Ejercicios de Matema´ ticas II

Ce´ dric M. Campos, Razvan G. Iagar, Marta Latorre Balado, David Puertas Centeno, Michael Stich, Elio V. Toranzo

A´ rea de Matema´ tica Aplicada, ESCET

27 de marzo de 2023

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS

[urjc.es](https://urjc.es/)

2021-2023 © Ce´ dric M. Campos,

Razvan G. Iagar, Marta Latorre Balado,

David Puertas Centeno, Michael Stich,

Elio V. Toranzo

Algunos derechos reservados

Esta obra se distribuye bajo una licencia Creative Commons Atribucio´ n-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-SA 4.0), disponible en

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

# 0. Conjuntos y funciones en varias variables

**Ejercicio 1.** Escribe las coordenadas polares o cartesianas de los siguientes puntos de ℝ2.

|  |  |
| --- | --- |
| Coordenadas cartesianas | Coordenadas polares |
| (√2*,* √2) |  |
| (−1*,* √3) |  |
|  | (2*, 𝜋*/6) |
|  | (3*,* 7*𝜋*/4) |
| (0*,* 5) |  |
| (−1*,* 1) |  |

Solucio´ n.

|  |  |
| --- | --- |
| Coordenadas cartesianas | Coordenadas polares |
| (√2*,* √2)  √ | (2*, 𝜋*/4) |
| (−1*,* 3)  √ | (2*,* 2*𝜋*/3) |
| ( 3*,* 1) | (2*, 𝜋*/6) |
| (3√2/2*,* − 3√2/2) | (3*,* 7*𝜋*/4) |
| (0*,* 5) | (5*, 𝜋*/2)  √ |
| (−1*,* 1) | ( 2*,* 3*𝜋*/4) |

◀

**Ejercicio 2.** Representa gra´ ficamente en el plano cartesiano los siguientes subconjuntos de ℝ2.

a) *𝐴* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 |*𝑥*| = 1*, 𝑦 >* 0}

11

b) *𝐵* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 (*𝑥* − *𝑦*) (*𝑥* + *𝑦*) ≥ 0}

11

c) *𝐶* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *< 𝑥*2 + *𝑦*2 *<* 4}

11

d) *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 ≤ *𝑥*2 − 6*𝑥* + *𝑦*2 *<* 4}

e) *𝐸* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *𝑥*2 − 5*𝑥* + *𝑦*2 + 4 *𝑦* ≤ 4}

f) *𝐹* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *𝑥*2 +

9

≤

1}

*𝑦*2

4

Solucio´ n.

*𝑦*

−1

0

1

*𝑥*

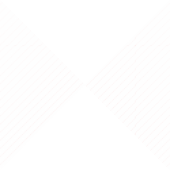
a)

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 3

0 CONJUNTOS Y FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES

*𝑦*

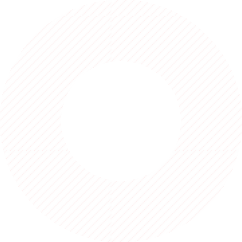
*𝑥*



b)

*𝑦*

*𝑥*



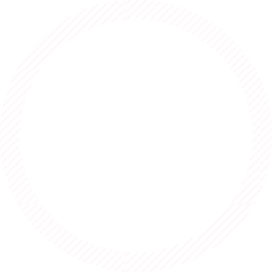
*𝑟* = 2

0

*𝑟* = 1

c)

*𝑥*



*𝑦*

*𝑟* = 13

√

0

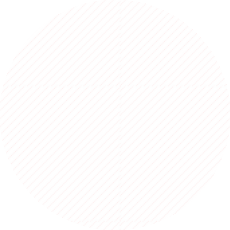
3

*𝑟* = √10

d)

*𝑦*

e)



0

−2

*𝑥*

*𝑟* =

√︃

57

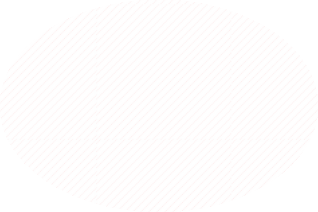
4

5

2

*𝑦*

2



*𝑥*

−3 0 3

f) −2

◀

**Ejercicio 3.** Representa gra´ ficamente en el plano cartesiano y en el plano polar los siguientes sub- conjuntos de ℝ2.

4 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

a) *𝐴* = {(*𝑟, 𝜃*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) 1 ≤ *𝑟 <* 2*, 𝜃* = *𝜋*}

11

b) *𝐵* = {(*𝑟, 𝜃*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) *𝜋*/6 ≤ *𝜃* ≤ *𝜋*/3}

1

c) *𝐶* = {(*𝑟, 𝜃*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) *𝑟* = 4*,* 0 *< 𝜃* ≤ 3*𝜋*/4}

Solucio´ n.

*𝑦 𝜃*

*𝑥*

−2

−1

0

*𝜋*

0

1

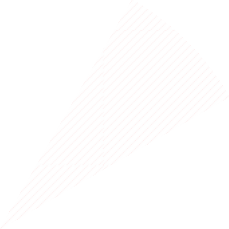
2

*𝑟*

a)

*𝑦*

*𝜃*



*𝜋*

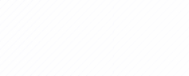
6

*𝜋*

3

0

*𝑥 𝑟*



*𝜋*

3

*𝜋*

6

0

b)

*𝑦 𝜃*

*𝑥 𝑟*

3*𝜋*

4

0

4

3*𝜋*

4

0

4

c)

◀

**Ejercicio 4.** Representa gra´ ficamente en el plano cartesiano los siguientes subconjuntos de ℝ3.

a) *𝐴* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 |*𝑥*| ≤ 1*,* | *𝑦*| ≤ 1*,* |*𝑧*| ≤ 1}

1

b) *𝐵* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + 4*𝑥* + *𝑦*2 + *𝑧*2 − 2*𝑧* ≥ 1}

1

11

c) *𝐶* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 1 *< 𝑥*2 + *𝑦*2 *<* 4}

1

d) *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 1 *< 𝑥*2 + *𝑧*2 *<* 4*,* −2 ≤ *𝑦* ≤ 5} Solucio´ n.

