire acondicionado* es simplemente una bomba t´ermica con los tubos exteriores e interiores con los papeles intercambiados, de modo que

opera en modo de enfriamiento igual que un frigor´ıfico. El fluido circulante en los tubos interiores de la casa absorbe calor y, despu´es de ser comprimido, transfiere calor al medio a trav´es de los tubos exteriores.

La efectividad de una bomba t´ermica est´a descrita en t´erminos del *coefi- ciente de operaci´on* (COP). En el modo de calefacci´on, el COP es el cociente entre el calor *Qa* transferido al ban˜o t´ermico caliente y el trabajo *W* necesario para que opere, es decir,

COP (modo de calefacci´on) = *Qa .* (3.15)

*W*

Dado que se suele cumplir que *Qa* es mayor que *W* , el coeficiente de operaci´on suele ser mayor que 1. De hecho, si la temperatura exterior es m´as alta que unos 4 *o*C, el valor del COP para una bomba t´ermica es del orden de 4; esto implica que la cantidad de calor transferida al edificio es unas 4 veces mayor que el trabajo realizado por el motor de la bomba. Sin embargo, si la temperatura exterior es m´as baja, el COP desciende porque se hace m´as dif´ıcil extraer calor del aire. Para temperaturas exteriores por debajo de unos 9 *o*C, el COP puede ser incluso menor que 1, lo que indica que el uso de bombas t´ermicas no es lo m´as apropiado en climas con temperaturas tan

*−*

*−*

bajas.

En el modo de enfriamiento, el COP hace referencia a su uso, y por tanto se define como el cociente entre el calor *Qb* extra´ıdo del ban˜o fr´ıo y el trabajo *W* necesario para que funcione,

COP (modo de enfriamiento) = *Qb ,* (3.16)

*W*

que es del orden de 5 en un frigor´ıfico.

**Ejemplo 3.7.1** *Calculemos el calor Qb extra´ıdo del ban˜o fr´ıo en un ciclo*

*por un frigor´ıfico que tiene un COP de 5 sabiendo que en cada ciclo necesita* 100 *J de energ´ıa en forma de trabajo.*

***Sol.*** *A partir del COP de enfriamiento del frigor´ıfico y el trabajo W, podemos obtener el calor Qb:*

*COPenf* = *W*

*Qb*

*⇒ Qb* = *COPenf W* = 5 *·* 100 = 500 *J.*

## M´aquina de Carnot

Vamos a estudiar la m´aquina t´ermica te´orica que, operando entre dos fo- cos t´ermicos, es la m´as eficiente posible. Para ello, antes hemos de entender el significado de procesos reversibles e irreversibles. Supongamos que un sis- tema experimenta cierto proceso caracterizado por una trayectoria dada en un diagrama *pV* . Si es posible devolver al sistema a sus condiciones iniciales mediante exactamente la misma trayectoria en el diagrama *pV* pero recorri- da en sentido inverso, sin producir ningu´n cambio sobre el entorno (resto del universo), entonces se trata de un *proceso reversible*. En caso contrario, se trata de un *proceso irreversible*. Un ejemplo: cuando dos cuerpos a diferentes temperaturas entran en contacto, el flujo de calor va desde el cuerpo m´as caliente al m´as fr´ıo, no al rev´es. Este proceso es irreversible, en general, pues ocurre de manera natural s´olo en un sentido y es necesario hacer trabajo o inyectar energ´ıa en forma de calor para invertirlo.

En la naturaleza, todos los procesos son irreversibles, pero algunos son *casi* reversibles. Una condici´on necesaria para que esto ocurra, aunque no su- ficiente, es que el proceso sea cuasiest´atico: proceso muy lento, de manera que el sistema est´e siempre muy cerca de un estado de equilibrio. Por ejemplo, consideremos la expansi´on de un gas en un recipiente que tiene un pist´on y unas paredes t´ermicamente aisladas pero que su base permite el contacto con un ban˜o t´ermico a temperatura dada. Si el gas se comprime muy lentamente y el pist´on no tiene fricci´on con el recipiente, en principio el proceso es tal que el sistema a cada paso est´a muy cerca del equilibrio, dado que adem´as la temperatura del gas es siempre la del ban˜o t´ermico. Es un proceso casi reversible porque puede invertirse separando el pist´on con la misma lentitud con la que se empuj´o. En general, un proceso casi reversible no puede presen- tar efectos disipadores que conviertan energ´ıa mec´anica en energ´ıa interna, como el rozamiento o la turbulencia, ya que estas conversiones no se pueden revertir.

La *m´aquina de Carnot* opera en un ciclo ideal reversible entre dos ban˜os

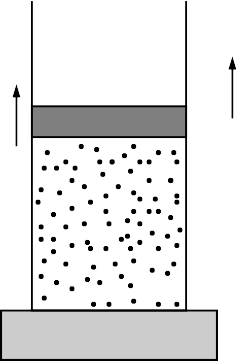
t´ermicos, que se llama *ciclo de Carnot*. Se cumple:

*Teorema de Carnot*: Ninguna m´aquina t´ermica real que opere entre dos ban˜os t´ermicos puede ser m´as eficiente que una m´aquina de Carnot que opere entre los dos mismos ban˜os.

Para describir el ciclo de Carnot que tiene lugar entre las temperaturas

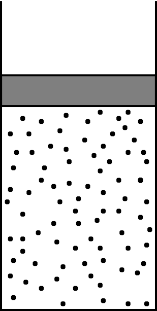
*T*1 (alta) y *T*2 (baja), supondremos que la sustancia de trabajo es un gas

ideal contenido en un recipiente provisto de un pist´on en su parte superior. Las paredes del recipiente y el pist´on son aislantes t´ermicos, pero la base del recipiente permite poner en contacto el gas con un ban˜o t´ermico. El ciclo de Carnot est´a formado por los cuatro procesos reversibles de la figura [3.4.](#_bookmark60)

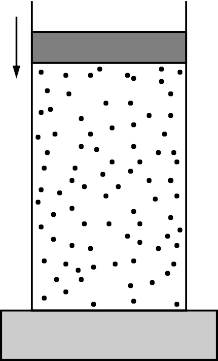


(a)

T1

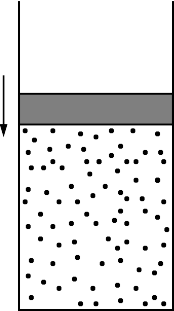


(b)



(c)

T2



(d)

Figura 3.4: Ciclo de Carnot de un gas ideal: (a) expansi´on isoterma a la temperatura *T*1, (b) expansion adiab´atica, (c) compresi´on isoterma a la tem- peratura *T*2 y (d) compresi´on adiab´atica.

1. *Expansi´on isot´ermica a alta temperatura*. Ponemos la base del recipiente en contacto con el ban˜o t´ermico a temperatura alta *T*1, lo que mantiene el gas a esta temperatura. El gas se expande desde un volumen *V*1 a un volumen mayor *V*2. Durante la expansi´on, el gas absorbe un calor *Q*1 del ban˜o y lo convierte en trabajo que realiza sobre el pist´on.

*| |*

1. *Expansi´on adiab´atica*. La base del recipiente se separa del ban˜o y se aisla t´ermicamente. El gas continu´a su expansi´on de manera adiab´atica, aumentando su volumen de *V*2 a *V*3 y disminuyendo su temperatura de *T*1 a *T*2, momento en que paramos el pist´on.
2. *Compresi´on isot´ermica a baja temperatura*. Ponemos la base del reci- piente en contacto con el ban˜o t´ermico a temperatura baja *T*2. Comen- zamos a empujar el pist´on, comprimiendo el gas isot´ermicamente desde un volumen *V*3 hasta un volumen menor *V*4. Durante este proceso, el gas transmite un calor *Q*2 al ban˜o a partir del trabajo realizado por el pist´on.

*| |*

1. *Compresi´on adiab´atica*. La base del recipiente se separa del ban˜o y se aisla t´ermicamente. Continuamos la compresi´on del gas de manera adiab´atica, desde un volumen *V*4 hasta el volumen inicial *V*1. La tem- peratura del gas en este proceso aumenta de *T*2 a *T*1. Se completa as´ı el ciclo.

Hab´ıamos definido la eficiencia *e* de una m´aquina t´ermica como el cociente entre el trabajo neto y el calor absorbido del ban˜o caliente, es decir,

*e* = *W* = *|Q*1*| − |Q*2*|* = 1 *− |Q*2*| .*

*|Q*1*|*

*|Q*1*|*

*|Q*1*|*

En la segunda igualdad de la ecuaci´on anterior hemos usado que en un ciclo la energ´ıa interna del gas no cambia, por lo que *W* = *|Q*1*| − |Q*2*|*. Se puede demostrar que, en un ciclo de Carnot, *Q*2 */ Q*1 = *T*2*/T*1, donde las tempe- raturas han de medirse en Kelvin. De aqu´ı, la *eficiencia de una m´aquina de Carnot* es

*| | | |*

*−*

*ecarnot*

= 1 *T*2 *T*1

= *T*1 *− T*2 *,* (3.17)

*T*1

y, por tanto, todas las m´aquinas de Carnot que operen entre las mismas tem- peraturas tienen la misma eficiencia. Adem´as, tambi´en se puede demostrar que esta eficiencia es independiente de la sustancia de trabajo de la m´aquina. Una m´aquina de Carnot que funcione *a la inversa* constituye la bomba t´ermica m´as efectiva posible, y determina el m´aximo coeficiente de operacion (COP) para una combinaci´on dada de temperaturas. Este valor m´aximo de

COP en modo de calefacci´on es

COP (modo de calefacci´on)

= *|Q*1*|* = *|Q*1*|* = *T*1 *,* (3.18)

y en modo de enfriamiento,

*carnot W*

*|Q*1*| − |Q*2*|*

*T*1 *− T*2

COP (modo de enfriamiento)

= *|Q*2*|* = *|Q*2*|* = *T*2 *.*

*carnot W*

*−*

*|Q*1*| − |Q*2*|*

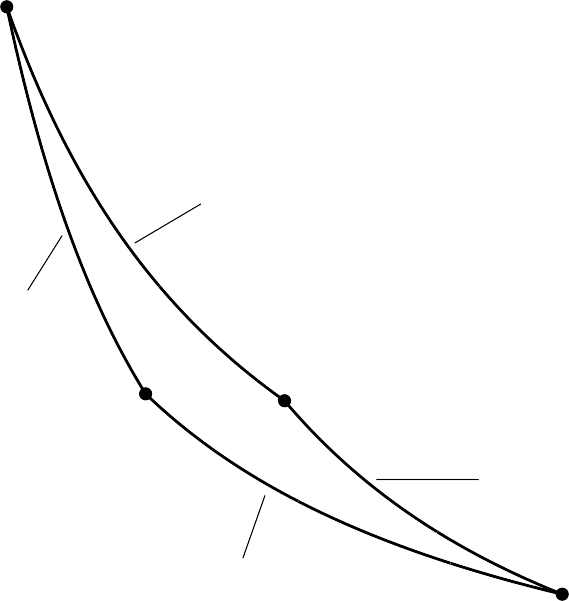
*T*1 *T*2

(3.19)

Como vemos, a medida que la diferencia de temperaturas entre los dos ban˜os se aproxima a cero, el COP te´orico m´aximo se aproxima a infinito. En la pr´actica, la baja temperatura de los tubos de enfriamiento y la alta tempe- ratura del compresor limitan el COP m´aximo a valores del orden de 10.

Podemos representar tambi´en el ciclo de Carnot en un diagrama *pV* , compuesto por dos isot´ermicas y dos adiab´aticas, como en la figura [3.5.](#_bookmark64) El sentido de recorrido del ciclo determina si se trata de una m´aquina t´ermica (sentido horario) o un frigor´ıfico o bomba t´ermica (sentido antihorario).

p



p1,V1

T=T1

Q=0

p4,V4

p2,V2

Q=0

T=T2

p3,V3

V

Figura 3.5: Ciclo de Carnot en el diagrama *pV* .

**Ejemplo 3.8.1** *Calculemos el rendimiento de una m´aquina de Carnot*

*que trabaja con un foco caliente a* 50 *oC y un foco fr´ıo a* 25 *oC.*

***Sol.*** *Usando la f´ormula* [(3.17)](#_bookmark61)

*ecarnot* = 1 *− T*

*T*2

273*,*15 + 25

1

*~* 1 *−* 273*,*15 + 50 *~* 0*,*0774*.*

*Si mantenemos la misma temperatura para foco fr´ıo y queremos duplicar*

*el rendimiento anterior, necesitamos una fuente caliente con una tempe-*

*ratura T*1*I igual a*

1*−* = 2 1 *−*

*T*2

*T I*

*T*2

*T*1

*⇒ T* =

1

*I*

*T*2

2 *−* 1

*T*

2

273*,*15 + 25

273*,*15+25

1

*T*1

*~*

2

273*,*15+50

*—* 1

*o*

*~* 353 *K ~* 79*,*6 *C.*

* 1. *TABLA RESUMEN* 59

## Tabla resumen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fo´rmula/magnitud | Definici´on | Ecuaci´on |
| *W* = *−* f *V*2 *p dV*  *V*1  *p*  *V V*1 *V*2 | Trabajo de deformaci´on sobre el gas Presi´on del gas  Volumen del gas  Volumen en el estado 1 Volumen en el estado 2 | [(3.1)](#_bookmark34) |
| ∆*U* = *Q* + *W*  ∆*U Q* | Primer principio de la Termodin´amica Variaci´on de energ´ıa interna  Calor absorbido | [(3.2)](#_bookmark37) |
| *Q*(*V* =*cte*) = *CV* ∆*T* | Calor absorbido en proceso is´ocoro | [(3.3)](#_bookmark40) |
| *CV* | Capacidad calor´ıfica a volumen constante |  |
| ∆*T* | Variaci´on de temperatura |  |
| *CV* = (3*/*2)*nR* | Gas ideal monoat´omico | [(3.5)](#_bookmark42) |
| *CV* = (5*/*2)*nR* | Gas ideal diat´omico | [(3.6)](#_bookmark43) |
| *CV* = 3*nR* | Gas ideal poliat´omico | [(3.7)](#_bookmark44) |
| *Q*(*p*=*cte*) = *Cp* ∆*T Cp*  *Cp* = *CV* + *nR* | Calor absorbido en proceso isob´arico Capacidad calor´ıfica a presi´on constante Gases ideales | [(3.4)](#_bookmark41) |
| *γ* = *Cp*  *CV* | Coeficiente adiab´atico |  |
| *γ* = 5*/*3 | Gas ideal monoat´omico | [(3.8)](#_bookmark45) |
| *γ* = 7*/*5 | Gas ideal diat´omico | [(3.9)](#_bookmark46) |
| *γ* = 4*/*3 | Gas ideal poliat´omico | [(3.10)](#_bookmark47) |
| ∆*U* = *CV* ∆*T*  *p*1*V γ* = *p*2*V γ*  1 2  *T*1*V γ−*1 = *T*2*V γ−*1  1 2 | Proceso adiab´atico cuasiest´atico | [(3.11)](#_bookmark49) |
|  | [(3.12)](#_bookmark50) |
|  | [(3.13)](#_bookmark51) |
| *e* = *W*  *Qa* | Eficiencia de una m´aquina t´ermica | [(3.14)](#_bookmark54) |
| *W* | Trabajo hecho por la m´aquina en cada ciclo |  |
| *Qa* | Calor absorbido en cada ciclo |  |
| COP = *Qa*  *W*  *Qa* | Coeficiente de operaci´on m´aquina t´ermica Calor cedido a la fuente caliente | [(3.15)](#_bookmark57) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *W* | Trabajo sobre la m´aquina |  |
| COP = *Qb*  *W* | COP enfriamiento | [(3.16)](#_bookmark58) |
| *Qb* | Calor absorbido del foco fr´ıo |  |
| *W* | Trabajo sobre la m´aquina |  |
| *ecarnot* = 1 *− T*2  *T*1  *T*1  *T*2  COP =  *T*1  *T*1*−T*2  COP = *T*2  *T*1*−T*2 | Eficiencia m´aquina de Carnot | [(3.17)](#_bookmark61) |
| Temperatura de la fuente caliente |  |
| Temperatura de la fuente fr´ıa |  |
| COP Carnot calefacci´on | [(3.18)](#_bookmark62) |
| COP Carnot enfriamiento | [(3.19)](#_bookmark63) |

## Problemas resueltos

* + 1. A la presi´on atmosf´erica, 5 m3 de aire se calienta debido a la radiaci´on solar y al contacto con el suelo, de modo que su temperatura aumenta desde 300 K a 330 K. Calcula:
       1. El calor absorbido por el gas.
       2. El aumento de la energ´ıa interna del aire.
       3. El volumen que ocupa el aire en el estado final.
       4. ) El trabajo realizado sobre el aire.
       5. Comprueba que se cumple el primer principio de la termodin´ami- ca.

**Sol.** Nos har´a falta el nu´mero de moles de aire, que podemos calcular con la ecuaci´on de los gases ideales para el estado inicial 1:

*p*1*V*1 = *nRT*1 *⇒ n* =

*p*1*V*1 *RT*1

101 103 5

*~* 8*,*31 *·* 300 *~* 203 mol*.*

*· ·*

1. La capacidad calor´ıfica a presi´on constante del aire, considerado gas ideal diat´omico, es *Cp* = *CV* +*nR* = (5*/*2) *nR*+*nR* = (7*/*2) *nR*. Con esto, el calor absorbido por el aire a presi´on constante resulta

7

*Q* = *Cp* ∆*T ~* 2 *·* 203 *·* 8*,*31 *·* (330 *−* 300) *~* 177 kJ*.*

1. El cambio de energ´ıa interna de un gas ideal diat´omico, en cual- quier proceso, es

5

∆*U* = *CV* ∆*T ~* 2 *·* 203 *·* 8*,* 31 *·* (330 *−* 300) *~* 126 kJ*.*

1. El volumen final puede calcularse con la ecuaci´on de los gases ideales. Dado que la presi´on y el nu´mero de moles se mantienen constantes en este proceso,

*V*2 = *V*1 *T*2 *T*1

*⇒ V*2

*T*2

= *V*1

*T*

1

= 5 330 = 5*,*5 m3*.*

300

1. ) Con el resultado anterior, el trabajo realizado sobre el gas es

- *V*2

*W* = *−*

*V*1

*p dV* = *−p* (*V*2 *− V*1) = *−*101*·*103*·*(5*,*5*−*5) = *−*50*,*5 kJ*.*

1. Con los resultados de los apartados (a) y (d) anteriores,

*Q* + *W ~* 177 kJ *−* 50*,*5 kJ *~* 126 *×* kJ*.*

Esto coincide con el cambio de energ´ıa interna calculado en el apartado (b).

* + 1. En el estado inicial, 0*,*5 mol de un gas ideal monoat´omico ocupa 5 *,e* a una temperatura de 300 K. Luego, el gas triplica su temperatura manteniendo su volumen constante. Acto seguido, el gas duplica su volumen manteniendo su presi´on constante. Calcula:
       1. El trabajo realizado por el gas en cada proceso y el trabajo total.
       2. El calor absorbido por el gas en cada proceso y el calor total.
       3. La variaci´on de la energ´ıa interna del gas.

**Sol.** Necesitaremos la presi´on inicial del gas, que es

*p* = *nRT*1

1

*V*1

0*,*5 *·* 8*,*31 *·* 300 249 kPa*.*

5 *·* 10*−*3

*~ ~*

1. Durante el primer proceso, a volumen constante, el trabajo es cero porque no hay variaci´on de volumen, de modo que *W*1 = 0. La presi´on tras este primer proceso puede obtenerse de la ecuaci´on de los gases con nu´mero de moles y volumen constantes,

*p*1 = *p*2 *T*1 *T*2

*⇒ p*2

*T*2

= *p*1

*T*

1

= 3*p*1

*~* 748 kPa*.*

El segundo proceso es a presi´on constante. El trabajo en este pro- ceso, que es tambi´en el trabajo total, resulta

- *V*2

*W* = *W*2 = *−*

*V*1

*p*2 *dV* = *−p*2 (*V*2 *− V*1)

*~ −*748 *·* 103(2 *·* 5 *·* 10*−*3 *−* 5 *·* 10*−*3) *~ −*3*,*74 kJ*.*

El trabajo realizado por el gas es, pues, *Wgas* = *−W ~* 3*,*74 kJ.

1. Dado que el gas ideal es monoat´omico, el calor en el primer proceso (a volumen constante) est´a dado por

3 3

*Q*1 = *CV* ∆*T* = 2 *nR* ∆*T ~* 2 *·* 0*,*5 *·* 8*,*31 *·* (900 *−* 300) *~* 3*,*74 kJ*.*

Para calcular el calor en el segundo proceso, necesitaremos la tem- peratura final. Este segundo proceso es a presi´on (y nu´mero de moles) constante, de manera que

Con esto,

*V*2 = *V*3 *T*2 *T*3

*⇒ T*3

*V*3

= *T*2

*V*

2

= 2*T*2

= 1800 K*.*

5 5

*Q*2 = *Cp* ∆*T* = 2 *nR* ∆*T ~* 2 *·* 0*,*5 *·* 8*,*31 *·* (1800 *−* 900) *~* 9*,*35 kJ*.*

El calor total absorbido por el gas es

*Q* = *Q*1 + *Q*2 *~* 13*,*1 kJ*.*

1. La variaci´on de la energ´ıa interna del gas es

∆*U* = *W* + *Q ~* 9*,*35 kJ*.*

Tambi´en se puede calcular as´ı:

3 3

∆*U* = *CV* ∆*T* = 2 *nR* ∆*T* = 2 *·* 0*,*5 *·* 8*,*31 *·* (1800 *−* 300) *~* 9*,*35 kJ*.*

* + 1. Cuando el volumen de un gas ideal es de 50 cm3, su presi´on es de 3 atm. Si este mismo gas duplica su volumen a temperatura constante, calcula el trabajo hecho sobre el mismo, el trabajo que absorbe y la variaci´on de su energ´ıa interna.

**Sol.** En un gas ideal, la energ´ıa interna depende solo de la temperatura. Por eso, en un proceso isot´ermico de un gas ideal, ∆*U* = 0. De aqu´ı, el calor aplicado y el trabajo realizado sobre el gas est´an relacionados segu´n

∆*U* = 0 = *Q* + *W ⇒ Q* = *−W.*

Para determinar el trabajo, hemos de calcular la siguiente integral de- finida:

-

*W* = *−*

*V*2

*p dV.*

*V*1

Como el proceso es a temperatura constante, se escribe la presi´on en t´erminos de la temperatura y volumen usando la ecuaci´on de los gases ideales, con lo que

*W* = *−*

*V*2 *nRT*

*dV* = *nRT*

-

*−V*

*V*1

*V*2 1 *V*2

*dV* = *nRT* ln *.*

-

*−V*

*V*1 *V*1

Volviendo a utilizar la ecuaci´on de los gases ideales, *nRT* = *p*1*V*1, te- nemos

*W* = *−p*1*V*1 ln = *−*3 *·* 101 *·* 103 *·* 50 *·* 10*−*6 ln 2 *~ −*10*,*5 J*.*

*V*2

1

*V*

Y, de aqu´ı, *Q* = *−W ~* 10*,*5 J.

* + 1. Un cilindro provisto de un pist´on contiene 0*,*5 mol de helio a la presi´on atmosf´erica, 101 kPa. Manteniendo la temperatura en 310 K, el pist´on se mueve hasta que la presi´on del gas alcanza los 80 kPa. Determina el trabajo realizado por el gas durante la expansi´on.

**Sol.** El trabajo sobre el gas en un proceso isot´ermico es

*W* = *−*

*V*2

*p dV* = *−*

-

*V*1

- *V*2 1

= *−nRT*

*V dV* = *−nRT* ln

*V*1

*V*2 *nRT*

*dV*

-

*V*1 *V*

*V*2

*.*

*V*

1

Para calcularlo, necesitaremos el cociente de volu´menes *V*2*/V*1. Dado que la temperatura y el nu´mero de moles se mantienen constantes du- rante la expansi´on, de la ley de los gases obtenemos

*p*1*V*1

= *p*2*V*2

*V*2

*⇒ V*1

= *p*1 *.*

*p*2

Introduciendo esto en la expresi´on del trabajo,

*W* = *−nRT* ln *V*2 = *−nRT* ln *p*1

*V*1

*p*2

= *−*0*,*5 *·* 8*,*31 *·* 310 *·* ln 101 *~ −*300 J*.*

80

El trabajo realizado por el gas es, por tanto, *Wgas* = *−W ~* 300 J.

* + 1. Calcula el calor necesario para duplicar el volumen de 1 mol de gas ideal si mantiene su temperatura en 300 K.

**Sol.** En la expansi´on isot´ermica de un gas ideal, ∆*U* = 0. Por tanto,

*Q* = *−W* =

Dado que *V*2 = 2 *V*1, resulta

*V*2 *V*2

*p dV* = *nRT* ln *.*

-

*V*1 *V*1

*Q* = *nRT* ln *V*2 = 1 *·* 8*,*31 *·* 300 *·* ln 2 *~* 1730 J*.*

*V*1

* + 1. Un mol de gas ideal se mantiene en contacto con un ban˜o t´ermico a 400 K. Calcula su volumen sabiendo que ha absorbido 100 J y que su volumen inicial era de 0*,*005 m3.

###### Sol.

Dado que el proceso es isot´ermico y el sistema es un gas ideal, se cumple

∆*U* = 0. De aqu´ı,

*Q* = *−W* =

*V*2

*p dV* = *nRT*

-

*V*1

*V*2 1 *V*2

*dV* = *nRT* ln *.*

-

*V*1 *V V*1

El calor es un dato, as´ı que se despeja de la ecuaci´on anterior el volumen final *V*2

*Q* = ln *V*2 *⇒ eQ/nRT* = *V*2

*nRT*

*V*

*V*

1

1

*⇒ V* = *V*

*eQ/nRT .*

Con los datos del problema,

2

1

*V*2 = *V*1 *eQ/nRT* = 0*,*05 *e*100*/*(1*·*8*,*31*·*400) *~* 0*,*0515 m3*.*

* + 1. Una mezcla de gases se comprime de forma adiab´atica y cuasiest´atica, desde un volumen inicial de 500 cm3 hasta un volumen final de 50 cm3. Teniendo en cuenta que el coeficiente adiab´atico es *γ* = 1*,*37 y que la temperatura inicial de la mezcla es de 50*o*C, calcula la temperatura final.

**Sol.** Dado que tenemos datos de temperatura y volumen, podemos

escribir la ecuaci´on del proceso adiab´atico como *T*1*V γ−*1 = *T*2*V γ−*1, de

modo que

*T*2 = *T*1

*V*1 *γ−*1

*V*2

= (273*,*15 + 50) *·*

1

500 1*,*37*−*1

50

2

*~* 758 K*.*

* + 1. Mientras se expanden adiab´atica y cuasiest´aticamente, 10 g de gas de hidr´ogeno H2 realizan 103 J de trabajo. Calcula la variaci´on de tempe- ratura del gas.

**Sol.** Dado que la masa molar del H2 es *Mm* = 2 g*/*mol, el nu´mero de moles de este gas en el sistema que se expande es

*m*

*n* = =

*Mm*

10

= 5 mol*.*

2

En un proceso adiab´atico, se cumple que *Q* = 0. Por tanto, ∆*U* = *W* . Pero el dato que tenemos es el trabajo que realiza el gas, que es *Wgas* =

*−W* . Como consecuencia,

*Wgas* = *−*∆*U.*

Ahora, dado que se tiene un gas diat´omico como H2, llegamos a

5

*Wgas* = *−*∆*U* = *−* 2 *nR* ∆*T*

*−*2*Wgas −*2 *·* 103

*⇒* ∆*T* =

5*nR* = 5 *·* 5 *·* 8*,*31 *~ −*9*,*63 K*.*

Un gas realiza trabajo y disminuye su temperatura en una expansion adiab´atica.

* + 1. Dos moles de ox´ıgeno O2 se expande adiab´atica y cuasiest´aticamente, desde 300 K de temperatura y 1 atm de presi´on, hasta triplicar su vo- lumen. Calcula su presi´on final y el trabajo que realiza.

**Sol.** Para calcular la presi´on final, podemos usar la ecuaci´on del proce- so adiab´atico *pV γ* = constante, con *γ* = *Cp/CV* = 7*/*5 = 1*,*4 dado que el ox´ıgeno es diat´omico:

*p*1*V γ* = *p*2*V γ*

*⇒ p*2 = *p*1

*V*1 *γ*

= 101 kPa *·*

*V*1 1*,*4

*~* 21*,*7 kPa*.*

1 2 *V*2

3*V*1

La temperatura final ser´a

*⇒ T*2 = *T*1

= 300 *·*

*~* 193 K*.*

1

2

*T*1*V γ−*1 = *T*2*V γ−*1

*V*1 *γ−*1

*V*2

*V*1 0*,*4

3*V*1

El trabajo se puede obtener del cambio de energ´ıa interna, dado que el calor, en un proceso adiab´atico, es cero,

5 5

*W* = ∆*U* = *CV* ∆*T* = 2 *nR* ∆*T ~* 2 *·* 2 *·* 8*,*31 *·* (193 *−* 300) *~ −*4430 J*.*

Por tanto, el trabajo realizado por el gas es

*Wgas ~* 4430 J*.*

* + 1. Se tienen 0*,*5 moles de gas ideal monoat´omico. Inicialmente, el gas tiene una temperatura *Ti* = 300 K y un volumen inicial desconocido *Vi*. Rea- liza entonces los siguientes pasos. Primero, sufre un proceso isoc´orico hasta que su temperatura llega hasta 900 K. Seguidamente, realiza una expansi´on isot´ermica hasta que su volumen inicial se duplica. Determi- na el calor total transferido al gas y el trabajo total realizado sobre el gas.

**Sol.** Calculemos el calor absorbido por el gas y el trabajo que realiza en ambos procesos. El primero es a volumen constante:

3 3

*Q*1 = *CV* ∆*T* = 2 *nR*∆*T*1 *~* 20*,*5 *·* 8*,*31 *·* (900 *−* 300) *~* 3*,*74 kJ*,*

*W*1 = 0 J*.*

El segundo proceso es isotermo:

∆*U*2 = 0 *⇒ Q*2 = *−W*2 =

*Vf*

*p dV* = *nRT* ln *f Vi* *i*

-

*V*

2

*V*

0*,*5 *·* 8*,*31 ln 2 2*,*59 kJ*.*

*~ ~*

900

As´ı, el calor total transferido al gas es

*Q* = *Q*1 + *Q*2 *~* 6*,*33 kJ*.*

El trabajo realizado sobre el gas es

*W* = *−W*1 *− W*2 *~* 2*,*59 kJ*.*

* + 1. Tenemos 100 cm3 de aire a la presi´on atmosf´erica y a 310 K de tempe- ratura dentro de un recipiente.
       1. Lo comprimimos adiab´atica y cuasiest´aticamente hasta reducir su volumen a la mitad. Calcula el cambio de energ´ıa interna del aire.
       2. Luego, ponemos el aire comprimido en contacto con un ban˜o t´ermico a 310 K, sin cambiar su volumen. Calcula el calor ab- sorbido por el aire y su energ´ıa interna final.

**Sol.** Necesitaremos el nu´mero de moles de aire en el sistema, que po- demos calcular a partir de los datos del estado inicial,

*p*1*V*1

101 *·* 103 *·* 100 *·* 10*−*6 *−*3

*n* = =

*RT*1

8*,*31 *·* 310 *~* 3*,*92 *·* 10

mol*.*

1. La temperatura a la que llega el aire tras la compresi´on adiab´ati- ca, usando que el coeficiente adiab´atico del aire, tomado como gas ideal diat´omico, es *γ* = *Cp/CV* = 7*/*5 = 1*,*4 resulta, usando

*T*1*V γ−*1 = *T*2*V γ−*1,

1 2

*T*2 = *T*1

*V*1 *γ−*1

*V*2

= 310 *·*

100 0*,*4

50

*~* 438 K*.*

El cambio de energ´ıa interna en la compresi´on es

5

∆*U*12 = *CV* ∆*T* = 2 *nR* ∆*T*

*~* 5 *·* 3*,*29 *·* 10*−*3 *·* 8*,*31 *·* (438 *−* 310) *~* 8*,*07 J*.*

2

1. El segundo proceso es isoc´orico. Dado que el volumen es constante, el trabajo en este proceso es cero, de manera que

5

*Q*23 = ∆*U*23 = *CV* ∆*T* = 2 *nR* ∆*T*

= *−*∆*U*12 *~ −*8*,*07 J*.*

Es decir, el gas desprende calor hacia el exterior en este proceso mientras reduce su temperatura a volumen constante.

Debido a los dos procesos anteriores, la energ´ıa interna del gas *U*3 es la misma que ten´ıa inicialmente *U*1 (pues la temperatura final es igual a la inicial). As´ı,

*U*3 = *U*1

= *CV*

5

*T*1 = *nR T*1

2

5

*~* 2 *·* 3*,*29 *·* 10 *·* 8*,*31 *·* 310 *~* 33*,*3 J*.*

*−*3

* + 1. Disponemos de un frigor´ıfico con un COP de 4 que est´a consumiendo 5 W. Esta potencia la est´a empleando en enfriar y congelar 100 g de agua a 20 *o*C que hemos colocado en la parte del congelador. Estima el tiempo que tardar´a el frigor´ıfico en congelar el agua a 0 *o*C, teniendo en cuenta que el calor espec´ıfico del agua es *c* = 4187 J*/*(kg K) y que el calor latente de fusion es *Lf* = 3*,*34 105 J*/*kg.

*·*

*·*

**Sol.** El calor necesario para enfriar el agua hasta los 0*o*C es

*Q*1 = *mc* ∆*T,*

donde asumimos que, cuando el agua est´a a punto de congelar, est´a en “equilibrio” a 0 *o*C. Esto no es cierto, pues est´a dentro de un congela- dor a menor temperatura, aunque resulta una buena aproximaci´on en general. Adema´s, cuando el agua se congela, absorbe el siguiente calor:

*Q*2 = *m Ls* = *−m Lf ,*

donde *m* es la masa de agua y *Ls* el calor de solidificaci´on. En total, el agua absorbe:

*Q* = *Q*1 + *Q*2 *~* 0*,*1 *·* 4187 *·* (0 *−* 20) *−* 0*,*1 *·* 3*,*34 *·* 105 *~ −*42*,*0 kJ*,*

que al ser negativo implica que es el frigor´ıfico el que absorbe calor. Si

*Qb* es dicho calor, tenemos

*Qb* = *−Q ~* 42*,*0 kJ*.*

A partir del COP de enfriamiento del frigor´ıfico, podemos obtener el trabajo que ´este tiene que realizar para hacerlo:

*Qb*  *Qb*

42*,*0 *·* 103

*COPenf* = *W ⇒ W* = *COP*

*enf ~*

4 *~* 10*,*5 kJ*.*

Si toda la potencia del frigor´ıfico se emplea en realizar este trabajo, tendremos

*W W* 10*,*5 *·* 103 3

*P* = *t ⇒ t* = *P ~* 5 *~* 2*,*10 *·* 10 s*.*

* + 1. Una m´aquina t´ermica realiza un ciclo de Carnot utilizando 10 moles de gas ideal monoat´omico como sustancia de trabajo. Un ciclo de la m´aquina est´a formado por cuatro procesos: *A → B* expansi´on isoter- ma a temperatura *T*1 hasta duplicar su volumen, *B → C* expansi´on adiab´atica hasta dublicar su volumen, *C → D* compresi´on isoterma a la temperatura *T*2 y *D A* compresi´on adiabica. En el estado *A*, la presi´on del gas es 101 kPa y ocupa 1 m3.

*→*

1. Calcula las temperaturas *T*1 y *T*2.
2. Calcula el rendimiento de la m´aquina.

###### Sol.

1. Usando la ecuaci´on de los gases ideales

*T*1 =

*pAVA* =

*nR*

101 103 1

10 *·* 8*,*31 *~* 1220 K*.*

*· ·*

Para calcular *T*2, consideramos el proceso *B → C*:

*T*2*V γ−*1 = *T*1*V γ−*1

*C B*

donde *VC* = 2*VB* y *γ* = 5 . As´ı,

3

*VB γ−*1 *T*1

*T*2 = *T*1

*C*

= 2

2 3

*~* 766 K*.*

*V*

1. Usando los resultados del apartado anterior, el rendimiento de la m´aquina de Carnot es

3

*e* = 1 *T*2 *T*1

*−*

= 1 *−* 2*−* 2

*~* 0*,*370*.*

* + 1. Una casa est´a refrigerada con una m´aquina que aproximaremos por una m´aquina de Carnot inversa. Determina la potencia consumida por la m´aquina si ´esta extrae, en una hora, 105 J de calor del interior de la casa, a 26 *o*C, estando el exterior a 36 *o*C.

**Sol.** La m´aquina de Carnot es el dispositivo (ideal) m´as eficiente pa- ra refrigerar o calentar una vivienda. Si el aire acondicionado es una

m´aquina de Carnot inversa, su COP de enfriamiento se puede calcular con s´olo las temperaturas interior y exterior de la casa:

*COP*

= *Qb*

*Qb*  *Tb* 273*,*15 + 26

= = *~ ~* 29*,*9*.*

*enf W*

*Qa − Qb Ta − Tb* 36 *−* 26

A partir de este valor, y con el dato de calor extra´ıdo de la vivienda en una hora, podemos calcular el trabajo que realiza la m´aquina de Carnot cada hora,

*Qb Qb* 105

*COPenf* = *W ⇒ W* = *COP*

La potencia de la m´aquina es

*enf*

*~* 29*,*9 *~* 3340 J*/*hora*.*

J 1 hora

*P ~* 3340 hora 3600 s *~* 0*,*929 W*.*

# Cap´ıtulo 4 Ondas

Iniciamos con este tema el estudio de las ondas. Como ejemplo de onda transversal, estudiamos la propagaci´on de una pertur- baci´on por una cuerda tensa. Presentamos la ecuaci´on de ondas y estudiamos en detalle las soluciones arm´onicas. Como ejemplo de onda longitudinal, estudiamos el sonido. En este u´ltimo caso, prestamos especial inter´es a tres propiedades: la onda de despla- zamiento de las mol´eculas, la onda de presi´on acu´stica y la onda de variaci´on de la densidad. Finalmente, estudiamos los fen´ome- nos de superposici´on e interferencia de ondas arm´onicas.

## Propagaci´on de una perturbacio´n

Consideremos un medio homog´eneo y fij´emonos en un punto cualquiera de ´este, que llamaremos *foco*, en el cual realizamos una perturbaci´on de las propiedades del medio. La perturbaci´on se va propagando al resto de los puntos con un retraso que depende de la distancia. Esta *propagaci´on de una perturbaci´on*, en la que no hay transporte neto de materia pero s´ı de energ´ıa, es lo que llamamos *onda*.

Un ejemplo de onda es el de la figura [4.1.](#_bookmark69) Un muelle en posici´on ver- tical comienza a oscilar y hay una cuerda conectada a ´el. La oscilaci´on se propaga por la cuerda hasta que cada punto de ella realiza el mismo tipo de movimiento. Pero los puntos materiales de la cuerda no se han transpor- tado en horizontal: se limitan a oscilar en torno a su posici´on de equilibrio

73

Figura 4.1: Propagaci´on de una onda en una cuerda.

verticalmente.

Todos los puntos de un medio homog´eneo e is´otropo a los que la perturba- ci´on transportada por una onda llega en un cierto instante de tiempo tienen el mismo estado o valor de la perturbaci´on. El conjunto o lugar geom´etrico de estos puntos forma en el espacio una superficie que se llama *frente de onda* (en el caso particular de una cuerda, el frente de ondas es un punto; en el caso particular de una onda sobre la superficie del agua, el frente de onda es una curva). La forma de estos frentes es tambi´en una manera de clasificar las ondas, ya que podemos distinguir entre ondas planas, circulares, cil´ındricas, esf´ericas, etc.

Adema´s, las ondas se pueden tambi´en clasificar atendiendo a la relaci´on entre la direcci´on en que se propaga la energ´ıa y la direcci´on de vibraci´on de la perturbaci´on. Segu´n esto, las ondas pueden ser *longitudinales*, si la vibraci´on y la propagaci´on son paralelas, o *transversales*, si ambas direcciones son perpendiculares.

Figura 4.2: Ejemplo de onda longitudinal en un muelle (arriba) y ejemplo de onda transversal en una cuerda (abajo).

Las ondas en las que, al propagarse, los puntos del medio vibran el´asti- camente, se llaman *ondas mec´anicas*, como las ondas en el agua, en una cuerda, el sonido o las ondas s´ısmicas. Para que una onda mec´anica transver- sal se propague en un medio, hace falta que ´este soporte esfuerzos cortantes.

E´sta es la raz´on por la que en los gases pr´acticamente no se propagan ondas mec´anicas transversales de taman˜o macrosc´opico, y en los l´ıquidos las u´nicas de ellas que se propagan son superficiales (usando los esfuerzos debidos a la tensi´on superficial). Las ondas en la superficie del agua del mar, as´ı como las s´ısmicas, son tanto longitudinales como transversales.

## Ondas en una cuerda tensa

Consideremos una cuerda tensa en posici´on horizontal en equilibrio. Co- locamos el eje *x* a lo largo de la cuerda y el origen en su extremo izquierdo, de manera que *y* ser´a la altura de cada punto de la cuerda respecto a su posici´on de equilibrio *y* = 0. Est´a claro que *y* es una funci´on que depende del punto *x* y del tiempo *t*, es decir *y* = *y*(*x, t*). La propagaci´on del estado de perturbaci´on *y* a lo largo de la cuerda constituye una onda unidimensional, que tomaremos sin amortiguamiento.

Supongamos que, en el instante inicial *t* = 0, generamos una perturbaci´on *y*(*x,* 0) = *f* (*x*) en los puntos de la cuerda. A medida que pasa el tiempo, la perturbaci´on se propaga sin amortiguarse a velocidad constante *v* hacia la derecha, segu´n se ve en la figura [4.3.](#_bookmark71) El objetivo, conocida *y*(*x,* 0), es dar la funci´on dependiente del tiempo *y*(*x, t*).

y

vt

y’

Figura 4.3: Propagaci´on de la perturbaci´on *f* (*x*) generada inicialmente (l´ınea s´olida) hasta el tiempo *t* (l´ınea a trazos).

Para ello, como vemos en la figura [4.3,](#_bookmark71) tomamos dos sistemas de referen- cia: el original *xy* y uno auxiliar *xIyI* tal que su origen se mueve a la misma velocidad *v* que la perturbaci´on. Esto significa que, respecto al sistema de re- ferencia *xIyI*, la perturbaci´on no se mueve y siempre tiene la forma *yI* = *f* (*xI*). Pero, como vemos en la figura, las alturas desde ambos sistemas de referen- cia coinciden, as´ı que *yI* = *y*, y las distancias horizontales respecto a ambos or´ıgenes est´an relacionadas mediante *xI* = *x − vt*. En consecuencia, llegamos

a una ecuaci´on para la propagaci´on en el sentido del eje *x* positivo, que es

*y*(*x, t*) = *f* (*x − vt*)*,*

siendo *f* (*x*) la perturbaci´on en *t* = 0. De la misma forma, si la onda se propaga en el sentido del eje *x* negativo,

*y*(*x, t*) = *f* (*x* + *vt*)*,*

sin m´as que cambiar el signo de la velocidad.

Ambas funciones son soluci´on de la *ecuaci´on de ondas unidimensional*

*∂*2*y*

*∂t*2 = *v*

2 *∂*2*y*

*∂x*2 *.*

Podemos ahora definir, de forma muy general, una onda como todo fen´omeno f´ısico que se propaga obedeciendo esta ecuaci´on. La cantidad *v*2 que multi- plica al t´ermino de derivada espacial determina la *velocidad de propagaci´on* o *velocidad de fase v* de la onda. La velocidad de propagaci´on depende del medio que utilice la onda para viajar. Por ejemplo, en el caso de una *cuerda tensa*, podemos escribir

*v* = *F m/,e*

*,* (4.1)

donde *F* es la tensi´on de la cuerda y *m/,e* es su masa por unidad de longitud.

**Ejemplo 4.2.1** *La f´ormula anterior tambi´en la podemos utilizar para*

*calcular la tensi´on F. Por ejemplo, sabemos que los cables principales que soportan el Puente de George Washington en Nueva York tiene una densidad lineal de masa de* 4100 *kg/m y que la velocidad de propagaci´on de las ondas transversales por ellos es de* 250 *m/s. Calculemos la tensi´on a la que est´an sometidos los cables.*

***Sol.*** *Despejando la tensi´on F de la ecuaci´on* [(4.1)](#_bookmark72)*, tenemos*

*F* = *v*2 = 4100 *·* 2502 *~* 256 *·* 106*N.*

*m*

*,e*

De todas las posibles funciones *f* (*x*) que determinan una onda unidimen- sional mediante la expresi´on *y*(*x, t*) = *f* (*x vt*) (propagaci´on a lo largo del eje *x* positivo) o la an´aloga *y*(*x, t*) = *f* (*x* + *vt*) (propagaci´on a lo largo del eje *x* negativo), las m´as importantes son las *funciones arm´onicas*, en las que

*−*

*f* es un seno o un coseno. Esto es as´ı, primero, porque expresan el ejemplo f´ısico de una cuerda tensa que ha sido perturbada en un extremo mediante un movimiento arm´onico simple, pero sobre todo porque *todas las soluciones de la ecuaci´on de onda se pueden escribir mediante una suma de ondas arm´oni- cas*. Por eso, podemos centrarnos en el estudio de este tipo de movimiento ondulatorio.

y





x

Figura 4.4: Onda arm´onica en una cuerda con amplitud *A* y longitud de onda

*λ*.

