

Programa docente de Matemáticas II

Grado en Ingeniería de Materiales, ESCET

Cédric M. Campos
Área de Matemática Aplicada, ESCET

13 de enero de 2023

1. Presentación

En esta asignatura se imparten los fundamentos del «Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables», del «Cálculo Vectorial», de las «Ecuaciones Diferenciales Ordinarias» y del «Cálculo Numérico». El primer bloque trata de extender a varias variables reales los conceptos del cálculo en una variable real, fundamentales en procesos de optimización. En el segundo bloque, se consideran conceptos del cálculo desde una perspectiva más geométrica, de gran importancia en Física. Estos dos primeros bloques incorporan de forma secuencial el cálculo de longitudes, áreas volúmenes y otras magnitudes en espacios planos y curvos, respectivamente. El tercer bloque consiste en introducir someramente las ecuaciones diferenciales y los métodos de resolución básicos, subrayando que son el modelo principal de procesos dinámicos de la naturaleza y la Ingeniería. Por último, el cuarto bloque está dedicado a los principios de la aproximación y error numéricos que sientan las bases de gran número de métodos aplicados a la Ingeniería.

Esta materia es un requisito para un seguimiento y comprensión óptimos de otras asignaturas del grado, en particular «Física II» (1º), «Estadística» (1º), «Ingeniería Química» (2º), «Métodos Matemáticos Aplicados a la Ingeniería» (2º), «Fundamentos del Comportamiento Mecánico» (2º), «Ingeniería Eléctrica y Electrónica» (2º), «Microestructura y Transformaciones de Fase» (2º), «Elasticidad y Resistencia de Materiales» (2º), «Comportamiento Electrónico y Térmico de Materiales» (3º), «Comportamiento Óptico y Magnético de Materiales» (3º), «Diseño Mecánico» (3º).

Requisitos previos. Para el buen desarrollo de la asignatura, se recomienda encarecidamente haber superado «Matemáticas I», asignatura de primer semestre, puesto que ésta comprende el conocimiento de las técnicas básicas de derivación e integración de funciones de una variable a partir de las que se construyen las propias de varias variables. En todo caso, es necesario dominar (entre otros):

- la aritmética de conjuntos;
- la topología de la recta real;
- límites y continuidad de funciones de una variable;
- derivabilidad e integrabilidad de funciones de una variable;
- modelado y optimización procesos con funciones de una variable;
- ecuaciones en el plano y ecuaciones lineales en general;
- el álgebra de vectores, matrices y diagonalización;

- notación matemática.

Resultados del aprendizaje. Al superar con éxito esta asignatura, un estudiante deberá ser capaz de:

- representar funciones en varias variables;
- estudiar propiedades de estas funciones;
- modelar y optimizar procesos con funciones de varias variables;
- parametrizar curvas y superficies;
- calcular longitudes, áreas y volúmenes de curvas, superficies y sólidos;
- calcular trabajo a lo largo de una curva o flujo a través de una superficie;
- relacionar área, volumen, trabajo y flujo mediante los teoremas fundamentales;
- resolver analíticamente familias clásicas de ecuaciones diferenciales ordinarias;
- resolver numéricamente problemas del cálculo de una variable real.

2. Contenidos

Bloque I. Cálculo diferencial en varias variables.

Tema 1. Límites y continuidad.

- Funciones de varias variables.
- Límites y límites iterados, direccionales y/o radiales.
- Continuidad.

Objetivos. Adquirir la destreza básica para entender y describir conjuntos y funciones. Estudiar el comportamiento puntual o asintótico de estas últimas como generalización a varias variables de los conceptos de una variable así como de la aritmética de límites. Afrontar argumentativamente la casuística multidimensional.

Tema 2. Diferenciabilidad. Operaciones.

- Derivadas parcial y direccional.
- Derivada y diferencial.
- Gradiente y matriz jacobiana.
- Derivadas iteradas y matriz hessiana.

Objetivos. Definir diferentes conceptos relacionados a la tasa de cambio de una función y relacionar estos entre ellos. Conocer operadores diferenciales destacados y su relación con la diferencial y la diferenciabilidad, generalizaciones de la derivada y la derivabilidad.

Tema 3. Diferenciabilidad. Aplicaciones.

- Regla de la cadena.
- Teoremas de la función inversa e implícita.
- Teorema de Taylor.
- Puntos críticos, extremos relativos y absolutos.

Objetivos. Aplicar las definiciones y operadores para la extensión de la aritmética de derivadas para cálculos indirectos y aproximaciones. Aplicar estos mismos al cálculo de extremos (optimización).

Bloque II. Cálculo integral en varias variables.

Tema 4. Integración múltiple.

- Conjuntos simples, recintos de integración.
- Integración múltiple, área y volumen.
- Cambios de variable.
- Aplicaciones.

Objetivos. Dar descripciones alternativas de conjuntos simples. Entender la integración múltiple, el cálculo de áreas y volúmenes, como la iteración de integrales de una variable o, alternativamente, como la contracción por suma ciega de una o varias dimensiones. Entender la independencia de estos cómputos de órdenes preestablecidos sobre las coordenadas y de las propias coordenadas. Realizar el cálculo de magnitudes físicas como la masa, centro de masas, cantidad de calor, densidad media, temperatura media, etc.