1. Cubo (laterales e interior) centrado en el (0*,* 0*,* 0) y de lado 2.
2. Parte exterior de la esfera centrada en el (−2*,* 0*,* 1) y de radio √6.
3. Zona comprendida entre dos cilindros verticales centrados en el (0*,* 0*,* 0) y con radios 1 y 2.

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 5

0 CONJUNTOS Y FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES

1. Zona comprendida entre dos cilindros horizontales (entre *𝑦* = −2 e *𝑦* = 5) centrados en el

(0*,* 0*,* 0) y de radios 1 y 2.

◀

**Ejercicio 5.** Representa gra´ ficamente en el plano cartesiano los siguientes subconjuntos de ℝ3.

a) *𝐴* = {(*𝑟, 𝜃, 𝑧*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) × ℝ *𝑧* = 2}

b) *𝐵* = {(*𝑟, 𝜃, 𝑧*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) × ℝ 11 *𝜃* = }

*𝜋*

4

11

c) *𝐶* = {(*𝑟, 𝜃, 𝑧*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) × ℝ 1 *< 𝑟*2 + *𝑧*2 *<* 4}

d) *𝐷* = {(*𝑟, 𝜃, 𝑧*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) × ℝ 1 *𝑟* ≤ 1*,* |*𝑧*| ≤ 1}

Solucio´ n.

1. Plano horizontal a la altura *𝑧* = 2.
2. Semiplano vertical que corta al plano *𝑋𝑌* en la bisectriz del primer cuadrante.
3. Zona comprendida entre dos esferas centradas en el (0*,* 0*,* 0) y de radios 1 y 2.
4. Cilindro vertical (entre *𝑧* = −1 y *𝑧* = 1) centrados en el (0*,* 0*,* 0) y radio 1.

◀

**Ejercicio 6.** Representa gra´ ficamente en el plano cartesiano los siguientes subconjuntos de ℝ3.

a) *𝐴* = {(*𝜌, 𝜃, 𝜑*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) × [0*, 𝜋*] 1 ≤ *𝜌* ≤ 2}

b) *𝐵* = {(*𝜌, 𝜃, 𝜑*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) × [0*, 𝜋*] 11 *𝜃* = }

7*𝜋*

4

c) *𝐶* = {(*𝜌, 𝜃, 𝜑*) ∈ [0*,* ∞) × [0*,* 2*𝜋*) × [0*, 𝜋*] 1 *𝜌 <* 4*,* 0 ≤ *𝜃* ≤ *𝜋, 𝜋* ≤ *𝜑* ≤ *𝜋*}

2

Solucio´ n.

1. Zona comprendida entre dos esferas centradas en el (0*,* 0*,* 0) y con radios 1 y 2.
2. Semiplano vertical que corta al plano *𝑋𝑌* en la bisectriz del cuarto cuadrante.
3. Parte de la esfera esfera centrada en el 0*,* 0*,* 0 y de radio 4 de la parte positiva del eje *𝑂𝑌* y negativa del eje *𝑂𝑍*.

( )

◀

**Ejercicio 7.** Estudia el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = log(*𝑥* + *𝑦* − 1)

√︁

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 2 − sin(*𝑥*2 + *𝑦*2)

c) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = arcsin (*𝑥*/2) + √*𝑥 𝑦*

d) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥 𝑦* + √︁*𝑥*2 + *𝑦*2 − *𝑅*2, para *𝑅 >* 0.

e) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑒 𝑦*

*𝑥*

f) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = tan ((*𝑥* + *𝑦*)*𝜋*)

6 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

g) *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥* + *𝑦*

( )

|*𝑥* + *𝑦*|

√︁

h) *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 − 1 Solucio´ n.

1

a) Dom( *𝑓* ) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥* + *𝑦 >* 1}

Im( *𝑓* ) = ℝ

1

b) Dom( *𝑓* ) = ∪*𝑘*∈ℕ∪{0} {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑘𝜋* ≤ *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ (*𝑘* + 1)*𝜋*} Im( *𝑓* ) = [1*,* 2]

1

c) Dom( *𝑓* ) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 − 2 ≤ *𝑥* ≤ 2*, 𝑥 𝑦* ≥ 0} Im( *𝑓* ) = [− *𝜋 ,* +∞)

2

1

d) Dom( *𝑓* ) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 + *𝑦*2 ≥ *𝑅*2}

Im( *𝑓* ) = ℝ

1

e) Dom( *𝑓* ) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑦* ≠ 0} Im( *𝑓* ) = (0*,* +∞)

f) Dom( *𝑓* ) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *𝑥* + *𝑦* ≠ 2*𝑘*+1 con *𝑘* ∈ ℤ}

2

Im( *𝑓* ) = ℝ

1

g) Dom( *𝑓* ) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥* + *𝑦* ≠ 0} Im( *𝑓* ) = {−1*,* 1}

1

h) Dom( *𝑓* ) = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 ≥ 1} Im( *𝑓* ) = [0*,* +∞)

◀

**Ejercicio 8.** Calcula y representa en el plano cartesiano y polar el dominio de la siguiente funcio´ n.

*𝑓* : ℝ2 −→ √︁ℝ3 )

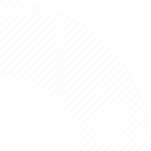
*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

*𝑦*

*𝑥*2 + *𝑦*2 − 4*,* log(16 − *𝑥*2 − *𝑦*2)*,* log(*𝑥*) + log( *𝑦*)

*𝜃*

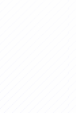
*𝑥 𝑟*



*𝑟* = 4

*𝑟* = 2

0



*𝜋*

2

0

2

4

Solucio´ n. ◀

**Ejercicio 9.** Calcula y representa en el plano cartesiano y polar el dominio de la siguiente funcio´ n.

*𝑓* : ℝ2 −→ ℝ

*𝑓 𝑥, 𝑦* = 4

( )