Una *onda arm´onica* unidimensional es aqu´ella tal que, en el estado inicial, se escribe

*y*(*x,* 0) = *A* sin (*kx* + *φ*0)*.*

Como vemos en la figura [4.4,](#_bookmark73) *A* es la *amplitud* de la perturbaci´on (en las mismas unidades que *y*), *φ*0 es la *fase inicial en el origen* (en radianes), y *k* es el *nu´mero de onda* (en rad/m), que determina el periodo espacial de la perturbaci´on *λ* (distancia en metros entre dos m´aximos o dos m´ınimos) segu´n

2*π*

*λ* = *.* (4.2)

*k*

El periodo espacial *λ* se conoce con el nombre de *longitud de onda*.

Si ahora introducimos la propagaci´on de la perturbaci´on a lo largo del eje *x* positivo (por ejemplo), tendremos que cambiar *x* por *x vt*, resultando la onda arm´onica

*−*

*y*(*x, t*) = *A* sin [*k*(*x − vt*) + *φ*0] = *A* sin (*kx − ωt* + *φ*0)*.* (4.3) La cantidad

*ω* = *kv.* (4.4)

se llama *frecuencia angular* (en rad/s) y proporciona el *periodo*

2*π*

*T* = *,* (4.5)

*ω*

que es el tiempo que transcurre desde que un punto dado alcanza un m´aximo de la perturbaci´on hasta que el mismo punto alcanza otro m´aximo. La inversa del periodo se llama *frecuencia*,

1

*f* = =

*T*

*ω*

*.* (4.6)

2*π*

La unidad de frecuencia en el SI es el hercio o hertz, 1 Hz = 1 s*−*1. La frecuen- cia indica el nu´mero de oscilaciones que realiza la perturbaci´on en un punto por cada segundo. Finalmente, conviene recordar que todo el argumento de la funci´on trigonom´etrica en la expresi´on de la onda (en este caso, el argumento del seno es *kx − ωt* + *φ*0) se llama *fase* de la onda.

**Ejemplo 4.2.2** *Consideremos una onda arm´onica que se propaga por*

*una cuerda cuya tensi´on es F* = 1 *N y que tiene una masa por unidad de longitud igual a m/,e* = 0*,*01 *kg/m. Determinemos la ecuaci´on de la onda arm´onica sabiendo que su amplitud es A* = 10 *cm y que un punto de la cuerda tarda* 1 *s en completar una oscilaci´on. Adem´as, en el ins- tante inicial, el punto de coordenadas x* = 0 *cm tiene un desplazamiento y* = 10 *cm.*

***Sol.*** *Si prestamos atenci´on a la f´ormula* [(4.3)](#_bookmark75)*, para determinar la onda arm´onica, debemos conocer la amplitud A, el nu´mero de onda k, la fre- cuencia angular ω y la fase φ*0*. Sabemos la amplitud, A* = 10 *cm, pero nos quedan por determinar las otras tres magnitudes. El tiempo que tarda un punto de la cuerda en completar una oscilaci´on es el periodo T* = 1 *s, que lo podemos utilizar para calcular ω mediante la f´ormula* [(4.6)](#_bookmark78)*:*

1 *ω*

2*π*

*T* 2*π*

=

*⇒*

*ω* = = 2*π rad/s.*

*T*

*Para conocer el nu´mero de onda, no podemos usar la relaci´on* [(4.2)](#_bookmark74)*,*

*pues desconocemos la longitud de onda, sino que debemos hacer uso de la ecuaci´on* [(4.4)](#_bookmark76)*, para lo que necesitamos calcular previamente la velocidad de propagaci´on v mediante la f´ormula* [(4.1)](#_bookmark72)*:*

*v* =

*F*

*m/,e*

=

1

0*,*01

= 10 *m/s.*

*As´ı,*

*ω* = *kv ⇒*

*k* = = *rad/m. v* 5

*ω π*

*Finalmente, la fase φ*0 *la podemos obtener a partir de la informaci´on del*

*valor de la perturbaci´on inicial en el origen. Como y*(0*,* 0) = 10 *cm*= *A, tenemos:*

*y*(0*,* 0) = *A ⇒ A* sin(0*−*0+*φ*0) = *A ⇒*

sin(*φ*0) = 1 *⇒ φ*0 = 2 *.*

*π*

*Con todo esto,*

*y*(*x, t*) = 10 *cm ·* sin *x −* 2*πt* +

*π*

5

*π*

2

= 10 *cm ·* cos *x −* 2*πt ,*

*π*

5

*donde hemos usado en la u´ltima igualdad la relaci´on trigonom´etrica sin*(*x*+

*π* ) = *cos*(*x*)*.*

2

## Ondas de sonido

El sonido est´a constituido por *ondas mec´anicas longitudinales* que se ori- ginan en focos situados en los medios materiales (s´olidos, l´ıquidos y gases) y se propagan a trav´es de ellos. Si el foco es puntual, las ondas producidas en medios homog´eneos ser´an esf´ericas. Sin embargo, a distancia grande del foco, las ondas esf´ericas se comportan en volu´menes pequen˜os como *ondas planas*.

Figura 4.5: Representaci´on de una onda de sonido plana. Los distintos tonos indican distintos valores de la amplitud y la flecha la direcci´on de propaga- ci´on.

En la figura [4.5](#_bookmark80) tenemos una imagen de una onda de sonido en un instante

de tiempo fijo. La fuente de la onda ha sido la vibraci´on del diafragma de un altavoz, que ha provocado pulsos sucesivos en el aire que est´a en contacto con ´el. La onda de sonido consta de zonas alternas de baja densidad y alta densidad, que vemos como zonas claras y oscuras. Estas zonas viajan hacia la derecha en la figura, alej´andose del foco. Sin embargo, el aire como un todo no se propaga: las posiciones (medias) de las mol´eculas simplemente oscilan hacia adelante y hacia atr´as. La fuerza el´astica que provoca la oscilaci´on proviene de la presi´on del aire, que trata de mantener la densidad uniforme, oponi´endose a la deformaci´on que supone una zona de alta o baja densidad.

En una onda de sonido, por tanto, hay tres cantidades que oscilan: la densidad del medio, su presi´on y la posici´on de las part´ıculas del medio. La onda de densidad y la onda de presi´on est´an en fase, pero ambas est´an desfasadas *π/*2 rad respecto de la onda de desplazamiento. Las variaciones t´ıpicas de estas propiedades en las ondas de sonido son muy pequen˜as: en el aire, aunque la onda de sonido sea muy intensa, los desplazamientos medios de las mol´eculas son del orden de una d´ecima de mil´ımetro, y las sobrepresiones son del orden del 1 % de la presi´on normal.

No todas las ondas mec´anicas longitudinales son audibles, es decir, no todas excitan el nervio auditivo humano. La zona audible va desde una fre- cuencia de 20 Hz hasta una frecuencia de 20000 Hz, y las ondas en esta zona se denominan *ondas sonoras*. Fuera de estos l´ımites, las ondas el´asticas longi- tudinales se siguen llamando sonido aunque no sean audibles por el hombre. Si la frecuencia es inferior a 20 Hz, tenemos *infrasonidos* y, si es superior a 20000 Hz, tenemos *ultrasonidos*.

La variaci´on de la presi´on respecto a la que corresponde al medio sin perturbar se denomina *presi´on acu´stica*. Si la presi´on en un punto del medio es *p* y la presi´on del medio no perturbado es *p*0, la presi´on acu´stica en ese punto es ∆*p* = *p − p*0. De manera an´aloga, la *variaci´on de densidad* respecto a la densidad sin perturbar ser´a ∆*ρ* = *ρ ρ*0. Por u´ltimo, llamaremos ∆*x* al *desplazamiento* medio de las mol´eculas del medio respecto a su punto de equilibrio.

*−*

La propagaci´on de una *onda de sonido en un fluido* depende de la den- sidad del fluido sin perturbar, *ρ*0, y de su *m´odulo de compresibilidad κ*. Su- pongamos un material de volumen *V* sometido a una presi´on uniforme en su superficie. Debido a esta presi´on, el material disminuye su volumen conser- vando su forma. La disminuci´on relativa de volumen del material ( ∆*V/V* ) por unidad de variaci´on de presi´on ∆*p* se llama coeficiente de compresibili-

*−*

dad, y su inversa es el m´odulo de compresibilidad

∆*p*

*κ* = *−* ∆*V/V ,*

que se mide en pascales en el SI. Esta cantidad determina lo compresible (*κ* pequen˜os) o incompresible (*κ* grandes) que es un material y, por tanto, c´omo se comporta frente a perturbaciones el´asticas.

La velocidad con la que se propaga una onda mec´anica arm´onica plana en un fluido es

*v* = *κ ,* (4.7)

*ρ*0

y se llama *velocidad del sonido en el fluido*.

Cuando el sonido se propaga por un gas podemos suponer que los procesos inducidos son *adiab´aticos*. Adem´as, en ese caso, el m´odulo de compresibilidad del gas crece linealmente con la temperatura. Como consecuencia, si *v*0 es la velocidad del sonido en el gas a una temperatura *T*0 (medida en Kelvin), la velocidad del sonido en el mismo gas a una temperatura *T* es

*v* = *v*0

*T .* (4.8)

*T*

0

**Ejemplo 4.3.1** *Con la f´ormula* [(4.8)](#_bookmark82) *podemos hacernos una idea de la*

*influencia de la temperatura en la propagaci´on de una onda. Supongamos, por ejemplo, que una onda sonora tarda* 3 *s en propagarse a trav´es del aire entre dos puntos. El aire est´a a* 20 *oC y la velocidad del sonido para dicha temperatura es de* 340 *m/s. Veamos cu´anto tardar´ıa el sonido en viajar entre esos mismos dos puntos si el aire estuviera a* 0 *oC.*

***Sol.*** *Conviene, en primer lugar, calcular la distancia entre estos dos puntos. Si d es dicha distancia, v es la velocidad del sonido a* 20 *oC y t* = 3 *s, tenemos:*

*d* = *vt* = 340 *·* 3 = 1020 *m/s.*

*El nuevo tiempo tI a* 0 *oC es*

*tI* = *d ,*

*vI*

*donde vI es la velocidad del sonido a* 0 *oC:*

*v* = *v*

*I*

*T*

*T*

*I* = 340 *·*

0 + 273*,*15

20 + 273*,*15

*~* 328 *m/s.*

*As´ı,*

*tI ~*

1020

328

*~* 3*,*11 *s.*

*Puede parecer, a simple vista, que la deferencia de tiempos no es muy*

*significativa. Sin embargo, puede ser relevante cuando se disen˜an edificios o espacios con unas propiedades acu´sticas espec´ıficas.*

Si la onda de desplazamiento de un sonido en un fluido es una *onda arm´onica plana* como

∆*x*(*x, t*) = *A* sin (*kx − ωt* + *φ*0)*,* (4.9) con *amplitud de desplazamiento A*, nu´mero de onda *k* y frecuencia angular

*ω* = *kv*, entonces la onda de presi´on acu´stica se puede obtener a partir de

ella mediante

∆*p*(*x, t*) = *−κ*

*∂*(∆*x*)

*∂x* = *−κAk* cos (*kx − ωt* + *φ*0)

= *κAk* sin (*kx − ωt* + *φ*0 *− π/*2)*.* (4.10)

Analizando los argumentos, vemos que la onda acu´stica est´a retrasada res- pecto a la de desplazamiento en *π/*2 rad, tal como hab´ıamos comentado antes. La presi´on acu´stica m´axima o *amplitud de presi´on acu´stica* resulta

∆*pmax* = *κAk.*

De la misma forma, la onda de variaci´on de densidad se calcula haciendo

*∂*(∆*x*)

∆*ρ*(*x, t*) = *−ρ*0 *∂x* = *−ρ*0*Ak* cos (*kx − ωt* + *φ*0)

= *ρ*0*Ak* sin (*kx − ωt* + *φ*0 *− π/*2)*,* (4.11)

que est´a en fase con la presi´on acu´stica y tiene una amplitud dada por *ρ*0*Ak*. Como la variaci´on de densidad es ∆*ρ* = *ρ ρ*0, podemos despejar *ρ* y en- contrar los valores m´aximo y m´ınimo de la densidad del fluido cuando es atravesado por una onda arm´onica plana de sonido, que estar´an dados por

*−*

*ρmax* = *ρ*0(1 + *Ak*)*, ρmin* = *ρ*0(1 *− Ak*)*.*

Pasemos ahora a la *propagaci´on del sonido en materiales s´olidos*. Las ecuaciones que siguen las ondas de sonido en una *varilla s´olida* son comple- tamente similares a las del caso de los fluidos, pero cambiando la velocidad del sonido por

*v* = *E ,* (4.12)

*ρ*0

donde *E* es el *m´odulo de elasticidad* o *m´odulo de Young*, que representa la fuerza longitudinal por unidad de secci´on que hay que aplicar a la varilla para producir en ella un alargamiento igual a la longitud inicial de la misma (su unidad en el SI es 1 Pa).

**Ejemplo 4.3.2** *Como hemos visto, a partir de la onda de desplaza-*

*miento, el m´odulo de compresibilidad y la densidad del aire sin per- turbar, podemos obtener la onda de presi´on y densidad. Tambi´en es cierto lo anterior si partimos de cualquier onda. Por ejemplo, consi- deremos la onda sonora de variaci´on de densidad en el aire dada por*

∆*ρ*(*x, t*) = 3*,*5 *·* 10*−*4 *kg/m*3 *·* sin(2*πx −* 680*πt*) *y determinemos las onda*

*sonoras de desplazamiento y presi´on acu´stica. Para obtener la onda de*

*desplazamiento necesitaremos un dato adicional, por ejemplo, la densi- dad sin perturbar ρ*0 = 1*,*28 *kg/m*3*.*

***Sol.*** *Consideremos primero la onda de presi´on acu´stica. La amplitud de la onda de densidad es*

∆*ρmax* = *ρ*0*Ak*

*y la de la presi´on*

*κ*

∆*p*

*max*

= *κAk* = ∆*ρ*

*ρ*

*max*

*,*

0

*donde κ viene dada por*

*ω*

*k*

=

*κ*

*ρ*

0

*⇒*

*κ* = *ρ*

0

*ω*

2

*v* =

*k*

*.*

*As´ı,*

*ω*

2

∆*pmax* =

*k*

∆*pmax* =

680

2

2

3*,*5 *·* 10*−*4 *~* 40*,*5 *Pa*

*y la onda de presi´on acu´stica resulta*

∆*p*(*x, t*) = ∆*pmax* sin(2*πx −* 680*πt*) *~* 40*,*5 *Pa ·* sin(2*πx −* 680*πt*)*.*

*Observemos que, para calcular* ∆*pmax a partir de* ∆*ρmax, s´olo necesitamos κ/ρ*0 *que se puede calcular a partir de v* = *ω/k. Esto no es as´ı para la onda de desplazamiento, para la cual necesitamos κ ´o ρ*0 *(pues v* = *ω/k es conocida). Usando ρ*0*, la amplitud A viene dada por*

∆*ρmax* = *ρ*0*Ak*

*⇒*

*A* =

∆*ρmax*

=

*ρ k* 1*,*28 *·* 2*π*

3*,*5 *·* 10*−*4

*−*5

0

*~* 4*,*35 *·* 10 *m.*

*As´ı, la onda de desplazamiento resulta*

∆*x*(*x, t*) = *A* sin(2*πx −* 680*πt* + ) *~* 4*,*35 *·* 10*−*5 *m ·* sin(2*πx −* 680*πt* + )*.*

*π*

*π*

2

2

*Hemos tenido en cuenta que la fase de la onda de desplazamiento es π/*2

*mayor que la de densidad.*

## Superposici´on e interferencia

Veamos lo que sucede cuando dos ondas coinciden durante un tiempo en la misma regi´on del espacio. Por ejemplo, cuando la mu´sica llega a nuestros o´ıdos desde varios sitios, cuando dos ondas de agua chocan, etc. En estos casos se cumple el *principio de superposici´on lineal*, que dice que cuando dos ondas coinciden simult´aneamente en el mismo punto, la onda resultante es la *suma algebraica* de las ondas individuales. La superposici´on de ondas arm´onicas suele llamarse *interferencia*. El principio de superposici´on se mues- tra gr´aficamente en la figura [4.6.](#_bookmark88)

Un caso sencillo es la superposici´on de dos ondas arm´onicas de la misma amplitud y frecuencia en una cuerda con cierto desfase entre ellas, que vemos en la figura [4.7.](#_bookmark89)

La expresi´on matem´atica de estas dos ondas es

*y*1 = *A* sin (*kx − ωt*)*,*

*y*2 = *A* sin (*kx − ωt* + *φ*0)*.*

La onda resultante es la suma *y* = *y*1 + *y*2. Usando la relaci´on trigonom´etrica

* 1. *SUPERPOSICIO´N E INTERFERENCIA* 85



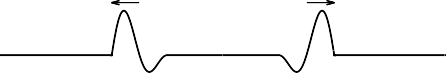
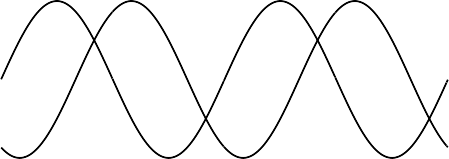
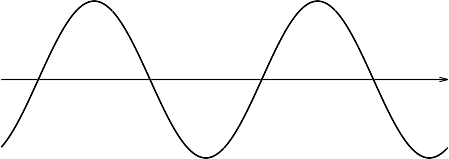


Figura 4.6: Proceso de interferencia de dos ondas.



x



x

Figura 4.7: Superposici´on de dos ondas arm´onicas. Arriba se representan las dos ondas por separado y abajo la onda resultante de la superposici´on.

sin *a* + sin *b* = 2 cos [(*a − b*)*/*2] sin [(*a* + *b*)*/*2], resulta

*y* = *y* + *y* = 2*A* cos *φ*0 sin *kx − ωt* + *φ*0 *.* (4.13)

1

2

2

2

Por tanto, la onda resultante es otra onda arm´onica con la misma frecuencia, desfasada en *φ*0*/*2 respecto de las dos ondas originales, y cuya amplitud es

*Atot*

= 2*A* cos *φ*0 *.*

Si *φ*0 = 2*nπ*, con *n* = 0*,* 1*,* 2*, . . .*, entonces la amplitud total alcanzar´a su valor m´aximo *Atot* = *±*2*A*, y la interferencia se llamar´a *constructiva*. Por su parte, si *φ*0 = (2*n* + 1)*π*, con *n* = 0*,* 1*,* 2*, . . .*, entonces la amplitud total alcanzar´a su valor m´ınimo *Atot* = 0, y la interferencia se llamar´a *destructiva*.

2

**Ejemplo 4.4.1** *Consideremos la superposici´on de dos ondas ondas ar- m´onicas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud A* = 1 *cm, que se mueven en el mismo sentido, pero que con una diferencia de fase de π/*2 *rad. Determinemos la amplitud de la onda resultante.*

***Sol.*** *Las dos ondas arm´onicas a lo largo de la cuerda pueden escribirse como*

*y*1(*x, t*) = *A* sin (*kx − ωt*)

*y*2(*x, t*) = *A* sin (*kx − ωt* + *π/*2)

*Usando la f´ormula trigonom´etrica* sin *a*+sin *b* = 2 sin (*a* + *b*)*/*2 cos (*a b*)*/*2*, la interferencia de ambas ondas es*

*−*

*y* = *y* + *y* = 2*A* sin *kx − ωt* + *π* cos *π .*

1

2

4

4

*La amplitud de interferencia es*

*A* = 2*A* cos *π* = 2 *·* 10*−*2 *·* cos *π ~* 0*,*0141 *m.*

*tot*

4

4

* 1. *TABLA RESUMEN* 87

## Tabla resumen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fo´rmula/magnitud | Definici´on | Ecuaci´on |
| *v* = *F*  *m/f*  *F*  *m*  *,e* | Velocidad de propagaci´on de la onda en la cuerda  Tensi´on de la cuerda  Masa de la cuerda Longitud de la cuerda | [(4.1)](#_bookmark72) |
| *y*(*x, t*) = *A* sin (*kx − ωt* + *φ*0)  *y x t A*  *k*  *ω φ*0 | Onda arm´onica que se propaga hacia la derecha  Perturbaci´on Coordenada espacial Coordenada temporal Amplitud  Nu´mero de ondas  Frecuencia angular Fase inicial | [(4.3)](#_bookmark75) |
| *λ* = 2*π*  *k*  *v* = *k*  *ω*  *T* = 2*π*  *ω*  *f* = 1 = *ω*  *T* 2*π* | Longitud de onda | [(4.2)](#_bookmark74) |
| Velocidad de propagaci´on | [(4.4)](#_bookmark76) |
| Periodo de la onda | [(4.5)](#_bookmark77) |
| Frecuencia de la onda | [(4.6)](#_bookmark78) |
| *v* = *κ*  *ρ*0 | Velocidad del sonido en un fluido | [(4.7)](#_bookmark81) |
| *κ* | M´odulo de compresibilidad |  |
| *ρ*0 | Densidad del fluido sin perturbar |  |
| *v* = *E*  *ρ*0  *E* | Velocidad del sonido en s´olidos M´odulo de Young | [(4.12)](#_bookmark86) |
| *v* = *v*0 *T*  *T*0 | Velocidad como funci´on | [(4.8)](#_bookmark82) |
|  | de la temperatura |  |
| *v*0 | Velocidad a la temperatura |  |
|  | *T*0 (en Kelvin) |  |
| *T* | Temperatura (en Kelvin) |  |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ∆*x*(*x, t*) = *A* sin (*kx − ωt* + *φ*0)  *∂*(∆*x*)  ∆*p*(*x, t*) = *−κ ∂x*  *∂*(∆*x*)  ∆*ρ*(*x, t*) = *−ρ*0 *∂x* | Onda de desplazamiento  Presi´on acu´stica Onda de densidad | [(4.9)](#_bookmark83)  [(4.10)](#_bookmark84)  [(4.11)](#_bookmark85) |
| *y* = *y*1 + *y*2  = 2*A* cos (*φ*0 sin (*kx − ωt* + *φ*0  2 2  *y*1 = *A* sin (*kx − ωt*)  *y*2 = *A* sin (*kx − ωt* + *φ*0) | Interferencia de dos ondas arm´onicas | [(4.13)](#_bookmark90) |

## Problemas resueltos

* + 1. Un teatro cerrado tiene una longitud de 200 m. Desde el escenario se emite sonido que se dirige hacia la pared opuesta. Teniendo en cuenta que la velocidad del sonido es de 340 m*/*s, calcula el tiempo que tarda- mos en escuchar el eco de un sonido emitido desde el escenario.

**Sol.** La distancia que ha de recorrer el sonido hasta la pared posterior desde el escenario y de vuelta a nosotros es

*d* = 2 *·* 200 = 400 m*.*

El tiempo que tarda el sonido en recorrer esa distancia es

*d* 400

*t* = *v* = 340 *~* 1*,*18 s*.*

* + 1. Una onda arm´onica transversal se desplaza a lo largo de una cuerda. La onda tiene amplitud de 1 cm, una longitud de onda de 5 cm y una frecuencia de 10 Hz. Adem´as, se sabe que en el instante inicial el des- plazamiento del punto en origen de coordenadas (*x* = 0) es de 0*,*5 cm. Calcula la velocidad de propagaci´on de la onda y obt´en la funci´on de onda en la cuerda.

**Sol.** Para calcular la velocidad de propagaci´on, hacemos:

*ω* 2*πf*

*ω* = *kv ⇒ v* = *k* = 2*π/λ* = *λf* = 0*,*05 *·* 10 = 0*,*5 m*/*s*.*

Para la funci´on de onda, necesitamos el nu´mero de onda y la frecuencia angular,

*ω* = 2*π f* = 2*π ·* 10 = 20*π* rad*/*s*,*

2*π*

*k* = =

*λ*

2*π* 0*,*05

= 40*π* rad*/*m*.*

Con lo anterior y el dato de la amplitud, la onda arm´onica es

*y*(*x, t*) = 1 cm *·* sin (40*π x −* 20*π t* + *φ*0)

Para calcular la fase inicial en el origen, tenemos la siguiente condici´on:

*π*

*y*(0*,* 0) = 0*,*5 cm = 1 cm *·* sin *φ*0 *⇒* sin *φ*0 = 0*,*5 *⇒ φ*0 =

rad*.*

6

Finalmente,

*y*(*x, t*) = 1 cm *·* sin 40*π x −* 20*π t* + *π .*

* + 1. Una onda transversal arm´onica se propaga inicialmente por una cuerda tensa con una velocidad de 5 m*/*s. Teniendo en cuenta que la amplitud es 0*,*5 cm y el nu´mero de onda de 20 *π* rad*/*m, determina la funci´on de onda y la velocidad de vibraci´on de los puntos de la cuerda.

6

**Sol.** La onda tiene una forma inicial arm´onica, dada por

*f* (*x*) = *A* sin (*kx*) = 5 *·* 10*−*3 *·* sin (200*π x*)

Hemos tomado nula la fase en el origen porque no nos dan datos de la perturbaci´on en un punto y un tiempo dados, as´ı que podemos tomar *φ*0 = 0 eligiendo el momento en que empieza a contar el tiempo. La frecuencia angular de la onda es

*ω* = *kv* = 20*π ·* 5 = 100*π* rad*/*s*.*

Con esto, la funci´on de onda que se propaga hacia el eje *x* positivo resulta

*y*(*x, t*) = *f* (*x − v t*) = *A* sin (*kx − ωt*)

= 5 *·* 10*−*3 m *·* sin (20*π x −* 100*π t*)*.*

La velocidad de vibraci´on es aquella con la que oscila cada punto de la cuerda:

*vvib*

(*x, t*) = *∂y* = *−*100*π ·* 5 *·* 10*−*3 *·* cos (20*π x −* 100*π t*)

= *−*0*,*5*π* m*/*s *·* cos (20*π x −* 100*π t*)*.*

*∂t*

* + 1. Considera una onda arm´onica con periodo 2 ms y velocidad de propa- gaci´on 400 m*/*s. Calcula:
       1. La separaci´on espacial entre dos puntos que, en el mismo instante de tiempo, tengan una diferencia de fase de 30*o*.
       2. La diferencia de fase entre dos puntos separados por, en el mismo instante de tiempo, est´en separados media longitud de onda.
       3. La diferencia de fase de un mismo punto en dos instantes de tiempo separados 0*,*5 ms.

**Sol.** El ejercicio involucra la fase de una onda arm´onica, de modo que lo primero que hay que hacer es determinarla. En nuestro caso, tenemos una frecuencia angular

2*π*

*ω* =

*T*

y un nu´mero de onda

2*π*

=

2 *·* 10*−*3

= 1000*π* rad*/*s*.*

*ω*

*k* = =

*v*

1000*π*

400

5

= *π* rad*/*m*.*

2

Por tanto, la onda arm´onica es

*y*(*x, t*) = *A* sin (*kx − ωt* + *φ* ) = *A* sin 5 *π x −* 1000*π t* + *φ .*

0

2

0

La fase de la onda arm´onica es la funci´on que determina el ´angulo cuyo seno o coseno aparece en *y*(*x, t*), es decir,

5

*φ*(*x, t*) = *kx − ωt* + *φ*0 = 2 *π x −* 1000*π t* + *φ*0*.*

*a*) La diferencia de fase entre dos puntos *x*1 y *x*2 en el mismo instante de tiempo *t*1 = *t*2 = *t* se escribe

*φ*2 *− φ*1 = (*kx*2 *− ωt* + *φ*0) *−* (*kx*1 *− ωt* + *φ*0)

5

= *k* (*x*2 *− x*1) = 2 *π* ∆*x.*

As´ı, si la diferencia de fase es de 30*o*, o sea,

entonces

*φ*2 *− φ*1

= 30*o* = 30 2*π*

360

*·*

*π*

= rad*,* 6

*π* 5 *π/*6 1

*φ*2 *− φ*1 = 6 = 2 *π* ∆*x ⇒* ∆*x* = 5*π/*2 = 15 *~* 6*,*67 cm*.*

1. Si la distancia entre dos puntos con *t*1 = *t*2 = *t* es

*π*

∆*x* = *x*2 *− x*1 = *λ/*2 = *k ,*

su diferencia de fase es, de acuerdo con la ecuaci´on deducida an- teriormente

*π*

*φ*2 *− φ*1 = *k* (*x*2 *− x*1) = *k* ∆*x* = *k k* = *π* rad*.*

El resultado ilustra que la longitud de onda es el periodo espacial de una onda arm´onica.

1. Si tenemos un mismo punto *x*1 = *x*2 = *x* en dos instantes de tiempo *t*1 y *t*2 tales que

∆*t* = *t*2 *− t*1 = 0*,*5 *·* 10*−*3 s*,* entonces la diferencia de fase es

*φ*2 *− φ*1 = (*kx − ωt*2 + *φ*0) *−* (*kx − ωt*1 + *φ*0) = *−ω* (*t*2 *− t*1)

= *−ω* ∆*t* = *−*1000*π* ∆*t* = *−*1000*π ·* 0*,*5 *·* 10*−*3

= *−*0*,*5*π* rad*.*

* + 1. Una onda arm´onica se propaga por una cuerda de 30 m de longitud, 3 kg de peso y una tensi´on de 100 N. Calcula:

1. La velocidad de propagaci´on de la onda.
2. Si la distancia entre dos puntos con amplitud m´axima es de 1 m, calcula la longitud de onda y la frecuencia.
3. Determina la amplitud de la onda sabiendo que la altura de la cuerda es de 1 cm cuando su fase vale*π* .

6

###### Sol.

1. La velocidad de la onda es

*v* = *F m/,e*

= 100 3*/*30

= *√*1000 *~* 31*,*6 m/s*.*

1. La longitud de onda *λ* es la distancia que nos dan

*λ* = 1 m y la frecuencia *f* la sacamos de *λ* y *v*:

1. Tenemos

*v v* = *λf ⇒ f* = *λ*

= *√*1000 *~* 31*,*6 Hz*.*

*π*

1 = *A* sin( )*,*

6

por lo que la amplitud *A* vale

1

*A* = sin( *π* ) = 2 cm*.*

6

* + 1. Considera la funci´on de onda ∆*x*(*x, t*) = 1 *µ*m sin (0*,*5 *x ω t*) que des- cribe el desplazamiento de las mol´eculas de una onda sonora arm´onica con velocidad de propagaci´on 340 m*/*s. Calcula la velocidad m´axima de vibraci´on de las mol´eculas.

*· −*

**Sol.** La frecuencia angular de la onda es

*ω* = *kv* = 0*,*5 *·* 340 = 170 rad*/*s*.* La funci´on de onda de desplazamiento es, por tanto,

∆*x*(*x, t*) = 1 *µ*m *·* sin (0*,*5 *x −* 170 *t*)*.*

La velocidad de vibraci´on es

*∂*

*vvib*(*x, t*) = *∂t* ∆*x* = *−*1 *µ*m *·* 170 *·* cos (0*,*5 *x −* 170 *t*)

= *−*0*,*17 mm*/*s *·* cos (0*,*5 *x −* 170 *t*)*.*

La velocidad m´axima de vibraci´on es la amplitud de la velocidad de vibraci´on (obviando el signo negativo),

*vvib,max* = 0*,*17 mm*/*s*.*

De manera alternativa, se puede calcular la velocidad m´axima de vi- braci´on recordando la f´ormula de teor´ıa

*vvib,max* = *Aω* = 1 *µ*m *·* 170 = 0*,*17 mm*/*s*.*

Las ondas de sonido son ondas longitudinales. Por tanto, las mol´eculas del aire vibran al pasar la onda en la misma direcci´on en la que la onda se propaga que, en el ejercicio, es el eje *x*.

* + 1. La funci´on de onda sonora de desplazamiento a lo largo del eje *x* de las mol´eculas del aire viene dada por ∆*x*(*x, t*) = 5 *µ*m*·*sin (0*,*1 *x −* 60 *t* + *π/*5). Teniendo en cuenta que densidad del aire sin perturbar es *ρ*0 = 1*,*3 kg*/*m3, determina la funci´on de onda de variaci´on de densidad y los valores m´aximo y m´ınimo de la densidad en el aire.

**Sol.** La funci´on de onda de variaci´on de densidad se puede calcular a partir de la de desplazamiento mediante

∆*ρ*(*x, t*) = *−ρ*

*∂*

0 *∂x*

∆*x* = *−*1*,*3 *·* 5 *·* 10*−*6 *·* 0*,*1 *·* cos 0*,*1 *x −* 60 *t* + *π*

= *−*6*,*5 *×* 10*−*7 kg*/*m3 *·* cos 0*,*1 *x −* 60 *t* + *π .*

5

5

La amplitud de la onda de variaci´on de densidad es

∆*ρmax* = 6*,*5 *×* 10*−*7 kg*/*m3*.*

El valor m´aximo de la densidad del aire se obtiene de esta amplitud y del valor de la densidad del aire sin perturbar:

∆*ρ* = *ρ−ρ*0 *⇒ ρmax* = *ρ*0+∆*ρmax* = 1*,*3+6*,*5*×*10*−*7 = 1*,*3000065 kg*/*m3*.* Para el valor m´ınimo, de manera an´aloga,

*ρmin* = *ρ*0 *−* ∆*ρmax* = 1*,*3 *−* 6*,*5 *×* 10*−*7 = 1*,*29999935 kg*/*m3*.*

* + 1. En condiciones en las que el aire tiene una densidad sin perturbar *ρ*0 = 1*,*28 kg*/*m3 y una presi´on sin perturbar *p*0 = 101325 Pa, se propaga una onda arm´onica de desplazamiento de ecuaci´on ∆*x*(*x, t*) = 0*,*5mm sin (0*,*3 *x* 80 *t*). Determina la ecuaci´on de la onda de presi´on y, a partir de ella, los valores m´aximo y m´ınimo de la presi´on del aire, as´ı como la presi´on en *x* = 10 cm, *t* = 10 s.

*−*

*·*

**Sol.** Necesitaremos el m´odulo de compresibilidad del aire, que podemos calcular, usando que *ω* = *kv*, a partir de su relaci´on con la velocidad del sonido:

4

*κ*

*v* = *ρ ⇒ κ* = *ρ*0*v* = *ρ*0

2

0

*ω* 2

*k*

= 1*,*28 *·*

80 2

0*,*3

*~* 9*,* 10 *×* 10 Pa*.*

La funci´on de onda de presi´on acu´stica resulta

*∂*

∆*p*(*x, t*) = *−κ ∂x*

∆*x ~ −*9*,*10 *·* 104 *·* 0*,*5 *·* 10*−*3 *·* 0*,*3 *·* cos (0*,*3 *x −* 80 *t*)

*~ −*13*,*7 Pa *·* cos (0*,*3 *x −* 80 *t*)*,*

La amplitud de presi´on acu´stica resulta ∆*pmax* 13*,*7 Pa. Los valores m´aximo y m´ınimo de la presi´on del aire a consecuencia de la onda ser´an

*~*

*pmax* = *p*0 + ∆*pmax ~* 101325 + 13*,*7 = 101338*,*7 Pa*, pmin* = *p*0 *−* ∆*pmax ~* 101325 *−* 13*,*7 = 101311*,*3 Pa*.*

La presi´on en el punto *x* = 10 cm en el instante *t* = 10 s es

*p* = *p*0 + ∆*p*(30 cm*,* 12 s) *~* 101325 *−* 13*,*7 *·* cos (0*,*3 *·* 0*,* 1 *−* 80 *·* 10)

*~* 1013330*,*8 Pa*.*

* + 1. Una onda sonora arm´onica plana se propaga por el aire, de densidad sin perturbar igual a 1*,*28 kg*/*m3. La onda tiene una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de 340 m*/*s. Adema´s, sabemos que la amplitud de presi´on de la onda acu´stica es de 50 Pa. Escribe la funci´on de onda de presi´on acu´stica y, a partir de ella, la onda de variaci´on de densidad.

**Sol.** La frecuencia angular de la onda es

*ω* = 2*πf* = 2*π ·* 500 = 1000*π* rad*/*s y su nu´mero de onda

*ω*

*k* = =

*v*

1000*π*

340

50*π*

=

17

rad*/*m*.*

Con esos datos y el de amplitud de presi´on acu´stica, la funci´on de onda de la onda de presi´on acu´stica se puede escribir

∆*p* = 50 Pa *·* sin 50*π x −* 1000*π t .*

17

Por una parte, las funciones de onda de variaci´on de densidad y de presi´on acu´stica se relacionan con la onda de desplazamiento mediante las expresiones

*∂ ∂*

∆*ρ*(*x, t*) = *−ρ*0 *∂x* ∆*x*(*x, t*); ∆*p*(*x, t*) = *−κ ∂x* ∆*x*(*x, t*)*.*

Dividiendo la primera por la segunda, se llega a

∆*ρ*(*x, t*) = *ρ*0

∆*p*(*x, t*)

*κ*

*ρ*0

*⇒* ∆*ρ*(*x, t*) = ∆*p*(*x, t*)*.*

*κ*

Por otra parte, el m´odulo de compresibilidad se relaciona con la velo- cidad del sonido mediante

2

*v* = *κ ρ*0

*⇒ κ* = *ρ*0*v .*

Usando estos dos resultados de forma conjunta,

*ρ*0 *ρ*0 1

∆*ρ*(*x, t*) = ∆*p*(*x, t*) = ∆*p*(*x, t*) =

∆*p*(*x, t*)*.*

*κ ρ*0*v*2 *v*2

As´ı, con los datos y resultados anteriores,

∆*ρ*(*x, t*) = ∆*p*(*x, t*) = *·* 50 *·* sin *x −* 1000*π t*

1 1 50*π*

*v*2

3402

17

*~* 4*,*33 *·* 10*−*4 kg*/*m3 *·* sin 50*π x −* 1000*π t .*

17

1. Halla la funci´on de onda de desplazamiento a partir de la siguiente fun- ci´on de onda de presi´on acu´stica ∆*p*(*x, t*) = 15 Pa sin (2*π x* 1500*π t*). Ten en cuenta que la densidad del aire sin perturbar es *ρ*0 = 1*,*28 kg*/*m3. **Sol.** Necesitaremos el m´odulo de compresibilidad del aire:

*· −*

4

*κ*

2

*v* = *ρ ⇒ κ* = *ρ*0*v* = *ρ*0

0

*ω* 2

*k*

= 1*,*28 *·*

1500*π* 2

2*π*

*~* 7*,*30 *·* 10 Pa*.*

De la relaci´on entre la funci´on de onda de desplazamiento y la de presi´on acu´stica en una onda de sonido arm´onica, llegamos a

*∂*

∆*p*(*x, t*) = *−κ ∂x*

∆*x*(*x, t*) *⇒* ∆*x*(*x, t*) = *−*1 - *dx* ∆*p*(*x, t*)*.*

Con los datos del ejercicio,

*κ*

-*~ · −*

∆*p*(*x, t*) *−*1 *dx* 15 sin (2*π x* 1500*π t*) 7*,*30 *·* 104

= *−*1 *−*15 *·* cos (2*π x −* 1500*π t*)

7*,*30 *·* 105 2*π*

*~* 2*,*18 *µ*m *·* cos (2*π x −* 1500*π t*)*.*

1. En un punto *P* incide sonido procedente de dos fuentes sonoras que osci- lan en fase con la misma amplitud *A* = 0*,*2 mm y frecuencia *f* = 60 Hz. Teniendo en cuenta que el punto *P* est´a a 3 m de una fuente y 3*,*3 m de la otra, calcula la diferencia de fase de las ondas, supuestas arm´onicas, procedentes de cada fuente en el punto *P* , as´ı como la amplitud total de desplazamiento en *P* .

**Sol.** Las funciones de onda de desplazamiento de cada una de las ondas en el punto *P* son:

∆*x*1 = *A* sin (*kx*1 *− ωt*)*,*

∆*x*2 = *A* sin (*kx*2 *− ωt*)*,*

donde hemos supuesto que la fase inicial en el origen de ambas es cero y hemos usado variables espaciales para cada onda, pues tienen or´ıgenes distintos. As´ı, la diferencia de fase entre las ondas en *P* es

*φ*2 *− φ*1 = (*kx*2 *− ωt*) *−* (*kx*1 *− ωt*) = *k*(*x*2 *− x*1) Necesitamos el nu´mero de onda, que resulta

Con esto,

*ω*

*k* = =

*v*

2*πf*

*.*

*v*

2*πf*

*φ*2 *− φ*1 = *k*(*x*2 *− x*1) = *v* (*x*2 *− x*1)

= 2*π ·* 60 (3*,*3 3) 0*,*333 rad 19*,*1*o.*

*— ~ ~*

340

La interferencia de las ondas en *P* es la suma de ambas ondas en dicho punto:

∆*x* = ∆*x*1 + ∆*x*2 = *A* sin (*kx*1 *− ωt*) + *A* sin (*kx*2 *− ωt*)

= 2*A* sin *k*(*x*1 + *x*2) *− ωt* cos *k*(*x*2 *− x*1) *.*

2

2

Usando el resultado sobre la diferencia de fase, la amplitud total en *P*

resulta

*A* = 2*A* cos *k*(*x*2 *− x*1) = 2*A* cos 2*πf* (*x*2 *− x*1)

= 2*A* cos *φ*2 *− φ*1 *~ |*2 *·* 0*,*2 mm *·* cos 9*,*53*o| ~* 0*,*394 mm*.*

*tot* 2 2*v*

2

1. Desde un punto *P* se escucha mu´sica de dos altavoces separados una cierta distancia. Hacemos que por ambos altavoces se generen sendas ondas arm´onica de desplazamiento, de igual amplitud *A* y longitud de onda *λ*. Teniendo en cuenta que la distancia del primer altavoz a *P* supera a la distancia del segunda altavoz a *P* en *λ/*2, calcula la amplitud total en *P* cuando:
   1. Los altavoces est´an en fase.
   2. Los altavoces tienen un desfase de *π* rad.

###### Sol.

1. Si los altavoces est´an en fase, las ondas sonoras de desplazamiento en *P* son

∆*x*1 = *A* sin (*kx*1 *− ωt*)*,*

∆*x*2 = *A* sin (*kx*2 *− ωt*)*,*

donde *x*2 = *x*1 + *λ/*2 y hemos elegido la fase inicial en la posici´on de cada altavoz como cero. La interferencia en *P* es

∆*x* = ∆*x*1 + ∆*x*2 = *A* sin (*kx*1 *− ωt*) + *A* sin (*kx*2 *− ωt*)

l l

= 2*A* sin *k*(*x*1 + *x*2) *− ωt* cos *k*(*x*2 *− x*1) *.*

2

2

La amplitud total en *P* es, dado que *x*2 *− x*1 = *λ/*2,

*A* = 2*A* cos *k*(*x*2 *− x*1) = 2*A* cos *kλ*

*tot* 2 4

= 2*A* cos 2*πλ* = 2*A* cos *π* = 0*.*

4*λ* 2

1. Si los altavoces est´an desfasados en *π* rad,

∆*x*1 = *A* sin (*kx*1 *− ωt*)

∆*x*2 = *A* sin (*kx*2 *− ωt* + *π*) y la interferencia es

∆*x* = ∆*x*1 + ∆*x*2 = *A* sin (*kx*1 *− ωt*) + *A* sin (*kx*2 *− ωt* + *π*)

= 2*A* sin *k*(*x*1 + *x*2) *− ωt* + *π* cos *k*(*x*2 *− x*1) + *π .*

2

2

2

Teniendo en cuenta que *x*2 *− x*1 = *λ/*2, la amplitud total en *P* es

*A* = 2*A* cos *k*(*x*2 *− x*1) + *π* = 2*A* cos *kλ* + *π*

*tot* 2 4 2

= 2*A* cos *π* + *π* = 2*A.*

2

2

1. Sabemos que en el punto medio entre dos altavoces interfieren sen- das ondas sonoras de forma constructiva. Adema´s, ambas ondas son arm´onicas con la misma longitud de onda *λ* = 1 m. Calcula la distancia m´as pr´oxima a un punto donde se produzca una interferencia destruc- tiva.

**Sol.** Supongamos que los altavoces est´an a distancia *d* entre s´ı. Las ondas de desplazamiento desde cada altavoz son

∆*x*1 = *A* sin (*kx − ωt*)*,*

∆*x*2 = *A* sin (*kx* + *ωt*)*,*

donde hemos tomado el eje *X* sobre la recta que une los dos altavoces, siendo el origen uno de ellos (el de sub´ındice 1) y hemos tenido en cuenta que las ondas tienen sentidos de propagaci´on contrarios. La interferencia resulta

∆*x* = ∆*x*1 + ∆*x*2 = 2*A* sin (*kx*) cos (*ωt*)*,* por lo que la amplitud de interferencia es

*Atot*(*x*) = *|*2*A* sin (*kx*)*| .*

Si la interferencia es constructiva a media distancia entre los altavoces, es decir, con *x* = *d/*2, se ha de tener

*A* (*d/*2) = 2*A* sin *kd* = 2*A*

Esto se obtiene si

*tot* 2

sin *kd* = *±*1 *⇒ kd* = *π* + *nπ ⇒ kd* = (2*n* + 1)*π.*

2

2

2

donde *n* es un nu´mero entero.

Si nos acercamos al primer altavoz una distancia ∆*x*, tendremos *x* =

*d/*2 *−* ∆*x*. La amplitud de interferencia en ese punto es

*A* (*d/*2 *−* ∆*x*) = 2*A* sin *kd − k*∆*x .*

*tot* 2

Para que la interferencia sea destructiva,

*kd*

*Atot*(*d/*2 *−* ∆*x*) = 0 *⇒* 2 *− k*∆*x* = *nπ.*

Dado que ten´ıamos que *kd* = (2*n* + 1)*π*, la ecuaci´on anterior resulta

*n* + 1 *π −* 2*π* ∆*x* = *nπ ⇒* ∆*x* = *λ* = 1 = 0*,*25 m*.*

2

*λ*

4

4

El resultado ser´ıa el mismo si nos hubi´eramos acercado al otro alta- voz. As´ı, la distancia del centro de los altavoces a los dos puntos m´as cercanos donde se produce interferencia destructiva es 0*,*25 m.