Tema 5. Integración escalar sobre curvas y superficies.

- Parametrización de curvas y superficies.
- Integrales de línea y superficie de campos escalares.

Objetivos. Describir curvas y superficies paramétricamente. Definir elementos geométricos asociados (tangente y normal unitarios). Calcular longitudes de curvas y áreas de superficies, áreas sobre curvas y volúmenes sobre superficies, ambas bajo funciones.

Tema 6. Integración vectorial sobre curvas y superficies.

- Campos vectoriales y operadores diferenciales.
- Integrales de línea y superficie de campos vectoriales.
- Teoremas fundamentales.

Objetivos. Conocer e interpretar operadores diferenciales sobre campos vectoriales (divergencia y rotacional). Ampliar las integrales de línea y superficie a campos vectoriales e interpretar éstas físicamente. Relacionarlas además con integrales usuales y entre ellas.

Bloque III. Ecuaciones diferenciales.

Tema 7. Ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Ecuaciones diferenciales.
- Diagrama de fases y estudio cualitativo.
- Métodos de resolución.

Objetivos. Abstracter el concepto de ecuación y solución. Interpretar gráfica y físicamente las ecuaciones diferenciales, particularmente, las ordinarias. Captar las propiedades cualitativas de sus posibles soluciones. Resolver ecuaciones tipo cuya resolución se conoce para determinar la solución de problemas de valores iniciales y de frontera.

Bloque IV. Cálculo numérico.

Tema 8. Cálculo numérico.

- Aproximación numérica.
- Derivación numérica.
- Integración numérica.

Objetivos. Entender la diferencias entre el universo de datos continuos y el de datos discretos. Aproximar funciones continuas de las que sólo se conoce una cantidad finita de datos. Extender este principio al cálculo de derivadas e integrales.

3. Cronograma

En la siguiente tabla, se muestra como distribuir el contenido de los ocho temas (T) a lo largo de quince semanas (S) con una carga de cinco horas (h) semanales.

S	h	T	Contenido	Objetivos
1	2	1	notación y conjuntos	ortografía matemática y lógica básica
	2	1	cónicas, cuádricas, coordenadas	elementos geométricos simples
	1	1	funciones, curvas de nivel y grafo	visualización gráfica
2	2	1	límites: definiciones	comportamiento asintótico
	2	1	límites: criterios de existencia	aritmética y argumentación
	1	1	continuidad	generalizar a varias variables
3	2	2	derivadas parcial y direccional	comportamiento coordenado y dir.
	2	2	gradiente, jacobiana, hessiana	operadores diferenciales destacados
	1	2	diferenciabilidad y diferencial	generalizar a varias variables
4	2	3	regla de la cadena	derivar parcialmente composiciones
	2	3	función inversa e implícita	determinar indirectamente
	1	3	puntos críticos	generalizar a varias variables
5	2	3	optimización libre	optimizar en interior
	2	3	optimización restringida	optimizar en frontera
	1	3	series de Taylor	aproximar polinomialmente
6	2	4	recintos de integración	representar conjuntos simples 2D/3D
	2	4	integración iterada	contraer dimensiones a magnitudes
	1	4	integración múltiple y teo. Fubini	intercambiar orden de integración
7	2	4	centro de masas y mom. de inercia	integrar conceptos físicos
	3	4	cambios de variable	cambiar referencias o coordenadas
8	2	5	parametrización de curvas	describir curvas
	2	5	integrales de línea	integrar a lo largo de una curva
	1	5	teo. fundamental	generalizar la regla de Barrow
9	2	6	parametrización de superficies	describir superficies
	3	6	integrales de superficie	integrar a lo largo de una superficie
10	1	6	operadores diferenciales	operar sobre campos
	4	6	teos. Green, Gauss y Stokes	relacionar integrales de diferente dim.
11	1	7	ecuaciones diferenciales, EDO	abstraer el concepto de ecuación
	2	7	PVI, existencia de soluciones	interpretar y asegurar
	2	7	ecs. vars. separadas y ecs. lineales	resolver
12	2	7	formas diferenciales exactas	resolver
	3	7	ecs. lineales con coefs. constantes	resolver
13	2	8	interpolación numérica	aproximar funciones
	2	8	diferenciación numérica	derivar con datos discretos
	2	8	integración numérica simple	aproximar pequeñas áreas
14	1	8	integración numérica compuesta	aproximar grandes áreas

4. Material

La materia cuenta con un extenso material para ser utilizado a lo largo del curso, durante las clases y durante el trabajo personal.

- Notas de la materia. Se recomienda leer la sección correspondiente previo a cada sesión.
- Diapositivas. Se recomienda leer la sección correspondiente previo a cada sesión. Se utilizan en clase a modo de escueto resumen de las notas.
- Colección de ejercicios. Se recomienda realizar los ejercicios correspondientes previo a cada sesión. Algunos ejercicios de clase son extraídos de esta colección.
- Colección de exámenes. Se recomienda abortar estos ejercicios tras final cada tema. Algunos ejercicios de clase son extraídos de esta colección.
- Prácticas. Los enunciados de prácticas de computación están incorporados en la colección de ejercicios.