2 − *𝑥*2 − *𝑦*2

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 7

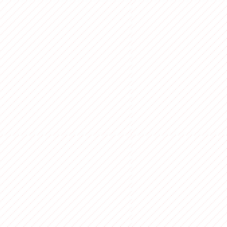
0 CONJUNTOS Y FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES

1

Solucio´ n. Dom( *𝑓* ) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 + *𝑦*2 ≠ 2}

*𝑦*

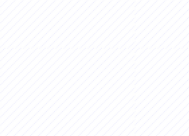
*𝜃*



*𝑟* = √2

0

*𝑥*



2*𝜋*

0

√2

**Ejercicio 10.** Calcula *𝑓* ◦ *𝑔* en los siguientes casos.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 − *𝑦*

*𝑔*(*𝑡*) = (*𝑡, 𝑡*2)

Solucio´ n.

1. 0

b) *𝑟*2

*𝑟*

◀

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + *𝑦*2

*𝑔*(*𝑟, 𝜃*) = (*𝑟* cos(*𝜃*)*, 𝑟* sin(*𝜃*))

◀

**Ejercicio 11.** Dibuja las curvas de nivel de las siguientes funciones.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥* + *𝑦*

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + *𝑦*2

Solucio´ n.

c) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑦*

d) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2

*𝑥*2

*𝑦*

1. *𝑥*

*𝐾* = 0

*𝐾* = 1

*𝐾* = −1

*𝑦*

1. *𝑥*

*𝐾* = 0

*𝐾* = 1

*𝐾* = 2

8 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

*𝑦*

1. *𝑥*

*𝐾* = 0

*𝐾* = 1

*𝐾* = 1

−

*𝐾* = 2

*𝑦*

1. *𝑥*

*𝐾* = 0

*𝐾* = 1

*𝐾* = 2

◀

**Ejercicio 12.** Para los siguientes conjuntos, indica si son abiertos, cerrados, acotados y determina el interior, la clausura y la frontera.

a) *𝐴* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 − 2 ≤ *𝑥,* −1 ≤ *𝑦* ≤ 0}

1

b) *𝐵* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *𝑥* = 2*, 𝑦 >* 0}

c) *𝐶* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 11 *𝑦 > 𝑥*2}

d) *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4}

e) *𝐸* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *𝑥*2 + *𝑦*2 *<* 4}

1

f) *𝐹* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥* = *𝑦*}

1

Solucio´ n.

1

a) *𝐴* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 − 2 ≤ *𝑥,* −1 ≤ *𝑦* ≤ 0} No abierto

Cerrado No acotado

1

Int( *𝐴*) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 − 2 *< 𝑥,* −1 *< 𝑦 <* 0}

( ) [− −∞) × {− } U {− } × [− ]

*𝐴* = *𝐴*

Fr *𝐴* = 2*,* 1*,* 0 2 1*,* 0

1

b) *𝐵* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥* = 2*, 𝑦 >* 0} No abierto

No cerrado No acotado Int(*𝐵*) = ∅

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 9

0 CONJUNTOS Y FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES

*𝐵* = *𝐵* ∪ {(2*,* 0)}

Fr(*𝐵*) = *𝐵* ∪ {(2*,* 0)}

1

c) *𝐶* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑦 > 𝑥*2}

Abierto

No cerrado No acotado

Int(*𝐶*) = *𝐶* 1

*𝐶* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *𝑦* ≥1 *𝑥*2}

1

Fr(*𝐶*) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑦* = *𝑥*2}

1

d) *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4} No abierto

Cerrado

Acotado *𝐷* ⊆ *𝐵*3 ((0*,* 0)) Int(*𝐷*) = ∅

*𝐷* = *𝐷*

Fr(*𝐷*) = *𝐷*

1

e) *𝐸* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 + *𝑦*2 *<* 4} Abierto

No cerrado

Acotado *𝐸* ⊆ *𝐵*3 ((0*,* 0))

Int(*𝐸*) = *𝐸* 1

{( ) ∈ 1 1+ ≤ }

*𝐸* = *𝑥, 𝑦* ℝ2 *𝑥*2 *𝑦*2 4 Fr(*𝐸*) = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4}

2 1f) *𝐹* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ *𝑥* = *𝑦*}

No abierto Cerrado No acotado Int(*𝐹*) = ∅

*𝐹* = *𝐹*

Fr(*𝐹*) = *𝐹*

◀

**Ejercicio 13.** Determina si las siguientes funciones son acotadas y, en su caso, da una cota.

a) *𝑓* : ℝ2 −→ ℝ

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = sin2 (*𝑥* + *𝑦*) cos(*𝑥* − *𝑒𝑦*)

b) *𝑓* : ℝ3 −→ ℝ

*𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑒𝑥*+ *𝑦* + *𝑧*

c) *𝑓* : ℝ2 −→ ℝ

*𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*2 + *𝑦*2

( )

*𝑒𝑥*2 + *𝑦*2

10 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

d) *𝑓* : [0*,* 1] × [−2*,* 2] −→ ℝ

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥* + *𝑦*2

e) *𝑓* : [−5*,* 5] × [2*,* 8] −→ ℝ

*𝑓* (0*, 𝑦*) = 0

f) *𝑓* : [0*,* 4] × [0*,* 4] −→ ℝ

( )

*𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑦*

( )

*𝑥*

si *𝑥* ≠ 0

*𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑦*

*𝑥* + 3

Solucio´ n.