# Cap´ıtulo 5 Acu´stica

Con este tema completamos nuestro estudio de las ondas. En pri- mer lugar, definimos la intensidad y proporcionamos expresiones para ella en los casos de ondas arm´onicas y esf´ericas. En segundo lugar, introducimos el concepto de impedancia acu´stica, lo que nos permite enunciar las leyes de transmisi´on y reflexi´on de una onda sonora al cambiar de medio. Finalmente, estudiamos el nivel sonoro y la sensaci´on auditiva.

## 5.1. Intensidad de una onda de sonido arm´oni- ca

En una onda mec´anica (como las ondas de sonido) no hay flujo neto de materia; lo que se propaga es el estado del movimiento y, por tanto, la energ´ıa. Para estudiar el flujo de energ´ıa se define la *intensidad I* de la onda como la cantidad de energ´ıa que pasa, en la unidad de tiempo, por la unidad de superficie perpendicular a la direcci´on de propagaci´on de la onda. La unidad de intensidad de la onda en el SI es 1 W*/*m2.

Supongamos que el medio es la zona cil´ındrica de la figura [5.1.](#_bookmark95) Conside- remos cu´anta energ´ıa de las part´ıculas del medio ha atravesado la superficie circular pintada a la derecha, de a´rea *S*, en un intervalo de tiempo ∆*t*. En ese tiempo, s´olo la perturbaci´on de las part´ıculas situadas a una distancia menor que *v* ∆*t* ha podido llegar a la superficie de la derecha, donde *v* es la velocidad de fase de la onda. El nu´mero de estas part´ıculas es igual al

101

v t

S

v

Figura 5.1: Medio cil´ındrico por el que se propaga una onda con velocidad *v*.

nu´mero *n* de part´ıculas por unidad de volumen del medio multiplicado por el volumen entre las superficies circulares pintadas en la figura, esto es,

*N* = *n*(*Sv* ∆*t*)*.*

Si cada una de estas part´ıculas tiene una energ´ıa *Epart* que puede ser trans- portada, la energ´ıa total que atraviesa la superficie circular de la derecha es

*E* = *NEpart* = *n*(*Sv* ∆*t*)*Epart.*

La intensidad de la onda es esta energ´ıa dividida por el a´rea *S* de la superficie circular y por el intervalo de tiempo ∆*t* en que hemos calculado el flujo de energ´ıa, es decir,

*I* = *nvEpart.*

Para continuar, supongamos que estamos en el caso de una *onda arm´onica*. Cada part´ıcula realiza un movimiento arm´onico simple de amplitud *A* y su energ´ıa es

*E*

Con esto, la intensidad resulta

*part*

= 1 *mω*2*A*2*.*

2

*I* = 1 *nmω*2*A*2*v.*

2

Como *n* es el nu´mero de part´ıculas del medio por unidad de volumen y *m* es la masa de cada part´ıcula, el producto *nm* es igual a la densidad de masa *ρ*0 del medio sin perturbar (en ausencia de sonido). Llegamos as´ı al resultado

*I* = 1 *ρ ω*2*A*2*v.* (5.1)

2 0

* 1. *INTENSIDAD DE UNA ONDA DE SONIDO ARMO´NICA* 103

**Ejemplo 5.1.1** *Calculemos la intensidad sonora cerca de un altavoz,*

*admitiendo que el sonido producido lo podemos aproximar por una onda arm´onica. Las mol´eculas oscilan con una amplitud de* 10*−*2 *mm y una frecuencia de* 1 *kHz. Tomemos la densidad del aire sin perturbar ρ*0 = 1*,*3 *kg/m*3 *y la velocidad del sonido v* = 340 *m/s.*

***Sol.*** *Para usar la f´ormula* [(5.1)](#_bookmark96) *de la intensidad, calculemos primero la frecuencia angular:*

*ω* = 2*πf* = 2*π*103 = 2000*πrad/s.*

*As´ı,*

*I* = *ρ*0*ω*2*A*2*v* = *·* 1*,*3 *·* (2000*π*)2 *·* 10*−*10 *·* 340 *~* 0*,*872 *W/m*2*.*

1

1

2

2

En la pr´actica, es muy comu´n que exista un foco de perturbaci´on a partir del cual la onda se propaga en todas las direcciones. Si el medio es is´otropo, los frentes de onda son entonces superficies esf´ericas con centro en el foco, y las ondas generadas se llaman *ondas esf´ericas*. En ausencia de amortiguamiento, cada frente de onda recibe la misma energ´ıa y, por tanto, tambi´en la misma *potencia P* , que es la energ´ıa recibida por unidad de tiempo,

*E*

*P* = *.*

*t*

Dado que la intensidad de la onda es la energ´ıa recibida en cada frente por unidad de tiempo y por unidad de superficie, es tambi´en la potencia por unidad de superficie,

*P*

*I* = *. S*

Como la potencia *P* es igual en todos los frentes de onda (si no hay amor- tiguamiento), resulta que la intensidad en un frente a distancia *r* del foco es

*P*

*I* = 4*πr*2 *,* (5.2)

de manera que va decreciendo con la distancia al cuadrado en las ondas esf´ericas. Hemos visto antes que la intensidad era proporcional al cuadrado de la amplitud *A* de la onda, as´ı que esto implica que la propia amplitud en una onda esf´erica ha de decrecer con la distancia al foco en la forma *A*(*r*) = constante*/r*.

**Ejemplo 5.1.2** *La f´ormula* [(5.2)](#_bookmark98) *la podemos usar tambi´en para calcular*

*la potencia de una onda esf´erica, conocida la intensidad a una distancia conocida del foco. Supongamos, por ejemplo, un foco puntual emitiendo ondas sonoras de modo que, a* 10 *m de distancia, la intensidad del sonido*

*la intensidad a* 20 *m del foco.*

***Sol.*** *Usando el resultado* [(5.2)](#_bookmark98) *con los datos proporcionados:*

*es de* 2*·*10*−*3 *W/m*2*. Calculemos la potencia P que emite el foco, as´ı como*

*P* = 4*πr I* = 4*π ·* 10 *·* 2 *·* 10 *~* 2*,*51 *W.*

2

2

1

1

*−*3

*Con este valor conocido de P podemos calcular la intensidad en cualquier*

*otro punto del espacio, aunque no es necesario calcular de forma expl´ıcita su valor. Para un punto que est´a a r*2 = 20 *m del foco, la intensidad es*

*I*2 =

*P*

4*πr*2

*r* 2

2 2

= 1 *I*1 = 2 *·* 10 = 5 *·* 10 *W/m .*

102

*r*2

202

*−*3

*−*4

2

*En la segunda igualdad hemos usado que P* = 4*πr*2*I*1*. De forma alterna-*

1

*tiva, podr´ıamos haber sustituido el valor de P, ya calculado, y el de r*2

*tras la primera igualdad.*

## Impedancia acu´stica y transmisi´on del sonido

por

Hemos visto que la *intensidad* de las ondas sonoras arm´onicas est´a dada

*I* = 1 *ρ ω*2*A*2*v,*

2 0

donde *A* es la amplitud de la onda de desplazamiento. Para un fluido, donde la velocidad del sonido es *v* = *κ/ρ*0, esto se puede escribir como

*I* = 1 *ρ ω*2*A*2 *κ* = 1 *ω*2*A*2*√ρ κ,*

0

2

0

*ρ*

2

0

y para una varilla s´olida, con *v* = *E/ρ*0, tenemos

2

0

*ρ*

2

0

*I* = 1 *ρ ω*2*A*2 *E* = 1 *ω*2*A*2 *ρ E.*

0

El sonido, como todo movimiento oscilatorio, es absorbido por el medio, que transforma la energ´ıa perdida por la onda en energ´ıa interna a trav´es de calor, disminuyendo la intensidad sonora. En general, la absorci´on crece con la frecuencia y decrece con la densidad del medio. As´ı, los gases absorben el sonido m´as que los l´ıquidos, y ´estos m´as que los s´olidos. Vamos a ignorar en lo que sigue esta absorci´on.

Veamos c´omo escribir la intensidad del sonido de otra forma, m´as com- pacta y u´til para analizar el comportamiento del sonido al cambiar de medio. Para ello, nos centramos en la propagaci´on en un medio fluido, aunque el resultado ser´a v´alido tambi´en para s´olidos. Vimos en el tema anterior que una onda sonora arm´onica plana de desplazamiento se escrib´ıa como

∆*x*(*x, t*) = *A* sin (*kx − ωt* + *φ*0)*.*

La velocidad de vibraci´on de las part´ıculas del medio debido a esta onda es

*vvib*(*x, t*) = cuya amplitud es

*∂*(∆*x*)

*∂t* = *−Aω* cos (*kx − ωt* + *φ*0)*,*

*vvib,max* = *Aω.*

Por otro lado, como la velocidad del sonido en el fluido es *v* = *κ/ρ*0,

podemos despejar *κ* y obtener

*κ* = *ρ*0*v*2*.*

Tambi´en vimos en el tema anterior que la amplitud de la onda de presi´on acu´stica estaba dada por

∆*pmax* = *κAk.*

Con las expresiones anteriores para *κ* y *vvib,max*, llegamos a

∆*pmax* = *κAk* = *Aρ*0*v*2*k* = *Aρ*0*vω* = *ρ*0*v vvib,max.*

Al producto *ρ*0*v* se le llama *impedancia acu´stica* del medio *Z* = *ρ*0*v*, y su unidad SI es 1 kg*/*(m2 s). Usando la impedancia, la expresi´on de la amplitud de presi´on acu´stica se escribe

*·*

∆*pmax* = *Z vvib,max.*

Esto es muy similar a la f´ormula de la ley de Ohm[1](#_bookmark102) de los circuitos el´ectricos:

∆*pmax* juega el papel de diferencia de potencial, *vvib,max* hace de corriente el´ectrica, y *Z* ser´ıa la resistencia. Adema´s, la impedancia *Z* incluye toda la informaci´on del medio, mientras que la propiedades de la onda est´an incluida en *vvib,max*.

Finalmente, con las amplitudes de velocidad de vibraci´on y presi´on acu´sti- ca y la impedancia, podemos dar la intensidad de las ondas sonoras planas como

1 1 (∆*pmax*)2 1 2

*I* = 2 *vvib,max* ∆*pmax* = 2

*Z* = 2 *Z vvib,max.* (5.3)

**Ejemplo 5.2.1** *Podemos volver a resolver la cuesti´on planteada en el*

*ejemplo* [*5.1.1,*](#_bookmark97) *pero ahora usando la f´ormula* [(5.3)](#_bookmark101) *para la intensidad sonora.*

***Sol.*** *Por una parte, la densidad del aire sin perturbar y la velocidad del sonido en el aire nos permiten calcular la impedancia:*

*Z* = *ρ*0*v* = 1*,*3 *·* 340 = 442 *kg/*(*m · s*)*.*

*Por otra parte, a partir de la amplitud de la onda de desplazamiento y de la frecuencia de la onda, calculamos la velocidad de vibraci´on m´axima:*

2

*vvib,max* = *Aω* = 2*πAf* = 2*π ·* 10*−*5 *·* 103 = 0*,*02*π ~* 0*,*0628 *m/s.*

*Finalmente, usando la ecuaci´on* [(5.3)](#_bookmark101)*, la intensidad sonora resulta*

*I* = *Zv*2

1

2

*vib,max*

2 2

*~* 442 *·* (0*,*0628) *~* 0*,*872 *W/m .*

1

2

La impedancia acu´stica juega un papel muy importante en la *reflexi´on y transmisi´on del sonido* entre dos medios. Imaginemos que una onda de sonido llega a la superficie de separaci´on entre dos medios diferentes (el aire y el agua o el aire y una pared). Parte de la energ´ıa de la onda que incide en la superficie se refleja hacia el medio desde el que vino y otra parte se transmite a trav´es de la superficie y pasa al segundo medio.

1Como veremos en cap´ıtulos siguientes, la ley de Ohm establece una relaci´on lineal entre la diferencia de potencial *V* entre los extremos de una resistencia de valor *R* y la intensidad *I* que la atraviesa: *V* = *RI*.

Para que haya una buena transmisi´on es necesario que las impedancias de los medios contiguos sean parecidas, mientras que cuando son muy diferentes la mayor parte de la energ´ıa es devuelta por reflexi´on. De hecho, el *factor de transmisi´on*, es decir, la intensidad de la onda transmitida *It* del medio 1 al medio 2 dividida por la intensidad de la onda incidente *Ii*, se puede escribir como

*It* 4*r*

*I* = (*r* + 1)2

*i*

*,* (5.4)

siendo *r* = *Z*2*/Z*1 el cociente de impedancias. Por ejemplo, cuando una onda sonora procedente del aire entra en el agua, *r* = 3630 y el factor de transmi- si´on resulta *It/Ii* 0*,*001, por lo que s´olo del orden del 0*,*1 % de la energ´ıa incidente procedente del aire entra en el agua. El otro 99*,*9 % es reflejado de nuevo hacia el aire, lo que viene expresado mediante el *factor de reflexi´on*

*~*

*Ir* = 1 *It*

*−*

*Ii Ii*

(*r* 1)2

= (*r* + 1)2 *.* (5.5)

*−*

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la impedancia acu´stica.

Material *Z* (kg*/*(m2 *·* s)) Acero 4*,*6 107

Hormigo´n 7 106

*·*

*·*

Ladrillo 5 106

*·*

Agua (20 *o*C) 1*,*5 106

*·*

Madera 4 105

*·*

Aire (20 *o*C) 408

**Ejemplo 5.2.2** *Calculemos la intensidad sonora que se transmite a la*

*pared de una vivienda, con impedancia de* 106 *kg/*(*m*2 *· s*)*, en la que hay*

*mu´sica con una intensidad de* 5 *·* 10*−*3 *W/m*2*. Para ello, tomemos la im-*

*pedancia del aire como* 400 *kg/*(*m*2 *· s*)*.*

***Sol.*** *El cociente de impedancias acu´sticas de la pared y el aire es*

*r* = =

*Z*2 106

*Z*1 400

= 2500*.*

*As´ı, la intensidad que se transmite a trav´es de la superficie de la pared*

*es*

*I*

*t*

4*r* 4

*Ii* (*r* + 1)2 (2500 + 1)2

=

=

*·* 2500

*~* 1*,*50 *·* 10

*−*3

*⇒ It ~* 1*,*5 *·* 10*−*3 *·* 5 *·* 10*−*3 *~* 7*,*99 *·* 10*−*6 *W/m*2*.*

## Nivel sonoro y sensaci´on auditiva

Para crear una escala que mida el nivel de intensidad del sonido es nece- sario tomar un valor que sirva de referencia. Este valor es

*Io* = 10*−*12 W*/*m2*,* (5.6)

que corresponde al umbral m´ınimo audible de una persona media para un sonido de 1000 Hz. Para esa misma persona, el umbral m´aximo audible a esa frecuencia es de 1 W*/*m2. As´ı, si queremos establecer una escala de sonidos audibles para una persona basada en el cociente *I/Io*, esta escala variar´ıa entre 1 y 1012. No es pr´actico usar representaciones gr´aficas de escalas tan enormes.

Para tener una escala m´as tratable, se considera una variaci´on menor mediante el uso de logaritmos en base 10. Se define el *nivel sonoro* o *nivel de intensidad del sonido L* como

*L* = 10 log *I ,* (5.7)

*Io*

cuya unidad es el *decibelio* (dB), y que var´ıa para los sonidos audibles entre 0 y 120 dB. En el caso de ondas sonoras arm´onicas, esta expresi´on puede escribirse f´acilmente tambi´en en funci´on de la amplitud de desplazamiento o de la amplitud de presi´on acu´stica si es necesario.

**Ejemplo 5.3.1** *Reconsideremos el ejemplo* [*5.1.2*](#_bookmark99) *y calculemos el nivel*

*sonoro a* 10 *m y a* 20 *m del foco puntual.*

***Sol.*** *A* 10 *m del foco la intensidad de la onda es de I*1 = 2 *·* 10*−*3 *W/m*2*,*

*por lo que el nivel sonoro es*

*L*1 = 10 log

*I*

1

*I*

= 10 log

2 *·*

10

*−*3

*o*

10*−*12

= 10 *·* (9 *−* log 2) *~* 93*,*0 *dB.*

*Para obtener L*2*, el nivel sonoro a* 20 *m, podemos proceder como antes*

* 1. *NIVEL SONORO Y SENSACIO´N AUDITIVA* 109

*utilizando la intensidad a esta distancia I*2*. Sin embargo, lo haremos de otra forma. Como I*1 *e I*2 *tienen la misma potencia asociada P, se cumple*

2

*r*

*P* = 4*πr*2*I*1 = 4*πr*2*I*2 *⇒ I*2 = 1 *I*1*.*

1 2 2

*r*

2

*As´ı, utilizando las propiedades de los logaritmos:*

*I*2

*L*2 = 10 log

*I*

*o*

= 10 log

2

1

*r I*1

*r*2*Io*

2

2

1

*I*1

= 10 log

*Io*

2

+ 10 log 1

*r*

*r*

2

2

= *L*1

+ 20 log *r*1 = *L*

*r*2

1

+ 20 log 1 = *L*

*—* 20 log 2

*~* 87*,*0 *dB.*

A diferencia de la intensidad f´ısica del sonido dada por *L*, la sensaci´on fisiol´ogica que nos produce una onda sonora es subjetiva. Llamamos *intensi- dad fisiol´ogica F* a la sensaci´on que nos permite decir si un sonido es m´as o menos fuerte que otro.

La intensidad fisiol´ogica depende, claro est´a, de la intensidad f´ısica, pero tambi´en de la frecuencia del sonido percibido. El m´ınimo de intensidad sonora capaz de producir sensaci´on auditiva se denomina *umbral m´ınimo de audi- ci´on*, es funci´on de la frecuencia y su valor m´ınimo aparece para 4000 Hz, frecuencia a la cual el o´ıdo presenta sensibilidad m´axima. Aumentando la intensidad sonora se llega a producir una sensaci´on auditiva dolorosa, y se denomina *umbral m´aximo de audici´on* o *umbral de sensaci´on dolorosa* a la m´ınima intensidad capaz de producirla, que es tambi´en funci´on de la frecuen- cia.

En la figura [5.2](#_bookmark109) se muestran las *curvas de Fletcher y Munson*, en las que todos los puntos de la misma curva se perciben con la misma sensaci´on auditiva, por lo que todos los puntos de la misma l´ınea azul de la figura tienen el mismo valor de la intensidad fisiol´ogica aunque tengan valor diferente de *L*.

La unidad de sensaci´on fisiol´ogica se denomina *fonio* y el nivel de sensa-

ci´on auditiva se establece mediante la expresi´on

*F* = *K* log *I .* (5.8)

*Io*

Para una frecuencia de 1000 Hz, el valor de la constante en esa expresi´on es *K* = 10, de manera que, a esa frecuencia, el nu´mero de fonios y el de

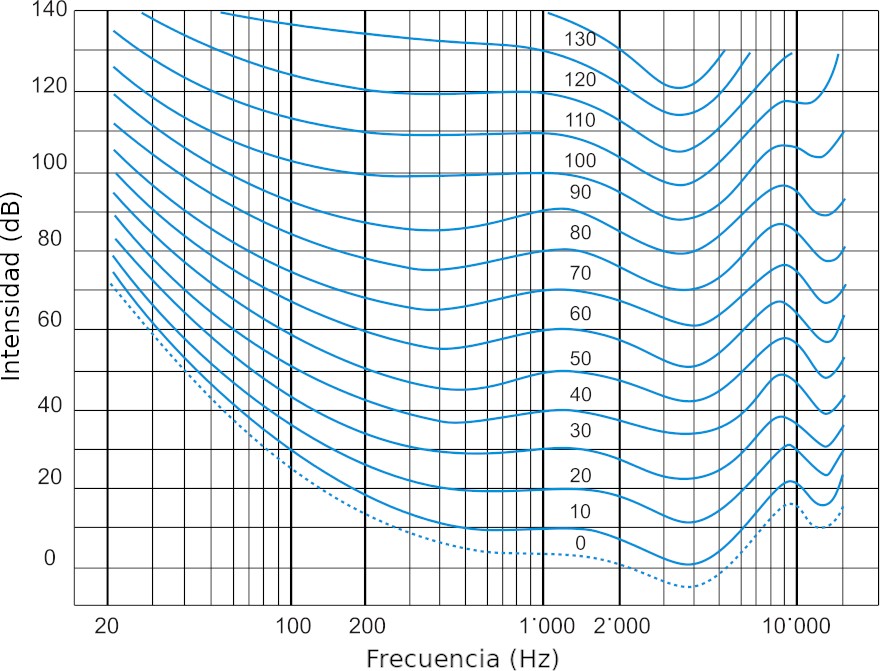


Figura 5.2: Curvas de Fletcher y Munson.

decibelios coinciden. Para otras frecuencias, el valor de *K* se puede extraer aproximadamente de las curvas de Fletcher y Munson. Por ejemplo, un soni- do con *L* = 20 dB tiene *F* = 20 fonios a una frecuencia de 1000 Hz, pero un sonido de *L* = 20 dB tiene aproximadamente *F* = 10 fonios a una frecuencia de 300 Hz, por lo que la sensaci´on sonora es menor en el segundo caso aunque la intensidad f´ısica del sonido sea la misma en ambos.

* 1. *TABLA RESUMEN* 111

## Tabla resumen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fo´rmula/magnitud | Definici´on | Ecuaci´on |
| *I* = 1 *ρ*0*ω*2*A*2*v*  2  *ρ*0 | Intensidad de una onda de sonido arm´onica Densidad de masa del medio sin perturbar | [(5.1)](#_bookmark96) |
| *ω* | Frecuencia angular de la onda |  |
| *A* | Amplitud de la onda |  |
| *v* | Velocidad de la onda |  |
| *I* = *P*  4*πr*2  *P* | Intensidad de una onda esf´erica Potencia emitida por el foco | [(5.2)](#_bookmark98) |
| *r* | Distancia al foco |  |
| *I* = 1 *Z v*2 *,*  2 *vib,max* | Intensidad de una onda de sonido arm´onica | [(5.3)](#_bookmark101) |
| *Z* = *ρ*0*v* | Impedancia acu´stica |  |
| *vvib,max* = *Aω* | Velocidad m´axima de vibraci´on |  |
|  | de las part´ıculas del medio |  |
| *It* = 4*r Ii* (*r*+1)2 | Ley de transmisi´on | [(5.4)](#_bookmark103) |
| *It* | Intensidad de la onda transmitida |  |
| *Ii* | Intensidad de la onda incidente |  |
| *r* = *Z*2*/Z*1 | Cociente de impedancias |  |
| *Ir* = 1 *− It* = (*r−*1)2  *Ii Ii* (*r*+1)2 | Ley de reflexi´on | [(5.5)](#_bookmark104) |
| *L* = 10 log *I*  *Io* | Nivel sonoro | [(5.7)](#_bookmark107) |
| *Io* = 10*−*12 W*/*m2 | Umbral sonoro (m´ınimo) | [(5.6)](#_bookmark106) |
| *F* = *K* log *I*  *Io*  *K* | Nivel de sensaci´on auditiva  Constante dada por las curvas de Fletcher y Munson | [(5.8)](#_bookmark108) |

## Problemas resueltos

* + 1. Una onda sonora arm´onica se propaga por un fluido con una impedancia acu´stica de 350 kg*/*(m2 s). Calcula la amplitud de la onda de presi´on acu´stica sabiendo que la amplitud de la onda de desplazamiento es

*·*

3 10*−*5 m y que la frecuencia es de 1 kHz.

*·*

**Sol.** Dado que tenemos la impedancia acu´stica, conviene usar la f´ormula

∆*pmax* = *Z vvib,max,* (5.9)

que nos relaciona la amplitud de la onda de presi´on con la velocidad de vibraci´on m´axima de las mol´eculas del fluido. Necesitamos esta u´ltima cantidad, que podemos obtener as´ı:

*vvib,max* = *ωA* = 2*πf A* = 2*π ·* 103 *·* 3 *·* 10*−*5 *~* 0*,*188 m*/*s*.*

Poniendo este resultado en la primera de nuestras ecuaciones, tenemos

∆*pmax* = *Z vvib,max ~* 350 *·* 0*,*188 *~* 66*,*0 Pa*.*

* + 1. Una onda sonora se propaga en un fluido con una impedancia acu´stica de 500 kg*/*(m2 s). La velocidad de la onda en este medio es de 360 m*/*s y la amplitud de la onda de presi´on acu´stica es de 43 Pa. Calcula

*·*

* + - 1. La densidad *ρ*0, del fluido sin perturbar.
      2. La velocidad m´axima de vibraci´on de las mol´eculas del fluido,

*vvib,max*.

###### Sol.

*a*) La densidad del fluido sin perturbar se puede obtener a partir de la impedancia acu´stica y la velocidad de la onda:

*Z*

*Z* = *ρ*0*v ⇒ ρ*0 = *v*

= 500 1*,*39 kg*/*m3*.*

360

*~*

*b*) La velocidad m´axima de vibraci´on resulta

∆*pmax*

= *Z v*

*vib,max*

*⇒ vvib,max*

= ∆*pmax*

*Z*

43

=

500

= 0*,*086 m*/*s*.*

1. Una onda sonora arm´onica se propaga a lo largo de una varilla pro- duciendo una velocidad m´axima de vibraci´on de las part´ıculas de la varilla de 5 mm*/*s y una intensidad sonora de 150 W*/*m2. Teniendo en cuenta que la varilla tiene una secci´on circular de radio 10 mm, calcula:
   1. La amplitud de la onda de presi´on acu´stica.
   2. La impedancia acu´stica.
   3. La potencia sonora.

###### Sol.

1. Usando la relaci´on entre intensidad del sonido, amplitud de velo- cidad de vibraci´on y amplitud de presi´on acu´stica, tenemos

1

*I* = *v*

∆*p ⇒* ∆*p*

= 2*I* = 2 *·* 150

= 6 *·* 104 Pa*.*

2 *vib,max*

*max*

*max*

*vvib,max*

5 *·* 10*−*3

1. Para la impedancia acu´stica, tenemos

∆*pmax* = *Z vvib,max*

∆*pmax*

6 *·* 104 7 2

*⇒ Z* = *v*

*vib,max*

= 5 *·* 10*−*3 = 1*,*2 *·* 10

kg*/*(m

*·* s)*.*

1. La potencia se calcula por su relaci´on con la intensidad:

*I* = *⇒ P* = *IS* = *I*(*πr*2) = 150 *· π ·* (0*,*01)2 *~* 4*,*71 *·* 10*−*2 W*.*

*P*

*S*

1. Admitamos que un altavoz emite una onda sonora arm´onica con una frecuencia de 4 kHz, lo que produce una vibraci´on de las mol´eculas del aire de amplitud 10 *µ*m. Teniendo en cuenta que la densidad del aire sin perturbar es 1*,*29 kg*/*m3, la velocidad del sonido en el aire es *v* = 340 m*/*s y que la membrana vibrante del altavoz tiene un a´rea de 100 cm2, calcula
   1. La impedancia acu´stica del aire.
   2. La amplitud de la onda de presi´on acu´stica.
   3. La intensidad sonora.
   4. ) La potencia del sonido.

###### Sol.

* + 1. La impedancia acu´stica del aire es

*Z* = *ρ*0*v* = 1*,*29 *·* 340 *~* 439 kg*/*(m2 *·* s)*.*

* + 1. La amplitud de presi´on acu´stica est´a ralacionada con la de des- plazamiento mediante

∆*p* = *κAk* = *ρ v*2*A ω* = 2*πfρ vA*

*max*

0 *v* 0

= 2*π ·* 4 *·* 103 *·* 1*,*29 *·* 340 *·* 10*−*5 *~* 112 Pa*.*

* + 1. La intensidad del sonido puede calcularse con la expresi´on

1 (∆*pmax*)2

*I* = *~*

1122

*~* 28*,*5 W*/*m *.*

2 *Z* 2 *·* 439

2

* + 1. ) Utilizando la relaci´on entre la potencia del sonido y el diafragma,

a´rea del

*I* = *⇒ P* = *IS ~* 28*,*5 *·* 100 *·* 10*−*4 = 0*,*285 W*.*

*P*

*S*

1. Una fuente de 5 W de potencia genera una onda sonora arm´onica que se propaga a 5000 m*/*s por una barra de 10 cm2 de secci´on. Teniendo en cuenta que la barra tiene una densidad de 2500 kg*/*m3, calcula la amplitud de la onda de presi´on acu´stica.

**Sol.** La intensidad de la onda puede calcularse a partir de la potencia y el a´rea de la barra:

*I* = *P* = 5 = 5 103 W*/*m2*.*

*·*

*S* 10 *·* 10*−*4

La impedancia acu´stica de la barra vale

*Z* = *ρ*0*v* = 2500 *·* 5000 = 1*,*25 *·* 107 kg*/*(m2 *·* s)*.*

Usando la relaci´on entre intensidad de la onda y amplitud de presi´on acu´stica, tenemos

1. (∆*pmax*)2

*I* =

1. *Z*

*⇒* ∆*pmax* = *√*2*IZ* = 2 *·* 5 *·* 103 *·* 1*,*25 *·* 107 *~* 3*,*54 *·* 105 Pa*.*

1. Una onda sonora de intensidad *Ii* se propaga por una varilla, con impe- dancia *Z*1 y densidad *ρ*1, hasta que incide en la frontera de separaci´on con otra varilla, de igual grosor pero impedancia *Z*2 y densidad *ρ*2. En este momento, la mitad de la intensidad de la onda se transmite y la otra mitad se refleja. Teniendo en cuenta que la velocidad del sonido en la primera varilla es el doble de la velocidad del sonido en la segunda, calcula los cocientes *Z*2*/Z*1 y *ρ*2*/ρ*1.

**Sol.** El cociente entre la intensidad de sonido reflejada y la incidente en la superficie de separaci´on de dos medios es

*Ir* = 1 *It*

*−*

*Ii Ii*

(*r* 1)2

= (*r* + 1)2 *,*

*−*

donde *r* = *Z*2*/Z*1 es el cociente de impedancias acu´sticas. En nuestro caso, *Ir/Ii* = 1*/*2, por lo que

1 (*r −* 1)2

*r −* 1 1

*√*2 *±* 1

con

2 = (*r* + 1)2 *⇒*

*r* + 1 = *±√*2 *⇒ r±* = *√*2 *∓* 1 *,*

*r*+ *~* 5*,*83; *r− ~* 0*,*172*.*

Obtenemos dos valores posibles del cociente de impedancias. Ambos son f´ısicamente posibles. A partir de la definici´on de impedancia acu´stica, tenemos

*r* = *Z*2

*Z*1

= *ρ*2*v*2

*ρ*1*v*1

= *ρ*2

2*ρ*1

*ρ*2

*⇒ ρ*1

= 2*r.*

Como tenemos dos posibles valores de *r*, tambi´en tenemos sendos va- lores del cociente de densidades:

*ρ*2

*r*+ *~* 5*,*83 *→ ρ*

1

*ρ*2

*r ~* 0*,*172 *→*

= 2*r*+

= 2*r*

*~* 11*,*7;

*~* 0*,*343*.*

*— ρ*1 *−*

1. Durante la demolici´on de un edificio, se produce una detonaci´on con- trolada. Un observador a una distancia de 300 m de la explosi´on capta una intensidad de 0*,*10 W/m2. Determina:
2. El nivel sonoro que capta un segundo observador a 50 m de la explosi´on.
3. La distancia a la explosi´on a la que debe colocarse el segundo observador para captar 10 dB m´as que el primero.

###### Sol.

1. La potencia *P* del sonido viene dado por

*I* = *P ⇒ P* = 4*πd*2*I ,*

300

1

4*πd*2

1 300

donde *d*1 = 300 m e *I*300 = 0*,*10 W/m2. El nivel sonoro *L*50 a 50 m ser´a

*L*50

= 10 log10

*I*50 *,*

*o*

*I*

donde *Io* = 10*−*12 W/m2 es la intensidad umbral e

*P I*50 = 4*πd*2 *,*

2

con *d*2 = 50 m. As´ı, usando la expresi´on de *P* anterior,

*L*50 = 10 log10

*I*300 *d*2

*~* 10 log10

0*,*1

3002

*~* 126 dB*.*

*Io* 2

1

*d*

2

10*−*12

502

1. Si *d*3 es la distancia pedida, debe ser

*Ld*3

*— L*300

= 10 *⇒* 10 log10

*Id*3 = 10*.*

Usando la relaci´on entre *I* y *P* :

*I*

3002

10 log10

*d*

2

3

300

300

= 10 *⇒ d*3 = *√*10 *~* 94*,*9 m*.*

1. Dos focos puntuales tienen, cada uno, una potencia de 1 mW. Si los focos emiten desde el mismo punto sendas ondas en fase, calcula el nivel sonoro a una distancia de 10 m.

**Sol.** La intensidad del sonido a 10 m debida s´olo a un foco es

*P P* 10*−*3

*−*7 2

*I*1 =

*S* = 4*πr*2 = 4*π ·* 102 *~* 7*,*96 *·* 10

W*/*m *.*

Si dos focos emiten desde el mismo lugar, con la misma potencia y en fase, la intensidad del sonido a 10 m es

*I* = 2 *I*1 *~* 1*,*59 *·* 10*−*6 W*/*m2*.*

El nivel sonoro es

*I*

*L* = 10 log

*Io*

*~* 10 *·* log

1*,*59 *·* 10*−*8

10*−*12

*~* 62*,*0 dB*.*

1. Calcula la potencia con la que habla una persona, supuesta fuente de sonido puntual, a otra a 2 *m* de distancia. Para ello, ten en cuenta que la segunda persona percibe un nivel sonoro de 59 dB.

**Sol.** Primero, calculemos la intensidad *I* a partir del nivel sonoro *L*:

*L* = 10 log *I*

*Io*

*⇒ I* = *Io* 10*L/*10 = 10*−*12 *·* 1059*/*10 = 10*−*6*,*1 *~* 7*,*94 *·* 10*−*7 W*/*m2*.*

Ahora podemos obtener la potencia de la intensidad, asumiendo una emisi´on de fuente puntual:

*I* = *⇒ P* = 4*πr*2 *I ~* 4*π ·* 22 *·* 7*,*94 *·* 10*−*7 *~* 3*,*99 *·* 10*−*5 W*.*

*P*

*S*

1. Se sabe que una fuente puntual produce 10 dB de nivel sonoro a 25 m.
   1. ¿Cu´al es el nivel sonoro a 10 m de la fuente?
   2. ¿A qu´e distancia el nivel sonoro es el menor audible?

###### Sol.

1. Calculemos primero la intensidad a 25 m:

*L*25

= 10 log *I*25

*o*

*I*

*⇒ I*25 = *Io* 10*L*25*/*10 = 10*−*12 *·* 1010*/*10 = 10*−*11 W*/*m2*.*

Con esto, la potencia del sonido resulta

2

*P I*25 = *S*

*⇒ P* = 4*πr I*25

= 4*π ·* 252 *·* 10*−*11 = 25*π ·* 10*−*9 W*.*

Por tanto, la intensidad a 10 m es

*P* 25*π ·* 10*−*9

*−*11 2

*I*10 = *S* = 4*π ·* 102 = 6*,*25 *·* 10

W*/*m

y, finalmente, podemos calcular el nivel sonoro

*L*10 = 10 log

*I*10

*Io*

= 10 *·* log

6*,*25 *·* 10*−*11

10*−*12

*~* 18*,*0 dB*.*

1. El sonido deja de percibirse por una persona media cuando la intensidad es *I* = *Io* = 10*−*12 W*/*m2. La distancia del foco *d* a la que esto ocurre viene dada por

*P P*

*P*

25*π ·* 10*−*9

*Io* =

*S* = 4*πd*2 *⇒ d* =

=

4*πI*

4*π ·* 10*−*12 *~* 79*,*1 m*.*

1. A un metro de una m´aquina, supuesta fuente de sonido puntual, perci- bimos un nivel sonoro de 60 dB. ¿Cu´anto debemos alejarnos para que el nivel se reduzca a 30 dB?

**Sol.** Esto se puede resolver mediante un m´etodo similar al ejercicio anterior, pero vamos a hacerlo de otra manera, algo m´as r´apida. La diferencia entre el nivel sonoro a 1 m y el nivel sonoro a la distancia *d*, donde se perciben 30 dB, es

*L L* = 60 dB 30 dB = 30 dB

*— −*1 *d*

= 10 log *I*1 *−* 10 log *Id* = 10 log *I*1

*Io*

*Io*

*Id*

Por otro lado, usando que la fuente es puntual,

*I*1 *P/*(4*π*12) 2

*I* = *P/*(4*πd*2) = *d .*

*d*

Poniendo todo en la misma ecuaci´on, llegamos a

30 = 10 log *d*2 *⇒ d*2 = 103 *⇒ d* = *√*103 *~* 31*,*6 m*.*

Como ya estamos a 1 m de la m´aquina, tendremos que alejarnos 30*,* 6 m.

1. El nivel de intensidad sonora cerca de un avi´on es de 90 dB. Aproxi- mando el ruido del avi´on por una onda la onda acu´stica arm´onica de frecuencia de 4 kHz, calcula el desplazamiento m´aximo de las mol´eculas del aire. Toma la densidad del aire sin perturbar como 1*,*3 kg/m3 y la velocidad del sonido como 340 m*/*s.

**Sol.** A partir del nivel de intensidad sonora, podemos calcular *I*:

*L* = 10 log *I ⇒ I* = *I*

*Io*

*o*

10*L/*10 = 10*−*12 *·* 1090*/*10 = 10*−*3 W*/*m2*.*

Con esto, la amplitud de desplazamiento *A* de la onda arm´onica resulta

1

*I* = *ρ*0

2

*ω*2*A*2*v*

2*I*  2 *·* 10*−*3 *−*8

*⇒ A* =

(2*πf* )2*ρ v* =

(2*π ·* 4000)2 *·* 1*,*3 *·* 340 *~* 8*,* 46 *·* 10

m*.*

0

1. Calcula la p´erdida de nivel sonoro cuando una onda se transmite de un medio a otro con el doble de impedancia.

**Sol.** El dato que nos da el ejercicio es que hay dos medios en contacto cuyas impedancias acu´sticas cumplen

*r* = *Z*2

*Z*1

2

= = 2*.*

1

Por tanto, la relaci´on entre la intensidad incidente en el medio 1 y la transmitida al medio 2 es

*I* = *I*

4*r*

= *I*

*·* 4 *·* 2 = 8 *Ii*

*⇒ Ii* = *I*1 = 9 *.*

*t i* (*r* + 1)2

*i* (2 + 1)2 9

*It I*2 8

La p´erdida de nivel sonoro en la transmisi´on es

*L − L* = 10 log *I*1 *−* 10 log *I*2 = 10 log *I*1

1

2

*I*

*o*

*I*

*o*

*I*

2

= 10 log 9 *~* 0*,*512 dB*.*

8

1. El sonido producido en la habitaci´on de una casa, con 50 dB de nivel sonoro, penetra una de sus paredes y es percibido en la habitaci´on con- tigua con un nivel de 35 dB. ¿Qu´e porcentaje de la intensidad absorbe

la pared?

**Sol.** La p´erdida de nivel sonoro es

*L L* = 35 dB 50 dB = 15 dB

*— − −*2 1

= 10 log *I*2 *−* 10 log *I*1 = 10 log *I*2 *.*

*Io Io I*1

Despejando *I*2*/I*1, tenemos

*−*15 = 10 log *I*2 *⇒ I*2

*I*1

*I*1

= 10*−*15*/*10 *~* 0*,*0316 = 3*,*16 %*.*

Por tanto, el porcentaje absorbido por la pared es de 96*,*8 %.

# Cap´ıtulo 6

**Carga y corriente el´ectrica**

En este tema estudiamos el campo electrost´atico y algunas mag- nitudes y leyes relacionadas. En la primera parte, describimos la interaccion electrost´atica entre part´ıculas cargadas y caracteriza- mos el comportamiento conductor y diel´ectrico de los materiales. Tras definir el campo el´ectrico, consideramos su expresi´on para el caso de un condensador plano. A partir de la energ´ıa potencial electrost´atica, definimos el potencial el´ectrico y deducimos una expresi´on para obtenerlo a partir del campo el´ectrico. Esto nos permite, m´as tarde, deducir una expresi´on para la capacidad del condensador plano. Esta primera parte termina con un estudio de la asociaci´on de condensadores. En la segunda parte del tema estudiamos la intensidad de corriente, la resistencia el´ectrica en materiales o´hmicos (su dependencia con la longitud, secci´on del conductor y la temperatura), las fuentes de fuerza electromotriz y las potencias suministradas por las fuentes y disipadas por las resistencias.

## 6.1. Carga el´ectrica

Los cuerpos poseen una propiedad llamada *carga el´ectrica*, que es una magnitud escalar que puede tomar valores positivos o negativos. La unidad SI de carga es el *culombio* (C). Tambi´en hay cuerpos que poseen la misma can- tidad de carga positiva y negativa; nos referimos a ellos como el´ectricamente

121

*neutros*. Experimentalmente se han observado las siguientes propiedades de la carga el´ectrica:

*Interacci´on entre cargas*. Las cargas del mismo signo se repelen y las cargas de signo opuesto se atraen. La intensidad de estas interacciones decrece con la distancia entre las cargas.

*Conservaci´on de la carga*. La carga el´ectrica es una propiedad de los cuerpos materiales. Sin soporte material no hay carga y el movimiento de la carga est´a ligado al movimiento del soporte material. A menudo, los cuerpos cargados entran en contacto y la carga se transfiere de un cuerpo a otro. En todos los casos se cumple que la carga neta se conserva.

En los nu´cleos de los ´atomos que forman la materia ordinaria hay protones y neutrones. Los neutrones carecen de carga el´ectrica pero los protones poseen una carga positiva *qp* = +*e* = 1*,*6 *·* 10*−*19 C. En torno al nu´cleo existe cierto nu´mero de electrones, cada uno con una carga negativa *qe* = *e* = 1*,*6 10*−*19 C. Dado que la carga de un electr´on es de igual magnitud pero de signo opuesto a la de un prot´on, un a´tomo que posea tantos protones como

*— − ·*

electrones ser´a neutro. Pero el nu´mero de electrones de un a´tomo puede

variar, bien porque los pierda, en cuyo caso el a´tomo se convierte en un *ion positivo* o *cati´on*, o porque los gane, y el a´tomo se convierte en un *ion negativo* o *ani´on*. En ambos casos, la carga neta de un a´tomo ser´a siempre igual a un nu´mero entero de veces la carga fundamental *e* = 1*,*6 10*−*19 C.

*·*

Para tener una noci´on sobre lo grande o pequen˜a que es cierta cantidad de carga, son u´tiles los siguientes valores t´ıpicos:

Al frotar un cuerpo con otro, la carga generada en cada uno de ellos es del orden de nanoculombios (10*−*9 C).

En ciertos dispositivos el´ectricos llamados *condensadores*, las cargas t´ıpicas en sus placas van desde los picoculombios (10*−*12 C) hasta los culombios.

### Conductores y diel´ectricos

Se llama *conductividad el´ectrica* de un material a la habilidad que tiene para permitir el movimiento de carga el´ectrica en su interior. Los materiales *conductores* poseen una gran cantidad de *electrones libres* y tales electrones se

* 1. *CARGA ELE´CTRICA* 123

mueven f´acilmente en respuesta a cualquier interacci´on el´ectrica del material. A su vez, los materiales *aislantes* o *diel´ectricos* casi no disponen de electrones libres, por lo que las interacciones el´ectricas sobre el material no generan movimiento neto de carga en su interior.

El diferente comportamiento de conductores y diel´ectricos es consecuencia

de la *F´ısica Cu´antica*. En los a´tomos, los electrones se mueven alrededor

del nu´cleo, que est´a cargado positivamente, situados en diferentes *capas* u *orbitales*. Los electrones de las capas m´as alejadas del nu´cleo est´an d´ebilmente enlazados a ´el, y es el detalle de este tipo de enlace el que determina las propiedades conductoras del material.

En los *metales*, los electrones de las capas m´as externas est´an tan d´ebil- mente enlazados a los nu´cleos que constituyen un mar llamado *banda de conducci´on* y se desplazan casi libremente a trav´es del metal, por lo que se les llama *electrones libres*. La existencia de muchos electrones libres en los metales explica que ´estos sean excelentes conductores.

Por el contrario, los electrones de los materiales diel´ectricos participan activamente en el *enlace at´omico* i´onico o covalente, de manera que est´an

fuertemente ligados a sus a´tomos o mol´eculas. Se requiere mucha energ´ıa

para liberar electrones que puedan moverse por el interior del material, de modo que su conductividad es muy baja.

En realidad, no existen materiales totalmente conductores ni totalmente aislantes, sino una gama casi completa de comportamientos intermedios. De cualquier modo, la conductividad de un metal puede ser mil millones de veces mayor que la de un aislante como el vidrio. Por ello, asumiremos casi siempre que un buen aislante tiene conductividad nula.

Supongamos que, mediante fricci´on o contacto, hemos depositado cierta carga en un cuerpo inicialmente neutro. Si el material en que hemos deposi- tado carga es un aislante, la carga normalmente se queda ligada al punto de contacto. Es posible entonces tener una distribuci´on de carga no uniforme, es decir, que var´ıa de un punto a otro. En cambio, si el material es un buen conductor, el exceso de carga depositado en ´el tiende a dispersarse para mi- nimizar la repulsi´on electrost´atica. Cuando las cargas dejan de moverse, se dice que se ha alcanzado el *equilibrio electrost´atico* y el exceso de carga se habr´a situado en la superficie del conductor.

## Campo el´ectrico

Consideremos cierta carga *Q*, que puede ser una carga puntual, un conjun- to de cargas puntuales o un cuerpo cargado. Se llama *campo el´ectrico* creado por *Q* a un campo vectorial **E** que expresa, en cada punto, la perturbacion de las propiedades del espacio debida a la existencia de la carga *Q* (que, por ello, se llama *fuente del campo el´ectrico*). Para encontrar el valor de **E** en un punto cualquiera del espacio, se coloca en ese punto una carga puntual *q* de pequen˜o valor (para que no modifique la localizaci´on y/o distribuci´on de *Q*), llamada *carga de prueba*. La carga de prueba experimentar´a entonces una fuerza el´ectrica **F***e* que expresa la interacci´on con la carga fuente *Q*. El campo el´ectrico creado por *Q* en el punto donde se ha situado la carga de prueba *q* se define como

**E** = **F***e .*

*q*

La unidad SI de campo el´ectrico es 1 N*/*C. Se usa tambi´en otra unidad equi- valente, que es 1 V*/*m. El *voltio* (V) se define, por tanto, de manera que 1 V = 1 (N *·* m)*/*C.

## Campo el´ectrico de un condensador plano

Un caso particularmente sencillo, pero importante, de campo el´ectrico es el creado por un condensador plano. Un *condensador plano* est´a formado por dos placas met´alicas planas y paralelas, como vemos en la figura [6.1.](#_bookmark115) Una de ellas tiene una carga positiva +*Q* distribuida uniformemente en su superficie, de a´rea *A*. La otra tiene distribuida uniformemente en su superficie, tambi´en de a´rea *A*, una carga de igual magnitud pero negativa *Q*. La distancia entre ambas superficies es *d*.

*−*

Si la placa o *armadura positiva* del condensador plano tiene una superficie de ´area *A* y en ella hay una carga *Q* distribuida uniformemente, su *densidad superficial de carga* es

*Q*

*σ*pos = *A.*

Del mismo modo, la densidad superficial de carga de la *armadura negativa*

del condensador es

*σ*neg = *−Q.*

*A*

* 1. *CAMPO ELE´CTRICO* 125

+Q

A

−Q

d

Figura 6.1: Condensador plano de a´rea *A* y distancia entre placas *d*. La placa izquierda tiene carga *Q* y la derecha *−Q*.

De este modo, *σ*neg = *−σ*pos.

El campo el´ectrico creado por el condensador *en la regi´on situada entre sus placas o armaduras* se puede aproximar por

**E** = *σ*pos **u**

*Q*

= **u** *.* (6.1)

*ε*0 *±*

*ε*0*A ±*

En esta expresi´on,

*ε*0 = 8*,*85 *·* 10*−*12 C2*/*(m2 *·* N)

es la *permitividad del vac´ıo* (hemos supuesto que la regi´on entre las placas contiene vac´ıo o aire; si estuviera rellena de otro material, habr´ıa que po- ner su permitividad en la f´ormula del campo el´ectrico). A su vez, el vector unitario **u***±* apunta *desde la armadura positiva del condensador hasta su ar- madura negativa perpendicularmente a ambas superficies*. Por tanto, el campo el´ectrico creado por un condensador plano entre sus placas es *uniforme* (no depende de la posici´on siempre que estemos entre las placas del condensador) y va desde la placa positiva a la negativa. Es esta sencillez lo que hace que el condensador plano sea tan usado en mu´ltiples aplicaciones en las que se requiere un campo uniforme y apreciable en una regi´on limitada del espacio (entre las placas) pero que sea mucho menor, o pr´acticamente inexistente, fuera de esa regi´on.

**Ejemplo 6.2.1** *Calculemos el campo el´ectrico entre las placas de un*

*condensador plano sabiendo que las placas son cuadradas de* 1 *cm de lado y que la carga de la placa positiva vale* 10*−*15 *C.*

***Sol.*** *Supongamos que las placas son paralelas al plano Y Z y que la placa positiva tiene una coordenada x menor que la negativa. As´ı, el vector*

*unitario* ***u****± coincide con* ***i****. Adem´as, como A* = 1 *cm*2 *y Q* = 10*−*15 *C, el*

*campo el´ectrico resulta*

***E*** = ***u****±* =

*Q*

*ε*0*A*

10*−*15

8*,*85 *·* 10*−*12 *·* 10*−*4

***i*** *~* 1*,*13 *V/m.*

## Potencial el´ectrico

Como hemos visto al definir el campo el´ectrico, si una carga puntual *q* est´a sometida a un campo el´ectrico **E** (que puede estar creado por otras cargas distintas de *q*, por un condensador plano o por otro cuerpo cargado), la *fuerza el´ectrica* **F***e* experimentada por *q* tiene la forma

**F***e* = *q* **E***.*

Si *q* tuviera masa *m* y la fuerza el´ectrica fuese la u´nica que actuara sobre ella, por la segunda ley de Newton la aceleraci´on de *q* estar´ıa dada por

*q*

**a** = **E***.*

*m*

Esto implica que una carga positiva, sometida u´nicamente a una fuerza

el´ectrica, se acelera en el sentido del campo el´ectrico aplicado y una car- ga negativa se acelera en sentido opuesto al campo el´ectrico aplicado.

Adema´s de poderse estudiar la din´amica de una carga sometida a un campo el´ectrico a trav´es de la segunda ley de Newton, pueden usarse tambi´en m´etodos basados en las nociones de trabajo y energ´ıa. La fuerza el´ectrica producida por un *campo electrost´atico* (es decir, cualquier campo el´ectrico creado por cargas en reposo) es una *fuerza conservativa*. Es importante notar que esto no ser´ıa cierto en general si el campo el´ectrico no fuera conservativo (como el que aparece en el interior de una fuente de fuerza electromotriz, que veremos m´as adelante), pero nos centraremos en el caso conservativo para simplificar las cosas.

Toda fuerza conservativa lleva asociada una *energ´ıa potencial*. La energ´ıa potencial asociada a la fuerza electrost´atica se llama *energ´ıa potencial elec- trost´atica*, y la escribiremos como *Ue*. La energ´ıa potencial electrost´atica de una carga puntual *q* sometida a un campo electrost´atico **E** se puede escribir como

*Ue* = *q V.*

En esta relaci´on, *V* se llama *potencial el´ectrico* y es una funci´on escalar que depende s´olo de la forma del campo conservativo **E** al que est´a sometida *q*. La unidad de potencial el´ectrico en el SI es 1 V = 1 J*/*C.

Si la carga puntual *q* se mueve entre un punto inicial *A* y un punto final *B* bajo la acci´on de la fuerza electrost´atica **F***e* = *q* **E**, el *trabajo* que realiza esta fuerza en ese movimiento, por la definici´on de energ´ıa potencial, es

- *B*

*W* =

*A*

**F***e · d***r** = *−*∆*Ue*

= *−* (*Ue*(final) *− Ue*(inicial)) = *−* (*Ue*(*B*) *− Ue*(*A*))

= *−q* (*VB − VA*) = *−q* ∆*V,*

donde *VA* y *VB* son los valores del potencial el´ectrico en *A* y *B*, respectiva- mente. La cantidad

∆*V* = *V* (final) *− V* (inicial) = *VB − VA*

se llama *diferencia de potencial* y su unidad en el SI es tambi´en 1 V.

Si una carga puntual *q* se mueve entre los puntos *A* y *B* sometida u´nica- mente a la fuerza electrost´atica, por la *conservaci´on de la energ´ıa mec´anica* se tendr´a

* + 1. *mv*2 + *q V* = 1 *mv*2 + *q V ,*
    2. *A A* 2 *B B*

donde *vA* y *vB* son las velocidades de la carga *q* en *A* y *B*, respectivamente. Esta expresi´on nos permite, por ejemplo, conocer el valor de la diferencia de potencial necesaria para acelerar o frenar part´ıculas cargadas.

### Relaci´on entre campo el´ectrico y potencial el´ectrico

Hemos comentado que el potencial el´ectrico *V* es una funci´on escalar que est´a dada por el campo el´ectrico conservativo **E** creado por la misma distribuci´on de carga que *V* . La f´ormula matem´atica de esta relaci´on es

*V* = *−* - **E** *· d***r***.*

Dentro de la integral indefinida, se tiene el *producto escalar* de los vectores campo el´ectrico **E** y *desplazamiento infinitesimal d***r** = *dx* **i** + *dy* **j** + *dz* **k**. En esta expresi´on queda una constante de integraci´on por determinar. Esta constante se puede fijar asignando un *origen de potencial*.

De la misma manera, la diferencia de potencial entre dos puntos se rela- ciona con el campo el´ectrico mediante la integral definida

- *B*

∆*V* = *VB − VA* = *−*

*A*

**E** *· d***r***.*

**Ejemplo 6.3.1** *Sabiendo que el campo el´ectrico en una regi´on del es-*

*pacio es* ***E*** = 3 *kV/m* ***i*** + 5 *kV/m* ***j****, calculemos la diferencia de potencial*

***Sol.*** *La diferencia de potencial la obtenemos mediante la siguiente ex-*

*presi´on*

*entre el punto A*(1 *cm, −*2 *cm,* 3 *cm*) *y el origen de coordenadas O.*

-

*A*

∆*V* = *VA − VO* = *−* ***E*** *· d****r****.*

*O*

*Calculemos primero el producto escalar del integrando:*

***E*** *· d****r*** = (3 ***i*** + 5 ***j***) *·* (*dx* ***i*** + *dy* ***j*** + *dz* ***k***) = 3 *dx* + 5 *dy,*

*donde debemos recordar que la unidad de* ***E*** *es kV/m. As´ı,*

∆*V* = *−*

-

1

0

3 *dx −*

-

*−*2

1

*−*2

0

5 *dy* = *−*[3*x*] *−* [5*y*] = *−*3 + 10

0

0

= 7 *kV/m · cm* = 70 *V.*

### Diferencia de potencial entre las placas de un conden- sador plano

Para calcular la diferencia de potencial en el condensador plano, elegimos el sistema de referencia de manera que la placa positiva est´e en *x* = 0 y la negativa est´e en *x* = *d*. El campo el´ectrico en este sistema de referencia, como vimos en un apartado anterior, se puede escribir

*Q Q*

**E** = *ε A* **u***±* = *ε A* **i***.*

0 0

Aqu´ı, *Q* es la carga de la armadura positiva del condensador (la negativa tiene carga *Q*) y *A* es el a´rea de la superficie de ambas armaduras.

*−*

La diferencia de potencial entre la placa positiva (en *x* = 0) y la placa negativa (en *x* = *d*) de este condensador plano estar´a entonces dada por

∆*V* = *V*+ *− V−* = *−*

0 *Q*

**E** *· d***r** = *− ε A*

-

0

*d*

0

**i** *d***r***.*

-

*·*

*d*

El producto escalar dentro de la integral es

**i** *· d***r** = **i** *·* (*dx* **i** + *dy* **j** + *dz* **k**) = *dx.*

Poniendo esto en la expresi´on de la diferencia de potencial, se obtiene

*Q* - 0 *Q Qd*

∆*V* = *V*+ *− V−* = *− ε A*

*dx* = *− ε A* (0 *− d*) = *ε A.*

0

*d*

0

0

El resultado final tambi´en se puede escribir como

∆*V* = *E d.*

Una aplicaci´on de los condensadores es el *desfibrilador*, cuyas placas se cargan con diferencias de potencial elevadas. Al ponerlas sobre el cuerpo de una persona, el condensador que forman ambas placas se descarga a trav´es del interior del paciente en un cort´ısimo intervalo de tiempo, generando intensas sen˜ales el´ectricas para reactivar el latido cardiaco.

### Conductores en equilibrio electrost´atico

Un material conductor contiene un gran nu´mero de electrones libres que se mueven obedeciendo campos el´ectricos externos o internos. Decimos que el conductor se encuentra en *equilibrio electrost´atico* si no hay desplazamiento de cargas en su interior. En situaci´on de equilibrio electrost´atico, cualquier material conductor satisface las siguientes propiedades:

Si un conductor tiene un exceso de carga en su interior, esta carga se mueve r´apidamente intentando reducir la fuerza el´ectrica. Cuando se alcanza el equilibrio electrost´atico, todo el exceso de carga se situ´a en la superficie del conductor (en general, se distribuye inhomog´eneamen- te en ella como veremos despu´es) y el interior queda completamente neutro, como se ve en la figura [6.2.](#_bookmark119)

++ +++

+ + +

+

++ +

+ +

+

+

+

+ +

+

+

+

+

+

Figura 6.2: Distribuci´on de carga en un conductor. Las cargas depositada inicialmente en el interior del conductor (izquierda) se mueven hacia la su- perficie (derecha).

El campo el´ectrico en el interior de un conductor en equilibrio es nulo. El campo el´ectrico **E***s* en la superficie de un conductor en equilibrio es perpendicular a ella y tiene un valor

*σ*

**E***s* = **n***,*

*ε*

0

siendo **n** el vector unitario normal a la superficie del conductor (que apunta hacia fuera de ´este) en cada punto y *σ* la densidad superficial de carga en ese mismo punto (en realidad, en una superficie infinitesi- mal alrededor del punto). Dado que la distribuci´on de carga no es, en general, homog´enea, el campo en la superficie de un conductor tiene valores diferentes en cada punto, pero en todos obedece la expresi´on anterior.

Si se situ´a un conductor en el seno de un campo el´ectrico externo, como en la siguiente figura, las cargas inducidas por el campo externo en la superficie del conductor crean un campo que anula el externo en el interior del material. Esta propiedad se llama *efecto de apantallamiento* y el conductor que lo crea se dice que actu´a como una *jaula de Faraday*.

Dado que en el interior de un material conductor en equilibrio el campo el´ectrico es nulo, resulta que el potencial electrost´atico es el mismo en todos los puntos del interior y tiene un u´nico valor llamado *potencial del conductor Vc*.

Se ha mencionado que el exceso de carga se situ´a de manera inhomog´enea en la superficie de un material conductor en equilibrio electrost´atico. En realidad, tanto la densidad de carga como el campo el´ectrico en equilibrio son

−

+

− +

−

+

−

+

− +

+

+

+

+

+

+

+

Figura 6.3: Distribuci´on de carga en un conductor en el seno de un campo el´ectrico.

mayores en las zonas en que las que el radio de curvatura de la superficie del conductor es menor. Si el conductor tiene una punta, la densidad de carga y el campo el´ectrico pueden ser muy grandes en ella, incluso aunque el potencial no lo sea. Si el campo el´ectrico en una punta de un conductor supera un valor cr´ıtico, llamado *resistencia diel´ectrica* del medio a su alrededor (para el aire, este valor es del orden de *Emax* = 3 106 V*/*m), se produce la ionizaci´on del medio diel´ectrico, liber´andose electrones en una fracci´on de los a´tomos o mol´eculas del medio. Este efecto se llama *ruptura diel´ectrica* y aparece, por ejemplo, en los rayos de una tormenta.

*·*

## Capacidad y condensadores

Si depositamos una carga *Q* en un conductor aislado, se distribuye en la superficie del conductor y todos los puntos del conductor adquieren un potencial *Vc* respecto al nivel cero (aquel en que no hay carga). Se define la *capacidad* el´ectrica del conductor como el cociente entre la carga de su superficie y el potencial respecto al nivel cero, esto es,

*Q*

*C* = *.*

*Vc*

La unidad SI de capacidad es el *faradio* (F), tal que 1 F = 1 C*/*V. La capa- cidad de un conductor mide la cantidad de carga que puede almacenar.

Un *condensador* es un dispositivo que permite almacenar carga. Est´a formado por dos conductores con la misma geometr´ıa situados muy cerca

uno del otro pero sin tocarse, llamados placas o armaduras. En la figura [6.4](#_bookmark121) se puede ver un esquema de (a) un condensador plano, (b) un condensador cil´ındrico y (c) un condensador esf´erico.

−Q

+Q

−Q

+Q

+Q

−Q

(a) (b) (c)

Figura 6.4: Esquema de (a) un condensador plano, (b) un condensador cil´ındrico y (c) un condensador esf´erico.

Uno de los conductores del condensador se carga con una carga *Q* y el otro con una carga *−Q*. En el equilibrio electrost´atico, la armadura de carga positiva adquiere un potencial *V*+, que excede al potencial *V−* de la armadura de carga negativa en una cantidad ∆*V* = *V*+ *V−*. Se define la *capacidad* de un condensador como el cociente entre la carga *Q* situada en la armadura positiva y la diferencia de potencial ∆*V* entre la armadura positiva y la negativa,

*−*

*Q*

*C* = *.*

∆*V*

La cantidad *C* depende de los detalles de fabricaci´on del condensador, y mide su posibilidad de almacenamiento de carga.

### Capacidad de un condensador plano sin diel´ectrico entre sus placas

Para calcular la capacidad de un condensador, se obtiene el campo el´ectri- co que crea la distribuci´on de carga en el equilibrio para puntos situados en la regi´on entre las armaduras. A partir del campo, se determina la diferencia de potencial ∆*V* entre la armadura positiva y la negativa. Finalmente, se calcula la capacidad *C* del condensador mediante el cociente *C* = *Q/*∆*V* .

Para un condensador plano, como hemos visto en apartados anteriores de este tema, el campo el´ectrico es *E* = *σ/ε*0 = *Q/*(*ε*0*A*), siendo *A* el ´area de las armaduras, y la diferencia de potencial entre las armaduras es ∆*V* = *Ed* =

*Qd/*(*ε*0*S*), siendo *d* la distancia entre las placas. Por tanto, la capacidad de un condensador plano es

*C* = *Q* = *ε*0*A,*

∆*V d*

es decir, depende de factores geom´etricos (*A* y *d*) y del material que se coloca entre las placas (en el caso estudiado, el vac´ıo, por lo cual aparece en la f´ormula la permitividad del vac´ıo *ε*0).

**Ejemplo 6.4.1** *Consideremos de nuevo el ejemplo* [*6.2.1*](#_bookmark117) *y calculemos la*

*capacidad del condensador con la informaci´on adicional de que las placas est´an separadas d* = 1 *mm.*

***Sol.*** *Podemos calcular la capacidad de dos maneras. Por una parte, usan- do el valor de Q y la expresi´on del campo el´ectrico obtenida en el ejemplo*

[*6.2.1*](#_bookmark117) *tenemos*

*C* =

*Q*

∆*V Ed* 1*,*13 *·* 10*−*3

= *~*

*Q*

10*−*15

*~* 8*,*85 *·* 10 *F.*

*−*13

*Por otra parte, tambi´en podemos calcular la capacidad con la siguiente*

*f´ormula*

*C* =

*ε*0*A* 8*,*85 *·* 10*−*12 *·* 10*−*4

*d*

=

10*−*3

= 8*,*85 *·* 10 *F.*

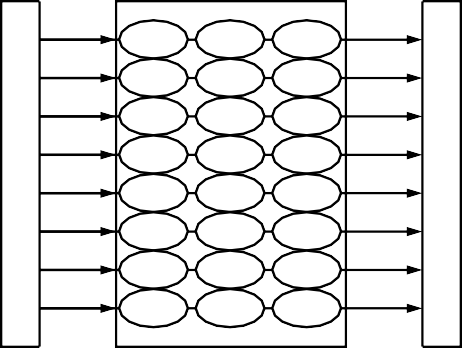
*−*13

### Capacidad de un condensador plano con diel´ectrico en- tre sus placas

Adema´s del vac´ıo o del aire, se pueden insertar otros materiales entre las placas de un condensador, modificando as´ı su capacidad. Cuando se introduce en un condensador un material diel´ectrico, como muestra la figura [6.5,](#_bookmark123) el campo el´ectrico *E* se reduce respecto al del vac´ıo *E*0 segu´n la expresi´on *E* = *E*0*/εr*, siendo *εr* una cantidad adimensional, siempre igual o mayor que 1, llamada *permitividad relativa* del material que se ha introducido entre las placas del condensador. A partir de ella, se define la constante

*ε* = *ε*0*εr,*

que se llama *permitividad* (absoluta) del material y tiene las mismas unidades que *ε*0.



+

+

+

+

− + − + − +

− + − + − +

− + − + − +

− + − + − +

− + − + − +

− + − + − +

− + − + − +

− + − + − +

−

−

−

−

Figura 6.5: Esquema de un condensador con un diel´ectrico entre sus placas.

Debido a que el campo el´ectrico entre las placas de un condensador se reduce al colocar un diel´ectrico, la diferencia de potencial ∆*V* se reduce con el mismo factor. Esto implica que la capacidad del condensador *C* cuando se introduce un diel´ectrico aumenta con respecto a la capacidad del mismo condensador cuando entre las placas hay vac´ıo *C*0 segu´n

*C* = *εrC*0*.*

La capacidad de un condensador plano con un diel´ectrico ocupando todo el espacio entre sus placas es

*C* = *εrε*0*A* = *εA,* (6.2)

*d d*

donde *ε* es la permitividad del material. El hecho de que la capacidad au- mente al insertar un diel´ectrico es la raz´on por la cual se suelen fabricar los condensadores con diferentes materiales diel´ectricos entre sus armaduras.

**Ejemplo 6.4.2** *Continuando con el ejemplo* [*6.4.1,*](#_bookmark122) *obtengamos la nueva capacidad del condensador si entre las placas introducimos un diel´ectrico de permitividad relativa εr* = 2*.*

***Sol.*** *Como la capacidad C*0 *obtenida en el ejemplo* [*6.4.1*](#_bookmark122) *es conocida, podemos calcular la nueva capacidad como*

*C* = *εrC*0 = 2 *·* 8*,*85 *·* 10*−*13 = 1*,*77 *·* 10*−*12 *F.*

*De forma alternativa, podemos calcular C directamente*

*C* =

*εrε*0*A* 2 *·* 8*,*85 *·* 10*−*12 *·* 10*−*4

*d*

=

10*−*3

= 1*,*77 *·* 10 *F.*

*−*12

### Asociaciones de condensadores

A veces es conveniente asociar varios condensadores, cuyo conjunto se comporta como un u´nico *condensador equivalente* a efectos del resto del cir- cuito o dispositivo en el que est´en integrados. Las principales maneras de conectar varios condensadores mediante cables conductores se pueden obser- var en las figuras que hay a continuaci´on.

En una *asociaci´on en paralelo*, conectamos el cir-

*C*1 cuito a una diferencia de potencial ∆*V* , de tal

manera que es la misma para cada condensador, es decir, ∆*V*1 = ∆*V*2 = ∆*V* . La carga total al- macenada por la asociaci´on es *QT* = *Q*1 + *Q*2, donde *Q*1 = *C*1∆*V* y *Q*2 = *C*2∆*V* . As´ı, *QT* = (*C*1 + *C*2)∆*V* = *CT* ∆*V* , y la capacidad equivalen-

*C*2 te de una asociaci´on en paralelo de dos condensa- dores de capacidades *C*1 y *C*2 es *CT* = *C*1 + *C*2.

En una *asociaci´on en serie*, la capacidad equiva-

lente resulta dada por 1

*C*

*T*

1 +  1 . En este

1 2

=

*C*

*C*

*C*1 *C*2

caso, la carga en cada condensador es la misma,

*Q* = *Q*1 = *Q*2, siendo *Q*1 = *C*1∆*V*1 y *Q*2 = *C*2∆*V*2

las cargas almacenadas por cada uno de los con- densadores. La diferencia de potencial entre los extremos de la asociaci´on de condensadores en se- rie es ∆*V* = ∆*V*1 + ∆*V*2.

**Ejemplo 6.4.3** *Tomemos dos condensadores de la misma capacidad C y obtengamos la capacidad equivalente cuando los asociamos en paralelo y en serie.*

***Sol.*** *Si la asociaci´on es en paralelo, entonces*

*CT* = *C* + *C* = 2*C,*

*la capacidad resultante se duplica. Mientras que si la asociaci´on es en*

*serie*

1

*C* = *C* + *C ⇒ C* = *C,*

*T*

*−*1

*−*1

*−*1

*T*

2

*la capacidad total se reduce a la mitad.*

### Energ´ıa el´ectrica almacenada por un condensador

Un condensador almacena carga cuando se establece una diferencia de potencial entre sus placas. La diferencia de potencial entre estas placas la establece algu´n dispositivo que actu´e como fuente de trabajo, como una ba- ter´ıa. La bater´ıa hace trabajo para depositar carga en una armadura del condensador, extray´endola de la otra armadura.

Cuando una bater´ıa est´a cargando un condensador, ha de ser capaz de ir llevando carga positiva desde la placa negativa hasta la placa positiva venciendo la repulsi´on electrost´atica. El trabajo que realiza la bater´ıa *Wbat* es igual y de signo opuesto al trabajo (negativo) realizado por la fuerza electrost´atica en ese proceso. Este trabajo se almacena como energ´ıa potencial electrost´atica *Ue* = *Wbat* de las cargas sobre las armaduras del condensador.

Resulta

*Q*2

*Ue* = 2*C* =

*C*(∆*V* )2

=

2

*Q*∆*V*

*,* (6.3)

2

donde *Q* es la carga de la placa positiva del condensador y ∆*V* es la diferencia de potencial entre las placas.

Hay otra manera de interpretar el resultado anterior. En el proceso de carga, se crea un campo el´ectrico entre las placas del condensador, de mane- ra que el trabajo realizado para cargar el condensador es tambi´en el trabajo necesario para crear este campo el´ectrico. La energ´ıa almacenada en el con- densador se puede considerar *energ´ıa del campo el´ectrico* que ha sido creado gracias al trabajo de la bater´ıa conectada al condensador para cargarlo.

**Ejemplo 6.4.4** *Continuando con el ejemplo* [*6.4.3,*](#_bookmark125) *calculemos la energ´ıa almacenada en la asociaci´on de condensadores, suponiendo que inicial- mente los dos condensadores tienen las mismas carga Q*0 *y diferencia de potencia* ∆*V*0*.*

***Sol.*** *Hagamos el c´alculo de dos maneras distintas, en primer lugar usan- do las propiedades de una asociaci´on de condensadores y luego usando la conservaci´on de la energ´ıa. Cuando asociamos dos condensadores en*

* 1. *CORRIENTE ELE´CTRICA* 137

*paralelo, la nueva carga Q es la suma de la de los condensadores por se-*

*parado, como ya vimos. As´ı, en este caso, Q* = 2*Q*0*. Por otra parte, como vimos en el ejemplo* [*6.4.3,*](#_bookmark125) *la capacidad total es CT* = 2*C*0*, donde C*0 *es la capacidad de los condensadores por separado. Por ello, la energ´ıa de la asociaci´on en paralelo es*

*Ue* =

*Q*2 *Q* 2

2*CT C*0

= 0 = 2*Ue*0*,*

*donde Ue*0 *es la energ´ıa de cada condensador antes de asociarse. An´alo-*

*gamente, en la asociaci´on en serie es* ∆*V* = 2∆*V*0 *y CT* = 1*C*0*, por lo*

2

*que la energ´ıa es*

*Ue* =

*CT* (∆*V* )2

2

= *Ct*(∆*V*0) = 2*Ue*0*.*

2

*Al id´enticos resultados llegamos si tenemos en cuenta que la energ´ıa se*

*conserva. Antes de la asociaci´on, cada condensador ten´ıa una energ´ıa Ue*0*, por lo que el conjunto ten´ıa una energ´ıa* 2*Ue*0*. Al asociarlos, no perdemos energ´ıa, as´ı que la energ´ıa de la asociaci´on sigue siendo* 2*Ue*0*.*

## Corriente el´ectrica

En este tema hemos estudiado c´omo se crean un campo el´ectrico y un potencial el´ectrico a partir de la existencia de carga en una regi´on del espacio. El movimiento colectivo o flujo de muchas pequen˜as cargas situadas en una regi´on en la que hay un campo el´ectrico es el fundamento de la corriente el´ectrica.

Llamamos *corriente el´ectrica* al flujo “ordenado” de carga el´ectrica. De todas las posibles maneras capaces de generar este flujo, nos centraremos en la *corriente de conducci´on*, que es el flujo ordenado de carga el´ectrica por el interior de materiales *conductores*.

Necesitamos alguna magnitud bien definida para estudiar la corriente. Consideraremos la *intensidad de corriente el´ectrica I*, que es la cantidad de carga *positiva* que atraviesa una *secci´on transversal* de un material conductor en la unidad de tiempo, es decir

∆*q*

*I* = *.*

∆*t*

En esta expresi´on, ∆*q* es la carga positiva que atraviesa la secci´on transversal del material conductor en el intervalo de tiempo ∆*t*. La unidad de intensidad de corriente el´ectrica en el SI es el *amperio* (A), de tal modo que 1 A = 1 C*/*s.

Supongamos el caso m´as comu´n en el que la corriente atraviesa un *cable* o *filamento* conductor de secci´on de a´rea uniforme. En la figura [6.6,](#_bookmark128) tenemos un trozo de cable de secci´on uniforme *S* y longitud *L*, con extremos en los puntos *A* y *B*.

A B



S

I

−

L

Figura 6.6: Trozo de conductor entre los puntos *A* y *B*, de secci´on *S* y longitud

*L* por el que circula una corriente *I*.

Para que aprezca corriente en el cable, es necesario aplicar en su interior un campo el´ectrico **E** (en el ejemplo, el campo va desde *A* hacia *B* y supo- nemos, por simplicidad, que es un campo uniforme). Este campo crea una diferencia de potencial entre el punto inicial y el punto final del cable, dada por

*V* = *VA − VB* = *E L.*

En esta ecuaci´on, *V* es positivo, ya que *el potencial decrece en el sentido del campo*, de manera que *VA > VB* porque **E** va desde *A* hasta *B*. Es comu´n denominar, por ello, a la cantidad positiva *V* = *VA VB* como *ca´ıda de potencial*, *ca´ıda de tensi´on* o *voltaje* entre los extremos del trozo de cable conductor que estamos estudiando.

*−*

Los electrones libres del material conductor se mueven en sentido opuesto al campo el´ectrico aplicado **E**, es decir, desde *B* hacia *A*. En su camino, atraviesan la secci´on del conductor *S* dibujada en la figura [6.6.](#_bookmark128) La cantidad de carga, en valor absoluto, que atraviesa la secci´on *S* en la unidad de tiempo constituye la intensidad de corriente el´ectrica *I* en el cable. Pero hemos dicho

antes que ´esta se refiere a la carga positiva. Es f´acil ver que, si los electrones libres se mueven hacia *A*, f´ısicamente es como si carga positiva se moviera hacia *B*. Por tanto, *I* tiene sentido opuesto al movimiento de los electrones libres y el mismo sentido que el campo el´ectrico aplicado, es decir, *la corriente el´ectrica se produce en el sentido en que decrece el potencial*. Esta convenci´on hist´orica para definir el sentido de la corriente el´ectrica, en relaci´on opuesta al movimiento real de los electrones, se llama *sentido convencional del flujo*. Un aspecto importante de la corriente el´ectrica es c´omo mantenerla en el tiempo. Para ello, no podemos llegar al equilibrio electrost´atico en el que las

cargas est´an en reposo, de modo que necesitaremos dos cosas:

Que el camino recorrido por los electrones libres no tenga principio ni fin, es decir, hace falta un camino ininterrumpido por el que fluya la corriente. Tal camino se llama *circuito el´ectrico*.

Que el campo el´ectrico aplicado no se anule. Esto implica tener en el circuito una fuente de campo el´ectrico que lo mantenga. Tal dispositivo, del que hablaremos m´as adelante en este mismo tema, se llama *fuente de fuerza electromotriz*.

## Resistencia

En el apartado anterior, hemos visto que la intensidad de corriente el´ectri- ca *I* en un cable conductor est´a constituida por un gran nu´mero de electrones libres que se mueven en sentido opuesto a un campo el´ectrico aplicado. En realidad, el movimiento de cada electr´on libre es una composici´on de dos tipos de movimiento:

La aceleraci´on impuesta por el campo el´ectrico, dada por

*e*

**a** = *− m* **E***.*

El *movimiento t´ermico* de los electrones incluso en ausencia de campo el´ectrico, debido a la energ´ıa cin´etica que poseen, relacionada con la *temperatura* del material. Este movimiento t´ermico es desordenado y muy r´apido, pero no conlleva un flujo colectivo de electrones en una di- recci´on fija, por lo que no est´a asociada, por s´ı mismo, con una corriente el´ectrica.

El movimiento t´ermico de los electrones libres de un material conductor continu´a cuando ya se ha establecido una corriente el´ectrica en su interior, e implica que ´estos chocan mu´ltiples veces con los iones positivos del mate- rial. En estos choques, los electrones pierden energ´ıa cin´etica y *el material aumenta su energ´ıa interna*, es decir, aumenta su temperatura.

A nivel macrosc´opico, por tanto, el flujo de corriente el´ectrica por el inte- rior de un material conductor est´a limitado por la p´erdida de energ´ıa cin´etica de los electrones libres y genera un calentamiento del material. Tal efecto se puede describir por medio de una cantidad que se llama *resistencia el´ectrica* del material. Si un conductor est´a sometido a una ca´ıda de potencial *V* en- tre sus extremos y circula por ´el, en el sentido en que cae el potencial, una intensidad de corriente *I*, su resistencia se define como

*V*

*R* = *. I*

La unidad de resistencia en el SI es el *ohmio* (Ω), definido de tal manera que 1 Ω = 1 V*/*A.

Cuando el valor de *R* en un material es constante e independiente de la ca´ıda de tensi´on *V* aplicada en ´el, se dice que el material es *´ohmico* y que en

´el se cumple siempre la *ley de Ohm*

*V* = *R I* (siendo *R* una constante)*.* (6.4)

Materiales de este tipo son las *resistencias* o *resistores* que se usan en los circuitos el´ectricos para limitar la corriente.

### Resistividad y conductividad

La resistencia *R* de un cable conductor depende b´asicamente de dos cosas: el material del que est´a hecho (y las propiedades de este material) y la forma y taman˜o del cable. Es posible separar ambas dependencias en el caso de un cable conductor de secci´on uniforme *S* y longitud *,e*. En este caso, se cumple

*,e*

*R* = *ρe S .* (6.5)

La cantidad *ρe* s´olo depende del material y se llama *resistividad el´ectrica* (con unidad en el SI Ω *· m*).

La inversa de la resistividad se llama *conductividad el´ectrica* del material,

1

*σe* = *.*

*ρ*

*e*

Esta es la cantidad que determina qu´e materiales son buenos conductores (alto valor de *σe*) y cu´ales son diel´ectricos (valor de *σe* cercano a cero). La siguiente tabla muestra valores de resistividad de algunos materiales en con- diciones normales de presi´on y temperatura.

|  |  |
| --- | --- |
| Sustancia | *ρe* (Ω *·* m) |
| Plata  Cobre Oro Platino Plomo Nicromo Carbono Vidrio Goma | 1*,*6 *·* 10*−*8  1*,*7 *·* 10*−*8  2*,*4 *·* 10*−*8  1*,*1 *·* 10*−*7  2*,*2 *·* 10*−*7  1*,*5 *·* 10*−*6  3*,*5 *·* 10*−*5  de 1010 a 1014  1013 |

Los mejores conductores, como plata, cobre, oro, etc. tienen los menores valores de resistividad en la tabla (y valores muy altos de conductividad). Los cables conductores hechos con estos materiales tienen, por tanto, resistencias muy bajas a menos que sean muy largos o de secciones muy pequen˜as. Los valores de las resistencias de estos cables se suelen despreciar en muchos circuitos y, en ese caso, aparecen dibujados como l´ıneas rectas; se dicen que se comportan como *cortocircuitos*. En un cortocircuito, segu´n la ley de Ohm,

*R* = 0 *⇒ V* = 0*.*

Es decir, en un cortocircuito no hay resistencia ni ca´ıda de tensi´on, pero la corriente *I* puede tener cualquier valor.

Otros materiales, como el nicromo y el carbono, tienen resistividades m´as altas (y, en consecuencia, conductividades m´as bajas), por lo que la resisten- cia de dispositivos construidos con ellos no es despreciable. Estos dispositivos de resistencias no nulas se llaman *resistores* o simplemente *resistencias*, cum- plen la ley de Ohm *V* = *I R* y se dibujan en los circuitos mediante l´ıneas en zigzag.

Finalmente, el vidrio y la goma son buenos ejemplos de aislantes o diel´ectri- cos, con una resistividad enorme y una conductividad cercana a cero. El l´ımite de conductividad nula y resistividad infinita se alcanza en el vac´ıo (o, con buena aproximaci´on, en el aire). Un espacio vac´ıo en un circuito se llama *circuito abierto* y, segu´n la ley de Ohm,

*R* = *∞ ⇒ I* = 0*.*

Es decir, en un circuito abierto, la resistencia es infinita y la corriente el´ectrica es nula, pero la ca´ıda de potencial *V* puede tener cualquier valor.

**Ejemplo 6.6.1** *Calculemos la intensidad I que atraviesa un cable de*

*Nicromo, de* 1 *m de longitud y secci´on circular de* 2 *mm de di´ametro, cuando est´a sometido a una diferencia de potencial de V* = 1 *V.*

***Sol.*** *Calculemos primero la resistencia R del cable. Para ello, necesi- tamos la resistividad del Nicromo, que segu´n la tabla anterior es ρe* = 1*,*5 *·* 10*−*6 Ω*·m:*

*R* = *ρe* = 1*,*5 *·* 10*−*6

*,e*

*S*

1

*π*(1 *·* 10*−*3)2

*~* 0*,*477 Ω*.*

*Admitiendo que se cumple la ley de Ohm, la intensidad que atraviesa esta*

*resistencia es*

*I* = *~*

*V*

1

*R* 0*,*477

*~* 2*,*10 *A.*

### Dependencia de la resistencia con la temperatura

Dado que la resistencia de un material es la cantidad macrosc´opica que tiene en cuenta la p´erdida de energ´ıa cin´etica de los electrones libres debida a los choques que se producen en su movimiento, es l´ogico pensar que la temperatura del material (que est´a directamente relacionada con la energ´ıa interna del propio material, es decir, la energ´ıa del movimiento t´ermico de sus componentes) tenga gran influencia en su resistencia.

Para un amplio rango de temperaturas, la resistividad el´ectrica de un material depende de su temperatura mediante la ley

*ρe* = *ρe*0 [1 + *α* (*T − T*0)] *.* (6.6)

En esta f´ormula, *ρe* es la resistividad del material a temperatura *T* , *ρe*0 es la resistividad del mismo material a temperatura *T*0 y *α* se llama *coeficiente t´ermico de la resistividad* y su unidad en el SI es 1 K*−*1.

Para los buenos conductores, *α* suele ser positivo, de manera que la re- sistividad el´ectrica aumenta con la temperatura en ellos. En los materiales *semiconductores*, como el carbono, el silicio y el germanio, *α* es negativo, de manera que la resistividad disminuye con la temperatura. Finalmente, para muchos diel´ectricos, *α* es pr´acticamente nula, por lo que la resistividad de estos aislantes es independiente de la temperatura.

La f´ormula anterior se puede escribir tambi´en para la resistencia, es decir, tambi´en se cumple

*R* = *R*0 [1 + *α* (*T − T*0)] *,*

donde ahora *R* es la resistencia a la temperatura *T* y *R*0 la resistencia a la temperatura *T*0.

**Ejemplo 6.6.2** *La relaci´on entre la resistencia y la temperatura de un*

*material la podemos usar tambi´en para conocer su temperatura. Por ejem-*

10*−*3*K−*1*, con una resistencia a* 15 *oC de* 50 Ω*. Calculemos su temperatu-*

*ra cuando su resistencia aumenta* 1 Ω*.*

***Sol.*** *De la relaci´on*

*R* = *R*0 [1 + *α* (*T − T*0)]

*conocemos R*0 = 50 Ω*, α y T*0 = 10 *oC. Despejando la temperatura T para que la nueva temperatura sea R* = 51 Ω*, tenemos*

*plo, consideremos un cable de platino, de coeficiente t´ermico α* = 3*,*9 *·*

*T* = *T*0 +

*R − R*0

*αR*

= 15 +

0

1

3*,*9 *·* 10 *·* 50

*o*

*−*3

*~* 20*,*1 *C.*

### Asociaciones de resistencias

En ocasiones resulta conveniente conectar entre s´ı varias resistencias pa- ra obtener cierto valor determinado. Estas asociaciones pueden sustituirse en los c´alculos por una sola *resistencia equivalente RT* , que tiene la misma intensidad de corriente y la misma ca´ıda de potencial que toda la asociaci´on. Las formas b´asicas de asociaci´on son en serie y en paralelo:

En una *asociaci´on en serie*, las resistencias se conectan una a continua- ci´on de otra. El conjunto de las dos resistencias se comporta como si

hubiera una sola resistencia equivalente cuyo valor es igual a la suma de las resistencias individuales,

*RT* = *R*1 + *R*2*.* (6.7)

La corriente que circula por la asociaci´on es la misma que la que circula por cada resistencia, cumpli´endose *I*1 = *I*2 = *IT* . Por su parte, las ca´ıdas de tensi´on en cada resistencia se suman para obtener la ca´ıda de tensi´on en la asociaci´on segu´n *VT* = *V*1 + *V*2.

En una *asociaci´on en paralelo*, las resistencias se conectan entre dos puntos comunes. La resistencia equivalente satisface entonces

1 1

=

*RT R*1

1

+ *.* (6.8)

*R*2

Esta vez, la ca´ıda de tensi´on en cada resistencia es la misma que la que hay en la asociaci´on, de manera que *VT* = *V*1 = *V*2. Por su parte, la corriente total se distribuye entre las dos resistencias, y tenemos *IT* = *I*1 + *I*2.

**Ejemplo 6.6.3** *Tenemos una resistencia de valor R*1 = 1 Ω*. Veamos*

*con qu´e otra resistencia R*2 *debemos asociar R*1 *para, en primer lugar, triplicar su valor y luego disminuir su valor a una tercera parte.*

***Sol.*** *Por una parte, en la asociaci´on en serie, el valor de la resistencia equivalente es mayor que la de las resistencias por separado. As´ı, para tener RT* = 3*R*1 *debemos poner R*1 *en serie con R*2*:*

3*R*1 = *R*1 + *R*2 *⇒ R*2 = 2*R*1 = 2 Ω*.*

*Por otra parte, para que RT sea* 1*R*1*, debemos poner R*1 *y R*2 *en paralelo:*

3

*R*

1

*−*1

*R*1

3

= *R*1*−*1 + *R*2*−*1 *⇒ R*2 = = 0*,*5 Ω*.*

2

## Fuentes de fuerza electromotriz

Hemos comentado antes que, para mantener una corriente el´ectrica en un circuito, hace falta en ´el un dispositivo que proporcione sin descanso

* 1. *FUENTES DE FUERZA ELECTROMOTRIZ* 145

un campo el´ectrico o diferencia de potencial. En la figura [6.7,](#_bookmark136) tenemos un circuito muy b´asico, formado por una pila, cables conductores de resistencia despreciable y una bombilla cuyo filamento actu´a como una resistencia.



−

+

Figura 6.7: Circuito sencillo con una pila y una bombilla.

Las reacciones electrol´ıticas que ocurren en el interior de pilas y bater´ıas producen una diferencia de potencial entre sus terminales + y . La corriente el´ectrica fluye entonces desde el terminal positivo de la pila, atraviesa el resto del circuito pasando por la bombilla y luego vuelve a la pila por su terminal negativo. Para completar el circuito, la corriente ha de ir, por el interior de la pila, desde su terminal negativo hasta el positivo, y esto cuesta un trabajo a la pila o bater´ıa, que ha de extraer de su energ´ıa interna que libera a trav´es de las reacciones de su interior. El *trabajo por unidad de carga el´ectrica* realizado por la pila se conoce con el nombre de *fuerza electromotriz* o *fem* y su unidad en el SI es 1 V. As´ı, la pila del circuito anterior es un ejemplo de *fuente de fuerza electromotriz* o *fuente de fem*. Tambi´en lo son las placas solares y los generadores de corriente alterna de las centrales el´ectricas. En general, una fuente de fem realiza un trabajo por unidad de carga igual a su fuerza electromotriz , que se transforma en diferencia de potencial entre sus terminales positivo y negativo. Esta diferencia de potencial alimenta al

*−*

*E*

*E*

circuito al que se conecta la fuente.

En una *fuente de fem ideal*, el valor num´erico de su fem *E* es igual a la diferencia de potencial *V* = *V*+ *V−* entre sus terminales positivo y negativo, y esta diferencia de potencial proporcionada no var´ıa independientemente del circuito al que conectemos la fuente. Una pila reci´en estrenada se comporta aproximadamente como fuente de fem ideal y el valor de la diferencia de potencial que proporciona es su fem nominal (por ejemplo, 1*,*5 V). En los diagramas de circuitos, representaremos las fuentes de fem ideales mediante dos barras paralelas de distinto taman˜o, siendo la barra mayor el terminal positivo y la barra menor el terminal negativo. Otras maneras de representar fuentes de fem ideales pueden verse en la figura [6.8.](#_bookmark137)

*−*

En una *fuente de fem real*, la diferencia de potencial que proporciona es

+

*−*

Figura 6.8: Diferentes formas de representar fuentes fem ideales.

algo menor que su fem y depende del valor de la corriente que atraviesa la fuente cuando se conecta a un circuito. Podemos representar una fuente real mediante una fuente ideal de fem en serie con una resistencia interna *r*. Una pila que lleva algu´n tiempo en funcionamiento se comporta como fuente de fem no ideal. La resistencia interna de la pila va aumentando con el tiempo y llega un momento que es tan grande que la pila deja de funcionar.