1. Acotada por 1
2. No acotada
3. Acotada por 1
4. Acotada por 5
5. No acotada
6. Acotada por 4

3

◀

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 11

1 LI´MITES Y CONTINUIDAD EN VARIAS VARIABLES

# L´ımites y continuidad en varias variables

**Ejercicio 1.** Calcula, si existe, el l´ımite de las siguientes funciones en el punto (0*,* 0).

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = √︁

*𝑥 𝑦*

g) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥 𝑦*

*𝑥*2 + *𝑦*2

b) *𝑓 𝑥, 𝑦* = 2*𝑥 𝑦*

( )

*𝑥*2 + *𝑦*2

*𝑥*2 + *𝑦*4

h) *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*2 *𝑦*

( )

*𝑥*2 + *𝑦*4

c) *𝑓 𝑥, 𝑦* = 2*𝑥 𝑦*2

( )

*𝑥*2 + *𝑦*2

i) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*)

= *𝑥*3 − *𝑥 𝑦*2

*𝑥*2 + *𝑦*2

d) *𝑓 𝑥, 𝑦* = 2*𝑥 𝑦*2

( )

*𝑥*2 + *𝑦*4

e) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 *𝑦*2

j) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥 𝑦* − *𝑥* + *𝑦*

k) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥* sin 1 + *𝑦* cos 1

*𝑥* + *𝑦*

*𝑥*2 *𝑦*2 + (*𝑥* − *𝑦*)2

f) *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*2 + *𝑦*2

( )

|*𝑥*| + | *𝑦*|

*𝑥 𝑦*

l) *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*2 *𝑦*4

( )

*𝑥*2 *𝑦*4 + (*𝑥* − *𝑦*2)2

*𝑥*3

Solucio´ n.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a) 0 | d) No existe | g) No existe | j) No existe |
| b) No existe | e) No existe | h) 0 | k) 0 |
| c) 0 | f) 0 | i) 0 | l) No existe  ◀ |

**Ejercicio 2.** Calcula, si existen, los siguientes l´ımites.

* 1. l´ım

log(*𝑥*) + log( *𝑦*)

c) l´ım *𝑥*

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*1)

*𝑥* + 2 *𝑦* − 3

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*1) *𝑦* − 1

b) l´ım

3 − *𝑥* − *𝑦*

d) l´ım

(*𝑥* − 1)2 ( *𝑦* + 1)

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*2) *𝑥* − 2 *𝑦* + 3

Solucio´ n.

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*−1) (*𝑥* − 1)2 + ( *𝑦* + 1)2

a) No existe b) No existe c) No existe d) 0

◀

**Ejercicio 3.** Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

2 sin(*𝑥*) sin( *𝑦*)

*𝑥*2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)



(*𝑥* + 1)2 ( *𝑦* − 2)

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =  (*𝑥*+1)2 +(*𝑦*−2)2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (−1*,* 2)

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (−1*,* 2)

12 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

c) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥*4 + *𝑦*4

*𝑥*2 *𝑦*2 + (*𝑥* − *𝑦*)2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)

d) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

(*𝑥* − 1) *𝑦*

(*𝑥* − 1)2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (1*,* 0)

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (1*,* 0)

e) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥*2 + *𝑦*2

|*𝑥*| + | *𝑦*|

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)

 −1 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)

f( )

f) *𝑓 𝑥, 𝑦* = 1 si *𝑥* ≠ 0 e *𝑦* ≠ 0

0 si *𝑥* = 0 o *𝑦* = 0

en el (0*,* 0).

Solucio´ n.

1. Es continua en ℝ2 \ {(0*,* 0)}
2. Es continua en ℝ2
3. Es continua en ℝ2 \ {(0*,* 0)}

**Ejercicio 4.** Dada la funcio´ n



*𝑥*3 *𝑦*

1. Es continua en ℝ2 \ {(1*,* 0)}
2. Es continua en ℝ2 \ {(0*,* 0)}
3. No es continua

◀

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =





*𝑥*6 + *𝑦*2

0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *,*

1. Calcula el l´ımite direccional en el punto (0*,* 0) tomando las rectas *𝑦* = *𝜆𝑥* para *𝜆* ∈ ℝ \ { 0 }.
2. Calcula el l´ımite direccional en el punto (0*,* 0) tomando la curva *𝑦* = *𝑥*3.
3. Determina si *𝑓* es continua en el origen. Solucio´ n.

a) 0 b) 1

2

c) No es continua

◀

**Ejercicio 5.** Dada la funcio´ n

*𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*4 − *𝑦*3

( )

*𝑥*4 − *𝑦*

para (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)*,* (1*,* 1) *,*

indica, si es posible, los valores que debe tomar la funcio´ n en 0*,* 0 y 1*,* 1 para que sea continua en dichos puntos.

( ) ( )

Solucio´ n. Con ningu´ n valor la funcio´ n es continua ◀

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 13

1 LI´MITES Y CONTINUIDAD EN VARIAS VARIABLES

**Ejercicio 6.** Determina, si es posible, el valor de *𝐾* ∈ ℝ para que la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 



sea continua en ℝ2.

*𝑥 𝑦* − 3 *𝑦* − *𝑥* + 3

(*𝑥* − 3)2 + ( *𝑦* − 1)2

*𝐾* si (*𝑥, 𝑦*) = (3*,* 1) *,*

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (3*,* 1) *,*

Solucio´ n. Con ningu´ n valor de *𝐾* la funcio´ n es continua ◀

**Ejercicio 7.** Sea ***f*** : ℝ*𝑛* −→ ℝ*𝑚* tal que

∥***f*** (***x***) − ***f*** (***y***) ∥ ≤ *𝐾* ∥***x*** − ***y*** ∥ para todo ***x****,* ***y*** ∈ ℝ*𝑛 ,*

con *𝐾 >* 0. Prueba que ***f*** es continua en ***a*** ∈ ℝ*𝑛*.