*E*

**Ejemplo 6.7.1** *Una manera de obtener el valor de la resistencia inter-*

*na r de una bater´ıa, conocida su fem ideal E (o diferencia de potencial*

*cuando la corriente que la atraviesa es cero), es conectar la bater´ıa a una*

*resistencia R y medir la corriente I que la atraviesa. Expresemos r en funci´on de V , R e I.*

***Sol.*** *Teniendo en cuenta que una bater´ıa en serie con una resistencia R*

*es equivalente a una fuente ideal E en serie con dos resistencias r y R,*

*podemos usar la ley de Ohm con la resistencia equivalente RT :*

*E* = *RT I* = (*r* + *R*)*I.*

*Despejando r llegamos al resultado buscado*

*r* = *− R.*

*E*

*I*

## Potencia el´ectrica

Consideremos una bater´ıa ideal de fem conectada a un circuito y tal que la intensidad de corriente que atraviesa la bater´ıa es *I*. Esta fuente sumi- nistra energ´ıa que proviene, como hemos visto, del trabajo de las reacciones qu´ımicas del interior de la bater´ıa. Cada vez que una carga positiva ∆*q* llega al terminal negativo de la bater´ıa, formando parte de la corriente que recorre el circuito, la bater´ıa ha de hacer un trabajo para llevarla, por su interior,

*E*

hasta su terminal positivo. El trabajo que realiza la fuerza el´ectrica para que la carga ∆*q* vaya desde el terminal negativo hasta el positivo es

*We* = *−*∆*q* ∆*V* = *−*∆*q E*

que es negativo, por lo que la carga no har´a ese movimiento a menos que la bater´ıa realice un trabajo del mismo valor y signo opuesto para que ocurra. Ese trabajo es la *energ´ıa potencial el´ectrica* suministrada al circuito por una fuente de fem *E* y tiene un valor

*UE* = ∆*q E .*

Si por la fuente de fem pasa una corriente *I* en un intervalo de tiempo ∆*t*, se puede escribir ∆*q* = *I* ∆*t*, de manera que

*UE* = *I E* ∆*t.*

La *potencia el´ectrica* suministrada por la fuente es, entonces,

*P* = *Ue*

*E* ∆*t*

= *I E* (6.9)

y su unidad en el SI es el vatio (W).

La potencia el´ectrica suministrada por una fuente ha de repartirse entre todos los elementos del circuito. En particular, la *potencia que consume una resistencia* de valor *R*, que tiene una ca´ıda de potencial *V* entre sus terminales y que es atravesada por una corriente *I* en el sentido en que cae el potencial, se puede escribir, usando la ley de Ohm para pasar de una manera a otra, como

*PR* = *I V* = *I*2 *R* =

*V* 2

*.* (6.10)

*R*

La energ´ıa que consume la resistencia se debe a la p´erdida de energ´ıa cin´etica de los electrones libres al atravesar el interior de esa resistencia. Esta energ´ıa cin´etica perdida por los electrones se transforma, en la resistencia, en un aumento de su energ´ıa interna, es decir, en un aumento de su temperatura. Por tanto, la energ´ıa consumida en una resistencia es *disipada en el medio en forma de calor*.

Una nota final. Una fuente proporciona energ´ıa a un circuito si la corrien- te que la atraviesa por su interior lo hace desde su terminal negativo hacia su terminal positivo. La potencia que proporciona la fuente en tal caso es, como

hemos visto, *PE* = *I* . Hay casos en que un circuito tiene varias fuentes y, en alguna de ellas, la corriente va por su interior desde el terminal positivo al negativo. En este caso, la potencia de esa fuente, *PE* = *I* , no ser´a po- tencia proporcionada al circuito, sino potencia consumida por esa fuente en particular.

*E*

*E*

**Ejemplo 6.8.1** *Dos resistencias, R*1 = 1 Ω *y R*2 = 3 Ω*, que est´an en*

*paralelo, se conectan a una fuente ideal de tensi´on de* 6 *V. Calculemos la potencia disipada en cada resistencias y comprobemos que su suma coincide con la potencia suministrada por la fuente.*

***Sol.*** *Las dos resistencias est´an en paralelo y por tanto la ca´ıda de tensi´on*

*en ambas es la misma, y coincide con la tensi´on de la fuente E* = 6 *V.*

*As´ı, las potencias disipadas son*

*PR*1 = *R*

*E* 2

= = 36 *W,*

36

1

1

*PR*2 = *R*

*En total, la potencia disipada es*

*E* 2

= = 12 *W.*

36

2

3

*PR* = *PR*1 + *PR*2 = 48 *W.*

*Este valor de PR tambi´en lo podemos calcular usando el valor de la re- sistencia equivalente*

*RT* = 1 + 3 = 4 = 0*,*75 Ω*.*

1

*−*1

3

*As´ı,*

*E* 2

36

*T*

*Para obtener la potencia suministrada por la fuente, necesitamos calcular la intensidad I que la atraviesa. Esta intensidad es la misma que circula*

*PR* = *R* = 0*,*75 = 48 *W.*

*por la resistencia RT y que podemos calcular con la ley de Ohm:*

6

*E* = *IR ⇒ I* = = = 8 *A.*

*T*

*R* 0*,*75

*E*

*T*

*De este modo, la potencia suministrada por la fuente es*

*PE* = *IE* = 6 *·* 8 = 48 *W,*

*que coincide con la potencia disipada PR.*

## Tabla resumen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fo´rmula/magnitud | Definici´on | Ecuaci´on |
| **E** = *σ*pos **u**  *ε*0 *±*  *σ*pos = *Q*  *A*  *Q*  *ε*0 *A*  **u***±* | Campo el´ectrico condensador plano Densidad superficial de carga positiva Carga de la placa positiva Permitividad del vac´ıo  A´rea de las placas  Vector unitario perpendicular a las placas desde la placa positiva a la negativa | [(6.1)](#_bookmark116) |
| *C* = *εA*  *d*  *ε*  *d* | Capacidad del condensador plano Permitividad del diel´ectrico o vac´ıo (*ε*0) Distancia entre placas | [(6.2)](#_bookmark124) |
| *CT* = *C*1 + *C*2 | Capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo |  |
| *C−*1 = *C*1*−*1 + *C*2*−*1  *T* | Capacidad equivalente de dos condensadores en serie |  |
| 2 2  *Ue* = *Q* = *C*(∆*V* )  2*C* 2  = *Q*(∆*V* )  2  ∆*V* | Energ´ıa de un condensador  Diferencia de potencial entre placas | [(6.3)](#_bookmark126) |
| *V* = *R I* | Ley de Ohm | [(6.4)](#_bookmark130) |
| *V* | Ca´ıda de potencial |  |
| *R* | Resistencia |  |
| *I* | Intensidad |  |
| *R* = *ρe f*  *S*  *ρe* | Resistencia Resistividad el´ectrica | [(6.5)](#_bookmark131) |
| *,e* | Longitud del cable |  |
| *S* | Secci´on del cable |  |
| *ρe* = *ρe*0 [1 + *α* (*T − T*0)]  *ρe* | Resistividad versus temperatura Resistividad a la temperatura *T* | [(6.6)](#_bookmark132) |
| *ρe*0 | Resistividad a la temperatura *T*0 |  |
| *α* | Coeficiente t´ermico de la resistividad |  |

* 1. *TABLA RESUMEN* 151

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *RT* = *R*1 + *R*2 | Resistencia equivalente de dos resistencias en serie | [(6.7)](#_bookmark133) |
| *R−*1 = *R*1*−*1 + *R*2*−*1  *T* | Resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo | [(6.8)](#_bookmark134) |
| *PE* = *I E I*  *E* | Potencia suministrada por la fuente Intensidad a trav´es de la fuente  del polo negativo al positivo  Fuerza electromotriz de la fuente | [(6.9)](#_bookmark139) |
| *PR* = *I V* = *I*2 *R*  = *V* 2 | Potencia consumida por la resistencia *R* | [(6.10)](#_bookmark140) |
| *R* |  |  |
| *I* | Intensidad |  |
| *V* | Ca´ıda de potencial |  |

## Problemas resueltos

* + 1. A partir de la siguiente expresi´on del campo el´ectrico **E** = 4 kV*/*m **i** + 7 kV*/*m **j**, calcula la diferencia de potencial entre cualquiera pareja de los puntos *A* = (0*,* 0*,* 0) cm, *B* = (1*,* 0*,* 0) cm y *C* = (2*,* 3*,* 0) cm.

**Sol.** La diferencia de potencial entre dos puntos *P* y *Q* puede calcularse a partir del campo el´ectrico **E** mediante

∆*V* = *VP − VQ* = *−*

*P*

**E** *d***r**

-

*·*

*Q*

Si el campo el´ectrico **E** es uniforme (no depende de la posici´on), puede sacarse de la integral. Entonces,

∆*V* = *VP − VQ* = *−***E** *·*

Para el caso del ejercicio,

*P*

*d***r** = *−***E** *·* (**r***P −* **r***Q*)

-

*Q*

*VB − VA* = *−***E** *·* (**r***B −* **r***A*) = *−* (4000*,* 7000*,* 0) *·* (0*,*01*,* 0*,* 0) = *−*40 V*,*

*VC − VB* = *−***E** *·* (**r***C −* **r***B*) = *−* (4000*,* 7000*,* 0) *·* (0*,*01; 0*,*03; 0) = *−*250 V*, VA − VC* = *−***E** *·* (**r***A −* **r***C*) = *−* (4000*,* 7000*,* 0) *·* (*−*0*,*02*, −*0*,*03*,* 0)

= 80 + 210 = 290 V*.*

* + 1. Dado el campo el´ectrico **E** = ( **i** + 2 **j** 3 **k**) V*/*m y los puntos *A* = ( 2*,* 3*,* 1) m y *B* = (1*,* 2*,* 3) m, calcula el potencial en el punto *B* sabiendo que el potencial en el punto *A* es 5 V.

*— − −*

*— −*

**Sol.** La diferencia de potencial entre *B* y *A*, dado que el campo el´ectrico es uniforme, es

*VB−VA* = *−***E***·*(**r***B −* **r***A*) = *−* (*−*1*,* 2*, −*3)*·*(3*,* 1*,* 2) = *−*(*−*3+2*−*6) = 7 V*.*

Dado que *VA* = 5V,

*VB − VA* = 7 *⇒ VB* = *VA* + 7 = 5 + 7 = 12 V*.*

* + 1. Un condensador plano se situ´a perpendicularmente al eje *X*, con su placa positiva en *x* = 0 y la negativa en *x* = 1 cm. Teniendo en cuenta que el campo el´ectrico generado entre las placas es igual a **E** = 4 kV*/*m **i** y que el potencial de la placa positiva es *V*+ = 10 V, calcula

1. la diferencia de potencial entre la placa positiva y la placa negativa del condensador,
2. el potencial de los puntos *x* = 0*,*1 cm y *x* = 0*,*9 cm,
3. la posici´on del punto que se encuentra a potencial nulo.

**Sol.** En primer lugar, calculemos el potencial de cualquier punto entre las placas del condensador, es decir, el potencial *V* (*x*) en los puntos *x* (0 cm*,* 1 cm). La expresi´on del potencial en funci´on del campo el´ectrico es

*∈*

*V* = *−* - **E** *· d***r** = *−***E** *·* **r** + *k,*

donde se ha usado que **E** es uniforme y *k* es una constante de integra- ci´on. En el caso del ejercicio,

*V* = *−* (4000*,* 0*,* 0) *·* (*x, y, z*) + *k* = *−*4000 *x* + *k.*

Para calcular el valor de *k*, el dato que nos ofrecen es que el potencial de la placa positiva es *V*+ = 10 V. Dado que esta placa se encuentra en *x* = 0 cm, tendremos

*V*+ = 10 = *V* (0) = *−*4000 *·* 0 + *k* = *k*

Por tanto, el potencial entre las placas del condensador es

*V* (*x*) = 10 *−* 4000 *x*

con 0 m *≤ x ≤* 0*,*01 m.

1. La diferencia de potencial entre las placas del condensador es

∆*V* = *V*+*−V−* = *V* (0)*−V* (1) = (10 *−* 4000 *·* 0)*−*(10 *−* 4000 *·* 0*,*01) = 40 V*.*

1. Para los puntos *x* = 0*,*1 cm y *x* = 0*,*9 cm,

*V* (0*,*1 cm) = 10 *−* 4000 *·* 0*,*001 = 6 V*,*

*V* (0*,*9 cm) = 10 *−* 4000 *·* 0*,*009 = *−*29 V*.*

1. Hay muchos puntos en los que el potencial vale cero. Son todos aqu´ellos entre las placas con coordenada horizontal *x*0:

*V* (*x*0) = 0 = 10 *−* 4000 *x*0

*⇒ x*0

= 10 = 2*,*5 10*−*3 m*.*

4000

*·*

* + 1. Se carga un condensador de capacidad 5 nF con una bater´ıa de 12 V. Una vez cargado, se desconecta de la bater´ıa y se le introduce entre sus placas un diel´ectrico con una permitividad relativa igual a 2. En la configuraci´on final, calcula
       1. la carga almacenada en el condensador,
       2. la diferencia de potencial entre sus placas.

**Sol.** Dado que el condensador se carga con una pila de 12 V, la diferen- cia de potencial inicial entre sus placas es ∆*V*0 = 12 V. La carga inicial que almacena el condensador es

*C* = *Q*0

0

∆*V*0

*⇒ Q*0

= *C*0

∆*V*0

= 5 *·* 10*−*9 *·* 12 = 6 *·* 10*−*8 C*.*

1. Al desconectar el condensador de la bater´ıa, la carga ha de man- tenerse constante (el condensador no est´a en contacto con nada, de manera que la carga no puede moverse de sus placas). As´ı, la carga despu´es de introducir el diel´ectrico ser´a la misma que antes de hacerlo, es decir,

*Q* = *Q*0 = 6 *·* 10*−*8 C*.*

1. Al introducir el diel´ectrico con permitividad relativa *εr* = 2, la capacidad del condensador cambia del siguiente modo:

*C* = *εrC*0 = 2 *·* 10*−*9 = 2 nF*.*

La diferencia de potencial entre las placas del condensador con el diel´ectrico ser´a

*Q Q* 6 *·* 10*−*8

*C* = ∆*V ⇒* ∆*V* = *C* = 2 *·* 5 *·* 10*−*9 = 6 V*.*

* + 1. Se carga un condensador de 1*,*5 *µ*F de capacidad con una pila de 4*,*5 V. Sin desconectar el condensador de la pila, se inserta entre las placas un diel´ectrico. Calcula la permitividad relativa de ´este sabiendo que la placa positiva recibe una carga adicional de 5 10*−*6 C.

*·*

**Sol.** La carga almacenada por el condensador sin diel´ectrico es

*C* = *Q*0

0

∆*V*0

*⇒ Q*0

= *C*0

∆*V*0

= 1*,*5 *·* 10*−*6 *·* 4*,*5 = 6*,*75 *·* 10*−*6 C*,*

donde ∆*V*0 = 4*,*5 V es la diferencia de potencial proporcionada por la pila para cargar el condensador. Dado que nunca se desconecta el condensador de la pila, la diferencia de potencial tras introducir el diel´ectrico ha de mantenerse igual,

∆*V* = ∆*V*0 = 4*,*5 V*.*

La permitividad relativa del diel´ectrico introducido entre las placas del condensador puede calcularse de la siguiente manera:

*Q*

*C* = *εr C*0 = ∆*V ⇒ εr* = *C*

*Q*

=

0 ∆*V*

6*,*75 10*−*6 + 5 10*−*6

1*,*5 *·* 10*−*6 *·* 4*,*5 *~* 1*,*74*.*

*· ·*

* + 1. Un condensador est´a hecho de placas cuadradas, de 1 cm de lado, se- paradas 1 mm. Tras cargarlo con una bater´ıa de 5 V, se desconecta y la separaci´on entre las placas se incrementa en 1 mm. Calcula el incre- mento de energ´ıa.

**Sol.** La capacidad inicial del condensador plano es

*ε*0*S*

8*,*85 *·* 10*−*12 *·* 10*−*4

*−*13

*C*0 = =

*d*

0

10*−*3 = 8*,*85 *·* 10 F*.*

Dado que se usa una bater´ıa de 5 V, la carga almacenada inicialmente es

*Q*0 = *C*0 ∆*V*0 = 8*,*85 *·* 10*−*13 *·* 5 *~* 4*,*43 *·* 10*−*12 C*.*

Como se desconecta despu´es el condensador de la bater´ıa, su carga permanece igual,

*Q* = *Q*0 *~* 4*,*43 *·* 10*−*12 C*.*

Su capacidad, al separar las placas hasta 2 mm, es

*ε*0*S*

8*,*85 *·* 10*−*12 *·* 10*−*4

*−*13

*C* = =

*d*

2 *·* 10*−*3 *~* 4*,*43 *·* 10 F*.*

El incremento de energ´ıa electrost´atica resulta

1 1

∆*Ue* = *Ue − Ue,*0 = 2 *Q* ∆*V −* 2 *Q*0 ∆*V*0

*Q*2 *Q*2

0

= 2 *C −* 2 *C* =

0

(4*,*43 *·* 10*−*12)2

2 *·* 4*,*43 *·* 10*−*13

(4*,*43 10*−*12)2

*—* 2 *·* 8*,*85 *·* 10*−*13

*·*

*~* 1*,*11 *·* 10*−*11 J*.*

Esta diferencia de energ´ıa electrost´atica proviene del trabajo realiza- do por el agente que separa las placas, que ha de vencer la atracci´on electrost´atica entre ellas.

* + 1. Se conecta una bater´ıa de 12 V a una asociaci´on en paralelo de dos con- densadores de cargas 0*,*5 *µ*F y tres de 0*,*25 *µ*F. Calcula la carga total almacenada.

**Sol.** Dado que los condensadores est´an en paralelo, su capacidad equi- valente es

*CT* = *C*1 + *. . .* + *C*5 = 2 *·* 0*,*5 + 3 *·* 0*,*25 = 1*,*75 *µ*F*.*

La carga total almacenada por la asociaci´on es

*QT* = *CT* ∆*VT* = 1*,*75 *·* 10*−*6 *·* 12 = 2*,*1 *·* 10*−*5 C*.*

* + 1. Se conecta una bater´ıa de 12 V a una asociaci´on en serie de dos con- densadores de cargas 0*,*5 *µ*F y tres de 0*,*25 *µ*F. Calcula la carga total almacenada.

**Sol.** Dado que los condensadores est´an en serie, su capacidad equiva- lente est´a dada por

1 1 1 2 3 1

5

=

*CT C*1

+ *· · ·* + *C*

= 0*,*5 + 0*,*25 = 14 *⇒ CT* = 14 *~* 0*,*0714 *µ*F*.*

La carga total almacenada por la asociaci´on es

*QT* = *CT* ∆*VT ~* 0*,*0714 *·* 10*−*6 *·* 12 *~* 8*,*57 *·* 10*−*7 C*.*

* + 1. A la asociaci´on de condensadores de la figura, con *C*1 = 0*,*1 *µ*F, *C*2 = 0*,*2 *µ*F, *C*3 = 0*,*3 *µ*F y *C*4 = 0*,*4 *µ*F, se le aplica una diferencia de poten- cial *V*0 = 12 V. Calcula la carga almacenada y la diferencia de potencial en cada condensador.

+

*C*1

*V*0 *C*3 *C*2

*−*

*C*4

**Sol.** Calculamos primero la capacidad equivalente del sistema. Como

*C*2 y *C*3 est´an en paralelo,

*C*23 = *C*2 + *C*3 = 0*,*2 + 0*,*3 = 0*,*5 *µ*F*.*

Ahora, *C*1, *C*23 y *C*4 est´an en serie, de modo que

1 1 1 1 1 1 1 1

=

*CT C*1

+ +

*C*23 *C*4

=

0*,*1

+ + 0*,*5

0*,*4 = 14*,*5 *⇒ CT* = 14*,*5 *~* 0*,*0690 *µ*F*.*

La carga total almacenada en la asociaci´on es

*QT* = *CT* ∆*VT ~* 6*,*90 *·* 10*−*8 *·* 12 = 8*,*28 *·* 10*−*7 C*.*

Dado que *C*1, *C*23 y *C*4 est´an en serie, almacenan la misma carga que toda la asociaci´on, es decir,

*Q*1 = *Q*23 = *Q*4 *~* 8*,*28 *·* 10*−*7 C

La diferencia de potencial en *C*1, *C*23 y *C*4 es

∆*V*1 =

∆*V*23 =

∆*V*4 =

*Q*1 *C*1 *Q*23 *C*23 *Q*4 *C*4

8*,*28 10*−*7

= 8*,*28 V*,*

*·*

*~*

0*,*1 *·* 10*−*6

8*,*28 10*−*7

*·*

= 0*,*5 *·* 10*−*6 *~* 1*,*66 V*,*

8*,*28 10*−*7

*·*

= 0*,*4 *·* 10*−*6 *~* 2*,*07 V*.*

Y, dado que est´an en serie, se cumple ∆*VT* = ∆*V*1 +∆*V*2 +∆*V*3 = 12 V (excepto por errores de redondeo).

Faltan por calcular los valores asociados a *C*2 y *C*3. Est´an en paralelo entre ellos, de modo que

∆*V*2 = ∆*V*3 = ∆*V*23 *~* 1*,*66 V*.*

Las cargas almacenadas en *C*2 y *C*3 son

*Q*2 = *C*2 ∆*V*2 *~* 2 *·* 10*−*7 *·* 1*,*66 *~* 3*,*31 *·* 10*−*7 C*, Q*3 = *C*3 ∆*V*3 *~* 3 *·* 10*−*7 *·* 1*,*66 *~* 4*,*97 *·* 10*−*7 C*.*

Y, dado que est´an en paralelo, se cumple *Q*23 = *Q*2 +*Q*3 *~* 8*,*28*·*10*−*7 C.

* + 1. Dos condensadores de id´entica capacidad *C*01 = *C*02 = 1 *µ*F se conec- tan en paralelo a una pila de 3 V hasta que se cargan completamente, momento en el que se desconectan de ´esta. Entonces se introduce en el segundo condensador un diel´ectrico de permitividad relativa *εr* = 2. Calcula la carga almacenada en cada condensador en la situaci´on final. **Sol.** Antes de desconectar los condensadores de la pila, la capacidad equivalente es

*CT* 0 = *C*01 + *C*02 = 1 + 1 = 2 *µ*F

y la carga total almacenada en la asociaci´on es

*QT* 0 = *CT* 0 ∆*VT* 0 = 2 *·* 10*−*6 *·* 3 = 6 *·* 10*−*6 C*.*

Tras desconectar la asociaci´on de la pila, la carga total ha de seguir siendo la misma, aunque cambie la de cada condensador, as´ı que ten- dremos

*QT* = *Q*1 + *Q*2 = *QT* 0 = 6 *µ*C*.*

La capacidad equivalente tras introducir el diel´ectrico en el segundo condensador ser´a

*CT* = *C*1 + *C*2 = *C*01 + *εr C*02 = 1 + 2 *·* 1 = 3 *µ*F*.*

Con esto, la diferencia de potencial final en la asociaci´on es

∆*V* = *QT*

*C*

*T*

*T*

6 10*−*6

= = 2 V*.*

*·*

3 *·* 10*−*6

Dado que los condensadores est´an en paralelo, la diferencia de potencial en cada uno de ellos es igual a la que hay en la asociaci´on, es decir,

∆*V*1 = ∆*V*2 = ∆*VT* = 2 V*.*

Finalmente, la carga almacenada en cada condensador resulta

*Q*1 = *C*1 ∆*V*1 = 1 *·* 10*−*6 *·* 2 = 2 *·* 10*−*6 C*, Q*2 = *C*2 ∆*V*2 = 2 *·* 1 *·* 10*−*6 *·* 2 = 4 *·* 10*−*6 C*,*

Y se cumple que *Q*1 + *Q*2 = 6 *µ*C, como antes de haber desconectado la asociaci´on de condensadores de la bater´ıa.

* + 1. Un alambre de aluminio tiene un di´ametro de 2 mm. Teniendo en cuenta que la resistividad del aluminio es de *ρe* = 2*,* 8 10*−*8 Ω m, calcula la longitud necesaria para obtener una resistencia de 0*,*5 Ω.

*· ·*

**Sol.** El ´area de una secci´on transversal del cable, de di´ametro *d*, es

*S* = *πr*2 = *π d*

2

4

(2 10*−*3)2

= *π*

*·*

4

= 10*−*6

m2*.*

Con esto, de la relaci´on entre resistencia y resistividad en el cable, llegamos a

*,e S R*

*R* = *ρe S ⇒ ,e* = *ρ*

*e*

10*−*6 0*,*5

= 2*,*8 *·* 10*−*8 *~* 17*,*9 m*.*

*·*

* + 1. Se utiliza un cable de platino para medir temperaturas. Determina la precisi´on con la que se ha de medir la resistencia del cable si queremos medir la temperatura con un error m´aximo de 0*,*5 *o*C. Ten en cuenta que la resistencia del cable a temperatura ambiente es 50 Ω y que el coeficiente t´ermico del platino es de 3*,*9 10*−*3 *o*C*−*1.

*·*

**Sol.** De la ecuaci´on de la dependencia de la resistencia con la tempe- ratura, podemos escribir

∆*R* = *R − R*0 = *R*0 [1 + *α* (*T − T*0)] *− R*0 = *R*0 *α* ∆*T.*

Por tanto, si el error m´aximo en la medici´on de temperatura es ∆*T* = 0*,*5*o*C, el error m´aximo en la medici´on de resistencia ha de ser

∆*R* = *R*0 *α* ∆*T* = 50 *·* 3*,*9 *·* 10*−*3 *·* 0*,*5 *~* 0*,*0975 Ω*.*

* + 1. Un cable hecho de nicromo, de coeficiente t´ermico de resistencia de 4*,*1 10*−*4 K*−*1, est´a sometido a una diferencia de potencial igual a 220 V. Cuando su temperatura es de 25*o*C, la intensidad que fluye por el cable es de 3 A. Tras un rato, la temperatura del cable cambia de modo que la intensidad se reduce a 2*,*8 A. Calcula la nueva temperatura.

*·*

**Sol.** En primer lugar, se calculan las resistencia del cable a 25*o*C, que llamaremos *R*0 y a temperatura *T* , que llameremos *R*, con la ley de Ohm:

*R*0 =

*R* =

*V* 220

*I* = 3 *~* 73*,*3 Ω*,*

0

*V* 220

= = 78*,*6 Ω*. I* 2*,*8

Usamos ahora la dependencia de la resistencia con la temperatura,

*R* = *R*0 [1 + *α* (*T − T*0)] *,*

para despejar la temperatura final *T* ,

*T* = *T*0

+ *R − R*0

*α R*0

25 + 88 *−* 78*,*6 199*o*C*.*

4*,*1 *·* 10*−*4 *·* 78*,*6

*~ ~*

* + 1. Una bombilla tiene un filamento formado de tungsteno, con coeficiente t´ermico de resistencia de 3*,*9 10*−*3 K*−*1. Teniendo en cuenta que, cuando el filamento est´a sometido a una diferencia de potencial de 220, disipa 25 W y est´a a 1800 K, calcula su resistencia a 25*o*C.

*·*

**Sol.** La resistencia a *T* = 1800 K puede calcularse mediante la expresi´on de la potencia disipada por una resistencia:

*V* 2 *V* 2

*R*

2202

*PR* = *I V* =

*R ⇒ R* = *P* =

= 1936 Ω*.*

25

Con este dato, de la dependencia de la resistencia con la temperatura,

*R* = *R*0 [1 + *α* (*T − T*0)] *,*

con *T*0 = 298*,*15 K y despejando *R*0, tenemos

*R* 1936

*R*0 = 1 + *α*(*T − T* ) = 1 + 3*,*9 *·* 10*−*3 *·* (1800 *−* 298*,*15) *~* 282 Ω*.*

0

* + 1. Calcula la resistencia interna de una bater´ıa de 15 V teniendo en cuenta que, al conectarla a una resistencia de 200 Ω, la diferencia de potencial entre sus terminales es de 14 V.

**Sol.** Una bater´ıa real funciona como una bater´ıa ideal de fem en serie con una resistencia interna *r*. Si conectamos la bater´ıa a una resistencia *R*, las resistencias *r* y *R* estar´an en serie entre ellas, as´ı que su resistencia equivalente y la corriente por el circuito ser´an

*E*

*R* = *r* + *R I* = *E*

*⇒eq*

*Req*

= *E .*

*r* + *R*

La diferencia de potencial entre los terminales de la bater´ıa real cuando es atravesada por la corriente *I* es

*V* = *E − r I* = *E − r E* = *R E .*

*r* + *R*

*r* + *R*

Despejando *r* y usando los datos del ejercicio,

*r* = *R E − R* = 200 *·* 15 *−* 200 *~* 14*,*3 Ω*.*

*V*

14

* + 1. Calcula la fuerza electromotriz y la resistencia interna de una bater´ıa sabiendo que, cuando se conecta a una resistencia de 100 Ω, la inten- sidad que la atraviesa es de 15 mA, mientras que si se conecta a una resistencia de 200 Ω la intensidad se reduce a 10 mA.

**Sol.** La resistencia equivalente y la corriente por el circuito son

*R* = *r* + *R I* = *E*

*⇒eq*

*Req*

= *E .*

*r* + *R*

Para los dos casos del ejercicio,

*I* = *E*

1 *r* + *R*

1

*I* = *E .*

2 *r* + *R*

2

Dividiendo estas dos ecuaciones, llegamos a

*I*1 = *r* + *R*2 *, I*2 *r* + *R*1

de la que podemos despejar la resistencia interna

*r* = *I*1*R*1 *− I*2*R*2

*I*2 *− I*1

= (15 *·* 100) *−* 10 *·* 200 = 100 Ω*.*

10 *−* 15

A partir del resultado, la fem de la bater´ıa ser´a

*E* = *I*1(*r* + *R*1) = 15 *·* 10*−*3 *·* (100 + 200) = 4*,*5 V*.*

* + 1. Conectamos una bater´ıa y dos resistencias, *R*1 = 106 Ω y *R*2 = 2 *·* 106 Ω, en serie. Teniendo en cuenta que la ca´ıda de potencial en *R*1 es de 5 V, calcula la fuerza electromotriz de la bater´ıa supuesta ideal, as´ı como la corriente que circula por el circuito.

**Sol.** La corriente por el circuito, en el que todos los elementos est´an en serie, es

*·*

*I* = *V*1

*R*1

= 5 = 5 10*−*6 A*.*

106

Por tanto, la ca´ıda de potencial en *R*2 es

*V*2 = *I R*2 = 5 *·* 10*−*6 *·* 2 *·* 106 = 10 V*.*

La fem de la bater´ıa es la suma de *V*1 y *V*2:

*E* = *V*1 + *V*2 = 5 + 10 = 15 V*.*

* + 1. Conectamos la asociaci´on de tres resistencias en paralelo, *R*1 = 10 kΩ, *R*2 = 20 kΩ y *R*3 = 30 kΩ, a una bater´ıa. Teniendo en cuenta que la corriente a trav´es de *R*1 es de 1 mA, calcula la fuerza eletromotriz de la bater´ıa, supuesta ideal, y la corriente que circula por ella y por las otras resistencias..

**Sol.** La diferencia de potencial en *R*1 es

*V*1 = *I*1 *R*1 = 1 *·* 10*−*3 *·* 10 *·* 103 = 10 V*.*

Como los elementos est´an en paralelo, se cumple

*E* = *V*1 = *V*2 = *V*3 = 10 V*.*

Con esto, las corrientes en *R*2 y *R*3 son

*I* = *V*2 *R*2

2

*I* = *V*3 *R*3

3

= 10 = 0*,*5 10*−*3 A*,*

20 *·* 103

*·*

= 10 0*,*333 10*−*3 A*.*

*~ ·*

30 *·* 103

Finalmente, la corriente en la bater´ıa es

*I* = *I*1 + *I*2 + *I*3 *~* 10*−*3 + 0*,*5 *·* 10*−*3 + 0*,*333 *·* 10*−*3 *~* 1*,*83 *·* 10*−*3 A*.*

* + 1. Calcula el valor de la resistencia *R*3 en el circuito de la figura para que por la bater´ıa circula una intensidad de 0*,*1 A. Datos: *V* = 5 V, *R*1 = 10 Ω y *R*2 = 50 Ω.

*V R*3

*R*1

*R*2

**Sol.** Podemos obtener la resistencia equivalente a partir de la ley de Ohm en la bater´ıa,

*Req* = *E*

*I*

5

=

0*,*1

= 50 Ω*.*

Por otro lado, la resistencia equivalente es

*Req* = *R*1 + *R*23 *⇒ R*23 = *Req − R*1 = 50 *−* 10 = 40 Ω*,*

donde *R*23 es la resistencia equivalente a la asociaci´on de *R*2 y *R*3. Como

*R*2 y *R*3 est´an en paralelo, tenemos

1 1 1 1 1 1 1 1 1

*R*23

= +

*R*2 *R*3

*⇒ R*3

=

*R*23

*— R*2

= 40 *−* 50 = 200 *.*

Invirtiendo la u´ltima igualdad,

*R*3 = 200 Ω*.*

* + 1. Calcula la corriente por la bater´ıa y la diferencia de potencial entre los extremos de las resistencias del siguiente circuito.

2 kΩ

12 V 4 kΩ

1 kΩ

3 kΩ

**Sol.** Para calcular la corriente total, se puede primero obtener la resis- tencia equivalente. Se procede desde las resistencias m´as alejadas a la bater´ıa. Las dos u´ltimas est´an en serie, de manera que

*R*24 = 2 + 4 = 6 kΩ*.*

El resultado est´a en paralelo con la resistencia de 3 kΩ,

1 1 1 1

*R*324

= 3 + 6 = 2 *⇒ R*324 = 2 kΩ*.*

Finalmente, la anterior est´a en serie con la resistencia de 1 kΩ, con lo que llegamos a

*Req* = 2 + 1 = 3 kΩ*.*

Ya podemos calcular la corriente total en la bater´ıa mediante

*I* = *E*

*Req*

= 12 = 4 10*−*3 A*.*

3 *·* 103

*·*

La ca´ıda de potencial en la resistencia de 1 kΩ es

*V*1 = *I R*1 = 4 *·* 10*−*3 *·* 103 = 4 V*.*

Por tanto, en la resistencia de 3 kΩ, y tambi´en en la asociaci´on en serie de las resistencia de 2 kΩ y 4 kΩ, hay una ca´ıda de potencial

*V*3 = *V*24 = *E − V*1 = 12 *−* 4 = 8 V*.*

La corriente en la asociaci´on en serie de las resistencia de 2 kΩ y 4 kΩ es

*~ ·*

*I*24

= *V*24

*R*24

= 8 1*,*33 10*−*3 A*.*

6 *·* 103

Finalmente, con *I*24 obtenemos las ca´ıdas de potencial en las resistencias de 2 y 4 kΩ:

*V*2 = *I*24*R*2 *~* 1*,*33 *·* 10*−*3 *·* 2 *·* 103 = 2*,*66 V*, V*4 = *I*24*R*4 *~* 1*,*33 *·* 10*−*3 *·* 4 *·* 103 *~* 5*,*33 V*.*

* + 1. Los cables de la instalaci´on el´ectrica de una casa, de resistividad igual a 1*,*5 10*−*8 Ω m, tienen un di´ametro de 2 mm. Calcula la corriente m´axima que pueden transportar para que el calor que desprendan por efecto Joule sea inferior a 1 W*/*m.

*· ·*

**Sol.** La potencia convertida en calor Joule en el cable es

*P* = *IV* = *I*2 *R* = *I*2 *ρ*

*,e*

*e S .*

De aqu´ı, la potencia por unidad de longitud de cable (dado que el dato que nos dan est´a en W*/*m, se trata de una potencia por unidad de longitud) es

*P I*2 *ρe*

*,e* = *πr*2 *,*

donde *r* = *d/*2 es el radio de la secci´on del cable y *d* es su di´ametro, que es lo que nos piden. Dado que la potencia por unidad de longitud ha de ser menor de 1 W*/*m, llegamos a

*I*2 *ρe*

*π*(*d/*2)2 *<* 1*.*

Despejando la intensidad,

*πd*2

*I <*

=

4*ρe*

*π ·* 4 *·* 10*−*6

Por tanto, la intensidad m´axima *Im* es

4 *·* 1*,*5 *·* 10*−*8 *~* 14*,*5 A*.*

*Im ~* 14*,*5 A*.*

# Cap´ıtulo 7

**Circuitos de corriente continua**

En este tema utilizamos los resultados te´oricos del tema anterior para analizar los circuitos de corriente continua. Comenzamos enunciando las leyes de Kirchoff y analizando el circuito divisor de tensi´on. Con objeto de abordar circuitos m´as complejos, enun- ciamos los teoremas de Th´evenin y Norton. Finalmente, describi- mos el comportamiento de algunos circuitos sencillos de corriente continua con condensadores.

## 7.1. Leyes de Kirchhoff

Como vimos en el tema anterior, un *circuito el´ectrico* es un conjunto de cables conductores y otros dispositivos que permiten mantener de forma inin- terrumpida una corriente el´ectrica. Para simplificar su estudio, son especial- mente u´tiles las *leyes de Kirchhoff*, que son consecuencia de la conservaci´on de la carga el´ectrica y la conservaci´on de la energ´ıa:

La *ley de Kirchhoff para las corrientes* indica que la suma de las co- rrientes que entran en un punto de uni´on de varios elementos de un circuito es igual a la suma de las corrientes que salen de ´el. Estos pun- tos de uni´on se llaman *nodos*, como el punto central de la figura [7.1,](#_bookmark145) que muestra una parte de un circuito. En ese nodo, la ley de Kirchhoff de las corrientes implica que *I*1 + *I*3 + *I*4 = *I*2.

La *ley de Kirchhoff para las ca´ıdas de tensi´on* indica que la suma de

167

*I*2

*I*1

*I*4

*I*3

Figura 7.1: Ejemplo de un trozo de circuito con un nodo.

las ca´ıdas de tensi´on a lo largo de un circuito cerrado o *malla* vale cero. La ca´ıda de tensi´on en cada elemento se toma positiva si recorremos el elemento desde su terminal positivo hasta su terminal negativo, y negativa si entramos por el terminal negativo. Por ejemplo, en la figura

[7.2](#_bookmark146) la ley de Kirchhoff implica que *V*1 + *V*2 + *V*3 + *V*4 + *V*5 = 0.

*V*1

+

*−*

*V*5 *V*2

+

*−*

+

*−*

*V*4 *V*3

+

*−*

+

*−*

Figura 7.2: Ejemplo de circuito con una malla.

El sentido de recorrido de la malla es indiferente y lo elegimos a priori segu´n nos convenga. Para las resistencias, la ca´ıda de tensi´on se toma positiva en la ley de Kirchhoff si el sentido de la corriente en ellas es el mismo que el sentido en el que estamos recorriendo la malla, y se toma negativa si estamos recorriendo la malla en sentido opuesto al de la corriente en la resistencia.

### Circuito divisor de tensi´on

Un ejemplo sencillo en teor´ıa de circuitos es el *divisor de tensi´on*. Consta de una *fuente de tensi´on conectada a varias resistencias en serie*. Podemos verlo montado en la figura [7.3.](#_bookmark147)

* 1. *LEYES DE KIRCHHOFF* 169

*Vin*

+

*R*1

*R*2

*Vout*

*−*

Figura 7.3: Circuito divisor de tensi´on con dos resistencias.

En el divisor de tensi´on de la figura [7.3,](#_bookmark147) *Vin* es el *voltaje de entrada* proporcionado por la fuente, es decir, *Vin* = *E* . La idea es tratar de calcular el valor del llamado *voltaje de salida Vout*, que, como vemos en la figura, se corresponde en este caso con la ca´ıda de tensi´on en la resistencia *R*2, es decir, *Vout* = *V*2.

Usando la ley de Kirchhoff de las mallas, recorriendo ´esta en sentido horario, obtenemos

*−Vin* + *V*1 + *V*2 = 0*,*

donde hemos supuesto que la (u´nica) corriente en el circuito es *I* recorre la malla desde el terminal positivo de la fuente hasta su terminal negativo. Usando la ley de Ohm con las resistencias, tendremos

*V*1 = *IR*1*, V*2 = *IR*2*.*

Por tanto, la ley de Kirchhoff de la malla nos da la corriente segu´n

*Vin*

*−Vin* + *I* (*R*1 + *R*2) = 0 *⇒ I* = *R*

1

*.*

+ *R*2

Como podemos ver, el valor de *I* obtenido es positivo, lo que indica que el sentido elegido anteriormente es el correcto. De aqu´ı

*V* = *IR* = *V*

2

2

*in*

*R*2 *,*

1

2

que es la llamada *ecuaci´on del divisor*. Dice simplemente que, en un circuito divisor de tensi´on, el voltaje de entrada se divide entre todas las resistencias proporcionalmente al valor de cada una. Conviene memorizar esta ecuaci´on,

*R*

+ *R*

ya que es extremadamente u´til. El valor de la ca´ıda de tensi´on en la otra

resistencia ser´ıa, con la misma regla,

*V* = *V*

1

*in*

*R*1 *.*

1

2

En general, si tenemos un circuito dividor de tensi´on formado por una fuente ideal de fem *E* y un conjunto de *N resistencias en serie*, la ca´ıda de tensi´on en la resistencia *Ri* vendr´a dada por la expresi´on

*R*

+ *R*

*V* = *E Ri .* (7.1)

1

2

*N*

*i*

*R*

+ *R*

+ *· · ·* + *R*

**Ejemplo 7.1.1** *Analicemos el circuito divisor de tensi´on con tres re-*

*sistencias, tomando como Vin la tensi´on de la fuente y Vout la ca´ıda de tensi´on en la resistencia R*3*.*

***Sol.*** *Hagamos el ejercicio de varias maneras. Procediendo como en el te- ma anterior, podemos calcular primero la resistencia equivalente Req* = *R*1 + *R*2 + *R*3 *y, utilizando la ley de Ohm, calcular la corriente I que atraviesa todos los elementos:*

*I* =

*Vin*

*Req*

=

*Vin*

*R*1 + *R*2 + *R*3

*.*

*As´ı, la ca´ıda de tensi´on por la resistencia R*3 *es*

*Vout* = *IR*3 = *Vin R*

*R*3

1 2 3

*.*

+ *R* + *R*

*Una segunda manera es mediante la ley de Kirchoff para la malla. Si*

*la recorremos en sentido horario y asumimos que I tambi´en circula en sentido horario, llegamos a*

*−Vin* + *V*1 + *V*2 + *V*3 = 0*.*

*Usando la ley de Ohm con las resistencias, la ecuaci´on anterior se escribe*

*−Vin* + *IR*1 + *IR*2 + *IR*3 = 0*,*

*con la que obtenemos la misma expresi´on de I que con el m´etodo anterior,*

*y con ella la misma relaci´on entre Vout y Vin ya obtenida. Finalmente, tambi´en podemos llegar al resultado deseado empleando la ecuaci´on* [(7.1)](#_bookmark148)*, donde i* = 3*, E* = *Vin y N* = 3*.*

## Circuitos equivalentes de Th´evenin y de Norton

Una fracci´on importante de los circuitos utilizados en la pr´actica es la de los *circuitos de acoplamiento*. Un acoplamiento es una conexi´on, a trav´es de dos terminales *a* y *b*, entre dos subcircuitos que realizan funciones diferentes. En el caso m´as simple, un subcircuito realiza funciones de *fuente*, generando una sen˜al para otro subcircuito que se llama *carga* (o *load*, del ingl´es). Un subcircuito est´a conectado al otro mediante cables conductores con puntos de contacto *a* y *b*. La situaci´on se puede observar en el esquema de la figura [7.4.](#_bookmark151)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Subcircuito fuente | a | Subcircuito carga |
| b |
|  |

Figura 7.4: Esquema de un circuito con subcircuito fuente y subcircuito carga.

### Circuito equivalente de Th´evenin

No resulta pr´actico tener que calcular todas las corrientes y tensiones del circuito total cada vez que hagamos un cambio en el subcircuito de carga. Lo bueno es que en realidad no tenemos que hacerlo en muchos casos (siempre que el subcircuito fuente est´e formado por elementos lineales tales como fuen- tes de tensi´on o de corriente y resistencias), y esto es debido a la posibilidad de usar el llamado *teorema de Th´evenin*:

*Cualquier subcircuito fuente lineal, formado por una red de*

*resistencias y fuentes, es equivalente a una fem ideal en serie con una u´nica resistencia.*

*u´nica fuente de*

El teorema de Th´evenin se ilustra en la figura [7.5](#_bookmark152). Entre los terminales *a* y *b*, toda la red de resistencias y fuentes de tensi´on que forman el subcircuito fuente puede sustituirse por una u´nica fuente de fem de valor *VT h* y una u´nica resistencia de valor *RT h*.

##### a

Subcircuito fuente



b *Vth*



*Rth a*

*b*

Figura 7.5: Ilustraci´on del teorema de Th´evenin.

Veamos c´omo calcular los valores de *VT h* y *RT h*:

El *voltaje de Th´evenin VT h* es el que hay entre los terminales de salida *a* y *b* cuando el subcircuito fuente original se deja en abierto, es decir, cuando no se conecta ningu´n subcircuito de carga,

*VT h* = *Vabierto.* (7.2)

La *resistencia de Th´evenin RT h* es el cociente entre el voltaje de Th´eve- nin *VT h* y la corriente que hay entre los terminales de salida *a* y *b* si se conecta un cortocircuito entre ambos,

*RT h*

*VT h*

= *.* (7.3)

*I*

*cortocircuito*

Una manera alternativa de calcular *RT h* es igualarla con la resisten- cia equivalente entre los terminales *a* y *b* cuando todas las fuentes de tensi´on del circuito original se sustituyen por cortocircuitos (o por las resistencias internas de las fuentes si ´estas no son ideales) y las fuentes de corriente del circuito original (dispositivos que veremos un poco m´as abajo) se sustituyen por circuitos abiertos.

Una vez obtenido el equivalente de Th´evenin, podemos conectarle el sub- circuito de carga y obtener cualquier cantidad que se nos pida sobre ´el.

**Ejemplo 7.2.1** *Supongamos que usamos el circuito de la figura* [*7.3*](#_bookmark147) *como*

*subcircuito fuente. Para ello, conectamos en la salida una resistencia R*3 *(subcircuito carga). Usemos el equivalente de Th´evenin del subcircuito fuente para calcular la corriente por R*3*.*

***Sol.*** *Para obtener la resistencia Th´evenin, cortocircuitamos la fuente y calculamos la resistencia equivalente del subcirctuito fuente respecto de los terminales de salida. En este caso las resistencias R*1 *y R*2 *est´an en paralelo por lo que*

*RT h* = *R*

*R*1*R*2

1 2

*.*

+ *R*

*Para calcular VT h debemos calcular la ca´ıda de potencial en R*2*. Como*

*tenemos un divisor de tensi´on, usamos los resultados ya conocidos:*

*VT h* = *R*

*R*2

*V .*

*in*

1 2

+ *R*

*As´ı, respecto de los terminales de salida, el subcircuito carga se puede*

*escribir como el circuito de la figura* [*7.5*](#_bookmark152) *con las expresiones de RT h y VT h anteriores. Para obtener la corriente I en la resistencia R*3*, observemos que, de nuevo, el equivalente de Th´evenin y R*3 *forman un divisor de tensi´on. Por ello,*

*I*3 = *R*

*VT h*

*R*2

1

*T h* 3

+ *R*

=

*R*

*V*

*R*2*Vin*

*in*

1 2

+ *R*

*R R*

1 2

*R*1+*R*2

+ *R*

3

= *.*

*R R* + *R* (*R* + *R* )

1 2 3 1 2

### Fuentes de corriente

Una *fuente de corriente* ideal es un dispositivo que mantiene cierto valor de la corriente independientemente de lo que se conecte a ella. Hay disposi- tivos en la pr´actica que se comportan como fuentes de corriente, construidos con transistores. El s´ımbolo que emplearemos para una fuente de corriente es el que podemos ver en la figura [7.6.](#_bookmark156)

Un ejemplo de uso de fuentes de corriente es el *circuito divisor de corrien- te*, formado por una fuente de corriente de valor *It* conectada a un conjunto de resistencias en paralelo, como vemos en la figura [7.7](#_bookmark157).

Para calcular el valor de *I*1 e *I*2 (las corrientes que circulan por las re- sistencias), podemos usar la ley de Kirchhoff de los nodos en la confluencia de ´estas con *It* y la ley de Kirchhoff de las mallas en la que no contiene a la

Figura 7.6: S´ımbolo de fuente de corriente.

2

*It*

*R*1

*R*

*I*1

*I*2

*It*

Figura 7.7: Circuito divisor de corriente.

fuente de corriente. Se obtienen las ecuaciones

*It* = *I*1 + *I*2*,*

0 = *−I*1*R*1 + *I*2*R*2*,*

donde suponemos que el valor *It* de la fuente es conocido. Resolviendo este sistema,

*t*

2

*t*

*I* = *I*

1

*R*2 *, I*

1

2

= *I R*1 *.*

1

2

La expresi´on general de las corrientes en las resistencias de un divisor de corriente es

*R*

+ *R*

*R*

+ *R*

*Ii* = *It ,* (7.4)

*Req*

*i*

*R*

donde *Req* es la resistencia equivalente de la asociaci´on en paralelo de las resistencias del divisor y *Ri* es la resistencia en la que estamos calculando la corriente.

**Ejemplo 7.2.2** *Analicemos el divisor de corriente con tres resistencias, an˜adiendo R*3 *en paralelo a las resistencias del circuito de la figura* [*7.7.*](#_bookmark157)***Sol.*** *Al igual que hicimos en el ejemplo* [*7.1.1,*](#_bookmark149) *podemos proceder, al me- nos, de tres maneras. En primer lugar, podemos calcular la resistencia*

*equivalente. Al estar las tres en paralelo, tenemos*

*R* = *R* + *R* + *R*

*eq*

(

1

*−*1

2

*−*1

3

*−*1

*As´ı, la ca´ıda de tensi´on en las resistencias es*

*−*1

*.*

*V* = *ItReq* =

*It*

*R*1*−*1 + *R*2*−*1 + *R*3*−*1

*.*

*Por tanto, la intensidad por cada resistencia es*

*I*1 = *R*

*V*

*It*

1

= *,*

1 + *R*1 + *R*1

*R*2 *R*3

*I*2 = *R*

*V*

*It*

2

= *R*2 + 1 + *R*2 *,*

*R*1

*R*3

*I*3 = *R*

*V*

3

= *R*3 + *R*3 + 1 *.*

*It*

*R*1 *R*2

*A id´enticos resultados llegamos usando la ecuaci´on* [(7.4)](#_bookmark158)*. Por u´ltimo, tambi´en podr´ıamos usar las leyes de Kirchoff para analizar el circuito. Por una parte, tendr´ıamos que toda la intensidad que pasa por la fuente de corriente It se reparte por las resistencias*

*It* = *I*1 + *I*2 + *I*3*,*

*y, recorriendo las dos mallas que contienen s´olo resistencias en sentido horario:*

0 = *−I*1*R*1 + *I*2*R*2*,*

0 = *−I*2*R*2 + *I*3*R*3*,*

*donde hemos usado la ley de Ohm para expresar las ca´ıdas de tensi´on en las resistencias como funci´on de las corrientes y las resistencias. Las dos relaciones anteriores no expresan m´as que el hecho de que las tres resistencias est´an en paralelo, sus ca´ıdas de tensi´on por tanto son iguales.*

*Estas mismas relaciones nos permiten, por ejemplo, expresar I*2 *e I*3 *en*

*funci´on de I*1*. Y, usando luego la ecuaci´on para It, llegamos a*

*I* = *I* + *I*

*R*1

*R*1

*t* 1

*R*

1

+ *I*

1 1

2

*R*

3

*⇒ I* =

*It*

1 + +

*R*

1

*R*

1

*.*

*R*2 *R*3

*An´alogamente, llegamos a las ecuaciones para I*2 *e I*3 *ya obtenidas pre- viamente.*

### Circuito equivalente de Norton

Adema´s del equivalente de Th´evenin existe otra opci´on para tratar un subcircuito fuente formado por una red de fuentes y resistencias. Se trata del *teorema de Norton*:

*Cualquier subcircuito fuente lineal, formado por una red de*

*resistencias y fuentes, es equivalente a una u´nica fuente de*

*corriente ideal en paralelo con una u´nica resistencia.*

El teorema de Norton se ilustra en la figura [7.8.](#_bookmark159)

a *a*



*IN*

*Rth*

Subcircuito fuente

##### b



*b*

Figura 7.8: Ilustraci´on del teorema de Norton.

Veamos c´omo calcular los valores de *IN* y *RN* :

La *corriente de Norton IN* es la que hay entre los terminales de salida *a* y *b* del subcircuito fuente original si se conecta un cortocircuito entre ambos,

*IN* = *Icortocircuito.*

La *resistencia de Norton RN* es el cociente entre el voltaje que hay entre los terminales *a* y *b* del subcircuito original si se deja un circuito abierto entre ellos y la corriente de Norton, es decir,

*R* = *Vabierto .*

*N I*

*N*

Dado que, tanto el circuito de Th´evenin como el de Norton, son equiva- lentes al subcircuito fuente original, han de serlo entre ellos. Esto implica que los valores de ambos circuitos han de coincidir, por lo que

*RN* = *RT h,*

*I* = *VT h ,*

*N R*

*T h*

*VT h* = *IN RN .*

**Ejemplo 7.2.3** *Volvamos al ejemplo* [*7.2.1*](#_bookmark155) *y resolv´amoslo obteniendo el*

*equivalente de Norton del subcircuito fuente.*

***Sol.*** *Debemos calcular el equivalente de Norton de un divisor de tensi´on, donde se toma la salida entre los terminales de la resistencia R*2*. Prime- ro calculamos la resistencia Norton RN o resistencia equivalente entre los terminales de salida cuando cortocircuitamos la fuente. Como ´esta coincide con la resistencia Th´evenin, RN* = *RT h, que ya calculamos en el ejemplo* [*7.2.1:*](#_bookmark155)

*RN* = *R*

*R*1*R*2

1 2

*.*

+ *R*

*La intensidad Norton es la que hay entre los terminales de salida cuando*

*´esta se cortocircuita. En este caso, la resistencia R*2 *queda en paralelo con un corto y por tanto la asociaci´on es equivalente a un corto. Por tanto, nos queda la fuente Vin en serie con R*1*, por lo que*

*I* = *.*

*Vin*

*N*

*R*

1

*Finalmente, el subcircuito fuente simplificado y la resistencia R*3 *forman*

*un divisor de corriente, por lo que, la corriente I*3 *a trav´es de R*3*, usando la ecuaci´on* [(7.4)](#_bookmark158)*, es*

*I*3 = *IN*

(*R* + *R* )

3

*−*1

*N*

*−*1

*−*1

*R*3

=

*R*2*Vin*

*R*1*R*2 + *R*3(*R*1 + *R*2)

*,*

*que es el resultado obtenido en el ejemplo* [*7.2.1.*](#_bookmark155)

## Circuitos de corriente continua con con- densadores

En los circuitos que hemos considerado hasta ahora, los voltajes e inten- sidades permanec´ıan constantes en el tiempo. Sin embargo, es posible que los voltajes e intensidades var´ıen en el tiempo aunque el circuito sea de corriente continua. Esto ocurre, por ejemplo, si conectamos condensadores descargados a fuentes y resistencias. Los condensadores permiten construir, por ejemplo, circuitos temporizadores (en los que algo ocurre una vez ha ocurrido otra cosa).

Los condensadores se representan, en los diagramas de circuitos, mediante dos barras paralelas de la misma longitud, como ya vimos en el tema ante- rior. Este s´ımbolo recuerda al de un condensador plano, aunque en realidad hay gran variedad de formas y taman˜os. La *ecuaci´on caracter´ıstica* de un condensador la vimos en el tema anterior y era

*Q* = *CV,*

donde *Q* es la carga acumulada en la placa positiva del condensador, *C* es su capacidad y *V* es la diferencia de potencial entre sus placas. Para el estu- dio de los condensadores en circuitos, se requiere, sin embargo, una relaci´on entre voltaje y corriente. Obtenemos esta relaci´on derivando la ecuaci´on del condensador respecto al tiempo y usando que *I* = *dQ/dt*. As´ı llegamos a la ecuaci´on

*dV*

*I* = *C ,*

*dt*

siendo *I* la corriente que va, por el exterior del condensador, desde su placa negativa a su placa positiva, que es el sentido convencional que hemos adop- tado. Esta relaci´on expresa que cuanto mayor sea la corriente m´as deprisa crece el voltaje. Como vemos, *un condensador no satisface la ley de Ohm*.

### Descarga de un condensador

Veamos, en primer lugar, un circuito b´asico de *descarga de un condensa- dor*, que es algo tan sencillo como un condensador cargado conectado a una resistencia, como muestra la figura [7.9.](#_bookmark161)

A la derecha de la figura [7.9](#_bookmark161) vemos c´omo var´ıa el voltaje del condensador con el tiempo. Inicialmente tiene un voltaje *V*0, y una carga *Q*0 = *CV*0. Como

1

V/V0

*R C*

0.37

1

t/(RC)

Figura 7.9: Circuito con un condensador y una resistencia (izquierda) y la curva de descarga del condensador (derecha).

est´a conectado con la resistencia, ´esta tiene el mismo voltaje y, por la ley de Ohm, deja pasar una corriente inicial *I*0 = *V*0*/R* que comienza a descargar el condensador. Esto ocurre hasta que el voltaje del condensador es cero, el condensador se ha descargado y ya no hay corriente por la resistencia. El tiempo caracter´ıstico de descarga del condensador en este circuito es igual al producto *RC* y se llama *constante de tiempo* del circuito. De hecho, cuando ha pasado un tiempo *t* = *RC*, el voltaje ha deca´ıdo en el condensador hasta un 37 % aproximadamente del valor inicial.

### Carga de un condensador

Para *cargar un condensador* que est´e inicialmente descargado, se puede conectar a una fuente de tensi´on en serie con una resistencia, como vemos en la figura [7.10.](#_bookmark162)

Inicialmente, el condensador tiene voltaje nulo y carga nula. Por ello, la resistencia tiene inicialmente todo el voltaje que proporciona la fuente y comienza a dejar pasar una corriente inicial *I*0 = *V/R* que comienza a cargar el condensador. Esto ocurre hasta que el voltaje del condensador iguala el de la fuente, con lo que ningu´n voltaje cae en la resistencia y la corriente es cero. En ese momento, la carga final del condensador es *Q* = *CV* . El comportamiento del voltaje del condensador con el tiempo se ve en la figura, y la constante de tiempo del circuito es, de nuevo, el producto *RC*. A efectos pr´acticos, despu´es de transcurrido un tiempo igual a cinco veces la constante de tiempo, esto es, 5*RC*, el voltaje ha alcanzado el 99 % de su valor final y

0.99

*R* V/V0

+

*−*

0.63

*V C*

1 5

t/(RC)

Figura 7.10: Circuito con una fuente de tensi´on, un condensador y una resis- tencia (izquierda) y la curva de carga del condensador (derecha).

consideramos cargado el condensador.

### Condensadores en r´egimen estacionario de corriente con- tinua

Finalmente, vamos a tratar tambi´en el comportamiento de los condensa- dores en circuitos de corriente continua en los que los voltajes y las corrientes son constantes. Esta situaci´on se conoce con el nombre de *r´egimen estacio- nario*, que es el que hemos estado tratando todo el tiempo en circuitos con resistencias.

El comportamiento de un condensador en el r´egimen estacionario de co- rriente continua est´a dado por su ecuaci´on caracter´ıstica

*dV*

*I* = *C*

*,* (7.5)

*dt*

pero con *V* constante. Por tanto, en el estacionario de corriente continua, un condensador cumple

*I* = 0*,*

y es, por tanto, *equivalente a un circuito abierto*.

**Ejemplo 7.3.1** *Conectamos la salida del circuito de la figura* [*7.3*](#_bookmark147) *a un condensador de capacidad C, inicialmente descargado. Calculemos la constante de tiempo del proceso de carga as´ı como la carga de la pla-*

*ca positiva del condensador cuando est´a completamente cargado.*

***Sol.*** *Si reemplazamos el circuito fuente por su equivalente de Th´evenin, el resultado es una fuente VT h en serie con una resistencia RT h y un con- densador C. As´ı, usando los resultados del ejemplo* [*7.2.1,*](#_bookmark155) *la constante de tiempo vale*

*R*1*R*2

1 2

*Por otra parte, cuando el condensador est´a completamente cargado, se comporta como un abierto. As´ı, la diferencia de potencial entre sus placas vale VT h, por lo que la carga Q de su placa positiva es*

*RT hC* = *R* + *R C.*

*Q* = *CVT h* = *R*

*R*2

*CV .*

*in*

1 2

+ *R*

## Tabla resumen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fo´rmula/magnitud | Definici´on | Ecuaci´on |
| *Vi* = *E Ri*  *R*1+*R*2+*···*+*RN*  *Vi*  *E* | Divisor de tensi´on con *N* resistencias Ca´ıda de tensi´on en la resistencia *Ri*  Fem de la fuente ideal | [(7.1)](#_bookmark148) |
| *VT h* = *Vabierto Vabierto* | Voltaje Th´evenin  Voltaje subcircuito fuente en abierto | [(7.2)](#_bookmark153) |
| *RT h* = *VT h*  *Icortocircuito*  *Icortocircuito* | Resistencia Th´evenin  Intensidad subcirtuito fuente en corto | [(7.3)](#_bookmark154) |
| *Ii* = *It Req*  *Ri* | Divisor de corriente | [(7.4)](#_bookmark158) |
| *Ii* | Intensidad de la resistencia *Ri* |  |
| *It* | Intensidad de la fuente de corriente |  |
| *Req* | Resistencia equivalente |  |
| *I* = *C dV*  *dt*  *I* | Ecuaci´on caracter´ıstica del condensador Intensidad del condensador | [(7.5)](#_bookmark163) |
| *C* | Capacidad del condensador |  |
| *V* | Voltaje del condensador |  |
| *t* | Tiempo |  |

## Problemas resueltos

* + 1. Determina la diferencia de potencial *V*2 *V*4 entre los puntos 2 y 4 del circuito de la figura.

*−*

5 V 1 kΩ

1 kΩ

2

4 3 kΩ

**Sol.** Aplicamos la regla de Kirchhoff de las mallas a la u´nica malla del circuito. Dado que s´olo hay una corriente *I*, resulta

*−E* + *IR*1 + *IR*2 + *IR*3 = 0

*⇒ I* = *E* = 5 = 10*−*3 A*.*

*R*1 + *R*2 + *R*3 1000 + 1000 + 3000

Ya tenemos lo que necesitamos para calcular cualquier diferencia de potencial. Para determinar *V*2 *V*4, nos dirigimos desde el punto 2 al punto 4 por cualquier camino del circuito y vamos sumando las ca´ıdas de potencial que nos encontremos en el camino. Por ejemplo, si vamos por el camino de las resistencias de 1 kΩ (derecha) y 3 kΩ,

*−*

*V*2 *− V*4 = *IR*2 + *IR*3 = 10*−*3 *·* 103 + 10*−*3 *·* 3 *·* 103 = 4 V*.*

Si vamos por el camino de la resistencia de 1 kΩ (arriba) y la bater´ıa,

*V*2 *− V*4 = *−IR*1 + *E* = *−*10*−*3 *·* 103 + 5 = 4 V*.*

* + 1. Obt´en la potencia disipada por la resistencia de 50 Ω del circuito de la figura. Adema´s, calcula la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*.

12 V

20 Ω

50 Ω

10 Ω

*a*

8 Ω

*b*

**Sol.** Para realizar el ejercicio, necesitamos las corrientes a trav´es de las resistencias. Llamaremos *I*1 a la corriente que atraviesa la bater´ıa y la resistencia *R*1 = 10 Ω, *I*2 ser´a la corriente que atraviesa la resistencia *R*2 = 80 Ω (hacia abajo) e *I*3 ser´a la corriente que pasa por *R*3 = 20 Ω y *R*4 = 50 Ω (hacia abajo).

NOTA: El sentido de las corrientes se toma inicialmente como quera- mos. Si alguna resulta negativa despu´es, es que el sentido es el contrario del que hab´ıamos imaginado al principio.

Dado que tenemos 3 inc´ognitas (las corrientes), nos hacen falta 3 ecua- ciones. Planteamos las reglas de Kirchhoff en las dos mallas internas del circuito y en el nodo *a*,

*I*1 = *I*2 + *I*3*,*

0 = *−E* + *I*1*R*1 + *I*2*R*2*,*

0 = *−I*2*R*2 + *I*3*R*3 + *I*3*R*4*.*

Poniendo los datos *E* = 12 V, *R*1 = 10 Ω, *R*2 = 8 Ω, *R*3 = 20 Ω y

*R*4 = 50 Ω en el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene

*I*1 *~* 0*,*903 A*, I*2 *~* 0*,*372 A*, I*3 = 0*,*0425 A*.*

Una vez resuelto el circuito, podemos responder a las preguntas que se nos plantean. La potencia disipada en la resistencia *R*4 = 50 Ω es

*P*4 = *I*3*V*4 = *I*2*R*4 *~* (0*,*0425)2 *·* 50 *~* 0*,*0902 W*.*

3

La diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* es

*Va − Vb* = *I*2*R*2 *~* 0*,*372 *·* 8 *~* 2*,*97 V*.*

* + 1. Calcula todas las corrientes del circuito de la figura. Adem´as, calcula la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2, entre 2 y 3, y entre 1 y 4.

*R*1 = 60 Ω 1

15 V

4

*R*2 = 10 Ω

*R*5 = 20 Ω 3

*R*3 = 20 Ω 2

*R*4 = 10 Ω

**Sol.** Llamamos *I*1 a la corriente que parte del terminal positivo de la bater´ıa y pasa por *R*1, *I*2 a la que pasa por *R*2 hacia abajo e *I*3 a la que pasa por *R*3 y *R*4 hacia abajo. Las reglas de Kirchhoff en el nodo 1 y en las dos mallas interiores dan las ecuaciones

*I*1 = *I*2 + *I*3*,*

0 = *−E* + *I*1*R*1 + *I*2*R*2 + *I*1*R*5*,*

0 = *−I*2*R*2 + *I*3*R*3 + *I*3*R*4*.*

De estas tres ecuaciones, se obtienen

*I*1 *~* 0*,*171 A*, I*2 *~* 0*,*129 A *I*3 *~* 0*,*0429 A*.*

La diferencia de potencial entre 1 y 2 es

*V*1 *− V*2 = *I*3*R*3 *~* 0*,*857 V*,*

entre 2 y 3 es

y entre 1 y 4 es

*V*2 *− V*3 = *I*3*R*4 *~* 0*,*429 V*,*

*V*1 *− V*4 = *−I*1*R*1 + *E ~* 4*,*71 V*.*

* + 1. Calcula la potencia suministrada por la fuente de 10 V as´ı como la potencia disipada por las resistencias del siguiente circuito.

1 Ω 2 Ω

5 V 3 Ω

10 V

4 Ω

**Sol.** Para aligerar la notaci´on, escribimes directamente el valor de las resistencias en lugar de nombrarlas con letras. Las reglas de Kirchhoff en las dos mallas interiores y en el nodo de arriba dan las ecuaciones

*I*10 = *I*5 + *II,*

0 = 4*I*5 *−* 10 + *I*5 + 5*,*

0 = *−*10 + 2*II* + 3*II,*

donde *II* es la corriente por las resistencias de 2 Ω y 3 Ω (hacia abajo), *I*10 es la corriente por la bater´ıa de 10 V (hacia arriba) e *I*5 es la corriente por la bater´ıa de 5 V (hacia abajo). Resolviendo el sistema,

*I*10 = 3 A*, I*5 = 1 A *II* = 2 A*.*

La potencia suministrada por la bater´ıa de 10 V es igual a la corriente que la atraviesa (de su terminal negativo a su terminal positivo) por su fem, es decir,

*P*10 = *I*10 *·* 10 = 3 *·* 10 = 30 W*.*

La potencia disipada por las resistencias es la suma de las disipadas por cada una de ellas,

*PR* = *I*2 *·* 4 + *I*2 *·* 1 + (*II*)2 *·* 2 + (*II*)2 *·* 3 = 12 *·* 5 + 22 *·* 5 = 25 W*.*

5

5

Los resultados anteriores nos dicen que la bater´ıa de 10 V proporciona m´as potencia que la que disipan todas las resistencias. Por tanto, la

bater´ıa de 5 V no proporciona ninguna potencia al circuito, sino que consume parte de la potencia que proporciona la de 10 V. La potencia consumida por la bater´ıa de 5 V es igual a la que proporciona la bater´ıa de 10 V menos la que consumen las resistencias, es decir,

*P*5*,consumida* = *P*10 *− PR* = 30 *−* 25 = 5 W*.*

Para explicar esto, podemos calcular la potencia que proporciona esa misma bater´ıa. Ser´a igual a la corriente que la atreviesa del terminal negativo al positivo por su fem. Pero la corriente *I*5 va del terminal positivo al negativo de la bater´ıa, por lo que

*P*5 = *−I*5 *·* 5 = *−*2 *·* 10 = *−*5 W*,*

lo que coincide con el c´alculo anterior. De hecho, en este circuito, la bater´ıa de 10 V se usa para cargar la bater´ıa de 5 V.

* + 1. Calcula el potencial de los puntos 1, 2 y 3 del siguiente circuito teniendo en cuenta que el potencial del punto 0 es cero.

10 V 5 V

1

*R*1 = 1 Ω

2

*R*2 = 2 Ω

3

*R*3 = 3 Ω

0

**Sol.** El potencial del punto 1 se puede calcular f´acilmente porque entre

´el y el punto 0 est´a solo la bater´ıa de *E*1 = 10 V, por lo que

*V*1 = *V*1 *− V*0 = *E*1 = 10 V*.*

Lo mismo ocurre en el punto 3, pero ahora con la bater´ıa de *E*2 = 5 V:

*V*3 = *V*3 *− V*0 = *E*2 = 5 V*.*

Para calcular el potencial del punto 2 nos hace falta la corriente que pasa por alguna resistencia. Suponemos que *I*1 es la corriente que parte

del terminal positivo de 10 V, *I*2 parte del terminal positivo de 5 V e *II* pasa por *R*3 de arriba hacia abajo. Por las reglas de Kirchhoff en el nodo 2 y las dos mallas interiores, tenemos

*II* = *I*1 + *I*2*,*

0 = *−*10 + *I*1 + 3*II,*

0 = *−*3*II −* 2*I*2 + 5*.*

La soluci´on es

35

*I* = A*, I*

1

11

2

= *−* 10 A*, II* = 25 A*.*

El resultado nos indica que *I*2 va en sentido opuesto al que hab´ıamos pensado (recorre la bater´ıa de 5 V hacia abajo). Con todo esto, el po- tencial del punto 2 es

11

11

*V*2 = *V*2

*— V*0

= *IIR*3

25

= 311 *~* 6*,*82 V*.*

* + 1. Calcula la potencia suministrada o disipada por cada elemento del si- guiente circuito.

1 V

2 V

3 V

10 Ω

20 Ω

30 Ω

**Sol.** Tomamos las intensidades *I*1, *I*2 e *I*3 de las fuentes de 1 V, 2 V y 3 V saliendo de los polos positivos, respectivamente. Las reglas de Kirchhoff en el nodo central superior y las dos mallas interiores dan las ecuaciones

*I*2 = *I*1 + *I*3*,*

0 = 10*I*1 *−* 1 *−* 2 + 20*I*2*,*

0 = *−*20*I*2 + 2 + 3 *−* 30*I*3*.*

Resolviendo el sistema, tenemos

1 7 9

*I*1 = 22 A*, I*2 = 55 A*, I*3 = 110 A*.*

Las potencias proporcionadas por las bater´ıas son

1

*P*1 = 1 *· I*1 = 22 *~* 0*,*0455 W*,*

14

*P*2 = 2*I*2 = 55 *~* 0*,*255 W*,*

27

*P*3 = 3*I*3 = 110 *~* 0*,*245 W*.*

Las potencias disipadas por las resistencias son

*P*10 =

*P*20 =

22

7 2

1 2

55

10 *~* 0*,*0207 W*,*

20 *~* 0*,*324 W*,*

*P*30 =

9 2

110

30 *~* 0*,*201 W*.*

1. Usando el equivalente de Th´evenin del circuito fuente, calcula la co- rriente en la resistencia de carga conectada entre los terminales *a* y *b*.

2 V 8 Ω

*a*

4 Ω

6 Ω

*b*

**Sol.** Para calcular el equivalente de Th´evenin, lo primero es quitar la resistencia de carga entre los terminales *a* y *b*. El voltaje de Th´evenin es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*, que coincide con la

ca´ıda de potencial en la resistencia de 6 Ω. Dado que el circuito es un divisor de tensi´on, tenemos

*VT h*

= *Va*

*— Vb*

= *Rab Req*

6

= 2 *·* 4 + 6 = 1*,*2 V*.*

Para calcular la resistencia de Th´evenin, podemos poner un cortocir- cuito entre *a* y *b*. En la asociaci´on en parelelo entre ese cortocircuito (con resistencia nula) y la resistencia de 6 Ω, toda la corriente pasa por el cortocircuito. Por tanto, la corriente entre *a* y *b* coincide con la que habr´ıa en el circuito sin la resistencia de 6 Ω, que es

*E*

2

*Icortocircuito* = 4 = 0*,*5 A*.*

De aqu´ı,

*VT h* 1*,*2

*R* = = = 2*,*4 Ω*.*

*T h I*

*cortocircuito*

0*,*5

De manera alternativa, podemos calcular la resistencia de Th´evenin como la equivalente entre *a* y *b* cuando se reemplaza la bater´ıa de 2 V por un cortocircuito. Entonces, las resistencias de 4 Ω y 6 Ω est´an en paralelo y resulta

1 1 1 5

*RT h*

= 4 + 6 = 12 *⇒ RT h* = 2*,*4 Ω*.*

Ya tenemos calculado el equivalente de Th´evenin, as´ı que volvemos a colocar la resistencia de carga entre *a* y *b*. El ejercicio nos pide la corriente a trav´es de esa resistencia. En el circuito que nos ha quedado, las resistencias *RT h* y la de carga *RL* est´an en serie. La corriente en ese circuito es

*VT h* 1*,*2

*I* = = *~* 0*,*115 A*.*

*RT h* + *RL* 2*,*4 + 8

1. Usando el equivalente de Norton del circuito fuente, calcula la corriente en la resistencia de carga.

2 V 10 Ω

*a*

4 Ω

6 Ω

8 Ω

*b*

**Sol.** Primero, quitamos la resistencia de carga. La resistencia de Nor- ton (que es igual a la de Th´evenin) puede obtenerse reemplazando la bater´ıa por un cortocircuito y calculando la resistencia equivalente de la configuraci´on resultante entre *a* y *b*. Como las tres resistencias est´an en paralelo, tenemos

1 1 1 1 13 24

*R* = 4 + 6 + 8 = 24 *⇒ RN* = 13 *~* 1*,*85 Ω*.*

*N*

Por otro lado, la corriente de Norton es la que hay entre *a* y *b* cuando ponemos un cortocircuito entre ellos. Al ponerlo, este cortocircuito est´a en paralelo con las resistencias de 6 Ω y 8 Ω, por lo que no pasa corriente por estas dos resistencias. As´ı, *IN* es la corriente total en un circuito en el que s´olo est´a la resistencia de 4 Ω,

2

*IN* = *Icortocircuito* = 4 = 0*,*5 A*.*

Una vez calculado el equivalente de Norton, colocamos en ´el la resis- tencia de carga *RL* = 10 Ω. Este circuito es un divisor de corriente, con la fuente de corriente *IN* = 0*,*5 A en paralelo con la resistencia de Norton *RN ~* 1*,*85 Ω y la resistencia de carga *RL* = 10 Ω. La resistencia equivalente de la asociaci´on en paralelo de *RN* y *RL* es

1 1 1

13 1 77

120

*Req*

= +

*RN RL*

= 24 + 10 = 120 *⇒ Req* =

77 *~* 1*,*56 Ω*.*

Por la ecuaci´on del divisor, la corriente a trav´es de *RL* es

*IL* = *I*

*Req*

*N*

*R*

*L*

120

= 0*,*5 *·* 77 *·* 10 *~* 0*,*0779 A*.*

1. Obt´en el equivalente de Th´evenin respecto de los terminales *a* y *b* del siguiente subcircuito fuente.

12 Ω

3 V

5 Ω *a*

2 V

6 Ω

*b*

**Sol.** Para obtener el voltaje de Th´evenin, hemos de calcular la diferen- cia de potencial entre *a* y *b*. Dado que no pasa corriente por la bater´ıa de 2 V ni por la resistencia de 5 Ω, la corriente por la resistencia de 6 Ω es

*I* = *E*1 = 3 = 1 A*.*

6

Con esto,

*Req*

12 + 6 6

*Va − Vb*

= *−E*2

+ *I*6*R*6

= *−*2 + 1 *·* 6 = *−*1 V*.*

Por tanto, resulta que el terminal positivo del equivalente de Th´evenin no es *a*, sino *b*. El voltaje de Th´evenin es

6

*VT h* = *Vb − Va* = 1 V*.*

Para la resistencia de Th´evenin, sustituimos todas las bater´ıas por cor- tocircuitos. Las resistencias de 12 Ω y 6 Ω est´an en paralelo, de modo que

1 1 1 1 1 3

*R*12

= +

*R*1 *R*2

= 12 + 6 = 12 *⇒ R*12 = 4 Ω*.*

Dado que *R*12 est´a en serie con la resistencia de 5 Ω,

*RT h* = *R*12 + *R*5 = 4 + 5 = 9 Ω*.*

1. Calcula el equivalente de Norton del siguiente subcircuito fuente.

*R*4 = 100 Ω *a*

*R*2 = 100 Ω

*R*3 = 30 Ω

2 V

3 V

*R*1 = 20 Ω

*b*

**Sol.** Para obtener la resistencia de Norton, sustituimos todas las ba- ter´ıas por cortocircuitos y calculamos la resistencia equivalente entre *a* y *b*. Las resistencias *R*1 y *R*2 est´an en serie, de manera que

*R*12 = *R*1 + *R*2 = 20 + 100 = 120 Ω*.*

*R*12 est´a en paralelo con *R*3:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 5 |  | 120 |
| *R* | = | *R* | + | *R* | = | 120 | + | 30 | = | 120 | *⇒ R*123 = | 5 |

123

12 3

= 24 Ω*.*

Finalmente, *R*123 est´a en serie con *R*4, por lo que

*RN* = *R*123 + *R*4 = 24 + 100 = 124 Ω*.*

La corriente de Norton es la corriente entre *a* y *b* cuando se coloca un cortocircuito entre esos puntos. Para este caso, sin embargo, es mucho m´as sencillo calcular el voltaje en circuito abierto entre *a* y *b* (voltaje de Th´evenin) y luego usar la resistencia de Norton que ya tenemos. Dado que no hay corriente en *R*4, la corriente en la malla cerrada (tomada en sentido antihorario), usando la regla de Kirchhoff, est´a dada por

1

0 = 2 + *I*(20 + 100 + 30) *−* 3 *⇒ I* = 150 A*.*

Por tanto,

30 14

*Vabierto* = *Va − Vb* = *−I*30 + 3 = *−* 150 + 3 = 5 V*.*

Y, usando la resistencia de Norton, tenemos

*I* = *Vabierto*

*N*

*RN*

14

= 5 *·* 124 *~* 0*,*0223 A*.*

1. En el circuito de la figura, *V*0 = 10 V, *R*1 = 100 Ω, *R*2 = 300 Ω, *C* = 4 *µ*F.
2. Teniendo en cuenta que el condensador del siguiente circuito est´a ini- cialmente descargado, calcula la constante de tiempo del proceso de carga, as´ı como la carga de su placa positiva una vez finalizado el pro- ceso de carga.

5 V 2 *µ*F

50 Ω

150 Ω

**Sol.** Sabemos que la constante de tiempo de la carga de un condensa- dor conectado a una bater´ıa y a una resistencia en serie es *RC*. Pero, en este circuito, tenemos dos resistencias. Para reducirlo, hacemos el equi- valente de Th´evenin quitando el condensador. El voltaje de Th´evenin ser´a el de la resistencia de 150 Ω en el divisor de tensi´on resultante:

150 300

*VT h* = 550 + 150 = 10 *·* 100 + 300 = 3*,*75 V*.*

La resistencia de Th´evenin, sustitutyendo la bater´ıa por un cortocir- cuito, estar´a dada por

1 1 1 4 150

*RT h*

= 50 + 150 = 150 *⇒ RT h* =

= 37*,*5 Ω*.*

4

Una vez calculado el equivalente de Th´evenin, colocamos en ´el el con- densador. Tenemos ahora una bater´ıa con *VT h* = 3*,*75 V en serie con una resistencia *RT h* = 37*,*5 Ω y un condensador *C* = 2 *µ*F. La constante de tiempo del proceso de carga ser´a

*RC* = 37*,*5 *·* 2 *·* 10*−*6 = 7*,*5 *·* 10*−*5 s*.*

Una vez cargado el condensador, ya no hay corriente en el equivalente de Th´evenin y el voltaje del condensador se iguala al voltaje de la bater´ıa, por lo que

*VC* = *VT h* = 3*,*75 V*.*

De aqu´ı, la carga del condensador resulta

*Q*

*C* = *V ⇒ Q* = *CVC*

*C*

= 2 *·* 10*−*6 *·* 3*,*75 = 7*,*5 *·* 10*−*6 C*.*

1. Determina la carga del condensador una vez est´a completamente car- gado.

*R*1 = 1 kΩ

*C* = 1 pF

*V* = 6 V *R*2 = 2 kΩ

*R*3 = 3 kΩ

**Sol.** En el r´egimen estacionario, por la rama en la que est´a el conden- sador no circula corriente (*C* se comporta como un circuito abierto), de modo que no hay corriente por *R*3. La diferencia de potencial *VC* entre las placas del condensador es, entonces, igual a la ca´ıda de potencial *V*2 en *R*2. Dado que el circuito formado por *V* , *R*1 y *R*2 es un divisor de tensi´on,

*V* = *V*

*R*2 *R*2 2

= *V* = *V .*

*C* 2

*R*

*eq*

*R*1 + *R*2

= 6 = 4 V

3

Con esto, la carga de la plaza positiva del condensador resulta

*Q* = *CVC* = 10*−*12 *·* 4 = 4 *·* 10*−*12 C*.*

# Cap´ıtulo 8

**Magnetismo e induccio´n**

Este tema incluye algunos resultados b´asicos sobre magnetoest´ati- ca. Comenzamos analizando el comportamiento de algunos ma- teriales como los imanes y solenoides. Esto nos lleva a definir el campo magn´etico y a considerar su forma m´as sencilla: el campo magn´etico generado por un solenoide. A continuaci´on, enuncia- mos la ley de Lenz-Faraday que explica c´omo se puede inducir una fuerza electromotriz por medio de un flujo magn´etico variable en el tiempo. Como aplicaci´on del resultado anterior, analizamos el fen´omeno de autoinducci´on, lo que nos llevar´a al concepto de autoinductancia. Finalmente, estudiamos los generadores de co- rriente alterna y los transformadores.

## 8.1. Imanes y solenoides

En la naturaleza existen materiales que, sin estar cargados, atraen y repe- len a otros. Se les llama *imanes* y, a la propiedad que presentan, *magnetismo*. Todo im´an tiene dos polos, llamados norte y sur magn´eticos, de tal forma que los polos del mismo tipo se repelen y los polos de tipo opuesto se atraen. Los imanes crean *campos magn´eticos* a su alrededor. Estos campos magn´eti- cos son campos vectoriales. Las *l´ıneas de campo magn´etico*, que se definen de manera que en cada punto son tangentes al vector campo magn´etico, son cerradas. Los polos norte son manantiales de l´ıneas de campo magn´etico y los polos sur son sumideros de l´ıneas de campo magn´etico. Las l´ıneas se cierran

197

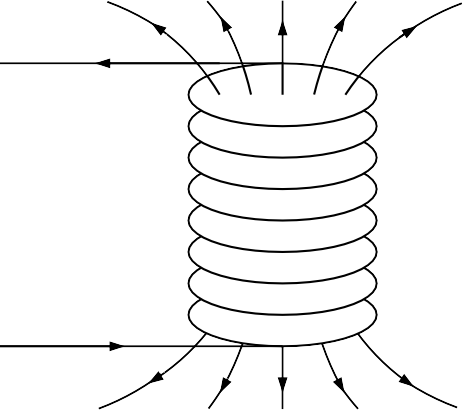
por el interior del im´an.

Denotaremos el campo magn´etico creado por determinada fuente, como un im´an, mediante la notaci´on **B**. La unidad de campo magn´etico es el *tesla* (T).

### Campo magn´etico de un solenoide

Las cargas el´ectricas en movimiento y las corrientes el´ectricas son *fuentes de campo magn´etico*, es decir, son responsables de crear campos magn´eticos. Sin embargo, para nuestras aplicaciones es suficiente considerar aqu´ı un caso particular especialmente sencillo, que es el campo magn´etico creado por un solenoide.

Un *solenoide* es una bobina (geom´etricamente, un cilindro de longitud *,e* y secci´on circular de radio *R*) sobre la cual se enrolla un alambre conductor dando *N* vueltas. Este dispositivo proporciona un *campo magn´etico intenso y aproximadamente uniforme en la regi´on acotada por el alambre enrollado*. Es, por tanto, el an´alogo magn´etico al campo el´ectrico de un condensador. Un esquema de un solenoide y las l´ıneas de campo magn´etico que produce se ven en la figura [8.1.](#_bookmark168)



I

Figura 8.1: Respresentaci´on de un solenoide y el campo magn´etico que genera.

Cuando una corriente el´ectrica *I* recorre un solenoide largo y de muchas *vueltas por unidad de longitud*, representadas por la cantidad *n* = *N/,e*, las l´ıneas magn´eticas en el interior del solenoide son aproximadamente paralelas al eje del solenoide y est´an muy juntas unas de otras, es decir, el campo

magn´etico es intenso y aproximadamente uniforme. Fuera del solenoide, las l´ıneas est´an mucho m´as espaciadas, indicando que el campo es mucho menos intenso. En general, presentan *la misma configuraci´on que las l´ıneas creadas por un im´an permanente de la misma forma y taman˜o*.

El campo magn´etico en el interior del solenoide se puede expresar de la forma que sigue. Supongamos que el eje del solenoide es el eje *z*, es decir, el eje *z* est´a a lo largo del pulgar de nuestra mano derecha cuando los dedos mayores de la misma mano recorren la superficie del solenoide en el sentido de la corriente el´ectrica. Entonces

**B** = *µ*0*nI* **k***,* (8.1)

donde *µ*0 = 4*π* 10*−*7 N*/*A2 es la *permeabilidad magn´etica del vac´ıo*.

*·*

Como vemos en la expresi´on anterior, el campo magn´etico interior de un solenoide es un *campo uniforme*. Este campo se puede hacer au´n mucho mayor si colocamos en el interior del solenoide un *nu´cleo ferromagn´etico*. Este dispositivo (un solenoide largo con un nu´cleo ferromagn´etico) se llama *electroim´an*.

**Ejemplo 8.1.1** *Calculemos el m´odulo del campo magn´etico generado*

*por un solenoide de* 10 *cm de longitud compuesto por* 100 *vueltas de cable cuando por ´este circula una corriente de* 0*,*1 *A.*

***Sol.*** *Tenemos que n* = 100 = 104 *m−*1 *e I* = 0*,*1 *A. Usando la ecuaci´on*

0*,*1

[(8.1)](#_bookmark169) *en forma escalar, llegamos a que el m´odulo del campo magn´etico es*

*B* = *µ*0*nI* = 4*π ·* 10*−*7 *·* 104 *·* 0*,*1 = 4*π ·* 10*−*4 *~* 1*,*26 *mT.*

## Inducci´on electromagn´etica

De forma independiente, Faraday y Henry descubrieron que un campo magn´etico variable en el tiempo pod´ıa producir una fuerza electromotriz. Por ejemplo, si colocamos un im´an permanente cerca de una espira y no hay movimiento relativo entre ellos, la corriente que circula por la espira es cero pues no est´a conectada a ninguna fuente de fem. Pero si aproximamos el im´an a la espira se comprueba que aparece una corriente en ella, como se representa en la figura [8.2.](#_bookmark172) Si alejamos el im´an, la corriente tiene sentido contrario. Y tambi´en se generar´ıa una corriente en la espira si movemos la espira pero no el im´an. La corriente en la espira se llama *corriente inducida*, pues ha

sido producida por un campo magn´etico variable en el tiempo. Y la misma espira se comporta como una fuente de *fem inducida* capaz de producir esa corriente.

S

#### I=0

N

v

S

− +

N

#### I>0

Figura 8.2: Inducci´on electromagn´etica al acercar un im´an a una espira. Si la velocidad relativa del im´an a la espira es cero, entonces la intensidad inducida es cero (figura superior). En otro caso la intensidad es no nula (figura inferior).

El fen´omeno de producci´on de una fem con ayuda de un campo magn´etico se llama *inducci´on electromagn´etica*.

### Ley de Faraday

La *ley de Faraday* de la inducci´on electromagn´etica relaciona la fem in- ducida en un circuito *C* con el cambio de flujo magn´etico a trav´es de la superficie *S* encerrada por ´el. Se escribe

*d*Φ*m*

*Eind* = *−*

*.* (8.2)

*dt*

En esta expresi´on, Φ*m* es el *flujo magn´etico* a trav´es de la superficie *S* ence- rrada por *C*. El flujo se calcula mediante la integral de superficie

-

Φ*m* =

*S*

**B** *· d***S***,* (8.3)

donde *d***S** = **n** *dS*, siendo **n** un vector unitario normal a la superficie *S* en cada punto y *dS* el elemento de ´area en ese punto. La unidad de flujo magn´etico es el *weber*, definido de manera que 1 Wb = 1 T m2.

*·*

Si el campo magn´etico es *uniforme* en la superficie *S*, que ser´a el caso m´as usual en las aplicaciones que vamos a tratar, el flujo magn´etico se puede escribir

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *S.*

El signo menos que aparece en la ley de Faraday indica que la fem inducida *se opone a la causa que la produce* (que es la variaci´on del flujo magn´etico). Una manera de comprender esto es a trav´es de la ley de Lenz.

### Ley de Lenz

La ley de Lenz explica el sentido de la corriente inducida en un circuito. Esta ley se basa en notar que el campo magn´etico neto que penetra un cir- cuito est´a formado por dos contribuciones. La primera es el *campo magn´etico externo* que produce un cambio en el flujo y da lugar a la fem inducida y a la corriente inducida. Adema´s, existe una segunda contribuci´on, dada por el campo magn´etico creado por la propia corriente inducida, que se llama *campo magn´etico inducido*.

La *ley de Lenz* dice que la fem inducida resultante de un flujo magn´eti- co variable tiene tal polaridad que la corriente inducida genera un campo magn´etico inducido que se opone a la variaci´on del flujo magn´etico original. Tratemos de encontrar la direcci´on de la corriente inducida en una espira por un im´an permanente que se acerca a ella. El flujo magn´etico a trav´es de la espira crece porque el campo magn´etico del im´an sobre la espira crece al acercarse. As´ı, el campo magn´etico inducido **B***ind* debe tener un sentido contrario al crecimiento del flujo, por la ley de Lenz, y debe entonces diri- girse hacia abajo. Para crear un campo magn´etico inducido hacia abajo, el sentido de la corriente inducida debe ser horario, como se ve aplicando la regla del sacacorchos. Este sentido de la corriente nos da la polaridad de la fem inducida (indicada por los signos + y en la figura [8.3).](#_bookmark176) En el caso en el que el im´an se alejase de la espira, el sentido de la corriente inducida se

*−*

invertir´ıa.