14 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

# Diferenciabilidad: nociones fundamentales

**Ejercicio 1.** Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 3*𝑥*2 cos2 (*𝑥* − *𝑦*)

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = log *𝑥*2*𝑒*2 *𝑦*

f) *𝑓* (*𝑠, 𝑡*) = (2*𝑠*2 + *𝑡*)2

g) *𝑓* (*𝑎, 𝑏*) = *𝑎𝑒*arctan(*𝑏*)

c) *𝑓 𝑥, 𝑦* = 1

( )

sin(*𝑥*2 − *𝑦*2)

h) *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*)

= sin *𝑦*2 − *𝑧*

5*𝑧*

d) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = sin (*𝑒𝑥*+ *𝑦*) cos (log(*𝑥* − *𝑦*))

e) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑒𝑥* sin( *𝑦*)+ *𝑦* sin(*𝑥*)

i) *𝑓* (*𝑢, 𝑣*) = *𝑢𝑣* log(*𝑢* + *𝑣*)

j) *𝑓* (*𝑟, 𝑠*) = log *𝑒𝑟* + *𝑠*2 + (*𝑟* + *𝑠*)2

**Ejercicio 2.** Calcula las siguientes derivadas direccionales.

a) *𝐷****v*** *𝑓* (−1*,* 1*,* 7) siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥 𝑦* + *𝑦𝑧* + *𝑥𝑧* y ***v*** = (1*,* 1*,* 1).

b) *𝐷****v*** *𝑓* log(3)*, 𝜋 ,* −3 siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑧* − *𝑒𝑥* sin( *𝑦*) y ***v*** = (−1*,* 0*,* 1).

2

c) *𝐷****v*** *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥*2 − 2*𝑥 𝑦* + *𝑧*3 y ***v*** = (1*,* −1*,* 2).

d) *𝐷𝜃 𝑓* (*𝑥, 𝑦*) siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*5 − 2*𝑥 𝑦* y *𝜃* = 3*𝜋* .

2

Solucio´ n.

14

1 2

a) *𝐷 𝑣*

∥*𝑣*∥

b) *𝐷 𝑣*

*𝑓* (−1*,* 1*,* 7) = √3

*𝑓* log(3)*, 𝜋 ,* −3 = 1

c) *𝐷 𝑣*

∥*𝑣*∥

*𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = √6 (4*𝑥* − 2 *𝑦* + 6*𝑧* )

∥*𝑣*∥

2 √2

d) *𝐷𝜃 𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 2*𝑥*

◀

**Ejercicio 3.** Calcula el vector gradiente de las siguientes funciones.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑒*−*𝑥*2 − *𝑦*2 en los puntos (0*,* 0) y (−1*,* 0).

( ) ( )

b) *𝑓 𝑥, 𝑦, 𝑧* = log 1 en el punto 1*,* 1*,* 1 .

*𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2

c) *𝑓* (*𝑥*1*, 𝑥*2*, . . . , 𝑥𝑛*) = *𝑥*2 + *𝑥*2 + · · · + *𝑥*2 para todo *𝑥* = (*𝑥*1*, 𝑥*2*, . . . , 𝑥𝑛*) ∈ ℝ*𝑛*.

Solucio´ n.

1 2 *𝑛*

a) ∇ *𝑓* (0*,* 0) = (0*,* 0) y ∇ *𝑓* (−1*,* 0) = 2 *,* 0

*𝑒*

b) ∇ *𝑓* (1*,* 1*,* 1) = 2 *,* 2 *,* 2

3

3

3

c) ∇ *𝑓* (*𝑥*1*, 𝑥*2*, . . . , 𝑥𝑛*) = (2*𝑥*1*,* 2*𝑥*2*, . . . ,* 2*𝑥𝑛*)

◀

**Ejercicio 4.** Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y la diferenciabilidad en el pun- to (0*,* 0) de las siguientes funciones, y calcula, en su caso, la aplicacio´ n diferencial.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

(*𝑥*2 + *𝑦*2) sin ( √︁

1

*𝑥*2 + *𝑦*2

\ si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

[](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 15

2 DIFERENCIABILIDAD: NOCIONES FUNDAMENTALES

f

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

c) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

*𝑥*

0 si *𝑥* = 0 *.*

f

*𝑥* sin 4 arctan *𝑦* si *𝑥* ≠ 0 *,*

*𝑥 𝑦* log(*𝑥*2 + *𝑦*2) si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

*𝑥* + *𝑦*

d) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

(*𝑥*2 + *𝑦*2) cos *𝑥* si *𝑥* + *𝑦* ≠ 0 *,*



e) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =  2(*𝑥* + *𝑦*)

0

*𝑥 𝑦* sin

*𝜋*(*𝑥* − *𝑦*)

si *𝑥* + *𝑦* = 0 *.*

si *𝑥* + *𝑦* ≠ 0 *,*

 0 si *𝑥* + *𝑦* = 0 *.*

f) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥*2 *𝑦*2

*𝑥*4 + *𝑦*4

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

g) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥*3 − *𝑥 𝑦*2

*𝑥*2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

h) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑒𝑥*+ *𝑦*

Solucio´ n.

1. *𝑓* es continua, existen las parciales y es diferenciable en el (0*,* 0) con *𝐷 𝑓* (0*,* 0) = (0*,* 0)
2. *𝑓* es continua, existen las parciales pero no es diferenciable en el (0*,* 0)
3. *𝑓* es continua, existen las parciales y es diferenciable en el (0*,* 0) con *𝐷 𝑓* (0*,* 0) = (0*,* 0)
4. *𝑓* es continua, existen las parciales y es diferenciable en el (0*,* 0) con *𝐷 𝑓* (0*,* 0) = (0*,* 0)
5. *𝑓* es continua, existen las parciales y es diferenciable en el (0*,* 0) con *𝐷 𝑓* (0*,* 0) = (0*,* 0)
6. *𝑓* no es continua, existen las parciales pero no es diferenciable en el (0*,* 0)
7. *𝑓* es continua, existen las parciales pero no es diferenciable en el (0*,* 0)
8. *𝑓* es continua, existen las parciales y es diferenciable en (0*,* 0) y en el (0*,* 0) y *𝐷 𝑓* (0*,* 0) = (1*,* 1)

◀

**Ejercicio 5.** Dada la funcio´ n



3 *𝑦*2*𝑥* − 2 *𝑦*3

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =





*𝑦*2 + *𝑥*4

0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *,*

comprueba que tiene todas las derivadas direccionales bien definidas pero no es diferenciable en el origen.

**Ejercicio 6.** Calcula las derivadas direccionales en el origen en cualquier direccio´ n de la siguiente

funcio´ n.

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 





*𝑥*2 *𝑦*2 si *𝑥, 𝑦* ≠ 0*,* 0 *,*

*𝑥*4 + *𝑦*2

( ) ( )

0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

16 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

Solucio´ n. *𝐷𝜃 𝑓* (0*,* 0) = 0 si *𝜃* ≠ 0*, 𝜋* y *𝐷*0 *𝑓* (0*,* 0) = *𝐷𝜋 𝑓* (0*,* 0) = 0 ◀

**Ejercicio 7.** Dada la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥*4 *𝑦*2

*𝑥*2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *,*

estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el punto (0*,* 0). Solucio´ n. *𝑓* es continua, existen las parciales y es diferenciable en el (0*,* 0) ◀ **Ejercicio 8.** Dada la funcio´ n

f

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

*𝑥 𝑦*

*𝑥*2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *,*

estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el 0*,* 0 . ¿Son *𝜕 𝑓 𝑥, 𝑦*

( ) ( )

*𝜕𝑥*

y *𝜕 𝑓 𝑥, 𝑦* continuas en 0*,* 0 ?

( ) ( )

*𝜕 𝑦*

Solucio´ n. *𝑓* no es continua, existen las derivadas parciales y no es diferenciable en el 0*,* 0 y *𝜕 𝑓 𝑥, 𝑦*

( ) ( )

*𝜕𝑥*

no es continua en el (0*,* 0) ◀

**Ejercicio 9.** Sea la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥*(*𝑥*2 − *𝑦*2)

*𝑥*2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

1. ¿Es *𝑓* continua en el (0*,* 0)?

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

1. Calcula las derivadas parciales de *𝑓* en el (0*,* 0).
2. ¿Es *𝜕 𝑓 𝑥, 𝑦* continua en el 0*,* 0 ?

( ) ( )

*𝜕 𝑦*

1. ¿Es *𝑓* diferenciable en el (0*,* 0)? Solucio´ n.

a) S´ı

b) *𝐽 𝑓* (0*,* 0) = (1*,* 0)

**Ejercicio 10.** Dada la funcio´ n

1. No
2. No

◀

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

(*𝑥* − 1)3 − (*𝑥* − 1) *𝑦*2

(*𝑥* − 1)2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (1*,* 0) *,*

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (1*,* 0) *,*

estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el punto (1*,* 0). Solucio´ n. *𝑓* es continua, exsiten las parciales y no es diferenciable en el (1*,* 0) ◀

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 17

2 DIFERENCIABILIDAD: NOCIONES FUNDAMENTALES

**Ejercicio 11.** Calcula la matriz jacobiana y el jacobiano, si existe, de las siguientes funciones.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥* + 2 *𝑦,* 2*𝑥 𝑦* + *𝑦*2*, 𝑥 𝑦* + *𝑧*2)

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥 𝑦𝑧, 𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2)

c) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 3*𝑥*2 + *𝑒𝑦*

Solucio´ n.

1 2 0

{

a) *𝐽 𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = I 2 *𝑦* 2*𝑥* + 2 *𝑦* 0

\ y det( *𝐽 𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*)) = 4*𝑧*(*𝑥* + *𝑦*) − 8 *𝑦𝑧*

b) *𝐽 𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) =

*𝑦 𝑥*

*𝑦𝑧 𝑥𝑧 𝑥 𝑦*

2*𝑥* 2 *𝑦* 2*𝑧*

2*𝑧*

c) *𝐽 𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 6*𝑥 𝑒𝑦*

◀

**Ejercicio 12.** Calcula, si existe, la ecuacio´ n del plano tangente a la superficie generada por las si- guientes funciones en el punto indicado.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + *𝑦*2 + sin(*𝑥 𝑦*) en el punto (0*,* 2).

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = log(*𝑥* + *𝑦*) + *𝑥* cos( *𝑦*) en el punto (1*,* 0).

c) *𝑓* (*𝑠, 𝑡*) = √*𝑠*2 + *𝑡*2 en el punto 1*,* 1 .

2

Solucio´ n.

a) 2*𝑥* + 4 *𝑦* − *𝑧* = 4 b) 2*𝑥* + *𝑦* − *𝑧* = 1 c) 2*𝑠* + *𝑡* − √5*𝑧* = 0

◀

**Ejercicio 13.** Calcula la matriz jacobiana de *𝑓* ◦ *𝑔* en el punto (1*,* 1) siendo

*𝑓* : ℝ2 −→ ℝ3

*𝑓* (*𝑢, 𝑣*) = (*𝑢* + *𝑣, 𝑢, 𝑣*2)

2 2

( ) {I \ ◦

Solucio´ n. *𝐽 𝑓 𝑔* 1*,* 1 = 2 0

0 4

y *𝑔* : ℝ2 −→ ℝ2

*𝑔*(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥*2 + 1*, 𝑦*2) *.*

◀

**Ejercicio 14.** Calcula la matriz jacobiana de *𝑔* ◦ *𝑓* en el punto (0*,* 0) siendo

*𝑓* : ℝ2 −→ ℝ3

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑒𝑥*+ *𝑦, 𝑥* − *𝑦, 𝑥*2)

y *𝑔* : ℝ3 −→ ℝ2

*𝑔*(*𝑢, 𝑣, 𝑤*) = (*𝑢𝑤,* sin(*𝑣* + *𝑤*)) *.*

Solucio´ n. *𝐽𝑔*◦ *𝑓* (0*,* 0) = 0 0 ◀

1 −1

**Ejercicio 15.** La temperatura en un punto (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 viene dada por la funcio´ n diferenciable

*𝑇* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*). Una part´ıcula viaja por la he´ lice *𝜎*(*𝑡*) = (cos(*𝑡*)*,* sin(*𝑡*)*, 𝑡*) y de notamos por *𝑓* (*𝑡*) la temp e-

ratura de la part´ıcula en el instante *𝑡* (es decir, *𝑓* = *𝑇* ◦ *𝜎*). Calcula *𝑓* ′

(2*,* 1*,* 3).