**Ejemplo 8.2.1** *Consideremos una espira cuadrada de lado* 10 *cm in- mersa en un campo magn´etico uniforme* ***B*** = 5***k*** *mT. El ´angulo α que*

##### B inducido



−

+ A

B del iman aumenta

B inducido

B del iman disminuye



−

+ A

N

S

N

S

Figura 8.3: Campo magn´etico inducido en una espira al acercar (izquierda) y alejar (derecha) un im´an.

*forma el vector unitario normal a la espira* ***n*** *con el campo magn´etico*

***B*** *var´ıa con el tiempo como α*(*t*) = *π t, donde t se mide en segundos.*

2

*Calculemos la fem inducida Eind en la espira.*

***Sol.*** *Para obtener el Eind primero debemos conocer el flujo magn´etico* Φ*m*

*del campo magn´etico* ***B*** *a trav´es de la espira como funci´on del tiempo.*

*Dado que* ***B*** *es uniforme, tenemos*

Φ*m* = ***B*** *·* ***n****S* = 5 cos(*α*)0*,*1 = 0*,*05 cos(*α*) *Wb,*

*donde α es una funci´on conocida del tiempo. Usando ahora la ley de Faraday, obtenemos el resultado deseado*

2

*E*

*ind*

= *−*

*d*Φ*m*

*dt*

= 0*,*05 sin(*α*) = sin

*dα*

*π*

*dt* 40

*π*

2

*t V.*

## Autoinducci´on

La autoinducci´on es el fen´omeno por el cual un circuito por el que pasa una corriente variable induce una fem en el mismo circuito que se opone a la variaci´on de flujo original.

Como vemos en la figura [8.4,](#_bookmark178) consideremos un circuito por el que circula una corriente *I* variable. Esta corriente crea un campo magn´etico variable y

* 1. *AUTOINDUCCIO´N* 203

I



I

B



B

R

Figura 8.4: Ejemplo de autoinducci´on en un circuito simple.

un flujo variable a trav´es del propio circuito. Segu´n la ley de Faraday, habr´a una fem inducida en el circuito, y su valor ser´a

*dI*

*E* = *−L dt ,*

donde *L* es la *autoinductancia* del circuito, cuya unidad es el *henrio*, 1 H, y que se define como

*L* = Φ*m .*

*I*

La autoinductancia s´olo depende de la geometr´ıa del circuito y de las propie- dades de los materiales de los que est´an compuestos las bobinas que tenga el circuito. Una bobina o solenoide con muchas vueltas y un *nu´cleo ferro- magn´etico* posee una *L* mucho mayor que la de un circuito corriente, en el que se suele despreciar su autoinductancia. La bobina se llama entonces *in- ductor* y es un elemento de circuito como las resistencias y los condensadores. Observamos que la fem autoinducida se opone a la causa que la produce, que es la fem variable del generador conectado al circuito. Podemos, pues, considerar un inductor como un elemento en el que cae una tensi´on *VL*. La

*ecuaci´on caracter´ıstica* del inductor es entonces

*dI*

*VL* = *L dt ,* (8.4)

y as´ı aparece normalmente en teor´ıa de circuitos.

**Ejemplo 8.3.1** *Calculemos la autoinductancia del solenoide del ejemplo* [*8.1.1.*](#_bookmark170)

***Sol.*** *Supongamos que por el cable del solenoide circula una corriente estacionaria I, cuyo valor no tiene por qu´e ser el del ejemplo* [*8.1.1.*](#_bookmark170) *El*

*campo magn´etico en su interior es*

*B* = *µ*0*nI,*

*donde n es el nu´mero de vueltas o espiras por longitud n* = *N/,e. El flujo magn´etico total de este campo a trav´es de todas las espiras que forman el solenoide resulta*

Φ*m* = *BNS,*

*donde S es el ´area de las espiras. As´ı, la autoinductancia resulta*

*L* =

Φ*m*

*I*

= *f* = *µ*0

*µ*0 *N INS*

*I*

*N* 2*S*

*,e*

= 4*π ·* 10

*−*7

10020*,*12

0*,*1

*~* 1*,*26 *mH.*

*El resultado obtenido no depende de I, sino de factores geom´etricos del*

*solenoide (longitud, secci´on transversal y nu´mero de espiras).*

### Energ´ıa magn´etica almacenada por un inductor

Igual que un condensador almacena energ´ıa el´ectrica, un inductor almace- na energ´ıa magn´etica cuando es atravesado por una corriente variable. Esta energ´ıa proviene del trabajo realizado por la fuente de fem para establecer una corriente a trav´es del inductor. La *energ´ıa magn´etica Um* almacenada por el inductor es

*Um* =

*LI*2

*.* (8.5)

2

Otra manera de interpretar este resultado es que, al establecer una corriente a trav´es del inductor, ´este crea un campo magn´etico, de manera que el trabajo realizado para establecer la corriente es tambi´en el trabajo necesario para crear ese campo magn´etico. La energ´ıa almacenada en el inductor es por tanto la *energ´ıa del campo magn´etico*.

**Ejemplo 8.3.2** *Calculemos la energ´ıa almacenada por el solenoide del ejemplo* [*8.1.1.*](#_bookmark170)

***Sol.*** *Si usamos la f´ormula* [(8.5)](#_bookmark181)*, necesitamos la autoinductancia que hemos calculado en el ejemplo* [*8.3.1*](#_bookmark180) *y el valor de I* = 0*,*1 *A del enunciado*

*del ejemplo* [*8.1.1:*](#_bookmark170)

*Um* =

*LI*2 1

2

*~* 21*,*26 *·* 10 *·* 0*,*1 *~* 6*,*28 *·* 10 *J.*

*−*3

2

*−*6

## Generadores el´ectricos de corriente al- terna

Pr´acticamente toda la energ´ıa el´ectrica que se utiliza en el mundo se produce en forma de *corriente alterna* (ac) a trav´es de *generadores el´ectricos*. Los generadores el´ectricos producen energ´ıa el´ectrica a partir de un trabajo mec´anico. El funcionamiento de estos generadores se basa en la inducci´on electromagn´etica para producir una fem de tipo arm´onico (es decir, una *fem alterna*) cuando enormes bobinas rotan en presencia de campos magn´eticos producidos por electroimanes.



B

n







Figura 8.5: Esquema de un generador el´ectrico de corriente alterna.

Como vemos en la figura [8.5,](#_bookmark183) un generador el´ectrico simplificado es una

espira de *N* vueltas y a´rea *S* que rota con velocidad angular constante *ω*

entre los polos de un electroim´an. El electroim´an produce un campo magn´eti- co uniforme **B**. Los terminales de la espira est´an conectados a unos anillos

met´alicos deslizantes que giran al rotar la espira. Cada uno de estos anillos roza a una escobilla de grafito (se usa este material para evitar chispazos), de manera que la diferencia de potencial entre los terminales de la espira, que es la misma que hay entre los anillos deslizantes, es igual a la diferencia de potencial entre las escobillas de grafito. Las escobillas son los terminales del circuito externo al que el generador alimenta.

Consideremos una situaci´on inicial en la que el vector normal a la espira forma un ´angulo *α*0 con el campo magn´etico uniforme del electroim´an. Em- pezamos ahora a hacer un trabajo mec´anico rotando la espira con velocidad angular *ω* constante. Esto significa que el a´ngulo *α* que forman la normal a la espira y el campo magn´etico del electroim´an var´ıa en el tiempo segu´n la expresi´on

*α* = *ωt* + *α*0*.*

El flujo magn´etico Φ*m* a trav´es de la espira es

Φ*m* = *NSB* cos *α* = *NSB* cos (*ωt* + *α*0)*.*

Segu´n la ley de Faraday, se induce entonces una fem *E* en la espira dada por

*d*Φ*m*

*E* = *− dt* = *NSBω* sin (*α*0 + *ωt*) = *E*0 sin (*ωt* + *α*0)*,*

donde

*E*0 = *NSBω* (8.6)

es una constante caracter´ıstica del generador, llamada amplitud o *valor de pico* de la fem sinusoidal. La unidad de fem de pico es 1 V. En consecuencia, un generador el´ectrico transforma energ´ıa mec´anica, la necesaria para rotar la espira, en energ´ıa el´ectrica.

Como vemos, la fem *E* es una funci´on peri´odica arm´onica de amplitud

0 y *frecuencia angular ω*. La *frecuencia f* de la fem es *f* = *ω/*(2*π*), que es el nu´mero de veces que la fem alcanza su valor m´aximo en un segundo, contando a partir del momento en que tiene ese mismo valor. El inverso de la frecuencia *T* = 2*π/ω* = 1*/f* es el *periodo* de la fem, el tiempo que pasa desde que la fem tiene su valor m´aximo hasta que vuelve a tenerlo. En la pr´actica, es comu´n dar las caracter´ısticas de un generador de corriente alterna mediante su fem de pico *E*0 y su frecuencia *f* .

*E E*

La fem proporcionada por un generador el´ectrico cambia su polaridad a medida que rota la espira, lo cual es propio de los *circuitos de corriente*

*alterna*. As´ı, si se conecta un circuito externo al generador, que se suele denominar *circuito de carga*, a trav´es de ´el habr´a una corriente alterna que cambiar´a su sentido con la misma frecuencia *f* con la que la fem cambia su polaridad (aunque no necesariamente en el mismo instante). En los circuitos, el s´ımbolo de un generador que proporciona una fem de este tipo es el que vemos en la figura [8.6.](#_bookmark185)



Figura 8.6: S´ımbolo de un generador de fem alterna.

Algunas centrales el´ectricas queman combustible f´osil (carb´on, gas o petr´oleo) para calentar agua y producir gas presurizado que hace girar enormes turbi- nas cuyos ejes est´an unidos al generador, mientras que otras usan cascadas

de agua, energ´ıa nuclear u otros medios como fuente de trabajo mec´anico.

**Ejemplo 8.4.1** *Volvamos a considerar el ejemplo* [*8.2.1*](#_bookmark175) *y calculemos el*

*valor de pico, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo de la fem.* ***Sol.*** *En el ejemplo* [*8.2.1*](#_bookmark175) *analizamos un generador el´ectrico de corriente alterna con una espira con una u´nica vuelta N* = 1*, con el ´angulo inicial α*0 = 0 *y la frecuencia angular*

*π*

2

*As´ı, el valor de pico de la fem es la amplitud de la fem sinusoidal* (*t*)*:*

*ω* = *rad/s.*

*E*0 = 40 *~* 0*,*0785 *V.*

*Finalmente, la frecuencia f y el periodo T de la fem son:*

*π*

*f* = = = 0*,*25 *s−*1*,*

*ω π*

*T* = = 4 *s.*

2*π* 4*π* 1

*f*

## Transformadores

Un *transformador* es una m´aquina el´ectrica que sirve para aumentar o disminuir un voltaje de corriente alterna. En su versi´on m´as simple, est´a formado por dos bobinas de cable conductor enrolladas sobre un u´nico nu´cleo ferromagn´etico. La *bobina primaria* tiene *Np* vueltas de cable y est´a conectada a una fuente de fem alterna *Vin*. La bobina secundaria tiene *Ns* vueltas.

*Ip*



*Ep L*

*−*

+

*Vin*

*Np* : *Ns*

+

*Es*

*−*

Figura 8.7: Esquema de un transformador sin carga.

### Transformador sin carga

Supongamos, en primer lugar, que la bobina secundaria no est´a conectada a un circuito externo, es decir, estamos en la condici´on de circuito abierto en la salida, como vemos en la figura [8.7.](#_bookmark187) La corriente alterna *Ip* en el circuito primario, proporcionada por su generador, atraviesa la bobina primaria y, debido a la presencia del nu´cleo ferromagn´etico, crea un campo magn´etico notable en ella. Este campo magn´etico produce un voltaje en la bobina pri- maria que obedece la ley de la inducci´on electromagn´etica, que escribiremos en la forma

*Ep* = *−Np*

*d*Φ*p ,*

*dt*

siendo Φ*p* el flujo magn´etico a trav´es de una vuelta de la bobina primaria.

Por otro lado, dado que la bobina secundaria est´a tambi´en enrollada en el nu´cleo ferromagn´etico, parte (o todas) las l´ıneas magn´eticas que atraviesan la bobina primaria lo hacen con la secundaria. Debido a esto, en la bobina secundaria se induce una fem dada por

*Es* = *−Ns*

*d*Φ*s , dt*

y, en el caso ideal en que las p´erdidas de flujo son despreciables, se tiene que Φ*s* = Φ*p*, por lo que se llega a

*Es* = *Ns ,* (8.7)

*Ep Np*

lo que constituye la *ecuaci´on del transformador*. As´ı, si *Ns > Np*, el voltaje de pico de la bobina secundaria *Es* es mayor que el voltaje de pico de la bobina primaria *Ep*, y se dice que tenemos un *transformador elevador*. En caso contrario es *Np > Ns* y tenemos un *transformador reductor*. La raz´on *Ns/Np* se llama *cociente de vueltas* del transformador.

Esta´ claro por qu´e *un transformador no opera en corriente continua*: la

corriente en el circuito primario ha de variar con el tiempo para que haya flujo magn´etico en la bobina secundaria.

### Transformador con carga

Supongamos ahora que conectamos un *circuito de carga* a la bobina se- cundaria, como vemos en la figura [8.8,](#_bookmark189) de manera que circula una corriente alterna *Is* a trav´es de ´el.

*Ip Np* : *Ns*

*Vin R*



*Ep L*

*−*

+

*Es*

*−*

+

Figura 8.8: Esquema de un transformador con carga.

Si se desprecian posibles p´erdidas de potencia en el transformador (usual- mente menores del 10 %), se ha de cumplir que la potencia es igual en el circuito primario que en el secundario,

*Ip Ep* = *Is Es,*

donde *Ip* e *Is* son la intensidad de pico en el primario y la intensidad de pico en el secundario, respectivamente. Usando ahora la ecuaci´on del transformador, tenemos

*Is* = *Np .* (8.8)

*Ip Ns*

Por tanto, un transformador que eleva el voltaje de pico disminuye la corriente de pico y viceversa.

Los transformadores juegan un papel importante en la transmisi´on de potencia entre plantas de generaci´on el´ectrica y las comunidades a las que sirven. Cuando se transmite la corriente el´ectrica, hay siempre p´erdidas de potencia debido al calor Joule *PR* = *I*2*R* disipado en los cables, que presentan alta resistencia porque son muy largos. Las compan˜´ıas el´ectricas reducen es- tas p´erdidas usando transformadores que aumentan el voltaje a valores muy altos, reduciendo mucho la corriente. As´ı, las centrales el´ectricas producen voltajes del orden de 104 V. A la salida de las centrales se utilizan transforma- dores elevadores, que elevan los voltajes hasta ´ordenes de 2 105 V y conducen la corriente a larga distancia a trav´es de cables de *alta tensi´on*. Luego, para reducir los voltajes a valores m´as seguros en el interior de las ciudades, se situ´an a la entrada de ´estas *subestaciones de potencia*, con transformadores reductores que dejan los valores en unos 8 103 V. A su vez, cerca de cada a´rea de poblaci´on se instalan nuevos transformadores reductores, para obtener los valores de 200 V t´ıpicos del consumo diario.

*·*

*·*

**Ejemplo 8.5.1** *Consideremos un trasformador construido con dos bo-*

*binas, la primaria con Np* = 100 *vueltas y la secundaria con Ns vueltas. Calculemos el valor de Ns que duplique la fem en el secundario y el valor que la reduzca a la mitad. En sendos casos, veamos c´omo se modifican las corrientes cuando el circuito secundario tiene carga.*

***Sol.*** *Usando las ecuaciones*

*Es* = *Ns ,*

*Ep Np*

*si E se duplica, entonces*

*Is* = *Np ,*

*Ip Ns*

*N*

*s*

*N*

*p*

= 2 *⇒*

*N* = 200*,*

*s*

*y la intensidad en el secundario se reduce a la mitad*

*I*

*s*

*I* 2

*Ip*

= *⇒ I* = *.*

1

*s*

*p*

2

*An´alogamente, si la tensi´on se reduce a la mitad, tenemos*

*N*2 = 50*, Is* = 2*Ip.*

## Tabla resumen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fo´rmula/magnitud | Definici´on | Ecuaci´on |
| **B** = *µ*0*nI* **k**  *µ*0 *n* | Campo magn´etico de un solenoide Permeabilidad magn´etica del vac´ıo Nu´mero de vueltas (espiras) | [(8.1)](#_bookmark169) |
|  | por unidad de longitud |  |
| *I* | Intensidad que circula por las espiras |  |
| **k** | Vector unitario en la direcci´on del |  |
|  | del solenoide y sentido que marca *I* |  |
| *Eind* = *− d*Φ*m*  *dt*  *Eind* f  Φ*m* = *S* **B** *· d***S**  *t*  **B S** | Ley de Lenz-Faraday | [(8.2)](#_bookmark173) |
| Fem inducida |  |
| Flujo magn´etico | [(8.3)](#_bookmark174) |
| Tiempo |  |
| Campo magn´etico |  |
| Vector diferencial normal a la |  |
| superficie *S* |  |
| *VL* = *L dI*  *dt*  *VL* | Ecuaci´on caracter´ıstica del inductor Ca´ıda de tensi´on en el inductor o bobina | [(8.4)](#_bookmark179) |
| *L* | Autoinductancia |  |
| *I* | Intensidad que circula por el inductor |  |
| *t* | Tiempo |  |
| *U* = *LI*2  *m* 2 | Energ´ıa magn´etica del inductor | [(8.5)](#_bookmark181) |
| *E*0 = *NSBω N*  *S* | Valor de pico de una fem sinusoidal Nu´mero de vueltas  A´rea de la espira | [(8.6)](#_bookmark184) |
| *B* | M´odulo del campo magn´etico |  |
| *ω* | Velocidad angular de rotaci´on |  |
| *Es* = *Ns*  *Ep Np*  *Es Ep Ns Np* | Ecuaci´on del transformador  Tensi´on de pico en la bobina secundaria Tensi´on de pico en la bobina primaria Nu´mero de vueltas en la bobina secundaria Nu´mero de vueltas en la bobina primaria | [(8.7)](#_bookmark188) |
|  |  |  |

* 1. *TABLA RESUMEN* 213

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Is* = *Np Ip Ns* | Ecuaci´on del transformador  con carga | [(8.8)](#_bookmark190) |
| *Is Ip* | Intensidad de pico en la bobina secundaria Intensidad de pico en la bobina primaria |  |

## Problemas resueltos

* + 1. Con un solenoide de 15 cm de longitud y 500 vueltas de cable quere- mos generar un campo magn´etico en su interior de 10 mT. Calcula la corriente necesaria por el cable.

**Sol.** El campo magn´etico en en interior de un solenoide de *n* = *N/,e*

vueltas por metro es

*B* = *µ nI* = *µ*0*NI .*

0 *,e*

Despejando, obtenemos la corriente

*B ,e*

*I* = =

*µ*0*N*

10 10*−*3 0*,*15

4*π ·* 10*−*7 *·* 500 *~* 2*,*39 A*.*

*· ·*

* + 1. En el interior de un solenoide de 50 cm de longitud y 500 vueltas de cable colocamos otro solenoide de igual longitud pero con 250 vuel- tas. Teniendo en cuenta que por ambos solenoides circula la misma intensidad de 2 A, calcula el campo magn´etico en el interior del segun- do solenoide y en el espacio entre los dos solenoides cuando las dos corrientes fluyen:
       1. En el mismo sentido.
       2. En sentidos opuestos.

**Sol.** Consideramos el solenoide 1 como el exterior y el 2 como el interior, de modo que *,e*1 = *,e*2 = *,e* = 0*,*5 m, *N*1 = 500, *N*2 = 250. Tomaremos la aproximaci´on de que el campo creado por un solenoide en su interior es uniforme y de m´odulo igual a *µ*0*nI*, mientras que el campo creado por un solenoide en su exterior es cero.

1. Como las corrientes van en el mismo sentido, el campo en el inte- rior es la suma de los campos de ambos solenoides,

*B* = *µ*0*N*1*I* + *µ*0*N*2*I*

= *µ*0*I* (*N*

+ *N* )

*int*

*,e*1

*,e*2

*,e* 1 2

4*π* 10*−*7 2

*· ·*

= 0*,*5 (500 + 250) *~* 3*,*77 mT*.*

Sin embargo, el campo en el hueco entre solenoides s´olo tiene con- tribuci´on del solenoide externo,

*Bhueco* =

*µ*0*N*1*I*

*,e*1

4*π* 10*−*7 500 2

= 0*,*5 *~* 2*,*51 mT*.*

*· · ·*

1. Las corrientes van en sentido opuesto ahora. Esto significa que los campos magn´eticos producidos por los solenoides tienen sentido opuesto, as´ı que el campo total es la resta de los producidos por cada solenoide. El campo en el interior es

*B* = *µ*0*N*1*I − µ*0*N*2*I*

= *µ*0*I* (*N*

*— N* )

*int*

*,e*1

*,e*2

*,e* 1 2

4*π* 10*−*7 2

*· ·*

= 0*,*5 (500 *−* 250) *~* 1*,*26 mT*.*

En el hueco entre los solenoides no cambia nada:

*Bhueco* =

*µ*0*N*1*I*

*,e*1

4*π* 10*−*7 500 2

= 0*,*5 *~* 2*,*51 mT*.*

*· · ·*

* + 1. Una espira cuadrada de 10 cm de lado est´a en el seno de un campo magn´etico uniforme de 50 mT. Determina el flujo magn´etico a trav´es

de la espira cuando el a´ngulo que forman el plano de la espira y el

campo magn´etico valen: 0*o*, 60*o* y 90*o*.

**Sol.** El flujo magn´etico a trav´es de la superficie *S* encerrada por la espira es

-

Φ*m* =

*S*

**B** *·* **n** *dS*

donde **n** es el vector unitario normal a la superficie de la espira y *dS* es un elemento infinitesimal de a´rea en la espira. Si **B** y **n** son *vectores uniformes en la superficie S* (es decir, su m´odulo, direcci´on y sentido son los mismos en todos los puntos de *S*), podemos sacarlos fuera de la integral y el flujo magn´etico queda

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *NS* = *BNS* cos *θ.*

siendo *θ* el a´ngulo que forman los vectores **B** y **n**, y siendo *N* el *nu´mero de vueltas de cable* en la espira. En el ejercicio, nos dan el valor del

a´ngulo *α* que forma el campo magn´etico con el plano de la espira. Este a´ngulo est´a relacionado con *θ* mediante

*π*

*θ* = 2 *− α.*

Tomando *B* = 50 mT, *N* = 1, *S* = 102 = 100 cm2, encontramos:

Para *α* = 0*o* = 0 rad,

*· · · · · −*

Φ = *BNS* cos *θ* = 50 10*−*3 1 100 10*−*4 cos *π* 0

*m* 2

= 0 Wb*.*

Para *α* = 60*o* = *π/*3 rad,

Φ = *BNS* cos *θ* = 50 *·* 10*−*3 *·* 1 *·* 100 *·* 10*−*4 *·* cos *π − π*

*m* 2 3

*~* 4*,*33 *·* 10*−*4 Wb*.*

Para *α* = 90*o* = *π/*2 rad,

Φ = *BNS* cos *θ* = 50 *·* 10*−*3 *·* 1 *·* 100 *·* 10*−*4 *·* cos *π − π*

*m* 2 2

= 5 *·* 10*−*4 Wb*.*

* + 1. Una espira circular, de radio 1 cm y 5 vueltas, se coloca en el interior de un solenoide de 10 cm de longitud, 500 vueltas de cable y 1 A de corriente. Teniendo en cuenta que el ´angulo *θ* que forman el eje de la espira y el eje del solenoide es *θ* = 5 *t*, siendo *t* el tiempo medido en segundos, calcula el flujo magn´etico a trav´es de la espira como funcion del tiempo.

**Sol.** El campo magn´etico creado por el solenoide es

*B* = *µ*0*nI* =

*µ*0*NsI* =

*,e*

4*π* 10*−*7 500 1

= 2*π* mT*.*

*· · ·*

0*,*1

El flujo de este campo magn´etico a trav´es de la espira es

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *NeS* = *BNeS* cos *θ* = 2*π ·* 10*−*3 *·* 5 *· π*(0*,*01)2 *·* cos (5*t*)

= 2*π ·* 10*−*6 cos (5*t*) Wb*.*

Por ejemplo, para *t* = 0*,*5 s tenemos

Φ*m* = 2*π ·* 10*−*6 cos (5 *·* 0*,*5) *~ −*5*,*03 *·* 10*−*6 Wb*.*

* + 1. Generamos un campo magn´etico uniforme **B** = *B* **k**, cuyo m´odulo *B* var´ıa en el tiempo. Entre los tiempos *t* = 0 s y *t* = 1 s la variaci´on es lineal, de modo que *B*(*t* = 0 s) = 40 mT y *B*(*t* = 1 s) = 20 mT. En este campo, est´a inmersa una espira cuadrada de 10 cm de lado, con 10 vueltas, cuyo eje permanece paralelo al campo **B**.
       1. Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira durante el primer segundo.
       2. Teniendo en cuenta que la espira est´a hecha con un cable conduc- tor con una resistencia de 1 Ω, calcula la corriente inducida en la espira junto con su sentido de giro.

**Sol.** El flujo magn´etico en la direcci´on del eje *Z* a trav´es de la super- ficie encerrada por la espira es una funci´on del m´odulo *B* del campo magn´etico:

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *NS* = *BNS* cos *θ* = *B ·* 10 *·* 10*−*2 *·* cos 0 = 0*,*1*B.*

Como la variaci´on del campo es lineal con el tiempo, su derivada tem- poral coincide con suy tasa media de variaci´on en el tiempo. As´ı, el flujo magn´etico en el intervalo 0 s *< t <* 1 s es

*d*Φ*m dt*

= Φ(*t* = 1 s) *−* Φ(*t* = 0 s)

∆*t*

(0*,*1 *·* 20 *·* 10*−*3) *−* (0*,*1 *·* 40 *·* 10*−*3) *−*3

= 1 = *−*2 *·* 10

Wb*/*s*.*

Con esto, resolvemos las preguntas que nos hace el ejercicio.

1. La fem inducida en la espira, segu´n la ley de Faraday, es

*d*Φ*m*

*Eind* = *− dt* = *−*(*−*0*,*002) = 2 mV*.*

1. La corriente inducida en la espira, por la ley de Ohm, es

*I* = *|Eind|* = 0*,*002 = 2 mA*.*

*ind R* 1

Aplicamos la ley de Lenz para conocer el sentido de recorrido de esta corriente. Los pasos son:

Como hemos visto, la tasa de variaci´on del flujo magn´etico a trav´es de la espira en la direcci´on del eje *z* es negativa. Esto indica que el flujo magn´etico a lo largo del eje *z* decrece en el tiempo.

Por tanto, el flujo magn´etico a lo largo del eje *z* crece en el tiempo.

*−*

Segu´n la ley de Lenz, el campo magn´etico creado por la co- rriente inducida en la espira ha de oponerse a la variaci´on de flujo magn´etico. En este caso, ha de ir a lo largo del eje *z*.

Usando la regla del tornillo, la corriente inducida en la espira ser´a antihoraria.

* + 1. Una espira, con un

a´rea de 0*,*1 m2 y 10 vueltas, est´a inmersa en un

campo magn´etico uniforme y constante **B** = 0*,*2**k** T. La espira, ini- cialmente paralela al eje *XY* , comienza a rotar con velocidad angular constante de manera que, al cabo de 0*,*2 s, el eje de la espira forma un a´ngulo de 60*◦* con el campo. Calcula:

*−*

* + - 1. La fuerza electromotriz media inducida en la espira.
      2. La corriente inducida en la espira y su sentido, si ´esta tiene una resistencia de 1*,*5 Ω.

**Sol.** El flujo magn´etico en la direcci´on y sentido del eje *Z* a trav´es de la superficie encerrada por la espira es una funci´on del ´angulo *θ* entre el campo magn´etico y el vector normal a la espira:

*−*

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *NS* = *BNS* cos *θ* = 0*,*2 *·* 10 *·* 0*,*1 *·* cos *θ* = 0*,*2 *·* cos *θ* Wb*.*

La tasa media de variaci´on en el tiempo de este flujo magn´etico en el intervalo 0 s *< t <* 0*,*2 s es

*d*Φ*m* =

*dt*

Φ*m*(0*,*2) *−* Φ*m*(0) =

∆*t*

(0*,*2 cos 60*o*) (0*,*2 cos 0)

0*,*2 = *−*0*,*5 Wb*/*s*.*

*· − ·*

Vamos con las preguntas.

1. La fem inducida en la espira es

*d*Φ*m*

*Eind* = *− dt* = *−*(*−*0*,*5) = 0*,*5 V*.*

1. La corriente inducida en la espira es

*I* = *|Eind|* = 0*,*5 *~* 0*,*33 A*.*

*ind*

*R*

1*,*5

Aplicamos la ley de Lenz:

La tasa de variaci´on del flujo magn´etico a trav´es de la espira en la direcci´on y sentido del eje *Z* es negativa. Esto indica que el flujo magn´etico a lo largo del eje *Z* decrece en el tiempo.

*−*

*−*

Por tanto, el flujo magn´etico a lo largo del eje *Z* crece en el tiempo.

Segu´n la ley de Lenz, el campo magn´etico creado por la co- rriente inducida en la espira ha de oponerse a la variaci´on de flujo magn´etico. En este caso, ha de ir a lo largo del eje *−Z*.

Usando la regla del tornillo, la corriente inducida en la espira ser´a horaria.

* + 1. En el interior de una bobina de 1 m de longitud, de 250 vueltas y por la que circula una corriente de 2 A se coloca un equipo el´ectrico con una superficie perpendicular al eje de la bobina de 25 cm2. Teniendo en cuenta que la fuerza electromotriz inducida sobre el equipo puede ser de 0*,*5 V como m´aximo, calcula
       1. La fuerza electromotriz inducida en el equipo si la corriente se anula a un ritmo constante en 2 ms.
       2. Cu´anto tiempo como m´ınimo debe tardar la corriente del solenoide en anularse de forma uniforme, en caso de aver´ıa, sin dan˜ar al equipo.

**Sol.** El flujo magn´etico, en la direcci´on del campo, a trav´es de la super- ficie del equipo electr´onico es una funci´on de la corriente en la bobina:

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *NS* = *BNS* cos *θ* = (*µ*0*nI*)*S* cos 0

= 4*π ·* 10*−*7 *·* 250 *·* 25 *·* 10*−*4 *I ~* 1*,*57 *·* 10*−*6 *I.*

donde debemos escribir *I* en A y Φ*m* resultar´a en Wb. La fem inducida en el equipo mientras la corriente *I* se va a cero en un intervalo de

tiempo ∆*t* es

*Eind*

= *d*Φ*m dt*

*~ −*1*,*57 *·* 10*−*6 *If − Ii*

*−*6 2

*−*

∆*t*

3*,*14 *·* 10*−*6

= 1*,*57 *·* 10

∆*t ~* ∆*t .*

Ahora ∆*t* debe ir en segundos para tener *Eind* en V.

* + - * 1. Si la corriente se anula en ∆*t* = 2 *·* 10*−*3 s, la sobretensi´on ser´a

3*,*14 *·* 10*−*6 3*,*14 *·* 10*−*6 *−*3

*Eind ~*

∆*t* = 2 *·* 10*−*3 *~* 1*,*57 *·* 10 V*.*

* + - * 1. Si la sobretensi´on m´axima que puede soportar el equipo es 0*,*5 V, el tiempo ∆*t* en que la corriente se va a cero ha de cumplir

3*,*14 *·* 10*−*6 3*,*14 *·* 10*−*6 *−*6

∆*t <* 0*,*5 *⇒* ∆*t >* 0*,*5 *~* 6*,*28 *·* 10 s*.*

* + 1. Se construye una espira rectangular con dos trozos de cable. El primero tiene forma de , con base de longitud igual a 1 m, y el segundo es horizontal y m´ovil (hacia arriba). La espira tiene una superficie inicial de 0*,*5 m2 y el lado m´ovil aumenta su altura a una velocidad constante igual a 2 cm*/*s. Teniendo en cuenta que la espira se mantiene inmerso en un campo magn´etico uniforme y constante de m´odulo *B* = 1 T que se mantiene perpendicular a ella, calcula la fuerza electromotriz inducida como funci´on del tiempo.

*LJ*

**Sol.** El flujo magn´etico en la direcci´on del campo magn´etico a trav´es de la superficie encerrada por la espira es una funci´on de la altura *y* del lado m´ovil:

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *NS* = *BNS* cos *θ* = 1 *·* 1 *·* 1 *· y* cos 0 = *y,*

donde *y* se debe medir en m, Φ*m* se mide en Wb e *y* var´ıa en el tiempo segu´n

*y* = *y*0 + *vt.*

Tenemos el dato *v* = 2 cm*/*s. Para calcular *y*0, usamos la superficie inicial

*S*0 = 1 *· πy*0

*⇒ y*0

= *S*0

1

= 0*,*5 m*.*

Con esto,

*y* = *y*0 + *vt* = 0*,*5 + 2*t.*

La fem inducida en el anillo es

*d*Φ*m*

*d*(0*,*5 + 2*t*)

*Eind* = *− dt* = *−*

*dt* = *−*2 V*,*

que resulta ser independiente del tiempo.

* + 1. Un solenoide de 1000 vueltas por metro tiene una secci´on transversal de 5 cm2. Alrededor de ´este se enrolla una bobina de 500 vueltas. Teniendo en cuenta que inicialmente la corriente por el solenoide es de 0*,*1 A y que ´esta cambia durante 1 s, calcula la fuerza electromotriz promedio inducida en la bobina cuando al final la corriente:
       1. Es cero.
       2. Es el doble.
       3. Cambia de signo.

**Sol.** El flujo magn´etico, en la direcci´on del campo magn´etico del sole- noide, a trav´es de la superficie encerrada por la bobina es una funci´on de la corriente del solenoide dada por:

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *NS* = *BNS* cos *θ* = (*µ*0*nsI*)*NbS*

= 4*π ·* 10*−*7 *·* 500 *·* 103 *·* 5 *·* 10*−*4 *· I* = *π ·* 10*−*4 *· I,*

donde, al medir *I* en *A*, obtenemos Φ*m* en Wb. La fem promedio indu- cida en la bobina en un intervalo de tiempo ∆*t* = 1 s ser´a

*Eind*

= *d*Φ*m dt*

= *−π ·* 10*−*4 *If −* 0*,*1 *~ −*3*,*14 *·* 10*−*4 *·* (*I*

*—* 0*,*1)*.*

1. Si *If* = 0 A,

*−*

1

*f*

*Eind ~ −*3*,*14 *·* 10*−*4 *·* (*If −* 0*,*1) = *−*3*,*14 *·* 10*−*5 V*.*

1. Si *If* = 0*,*2 A,

*Eind ~ −*3*,*14 *·* 10*−*4 *·* (*If −* 0*,*1) = *−*3*,*14 *·* 10*−*5 V*.*

1. Si *If* = *−*0*,*1 A,

*Eind ~ −*3*,*14 *·* 10*−*4 *·* (*If −* 0*,*1) = 6*,*28 *·* 10*−*4 V*.*

* + 1. La corriente alterna *I* = 2 A sin (50*πt*) circula por un solenoide de 500 espiras por metro. Calcula la fuerza electromotriz inducida en una bo- bina, de 100 espiras y 10 cm2 de secci´on, cuyo eje es el mismo que el del solenoide.

**Sol.** El flujo magn´etico, en la direcci´on del campo magn´etico del sole- noide, a trav´es de la superficie encerrada por la bobina es una funcion de la corriente del solenoide:

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *NS* = *BNS* cos *θ* = (*µ*0*nsI*)*NbS*

= 4*π ·* 10*−*7 *·* 500 *·* 100 *·* 10 *·* 10*−*4 *· I ~* 6*,*28 *·* 10*−*5*I.*

La fem inducida en la bobina es

*Eind*

= *d*Φ*m dt*

*~ −*6*,*28 *·* 10*−*5 *d*

[2 *·* sin (100*πt*)]

= *−*6*,*28 *·* 10*−*5 *·* 2 *·* 50*π ·* cos (100*πt*)

*−*

*dt*

*~ −*1*,*97 *·* 10*−*2 V cos (100*πt*)*.*

* + 1. Un corriente de 50 mA circula por un solenoide de secci´on circular, de 20 cm de longitud y 1 cm de radio, formado por 200 espiras. Calcula:
       1. El flujo magn´etico a trav´es de la bobina.
       2. La autoinductancia de la bobina.
       3. La fuerza electromotriz autoinducida en la bobina si la corriente se anula a un ritmo constante en 10*−*3 s.

**Sol.** El campo magn´etico en el interior del solenoide es

*µ*0*NI* 4*π ·* 10*−*7 *·* 200 *·* 50 *·* 10*−*3 *−*5

*B* = *µ*0*nI* = *,e* = 0*,*2 *~* 6*,*28 *·* 10 T*.*

1. El flujo magn´etico a trav´es del solenoide es

Φ*m* = (**B n**) *NS* = *BNS* cos *θ*

*·*

*~* 6*,*28 *·* 10*−*5 *·* 200 *· π* (10*−*2 2 *~* 1*,*26 *·* 10*−*6 Wb*.*

1. La autoinductancia es

Φ*m*

1*,*26 *·* 10*−*6 *−*5

*L* = *I ~*

50 *·* 10*−*3 = 2*,*51 *·* 10 H*.*

1. La fem inducida cuando la corriente se va a cero en 10*−*3 s es

*Eind*

*dI*

= *−L dt*

2*,*51 10*−*5 0 *−* 0*,*05 1*,*26 10*−*3 V*.*

0*,*001

*~ − · ~ ·*

* + 1. Un generador de corriente alterna est´a construido con una bobina cua- drada de 50 vueltas y 0*,*1 m de lado. Teniendo en cuenta que el campo magn´etico en el que est´a inmersa la bobina vale 0*,*5 T y que ´esta gira con una velocidad angular constante igual a 100 rad*/*s, calcula la fuerza electromotriz de pico, la frecuencia y el periodo del generador.

**Sol.** El flujo magn´etico a trav´es de la bobina del generador es

Φ*m* = (**B** *·* **n**) *NS* = *BNS* cos *θ* = 0*,*5 *·* 50 *·* (0*,*1)2 cos (100 *t*)

= 0*,*25 Wb cos (100 *t*)*,*

donde hemos supuesto que inicialmente el eje de la bobina est´a alineado con el campo. Por tanto, la fem inducida es

*d*Φ*m*

*Eind* = *− dt* = 0*,*25 *·* 100 sin (100 *t*) = 25 V sin (100 *t*)*.*

De aqu´ı, la fem de pico es

La frecuencia es

*E*0 = 25 V*. ω* 100

y el periodo es

*f* = = 2*π*

2*π*

2*π ~* 15*,*9 Hz*,*

2*π*

*T* = *ω* = 100 *~* 0*,*0628 s*.*

* + 1. Un transformador est´a formado por dos bobinas, la primera con 200 vueltas y la secundaria con 50 vueltas. Teniendo en cuenta que el vol- taje y la corriente en el primario valen 200 V y 0*,*5 A, respectivamente, calcula el voltaje y la corriente en la bobina secundaria, as´ı como la

potencia que suministra.

**Sol.** Por la ecuaci´on del transformador,

*Vs* = *Ns Vp Np*

*⇒ Vs*

= *VpNs*

*Np*

= 200 *·* 50 = 50 V*.*

200

Para las corrientes, la ecuaci´on es

*Ip* = *Ns Is Np*

*⇒ Is*

= *IpNp*

*Ns*

= 0*,*5 *·* 200 = 2 A*.*

50

La potencia, suponiendo que el transformador es ideal, es la misma en la bobina primaria que en la secundaria. Por tanto,

*P* = *IpVp* = 0*,*5 *·* 200 = 100 W*.*

# Cap´ıtulo 9

**Circuitos de corriente alterna**

En este tema estudiamos los circuitos de corriente alterna. En pri- mer lugar, analizamos los circuitos m´as sencillos: una resistencia, un condensador o una bobina con una fuente alterna sinusoidal. Para considerar situaciones m´as complejas, usamos el concepto de fasor que es una cantidad compleja. Por ello, previamente ha- cemos un breve repaso a los nu´meros complejos. Mediante el uso de fasores, las resistencias, condensadores e inductores obedecen una ley de Ohm generalizada (con la resistencia sustituida por la impedancia correspondiente). Finalmente, estudiamos los con- ceptos de potencia activa, reactiva y aparente.

## 9.1. Resistencias en corriente alterna

Para ver c´omo se comporta una resistencia en corriente alterna, conside- remos un circuito muy simple formado por un generador de corriente alterna de fem *E* (*t*) = *E*0 sin (*ωt* + *α*0) y una resistencia *R*, como en la figura [9.1.](#_bookmark195) En el generador, *E*0 es su fem de pico y *ω* = 2*πf* es su frecuencia angular.

Por la regla de Kirchhoff de las mallas, la ca´ıda de tensi´on en la resistencia ser´a igual a la fem del generador, es decir, *VR*(*t*) = *E* (*t*), de manera que

*VR*(*t*) = *VR,*0 sin (*ωt* + *α*0)*,*

siendo *VR,*0 = *E*0 el valor de pico del voltaje en la resistencia. Por otro lado, 225

*E* (*t*) *R*



Figura 9.1: Circuito con una fem alterna y una resistencia.

por la ecuaci´on caracter´ıstica de una resistencia (la ley de Ohm) tenemos

*I* (*t*) = *VR*(*t*) = *I*

*R R*

*R,*0

sin (*ωt* + *α*0)*,*

donde la *corriente de pico* est´a dada por

Se comprueba entonces que:

*IR,*0

= *VR,*0 *.*

*R*

Los valores de pico del voltaje y la corriente en una resistencia siguen la ley de Ohm *VR,*0 = *RIR,*0.

La corriente *IR*(*t*) en una resistencia est´a *en fase* con su voltaje *VR*(*t*), es decir, ambos tienen la misma dependencia angular (*ωt* + *α*0).

Ambas caracter´ısticas definen el comportamiento de una resistencia en co- rriente alterna. Como veremos m´as adelante, no ocurre algo tan sencillo para los condensadores e inductores.

### Potencia instant´anea y potencia media disipada por una resistencia

La *potencia instant´anea PR*(*t*) disipada por la resistencia en forma de calor es

*PR*(*t*) = *IR*(*t*)*VR*(*t*) = *IR,*0*VR,*0 sin2 (*ωt* + *α*0)*,*

que es siempre positiva, pues la resistencia est´a consumiendo energ´ıa (casi) todo el rato.

Sin embargo, para evitar tener una dependencia temporal en la expresi´on de la potencia, es comu´n referirse a la *potencia media* disipada en un periodo

* 1. *RESISTENCIAS EN CORRIENTE ALTERNA* 227

*T* = 1*/f* = 2*π/ω*, que se define mediante la integral

1 - *T*

*PR,m* = *T*

*PR*(*t*) *dt.*

0

Para una resistencia, la potencia media resulta

*IR,*0*VR,*0 - *T*

*PR,m* =

sin2 (*ωt* + *α*0) *dt* =

*T*

0

*IR,*0*VR,*0

*.*

2

### Valores eficaces

La expresi´on de la potencia media disipada por una resistencia en corrien- te alterna sinusoidal, dada por

*PR,m*

= *IR,*0*VR,*0 *,*

2

se puede escribir de manera que se parezca a la f´ormula de potencia en corriente continua. Para ello, se definen los *valores eficaces* de los voltajes y las corrientes.

El valor eficaz de la corriente en la resistencia es

-

*IR,ef* =

1 *T*

[*IR*(*t*)]2

*T*

0

*dt* =

*IR,*0

*√*2 *,*

y el valor eficaz del voltaje en la resistencia es

*VR,ef* =

1 *T*

[*VR*(*t*)]2

-

*T*

0

*dt* =

*VR,*0

*√*2 *.*

Con ellos, la potencia media disipada en una resistencia en un circuito de corriente alterna sinusoidal es

*PR,m* = *IR,ef VR,ef .*

Obtenemos exactamente la misma forma que en corriente continua. Tambi´en la ley de Ohm se puede escribir en t´erminos de valores eficaces como *VR,ef* = *IR,ef R*, as´ı que la potencia media en una resistencia se puede escribir en cualquiera de las formas de la corriente continua,

*V* 2

*PR,m*

= *I*

2

= *IR,ef*

*VR,ef* =

*R,ef*

*R*

*R,ef R.*

En la red el´ectrica espan˜ola, la tensi´on de pico en los hogares es de unos 311 V y la frecuencia es *f* = 50 Hz, de manera que la fem instant´anea se*√*pue-

de escribir como *E* = 311 V sin(100*π t*). La tensi´on eficaz es *Eef* = *E*0*/* 2 =

220 V. En las viviendas, los aparatos enchufados directamente a la red estan en paralelo, de manera que todos soportan una tensi´on eficaz de 220 V. Mu- chos cableados dom´esticos soportan corrientes m´aximas del orden de 20 A, dado que una corriente mayor sobrecalentar´ıa los cables. Para evitar este pro- blema, cada circuito est´a equipado con un interruptor autom´atico o fusible que salta, abriendo el circuito, cuando la corriente supera ese valor m´aximo. Para tener mayor potencia se suelen instalar varios circuitos, cada uno con su interruptor.