*𝜋*

2

sabiendo que ∇*𝑇*

0*,* 1*, 𝜋*

2

=

18 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

Solucio´ n. *𝑓* ′( *𝜋* ) = 1 ◀

2

**Ejercicio 16.** Calcula las derivadas parciales de *ℎ* = *𝑓* ◦ *𝑔* en el punto (1*,* 0) sabiendo que

∇ *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (2*𝑥* + *𝑦, 𝑥* + *𝑧, 𝑦*) y *𝑔* : ℝ2 −→ ℝ3

*𝑔*( *𝑦𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* sin( *𝑦*)*, 𝑥, 𝑒* ) *.*

Solucio´ n. *𝜕ℎ* (1*,* 0) = 1 y *𝜕ℎ* (1*,* 0) = 2 ◀

*𝜕𝑥*

*𝜕𝑥*

**Ejercicio 17.** Sabiendo que *𝑓 , 𝑔* y *ℎ* son funciones diferenciables tales que

*𝑓* : ℝ3 −→ ℝ

con ∇ *𝑓* (0*,* 0*,* 1) = (1*,* 1*,* 2) *,*

*𝑔* : ℝ2 −→ ℝ

con *𝑔*(0*,* 0) = 1 *,*

*ℎ* : ℝ2 −→ ℝ3

*ℎ*(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥, 𝑦, 𝑔*(*𝑥, 𝑦*)) *,*

y ( *𝑓* ◦ *ℎ*)(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥* + cos( *𝑦*), calcula ∇*𝑔*(0*,* 0).

Solucio´ n. ∇*𝑔*(0*,* 0) = (0*,* − 1 ) ◀

2

**Ejercicio 18.** La temperatura de cada uno de los puntos de una placa cuadrada viene determinada por la funcio´ n

*𝑇* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* − 1)3 ( *𝑦* − 2)2 *,* si (*𝑥, 𝑦*) ∈ [−10*,* 10] × [−10*,* 10] *.*

Calcula cua´ les son, en el punto 0*,* 0 , las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.

( )

Solucio´ n. Mayor crecimiento: ∇ *𝑓* (0*,* 0) = (12*,* 4) y mayor decrecimiento −∇ *𝑓* (0*,* 0) = (−12*,* −4) ◀

**Ejercicio 19.** Denotemos por

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 2*𝑒𝑥*2 + *𝑒*3 *𝑦*2 *,*

la altura de una montan˜a en la posicio´ n (*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2. Indica en que´ direccio´ n, partiendo desde el punto (1*,* 0), deber´ıamos comenzar a caminar para escalar lo ma´ s ra´ pido posible.

Solucio´ n. ∇ *𝑓* (1*,* 0) = (4*𝑒,* 0) ◀

**Ejercicio 20.** Supongamos que una montan˜a tiene forma de paraboloide el´ıptico

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 1 − *𝑥*2 − 2 *𝑦*2 *,* si (*𝑥, 𝑦*) ∈ [−2*,* 2] × [−2*,* 2] *.*

Si se suelta una canica en el punto (1*,* 1*,* −2), ¿en que´ direcio´ n comenzara´ a rodar?

Solucio´ n. −∇ *𝑓* (1*,* 1) = −(−2*,* −4) = (2*,* 4) ◀

**Ejercicio 21.** Sea *𝑓* : ℝ2 −→ ℝ tal que

*𝐷 𝜋 𝑓* (1*,* 1) = 2 *, 𝐷 𝜋 𝑓* (1*,* 1) = 0 y *𝐷 𝜋 𝑓* (1*,* 1) = 1 *.*

3

6

2

¿Puedes justificar si *𝑓* es diferenciable en (1*,* 1)?

Solucio´ n. No es diferenciable ◀

**Ejercicio 22.** Sean *𝑓* ,*𝑔* : ℝ ℝ dos funciones derivables. Comprueba que las siguientes igualda- des son ciertas.

−→

a) Si *ℎ*(*𝑥, 𝑦*) = *𝑓* ( *𝑦* + *𝑎𝑥*) + *𝑔*( *𝑦* − *𝑎𝑥*), entonces

*𝜕*2 *ℎ*(*𝑥, 𝑦*) − *𝑎*2 *𝜕*2 *ℎ*(*𝑥, 𝑦*) = 0 *.*

*𝜕𝑥*2

*𝜕 𝑦*2

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 19

2 DIFERENCIABILIDAD: NOCIONES FUNDAMENTALES

) )

*𝑥 𝑥*

b) Si *ℎ*(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥 𝑓 𝑦* + *𝑔 𝑦* , entonces

*𝑥*2 *𝜕*2 *ℎ*(*𝑥, 𝑦*) + 2*𝑥 𝑦 𝜕*2

*𝜕𝑥*2

*𝜕𝑥𝜕 𝑦*

*ℎ*(*𝑥, 𝑦*) + *𝑦*2 *𝜕*2 *ℎ*(*𝑥, 𝑦*) = 0 *.*

**Ejercicio 23.** Calcula las siguientes derivadas parciales de orden superior.

*𝜕 𝑦*2

a) *𝜕*2 *𝑓* (0*,* 0) siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑒𝑥* cos( *𝑦*).

*𝜕𝑥*2

b) *𝜕*2 *𝑓*

*𝜕𝑥𝜕 𝑦*

c) *𝜕*4 *𝑓*

(1*,* 2*,* 1) siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = 3*𝑥*2 + 5*𝑥 𝑦* − 5 *𝑦*2*𝑧*.

(0*,* 0) siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = sin(*𝑥*2 − *𝑦*2).

#### *𝜕𝑥*2*𝜕 𝑦*2

Solucio´ n.

a) 1 b) 5 c) 0

◀

20 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

# Diferenciabilidad: aplicaciones

**Ejercicio 1.** Calcula y clasifica los puntos cr´ıticos de las siguientes funciones.

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + ( *𝑦* − 1)2

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 *𝑦*3 (6 − *𝑥* − *𝑦*)

c) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 *𝑦*2 (1 − *𝑥* − *𝑦*)

d) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*3 + *𝑦*3 + 3*𝑎𝑥 𝑦* con *𝑎* ∈ ℝ

Solucio´ n.