**Ejemplo 9.1.1** *Consideremos un generador de corriente alterna, con*

150 *V de fuerza electromotriz de pico y* 50 *Hz de frecuencia, que est´a conectado a una resistencia de* 5 *k*Ω*. Calculemos el voltaje y corriente de pico as´ı como la potencia media consumida.*

***Sol.*** *Dado que la fem proporcionada por el generador es*

*E* = *E*0 sin (*ωt*) = 150 *V* sin (2*π ·* 50 *· t*) = 150 *V* sin (100*πt*)*,*

*el voltaje de pico en la resistencia R* = 5 *k*Ω *resulta*

*VR,*0 = 150 *V*

*y la corriente de pico*

*VR,*0

*IR,*0 = *R*

= = 0*,*03 *A.*

5 *·* 103

150

*Finalmente, la potencia media disipada en la resistencia es*

*PR,m* = 2 *VR,*0*IR,*0 = 2 *·* 150 *·* 0*,*03 = 2*,*25 *W.*

1

1

## Condensadores en corriente alterna

Veamos c´omo se comporta un condensador en corriente alterna sinusoidal. Como ya vimos, cuando se carga un condensador con una bater´ıa, la corriente se establece entre las placas del condensador durante un periodo de tiempo

* 1. *CONDENSADORES EN CORRIENTE ALTERNA* 229

muy breve, del orden de 5 *RC*. Despu´es la corriente se va a cero. Si fu´esemos capaces en ese momento de cambiar la polaridad de la bater´ıa, volver´ıa a aparecer una corriente en sentido opuesto para descargar y luego cargar el condensador de acuerdo con la nueva conexi´on. Esto es, b´asicamente, lo que que ocurre en corriente alterna, pues la polaridad del generador va cambiando y la carga fluye sin parar en un sentido y luego en el otro.

*E* (*t*) *C*



Figura 9.2: Circuito con una fem alterna y un condensador.

Para entenderlo, tomemos el circuito simple de la figura [9.2](#_bookmark198) formado por un generador de fem (*t*) = 0 sin (*ωt* + *α*0) y un condensador de capacidad *C*. Por la regla de Kirchhoff de las mallas, la diferencia de potencial entre las placas del condensador es igual a la fem del generador, es decir, *VC*(*t*) = (*t*), de manera que

*E*

*E E*

*VC*(*t*) = *VC,*0 sin (*ωt* + *α*0)*,*

siendo *VC,*0 = *E*0 el valor de pico del voltaje. La ecuaci´on caracter´ıstica de un condensador es *Q* = *C VC*, o bien *IC* = *C dVC/dt*, lo que implica

*I* (*t*) = *C dVC* (*t*) = *ωCV*

*C dt*

*C,*0

cos (*ωt* + *α*0)*.*

Podemos escribir entonces la corriente entre las placas del condensador en la forma

*IC*(*t*) = *IC,*0 sin (*ωt* + *α*0 + *π/*2)*.*

Analicemos el resultado comparando las funciones arm´onicas *VC*(*t*) e *IC*(*t*) que hemos obtenido:

Los valores de pico del voltaje y la corriente en un condensador en corriente alterna est´an relacionados mediante la expresi´on

*VC,*0 = *XCIC,*0

donde la cantidad

1

*XC* = *ωC* (9.1)

se llam*√*a *reactancia cap√acitiva*. La relaci´on entre valores eficaces *VC,ef* =

*VC,*0*/*

2, *IC,ef* = *IC,*0*/*

2 es la misma, es decir,

*VC,ef* = *XCIC,ef .*

La reactancia capacitiva juega aqu´ı un papel similar a la resistencia, y tiene unidades de resistencia, pues es el cociente entre el voltaje de pico y la corriente de pico. Pero tiene una diferencia fundamental respecto a ella, que es la dependencia con la frecuencia. Cuando la frecuencia es muy grande, *XC* tiende a cero, lo que implica que el condensador apenas ofrece oposici´on al paso de la corriente. En contraste, cuando la frecuencia tiende a cero (el l´ımite de corriente continua), la reactancia capacitiva se hace infinita y no hay corriente, que era lo que pasaba en el r´egimen estacionario de corriente continua.

A diferencia de lo que ocurre en una resistencia, el voltaje y la corriente en un condensador *est´an desfasados* en un a´ngulo de *π/*2 rad. Esto se debe a que lo que es proporcional al voltaje no es la corriente, sino la carga del condensador, y cuando el voltaje es m´aximo la carga lo es, por lo que la corriente es nula. Como vemos en las expresiones anteriores de *VC*(*t*) e *IC*(*t*), la corriente tiene un sumando +*π/*2 extra en la fase, y por eso se dice que, en un condensador en corriente alterna, la corriente est´a *adelantada* al voltaje en +*π/*2.

### Potencia instant´anea y potencia media en un condensa- dor

La *potencia instant´anea PC*(*t*) que consume un condensador en corriente alterna es

*PC*(*t*) = *IC*(*t*)*VC*(*t*) = *IC,*0*VC,*0 sin (*ωt* + *α*0) cos (*ωt* + *α*0)

= *IC,*0*VC,*0

2

sin (2*ωt* + 2*α*0)*,*

es decir, *alcanza valores positivos y negativos*. En los instantes de valores posi- tivos de la potencia, el condensador est´a tomando energ´ıa del generador para cargarse pero, en los instantes de valores negativos, el condensador devuelve energ´ıa al generador. Esto explica que la *potencia media* sea nula,

1 - *T*

*PC,m* = *T*

*PC*(*t*) *dt* = 0*,*

0

* 1. *INDUCTORES EN CORRIENTE ALTERNA* 231

lo que implica que, en promedio, *el condensador no usa energ´ıa del generador en corriente alterna*.

**Ejemplo 9.2.1** *Volvamos a tomar el generador de corriente alterna del*

*ejemplo* [*9.1.1,*](#_bookmark196) *pero conect´emoslo ahora a un condensador de capacidad C* = 50 *nF. Calculemos el voltaje y corriente de pico as´ı como la potencia media consumida.*

***Sol.*** *El voltaje de pico en el condensador es*

*VC,*0 = 150 *V.*

*Para calcular la corriente de pico, es necesaria la reactancia capacitiva*

*X* =

*C*

1

=

*ωC*

1

*−*9

2*π ·* 50 *·* 50 *·* 10

*~* 6*,*36 *·* 10 Ω*.*

4

*Con ella, tenemos*

*IC,*0 = *X*

*VC,*0

150

*C*

*~* 6*,*36 *·* 106 *~* 2*,*36 *mA.*

*La potencia media consumida por el condensador es PC,m* = 0*.*

## Inductores en corriente alterna

Vamos ahora a examinar el comportamiento de los inductores o bobinas en corriente alterna. Para ello, consideremos un generador de fem *E* (*t*) =

0 sin (*ωt* + *α*0) conectado a una bobina de autoinductancia *L*, como en la figura [9.3.](#_bookmark201)

*E*

*E* (*t*) *L*



Figura 9.3: Circuito con una fem alterna y un inductor.

Como no hay nada m´as conectado entre ellos, la ca´ıda de tensi´on en la bobina es igual a la fem del generador, *VL*(*t*) = *E* (*t*), de modo que

*VL*(*t*) = *VL,*0 sin (*ωt* + *α*0)*,*

siendo *VL,*0 = *E*0 el valor de pico del voltaje. La ecuaci´on caracter´ıstica del in- ductor viene de la ley de Faraday, *VL*(*t*) = *L dIL/dt*. Integrando para obtener la corriente, encontramos

1

*IL*(*t*) =

*L*

- *VL*

(*t*) *dt* = *−*1 *V*

*ωL*

*L,*0

cos (*ωt* + *α*0)*.*

que podemos escribir como

*IL*(*t*) = *IL,*0 sin (*ωt* + *α*0 *− π/*2)*.*

Comparamos *VL*(*t*) e *IL*(*t*):

Los valores de pico del voltaje y la corriente en una bobina en corriente alterna est´an relacionados mediante la expresi´on

*VL,*0 = *XLIL,*0

donde la cantidad

*XL* = *ωL* (9.2)

se llama *reactancia inductiva*. Tambi´en se cumple *VL,ef* = *XL IL,ef* . La reactancia inductiva aparece de nuevo como una resistencia y tiene unidades de resistencia, pues es el cociente entre el voltaje de pico y la corriente de pico, pero depende de la frecuencia. Cuando la frecuencia es muy grande, *XL* tiende a infinito y la bobina se comporta como un circuito abierto. Cuando la frecuencia tiende a cero (l´ımite de corriente continua), la reactancia inductiva se hace nula y la bobina se comporta como un cortocircuito.

El voltaje y la corriente en un inductor *est´an desfasados* en *π/*2 rad. La corriente tiene un sumando *π/*2 extra en la fase, y por eso se dice que, en un inductor en corriente alterna, la corriente est´a *retrasada* respecto al voltaje en *−π/*2.

*−*

### Potencia instant´anea y potencia media en un inductor

La *potencia instant´anea PL*(*t*) que consume una bobina en corriente al- terna es

*PL*(*t*) = *IL*(*t*)*VL*(*t*) = *−IL,*0*VL,*0 sin (*ωt* + *α*0) cos (*ωt* + *α*0)

= *IL,*0*VL,*0

*−*

2

sin (2*ωt* + 2*α*0)*,*

y *alcanza valores positivos y negativos*. En los instantes de valores positivos de la potencia, el inductor toma energ´ıa del generador, y en los instantes de valores negativos, el inductor devuelve energ´ıa al generador. Como en el caso del condensador, la *potencia media* se anula,

1 - *T*

*PL,m* = *T*

*PL*(*t*) *dt* = 0*,*

0

lo que implica que, en promedio, *el inductor no usa energ´ıa del generador en corriente alterna*.

**Ejemplo 9.3.1** *Volvamos a tomar el generador de corriente alterna del*

*ejemplo* [*9.1.1,*](#_bookmark196) *pero conect´emoslo ahora a una bobina de autoinductancia L* = 50 *mH. Calculemos el voltaje y corriente de pico as´ı como la potencia media consumida.*

***Sol.*** *El voltaje de pico en el inductor es*

*VL,*0 = 170 *V.*

*Con la reactancia inductiva*

*XL* = *ωL* = 2*π ·* 50 *·* 50 *·* 10*−*3 *~* 15*,*7 Ω

*obtenemos la corriente de pico como*

*IL,*0 = *X*

*VL,*0

150

*L*

*~* 15*,*7 *~* 9*,*55 *A.*

*La potencia media consumida por la bobina es PL,m* = 0*.*

## Nu´meros complejos

Debido a que, como hemos visto, los voltajes y las corrientes en condensa- dores e inductores est´an desfasados en corriente alterna, es muy u´til estudiar este tipo de circuitos mediante una t´ecnica que se basa en el uso de nu´meros complejos.

Un *nu´mero complejo z* es un par de nu´meros reales *x* e *y* escritos en la forma

*z* = *x* + *iy,*

donde *i* = *√* 1 es la llamada *unidad imaginaria*, tal que *i*2 = 1. Se dice que *x* es la *parte real* de *z* e *y* es la *parte imaginaria* de *z*, y se escriben *x* = Re(*z*), *y* = Im(*z*).

*— −*

### Operaciones b´asicas con nu´meros complejos

Las operaciones m´as comunes con nu´meros complejos son:

Para sumar o restar dos nu´meros complejos *z*1 = *x*1 + *iy*1, *z*2 = *x*2 + *iy*2, se suman o restan sus partes real e imaginaria por separado,

*z*1 *± z*2 = (*x*1 *± x*2) + *i*(*y*1 *± y*2)*.*

Para multiplicar dos nu´meros complejos *z*1 = *x*1 + *iy*1, *z*2 = *x*2 + *iy*2, se multiplica cada factor usando que *i*2 = *−*1,

*z*1*z*2 = (*x*1 + *iy*1)(*x*2 + *iy*2) = (*x*1*x*2 *− y*1*y*2) + *i*(*x*1*y*2 + *x*2*y*1)*.*

Se define el *conjugado* del nu´mero complejo *z* = *x* + *iy* como el nu´mero complejo *z∗* = *x iy*, obtenido con la misma parte real que *z* pero opuesta parte imaginaria. Se puede comprobar entonces que *z* + *z∗* = 2 Re(*z*), *z − z∗* = 2*i* Im(*z*).

*−*

El producto de un nu´mero complejo *z* = *x* + *iy* por su conjugado es un nu´mero real positivo,

*zz∗* = *x*2 + *y*2*,*

tal que su ra´ız cuadrada (con signo positivo) se llama *m´odulo z* del nu´mero complejo *z*,

*| |*

*|z|* = +*√zz∗* = + *x*2 + *y*2*.*

Dados dos nu´meros complejos *z*1 = *x*1 + *iy*1, *z*2 = *x*2 + *iy*2, con *z*2 0, el cociente se puede calcular como

*z*1 = *z*1*z*2*∗*

*z*2 *z*2*z*2*∗*

= (*x*1*x*2 + *y*1*y*2) + *i*(*−x*1*y*2 + *x*2*y*1) *.*

*x*2 + *y*2

2 2

### Forma polar de un nu´mero complejo

La expresi´on de un nu´mero complejo como una pareja (*x, y*) de nu´meros reales recuerda la representaci´on de un punto en un plano *XY* . Para este caso, este plano se llama *plano de Argand* y en ´el el eje *X* se llama *eje real* y el eje *Y* se llama *eje imaginario*. En la figura [9.4](#_bookmark204) podemos ver que la distancia al origen *r* es el m´odulo del nu´mero complejo *z*, es decir, *r* = *|z|*.



y

r



x

Figura 9.4: Representaci´on del nu´mero complejo *z* = *x* + *iy* en el plano de Argand. El m´odulo de *z* es *r* y su argumento *φ*.

Segu´n la figura [9.4](#_bookmark204), podemos escribir el nu´mero complejo *z* = *x* + *iy* como

*z* = *x* + *iy* = *r* cos *φ* + *ir* sin *φ* = *|z|*(cos *φ* + *i* sin *φ*)*.*

Esta u´ltima expresi´on se llama la *forma polar* del nu´mero complejo. El a´ngulo *φ* con el eje real positivo se llama *argumento* del nu´mero complejo *z*, arg(*z*), y, mediante trigonometr´ıa b´asica, se puede calcular como

arg(*z*) = *φ* = arctan *y* = arctan Im(*z*) *,*

*x*

Re(*z*)

cuyo *valor principal* es aquel valor *φ* que satisface *−π < φ ≤ π*.

Hagamos ahora uso de una igualdad muy importante al estudiar nu´meros complejos, que es la *identidad de Euler*. Dice que, si *φ* es un nu´mero real, entonces la exponencial de *iφ* cumple

*eiφ* = cos *φ* + *i* sin *φ.*

Combinando esta identidad con la igualdad *z* = *z* (cos *φ* + *i* sin *φ*), llegamos a que podemos representar cualquier nu´mero complejo *z* en forma polar como

*| |*

*z* = *|z| eiφ,*

siendo *|z|* su m´odulo y *φ* su argumento.

## Fasores, impedancias y ley de Ohm ge- naralizada

Los circuitos de corriente alterna con *componentes reactivos* (es decir, con reactancia), como se conocen colectivamente a los condensadores e inducto- res, son m´as complicados que los circuitos resistivos (es decir, con resistencia). Esto se debe a que los circuitos reactivos tienen un comportamiento que de- pende de la frecuencia y, adem´as, las sen˜ales se adelantan o retrasan unas de otras, impidiendo que se siga una ley proporcional.

Consideremos circuitos de corriente alterna con un s´olo generador de fre- cuencia angular *ω*. Vamos a ver c´omo, mediante los nu´meros complejos y la *representaci´on en fasores* de voltajes y corrientes alternas, se puede genera- lizar la ley de Ohm y usarla tanto para componentes reactivos como para componentes resistivos, reemplazando la palabra resistencia por la palabra *impedancia*.

La representaci´on en fasores se basa en las siguientes reglas:

Asociamos a cada voltaje o corriente un nu´mero complejo definido me- diante el valor de pico y la fase inicial, eliminando la frecuencia angular *ω*. Por ejemplo,

*V* (*t*) = *V*0 sin (*ωt* + *α*0) *⇒ V* = *V*0*eiα*0 *.*

Estos nu´meros complejos que representan voltajes o corrientes se lla- man *fasores*.

Para volver a la forma sinusoidal del voltaje o la corriente, se multiplica el fasor por *eiωt* y se toma la parte imaginaria del resultado. Por ejemplo,

(

*V* = *V*0*eiα*0 *⇒ V* (*t*) = Im *V eiωt* = Im *V*0*ei*(*ωt*+*α*0)

= *V*0 sin (*ωt* + *α*0)*.*

* 1. *FASORES, IMPEDANCIAS Y LEY DE OHM GENARALIZADA* 237

### Impedancia y ley de Ohm generalizada

El uso de fasores permite generalizar la ley de Ohm a circuitos de corriente alterna que contienen resistencias, condensadores e inductores. Veamos cada elemento en fasores.

En el apartado dedicado a las resistencias, hab´ıamos estudiado el circui- to de la figura [9.1](#_bookmark195) formado por un generador de fem *E* (*t*) = *E*0 sin (*ωt*) (tomamos *α*0 = 0 eligiendo el origen de tiempos de forma conveniente) y una resistencia *R*. El resultado para el voltaje en la resistencia era

*VR*(*t*) = *VR,*0 sin (*ωt*)*,* con *VR,*0 = *E*0, y para la corriente

*IR*(*t*) = *IR,*0 sin (*ωt*)*,*

con *IR,*0 = *VR,*0*/R*. Los fasores correspondientes a ambas cantidades son

*V R* = *VR,*0*,*

*I R* = *IR,*0 =

*VR,*0 *. R*

El cociente entre el fasor voltaje y el fasor corriente se llama *impedancia Z* del elemento. As´ı, la *impedancia resistiva* es, simplemente, la propia resistencia

*ZR* = *R,* (9.3)

y la resistencia sigue la *ley de Ohm generalizada*

*VR* = *ZRIR.*

Pasemos al caso de los condensadores. Ten´ıamos el circuito de la figura

[9.2](#_bookmark198) con un generador de fem (*t*) = 0 sin (*ωt*) y un condensador de capacidad *C*. El voltaje en el condensador resultaba

*E E*

*VC*(*t*) = *VC,*0 sin (*ωt*)*,* con *VC,*0 = *E*0, y la corriente

*IC*(*t*) = *IC,*0 sin (*ωt* + *π/*2)*,*

con *IC,*0 = *VC,*0*/XC*, donde la reactancia capacitiva estaba dada por

*XC* = 1*/*(*ωC*). Con estos datos, el fasor voltaje es

*V C* = *VC,*0

y el fasor corriente

*I C* = *IC,*0 *e*

*iπ/*2 =

*VC,*0 *XC*

*eiπ/*2*.*

En consecuencia, la *impedancia capacitiva* resulta

*Z* = *VC*

*C*

*I C*

= *XC*

*e−iπ/*2 = *−iXC*

= *−i ,* (9.4)

*ωC*

por lo que el condensador sigue la *ley de Ohm generalizada*

*VC* = *ZCIC.*

Terminamos con el caso de una bobina. En el circuito de la figura [9.3](#_bookmark201) con un generador de fem (*t*) = 0 sin (*ωt*) y una bobina de autoinduc- tancia *L*, el voltaje en el inductor era

*E E*

*VL*(*t*) = *VL,*0 sin (*ωt*)*,* con *VL,*0 = *E*0, y la corriente era

*IL*(*t*) = *IL,*0 sin (*ωt − π/*2)*,*

con *IL,*0 = *VL,*0*/XL* y la reactancia inductiva dada por *XL* = *ωL*. En el formalismo de fasores, el fasor voltaje es

*V L* = *VL,*0

y el fasor corriente es

*I L*

= *IL,*0

*e−iπ/*2 = *VL,*0 *e−iπ/*2*.*

*X*

*L*

Se obtiene que la *impedancia inductiva* es

*Z* = *VL*

*L*

*I L*

= *XL*

*eiπ/*2 = *iXL*

= *iωL* (9.5)

y la bobina sigue la *ley de Ohm generalizada*

*V L* = *ZLI L.*

En conclusi´on, la relaci´on entre los fasores de corriente y voltaje se puede expresar mediante una sola ley, que es la ley de Ohm generalizada

*V* = *ZI.* (9.6)

Adema´s, la impedancia *Z* de varios elementos conectados en serie o en para- lelo obedece las mismas reglas que las asociaciones de resistencias, teniendo en cuenta que se opera ahora con nu´meros complejos, y podemos analizar los circuitos de corriente alterna con los mismos m´etodos aprendidos para los circuitos de corriente continua pero aplicados a los fasores: leyes de Kirchhoff, divisor de voltaje, equivalente de Th´evenin o de Norton, etc.

**Ejemplo 9.5.1** *Consideremos la asociaci´on en serie de una resistencia*

*de* 1 *k*Ω *y una bobina L* = 2 *H en un circuito con una frecuencia de* 50 *Hz. Calculemos la impedancia equivalente.*

***Sol.*** *Las impedancias de la resistencia y la bobina son*

*ZR* = *R* = 103 Ω

*ZC* = *iωL* = *i* 2*π ·* 50 *·* 2 = 100*π i* Ω*.*

*Como est´an en serie, la impedancia equivalente, en forma binomial, es*

*Z* = *ZR* + *ZC* = (1000 + 100*π i*) Ω*.*

*Para la forma polar, hay que calcular el m´odulo y argumento de Z,*

*|Z|*

*φ*

= arctan

= 10002 + (100*π*)2 *~* 1048 Ω*,*

100*π*

1000

*~* 0*,*304 *rad.*

*Con esto,*

*Z* = *|Z| e ~* (1048 *e*

*iφ*

0*,*304 *i*

Ω*.*

## Potencias activa, reactiva y aparente

Hemos calculado ya las potencias instant´aneas y medias consumidas por elementos tales como resistencias, condensadores y bobinas. Queremos cal- cular tambi´en la potencia media que proporciona un generador de corriente

alterna cuando est´a conectado a varios elementos. En relaci´on con ello, se sue- le generalizar el concepto de potencia media en corriente alterna definiendo tambi´en potencias reactivas y aparentes.

### Potencia media o activa de un elemento

Se define la *potencia media* o *potencia activa* proporcionada por un gene- rador o consumida por un elemento con impedancia como

*P* = *I*0*V*0

*m* 2

cos *φ* = *Ief*

*Vef*

cos *φ,*

donde *φ* es la fase de la impedancia del elemento y el resto de magnitudes se refieren al elemento. En particular:

Para una resistencia, *ZR* = *R*, por lo que *φ* = 0. De aqu´ı, la potencia activa disipada por una resistencia es

*PR,m*

= *IR,*0*VR,*0

2

= *IR,ef*

*VR,ef .*

Para un condensador, *ZC* = *−i/ωC*, por lo que *φ* = *−π/*2 y se tiene

*PC,m*

= *IC,*0*VC,*0

2

cos *− π* = 0*.*

Para un inductor, *ZL* = *iωL*, por lo que *φ* = *π/*2 y

2

*PL,m*

= *IL,*0*VL,*0

2

cos *π* = 0*.*

Para calcular la potencia activa proporcionada por un generador de fem por el que pasa una corriente alterna sinusoidal *I*, se necesita el valor de la *impedancia total* o *equivalente Z* del circuito respecto del generador. Una vez calculada, se determina su fase *φ* y resulta

2

*E*

*PE ,m*

= *I*0*E*0

2

cos *φ* = *Ief*

*Eef*

cos *φ.*

### Potencia reactiva de un elemento

Se define la *potencia reactiva Pr* de un elemento como

*P* = *I*0*V*0

*r* 2

sin *φ* = *Ief*

*Vef*

sin *φ,*

donde, de nuevo, *φ* es la fase de la impedancia del elemento y el resto de magnitudes se refieren al elemento en cuesti´on. En particular:

Para una resistencia, *φ* = 0 y

*PR,r*

= *IR,*0*VR,*0

2

sin 0 = 0*.*

Para un condensador, *φ* = *−π/*2 y

*P* = *IC,*0*VC,*0 sin *− π* = *− IC,*0*VC,*0

*C,r*

2

2

2

= *−I V .*

Para un inductor, *φ* = *π/*2 y

*C,ef*

*C,ef*

*P* = *IL,*0*VL,*0

*L,r*

2

sin *π* = *IL,*0*VL,*0 = *I V .*

Para un generador que alimenta un circuito con impedancia total *Z* y fase *φ*,

2

2

*L,ef*

*L,ef*

*PE ,r*

= *I*0*E*0

2

sin *φ* = *Ief*

*Eef*

sin *φ.*

### Potencia aparente de un elemento

Se define la *potencia aparente Pa* de un elemento como

*P* = *P* 2 + *P* 2 = *I*0*V*0 = *I V .*

As´ı:

*a m r* 2

*ef ef*

Para una resistencia,

*PR,a*

= *IR,*0*VR,*0

2

= *IR,ef*

*VR,ef .*

Para un condensador,

*P*

*C,a*

= *IC,*0*VC,*0

2

= *IC,ef*

*VC,ef .*

Para un inductor,

*PL,a*

= *IL,*0*VL,*0

2

= *IL,ef*

*VL,ef .*

Para un generador,

*PE ,a*

= *I*0*E*0

2

= *Ief*

*Eef .*

### Factor de potencia

Relacionado con las potencias que hemos definido est´a el llamado *factor de potencia*, que es el cociente entre la potencia activa o media y la potencia aparente:

Factor de potencia = *Pm*

*Pa*

= cos *φ.*

El factor de potencia var´ıa entre 0 para circuitos reactivos (que s´olo tienen condensadores e inductores) y 1 para circuitos resistivos (s´olo con resisten- cias). Las compan˜´ıas el´ectricas cobran a los hogares en funci´on de la potencia media que gastan, pero a veces tienen en cuenta el factor de potencia para las industrias. Esto es porque los componentes reactivos, esencialmente bobinas, hacen que no se transmita toda la potencia a la carga, ya que almacenan la energ´ıa. El factor de potencia se puede mejorar, es decir, aumentar, colocan- do en los circuitos condensadores si la impedancia es inductiva (el caso m´as usual) y bobinas si es capacitiva.

* 1. *TABLA RESUMEN* 243

## Tabla resumen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fo´rmula/magnitud | Definici´on | Ecuaci´on |
| *V*0 = *XI*0 | Ley para los valores de pico |  |
| *V*0 | Voltaje de pico |
| *I*0 | Corriente de pico |
| *X* | Reactancia |
| *XR* = *R XC* = 1  *ωC*  *ω* | Resistencia  Reactancia capacitiva del condensador Frecuencia de la fuente | [(9.1)](#_bookmark199) |
| *C* | Capacidad del condensador |  |
| *XL* = *ωL* | Reactancia inductiva de la bobina | [(9.2)](#_bookmark202) |
| *L* | Autoinduccio´n |  |
| *V* = *ZI* *V*  *Z*  *I* | Ley de Ohm generalizada | [(9.6)](#_bookmark209) |
| Fasor del voltaje |  |
| Impedancia |  |
| Fasor de corriente |  |
| *ZR* = *R ZC* = *−i*  *ωC* | Impedancia resistiva Impedancia capacitiva | [(9.3)](#_bookmark206)  [(9.4)](#_bookmark207) |
| *ZL* = *iωL* | Impedancia inductiva | [(9.5)](#_bookmark208) |

## Problemas resueltos

* + 1. Calcula el voltaje y corriente de pico as´ı como la potencia media consu- mida por un generador, de 120 V de fem de pico y 60 Hz de frecuencia, cuando se conecta a:
       1. Una resistencia de 5 kΩ.
       2. Un condensador de 10 pF.
       3. Una bobina de 20 mH.

**Sol.** La fem proporcionada por el generador es

*E* = *E*0 sin (*ωt*) = 120 sin (2*π ·* 60 *· t*) = 120 V sin (120*πt*)*.*

*a*) Si se conecta a una resistencia *R* = 5 kΩ, el voltaje de pico en la resistencia ser´a

*VR,*0 = 120 V

y la corriente de pico

*IR,*0

= *VR,*0

*R*

120

= 5 *·* 103

= 24 mA*.*

La potencia media disipada en la resistencia es

*PR,m*

1

= 2 *VR,*0

*IR,*0

= 1 *·* 120 *·* 24 *·* 10*−*3 = 2*,*88 W*.*

* 1. Si el generador se conecta a un condensador *C* = 10 pF, el voltaje de pico en el condensador ser´a

2

*VC,*0 = 120 V*.*

Para calcular la corriente de pico, es necesaria la reactancia capa- citiva:

*X* = 1 = 1 *~* 2*,*65 *·* 108 Ω

*C ωC*

Con ella,

2*π ·* 60 *·* 10 *·* 10*−*12

*IC,*0

= *VC,*0

*XC*

120 4*,*52 10*−*7 A*.*

2*,*65 *·* 108

*~ ~ ·*

La potencia media consumida por el condensador es *PC,m* = 0.

* 1. Si se conecta a un inductor *L* = 20 10*−*3 H, el voltaje de pico en el inductor ser´a

*·*

*VL,*0 = 120 V*.*

La reactancia inductiva es

*XL* = *ωL* = 2*π ·* 60 *·* 20 *·* 10*−*3 *~* 7*,*54 Ω

y la corriente de pico resulta

*IL,*0

= *VL,*0

*XL*

120

*~* 7*,*54

*~* 15*,*9 A*.*

La potencia media consumida por la bobina es *PL,m* = 0.

1. Un generador de corriente alterna de 50 Hz de frecuencia est´a conectado a una asociaci´on en serie de una resistencia *R* = 3 kΩ y un condensador *C* = 15 *µ*F. Calcula la impedancia equivalente y expresa el resultado en forma de binomio y en forma polar.

**Sol.** Las impedancias de la resistencia y el condensador son

*ZR* = *R* = 3 *·* 103 Ω*,*

*Z* = *−i*

*C ωC*

= *−i* 212 *i* Ω*.*

2*π ·* 50 *·* 15 *·* 10*−*6

*~ −*

Como la resistencia y el condensador est´an en serie, la impedancia equivalente es

*Z* = *ZR* + *ZC ~* (3000 *−* 212 *i*) Ω*.*

Esta es la forma binomial de *Z*. Para la forma polar, hay que calcular el m´odulo y argumento de *Z*:

*−*212*φ* = arctan *~ −*0*,*0705 rad*.*

*|Z|* = 30002 + (*−*212)2 *~* 3007 Ω*,*

3000

Con esto, la impedancia resulta

*Z* = *|Z| eiφ ~* (3007 *e−*0*,*0705 *i* Ω

1. Una resistencia *R* = 3 kΩ y un inductor *L* = 2*,*4 H est´an conecados en paralelo en un circuito de corriente alterna con 50 Hz de frecuencia. Calcula la impedancia equivalente en forma de binomio y en forma polar.

**Sol.** Las impedancias de la resistencia y el inductor son

*ZR* = *R* = 3 *·* 103 Ω*,*

*ZL* = *iωL* = *i ·* 2*π ·* 50 *·* 2*,*4 = 240*π i* Ω*.* La impedancia equivalente cumple

1 = 1 + 1 = 1 + 1 = 1 *− i ~* 3*,*33*·*10*−*4*−*1*,*33*·*10*−*3 *i.*

*Z ZR ZL* 3000 240*π i* 3000 240*π*

Para obtener *Z*, se ha de invertir el resultado anterior,

1 3*,*33 *·* 10*−*4 + 1*,*33 *·* 10*−*3 *i*

*~*

*Z* =

3*,*33 *·* 10*−*4 *−* 1*,*33 *·* 10*−*3 *i* (3*,*33 *·* 10*−*4)2 + (1*,*33 *·* 10*−*3)2

*~* (178 + 709 *i*) Ω*,*

donde hemos multiplicado, arriba y abajo, por el conjugado del de- nominador para pasar por la segunda igualdad. Para la forma polar, calculamos el m´odulo y argumento de *Z*,

*|Z| ~ √*1782 + 7092 *~* 731 Ω*,*

*~*

*φ* = arctan 709 1*,*32 rad*.*

178

Con esto,

*Z* = *|Z| eiφ ~* (731 *e*1*,*32 *i* Ω*.*

1. Calcula la corriente instant´anea y la potencia instant´anea proporciona- da por el generador de un circuito formado por un generador el´ectrico, de 120 V de fem de pico y 50 Hz de frecuencia, conectado a un conden- sador de 5 *µ*F.

**Sol.** Con los datos del problema. la fem del generador es

*E* (*t*) = *E*0 sin (*ωt*) = 120 V sin (100*πt*)*.*

Pasamos el circuito a fasores e impedancias. El fasor de la fem del generador es

*E* = *E*0 *ei·*0 = 120 V

y la impedancia del condensador es

*Z* = *−i*

*C ωC*

= *−i* 637 *i* Ω*.*

100*π ·* 5 *·* 10*−*6

*~ −*

Ahora, podemos resolver el circuito como si fuera de corriente continua con resistencias. El fasor corriente en el circuito es, por la ley de Ohm generalizada,

*I* = *E*

*ZC*

120

*~ −*637 *i*

120

=

637 *e−i π/*2

*~* (0*,*188 *ei π/*2 A*,*

donde se ha usado que

*−i* = *e−i π/*2*.*

Una vez encontrada la soluci´on al circuito de fasores, pasamos el resul- tado de nuevo a valores de corriente alterna:

*I ~* (0*,*188 *ei π/*2 A *⇒ I*(*t*) *~* 0*,*188 A sin 100*πt* + *π*

2

= 0*,*188 A cos (120*πt*)*.*

La potencia instant´anea proporcionada por el generador es

*P* (*t*) = *I*(*t*)*E* (*t*) *~* 0*,*188 A cos (120*πt*) *·* 120 V sin (100*πt*)

*~* 22*,* 6 W sin (100*πt*) cos (100*πt*) = 11*,*3 W sin (200*πt*)*.*

En la u´ltima igualdad, se ha usado que

sin (2*α*) = 2 sin *α* cos *α*

para cualquier nu´mero *α*.

1. Calcula la corriente instant´anea y la potencia instant´anea proporciona- da por el generador de un circuito formado por un generador el´ectrico, de 120 V de fem de pico y 50 Hz de frecuencia, conectado a un inductor de 5 H.

**Sol.** La fem del generador es

*E* (*t*) = *E*0 sin (*ωt*) = 120 V sin (100*πt*)*.*

Pasamos el circuito a fasores e impedancias. El fasor de la fem del generador es

*E* = *E*0 = 120 V

y la impedancia del inductor es

*ZL* = *iωL* = *i ·* 100*π ·* 5 = 500*π i* Ω*.*

Ahora, mediante la ley de Ohm generalizada, el fasor corriente en el circuito es

*I* = *E*

*ZL*

120

=

500*π i*

120

= 500*π ei π/*2

*~* (0*,*0764 *e−i π/*2 A*,*

donde se ha usado que

*i* = *ei π/*2*.*

Pasamos el resultado de nuevo a valores de corriente alterna:

*I ~* (0*,*0764 *e−i π/*2 A *⇒ I*(*t*) *~* 0*,*0764 A sin 100*πt − π*

2

= *−*0*,*0764 A cos (100*πt*)*.*

La potencia instant´anea proporcionada por el generador es

*P* (*t*) = *I*(*t*)*E* (*t*) = *−*0*,*0764 A cos (100*πt*) *·* 120 V sin (100*πt*)

*~ −*9*,*17 W sin (100*πt*) cos (100*πt*) *~ −*4*,*58 W sin (200*πt*)*.*

As´ı, a modo de ejemplo, en el instante *t*1 = 0*,*007 s, la potencia propor- cionada por el generador es

*P*1 *~ −*4*,*58 W sin (200*π ·* 0*,*007) *~* 1*,*42 W*,*

mientras que en el instante *t*2 = 0*,*009 s resulta

*P*2 *~ −*4*,*58 W sin (200*π ·* 0*,*009) *~ −*3*,*71 W*.*

1. Calcula la corriente y el voltaje de pico en cada elemento de un circuito *RC* en serie. Ten en cuenta que el que generador tiene una fem de pico de 311 V con una frecuencia de 50 Hz, el condensador tiene una capacidad de 75 *µ*F y la resistencia es de 300 Ω.

**Sol.** Las impedancias de la resistencia y el condensador son:

*ZR* = *R* = 300 Ω*,*

*Z* = *−i*

*C ωC*

= *−i* 42*,*4 *i* Ω*.*

2*π ·* 50 *·* 75 *·* 10*−*6

*~ −*

La impedancia equivalente en serie es

*Z* = *ZR* + *ZC ~* (300 *−* 42*,*4 *i*) Ω*.*

El ejercicio nos pide valores de pico. Para calcularlos, no hace falta obtener los fasores. Basta con usar valores de pico y m´odulos de im- pedancias. Por ejemplo, el valor de pico de la corriente en el circuito es

*E*0 311

*I*0 = *|Z| ~* 3002 + (*−*42*,*4)2 *~* 1*,*03 A*.*

Los valores de pico de los voltajes en la resistencia y el condensador son, por la ley de Ohm generalizada,

*VR*0 = *I*0 *|ZR| ~* 1*,*03 *·* 300 *~* 308 V*, VC*0 = *I*0 *|ZC| ~* 1*,*03 *·* 42*,*4 *~* 43*,*5 V*.*

1. Calcula la corriente y el voltaje instant´aneos en cada elemento de un circuito *RL* en paralelo. Ten en cuenta qu el generador tiene una fem de pico de 311 V y una frecuencia de 50 Hz, la bobina tiene una auto- inductancia de 2 H y la resistencia es de 500 Ω.

**Sol.** Las impedancias son:

*ZR* = *R* = 500 Ω*,*

*ZL* = *iωL* = *i ·* 2*π ·* 50 *·* 2 = 200*π i* Ω*.* La impedancia equivalente en paralelo cumple

1 = 1 + 1 = 1 + 1 = 1 *− i ~* 2 *·* 10*−*3 *−* 1*,*59 *·* 10*−*3 *i.*

*Z ZR ZC* 500 200*π i* 500 200*π*

Invirtiendo el resultado anterior,

1

*~*

2 *·* 10*−*3 + 1*,*59 *·* 10*−*3 *i*

*Z* =

2 *·* 10*−*3 *−* 1*,*59 *·* 10*−*3 *i* (2 *·* 10*−*3)2 + (1*,*59 *·* 10*−*3)2

*~* (306 + 244 *i*) Ω*.*

En forma polar, dado que

*|Z| ~ √*3062 + 2442 *~* 391 Ω*,*

*~*

*φ* = arctan 244 0*,*673 rad*,*

306

tenemos

*Z ~* (391 *e*0*,*673 *i* Ω*.*

La fem instant´anea proporcionada por el generador es la misma que el voltaje de la resistencia y el inductor, pues todos los elementos est´an en paralelo:

*E* (*t*) = *VR*(*t*) = *VL*(*t*) = *E*0 sin (*ωt*) = 311 V sin (100*πt*)*.*

Dado que el ejercicio nos pide valores instant´aneos, hemos de usar fa- sores. El fasor de los voltajes en el generador, resistencia y bobina es

*E* = *VR* = *VL* = 311 V*.*

A partir de aqu´ı y del valor de las impedancias, los fasores de las co- rrientes en el generador, la resistencia y la bobina son

*I* =

*E ~* 311

*~* (0*,*795 *e−*0*,*673 *i* A*,*

*I R* =

*Z* 391 *e*0*,*673 *i*

*VR* 311

= = 0*,*622 A*, ZR* 500

*I L* =

*VL* 311

=

*ZL* 200*π i*

*~* (0*,*469 *e−i π/*2 A*.*

S´olo resta pasar estos fasores a sen˜ales alternas:

*I*(*t*) *~* 0*,*795 A sin (100*πt −* 0*,*673)*,*

*IR*(*t*) *~* 0*,*622 A sin (100*πt*)*,*

*IL*(*t*) *~* 0*,*4695 A sin (100*πt − π/*2)*.*

8. Un generador de corriente alterna, de 220 V de fem eficaz y 50 Hz de frecuencia, est´a conectado a una red de impedancia equivalente igual (150 + 200 *i*) Ω. Calcula la corriente instant´anea a trav´es del generador as´ı como las potencias media, reactiva y aparente proporcionadas por el generador.

**Sol.** Como fem de pico del generador es

*Eef*

= *E*0

2

*√*

*⇒ E*0

= *√*2 *Eef*

= *√*2 *·* 220 *~* 311 V*,*

la fem instant´anea resulta

*E* (*t*) = *E*0 sin (*ωt*) *~* 311 V sin (100*πt*)*.*

Por otro lado, el m´odulo y argumento de la impedancia equivalente son

200*φ* = arctan *~* 0*,*644 rad*.*

*|Z|* = (150)2 + (200)2 = 250 Ω*,*

150

As´ı, en forma polar, la impedancia *Z* es

(

*Z* = 250 *e*0*,*644 *i* Ω*.*

Para calcular la corriente instant´anea a trav´es del generador, utilizamos fasores. El fasor de la fem es

*E* = *E*0 *~* 311 V*.*

El fasor de la corriente total, por la ley de Ohm generalizada, es

*I* =

*E ~* 311

*~* (1*,*24 *e−*0*,*644 *i* A*.*

La corriente instant´anea resulta

*Z*

250 *e*0*,*644 *i*

*I*(*t*) *~* 1*,*24 A sin (100*πt −* 0*,*644)*.*

Las potencias media, reactiva y aparente proporcionadas por el gene- rador son

1 1

*Pm* =

2 *E*0*I*0 cos *φ ~* 2 *·* 311 *·* 1*,*24 *·* cos 0*,*644 *~* 308 W*,*

1 1

*Pr* =

2 *E*0*I*0 sin *φ* = 2 *·* 311 *·* 1*,*24 *·* sin 0*,*644 *~* 232 W*,*

1 1

*Pa* =

2 *E*0*I*0 *~* 2 *·* 311 *·* 1*,*24 = 386 W*.*

1. El generador de un circuito de corriente alterna proporciona unas po- tencias reactiva y aparente de 50 W y 100 W, respectivamente. Adema´s, la parte imaginaria (reactiva) de la impedancia equivalente del circuito es 500 Ω. Calcula:
   1. El factor de potencia del circuito.
   2. La potencia media proporcionada por el generador.
   3. La parte real (resistiva) de la impedancia total.

###### Sol.

1. Las potencias reactiva y aparente, que son datos del ejercicio, se pueden escribir como

*Pr* =

*Pa* = Dividiendo ambas ecuaciones,

1

2 *E*0*I*0 sin *φ,*

1

2 *E*0*I*0*.*

sin *φ* = *Pr*

*Pa*

De aqu´ı, el factor de potencia es

50 1

= = *.*

100 2

cos *φ* = 1 *−* sin2 *φ* = 1 *−* 1 = *√*3 *~* 0*,*866*.*

4

2

No´tese que tomamos s´olo la soluci´on en que cos *φ* es positivo. Ha de serlo porque la potencia media lo es.

1. La potencia media o activa se puede escribir como

1

*Pm* = 2 *E*0*I*0 cos *φ* = *Pa* cos *φ* = 100 *·*

*√*3

2 *~* 86*,*6 W*.*

1. Las partes resistiva (real) y reactiva (imaginaria) de la impedancia total se pueden obtener a partir de la forma polar de la impedan- cia,

de donde

*Z* = *|Z| ei φ* = *|Z|* (cos *φ* + *i* sin *φ*) *,*

Re(*Z*) = *|Z|* cos *φ,*

Im(*Z*) = *|Z|* sin *φ.*

Despejando *Z* de la segunda ecuaci´on y sustituyendo el resultado en la primera,

*| |*

cos *φ*

Re(*Z*) = *|Z|* cos *φ* = Im(*Z*) sin *φ* = 500

*√*3*/*2

1*/*2 *~* 866 Ω*.*

1. Tenemos un circuito formado por una fuente de corriente alterna, de fem eficaz igual a 220 V y frecuencia 50 Hz, en serie con una resistencia de 100 Ω, un condensador de 10 *µ*F de capacidad y una bobina de 0*,*5 H. Calcula la potencia activa, reactiva, aparente y el factor de potencia suministraos por la fuente. Adema´s, determina qu´e elemento debemos conectar en serie con el resto para hacer el factor de potencia igual a 1. **Sol.** Se trata de un circuito RCL en serie. Las impedancias de los elementos son

*ZR* = *R* = 100 Ω*,*

*Z* = *−i*

*R ωC*

= *−i* 318 *i* Ω*,* 2*π ·* 50 *·* 10 *·* 10*−*6

*ZL* = *iωL* = *i ·* 2*π ·* 50 *·* 0*,*5 *~* 157 *i* Ω*.*

*~ −*

La impedancia equivalente es

*Z* = *ZR* + *ZC* + *ZL ~* 100 *−* 318 *i* + 157 *i ~* (100 *−* 161 *i*) Ω*.*

El m´odulo y argumento de *Z* son

*−*161*φ ~* arctan = *−*1*,*01 rad*.*

*|Z| ~* 1002 + (*−*161)2 *~* 190 Ω*,*

100

Con esto,

*Z* = *|Z| eiφ ~* (190 *e−*1*,*01 *i* Ω*.*

La corriente efectiva a trav´es del generador puede obtenerse con la ley de Ohm generalizada,

*Ief*

= *Eef*

*|Z|*

220

*~* 190 *~* 1*,*16 A*.*

Con todo lo anterior, ya podemos calcular las potencias proporcionadas por el generador:

*Pm* = *Eef Ief* cos *φ ~* 220 *·* 1*,*16 *·* cos (*−*1*,*01) *~* 135 W*, Pr* = *Eef Ief* sin *φ* = 220 *·* 1*,*16 *·* sin (*−*1*,*01) *~ −*216 W*, Pa* = *Eef Ief ~* 220 *·* 1*,*16 *~* 255 W*.*

El factor de potencia resulta

cos *φ ~* cos (*−*1*,*01) *~* 0*,*532*.*

Dado que *Z* (100 161 *i*) Ω, para mejorar el factor de potencia (ha- cerlo igual o cercano a 1), se puede colocar, en serie con el resto de elementos, un dispositivo con una impedancia igual a

*~ −*

*ZI ~* 161 *i* Ω*.*

Dado que la impedancia es imaginaria pura y su parte imaginaria es positiva, este dispositivo es un inductor con una autoinductancia dada por

*ZI* = *iωLI LI* = *ZI*

*⇒*

*iω*

161 *i*

*~ i* 100*π*

*~* 0*,*481 H*.*