* 1. M´ınimo local: (0*,* 1)

e) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑒𝑥*− *𝑦* (*𝑥*2 − 2 *𝑦*2)

f) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥*2 + *𝑦*2)*𝑒*−*𝑥*2 − *𝑦*2

g) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*4 + *𝑦*4 − 2(*𝑥* − *𝑦*)2

h) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑦*3 + 3*𝑥*2 *𝑦* − 3*𝑥*2 − 3 *𝑦*2 + 2

b) Ma´ ximo local: (2*,* 3) y (0*, 𝑦*) si *𝑦* ∈ (−∞*,* 0) ∪ (6*,* +∞)

M´ınimo local: (0*, 𝑦*) si *𝑦* ∈ (0*,* 6)

Punto de silla: (0*,* 0) y (0*,* 6)

c) Ma´ ximo local: ( 2 *,* 2 ), (0*, 𝑦*) si *𝑦* ∈ (1*,* +∞) y (*𝑥,* 0) si *𝑥* ∈ (1*,* +∞)

5

5

M´ınimo local: (0*, 𝑦*) si *𝑦* ∈ (−∞*,* 1) y (*𝑥,* 0) si *𝑥* ∈ (−∞*,* 1) Punto de silla: (0*,* 1) y (1*,* 0)

1. Si *𝑎* = 0, (0*,* 0) es punto de silla

Si *𝑎 >* 0, (−*𝑎,* −*𝑎*) es ma´ ximo local Si *𝑎 <* 0, (−*𝑎,* −*𝑎*) es m´ınimo local

1. Ma´ ximo local: (−4*,* −2)

Punto de silla: (0*,* 0)

f) Ma´ ximo local: (*𝑥,* √1 − *𝑥*2) y (*𝑥,* −√1 − *𝑥*2) con *𝑥* ∈ [−1*,* 1] M´ınimo local: (0*,* 0)

g) M´ınimo local: (√2*,* −√2) y (−√2*,* √2)

Punto de silla: (0*,* 0)

h) Ma´ ximo local:(0*,* 0) M´ınimo local: (0*,* 2)

Punto de silla: (−1*,* 1) y (1*,* 1)

◀

**Ejercicio 2.** Dada la funcio´ n *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = (3 − *𝑥*) (3 − *𝑦*) (*𝑥* + *𝑦* − 3), representa gra´ ficamente los puntos en los que *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) es mayor, menor e igual a 0 y determina y clasifica sus puntos cr´ıticos.

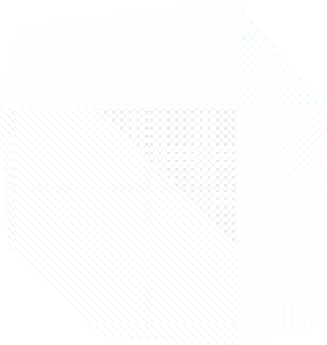
Solucio´ n.

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 21

3 DIFERENCIABILIDAD: APLICACIONES

*𝑦*

*𝑥* = 3



+

−

+

3

−

0

3

+

−

+

*𝑦* = 3

*𝑦* = 3 − *𝑥*

*𝑥*

Punto de silla: (3*,* 0), (0*,* 3) y (3*,* 3).

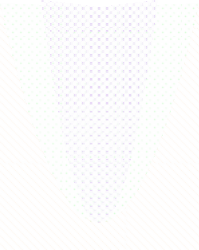
Ma´ ximo local: (2*,* 2). ◀

**Ejercicio 3.** Sea *𝑓* : ℝ2 −→ ℝ dada por *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥*2 − *𝑦*) (3*𝑥*2 − *𝑦*).

1. Prueba que *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) tiene un m´ınimo en (0*,* 0) sobre cualquier recta *𝑦* = *𝜆𝑥*.
2. Representa gra´ ficamente los puntos en los que *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) es mayor, menor e igual a 0.
3. Deduce que (0*,* 0) no es un m´ınimo relativo de *𝑓* (*𝑥, 𝑦*). Solucio´ n.

*𝑦*

*𝑦* = *𝑥*2



−

−

+

+

+

*𝑥 𝑦* = 3*𝑥*2

◀

**Ejercicio 4.** Estudia los extremos absolutos de las siguientes funciones en los recintos indicados.

1

a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + *𝑦*2 − 1 en *𝑀* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 − *𝑦* ≤ 1}.

1

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* − 1)2 + *𝑦*2 en *𝑆* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1}. Solucio´ n.

1. M´ınimo absoluto en (0*,* 0)
2. M´ınimo absoluto en (1*,* 0) y ma´ ximo absoluto en (−1*,* 0)

◀

22 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

# Integracio´n mu´ ltiple

**Ejercicio 1.** Calcula (sin realizar ninguna integral) el a´ rea de

a) Ω = (*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ212 ≤ *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 3

b) Ω = (*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 2 ≤ 3*𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 3

1

c) Ω = (*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ211 ≤ *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 2*, 𝑦* ≤

d) Ω =

Solucio´ n.

a) *𝜋*

(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ211 ≤ 2*𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 2*, 𝑦* ≤ *𝑥*

b) √︃ 4 − √3 *𝜋*

3

c) *𝜋*

2

d) √2 − √︃ 1 *𝜋*

2

2

◀

**Ejercicio 2.** Calcular el a´ rea de los siguientes dominios en ℝ2

1. Dominio limitado por las rectas *𝑥* = 0, *𝑥* = *𝜋* 4 y las curvas *𝑦* = sin *𝑥*, *𝑦* = cos *𝑥*.

/

1. Dominio limitado por las rectas *𝑥* = 2, *𝑥* = 6, *𝑦* = 0 y la curva *𝑦* = 1 *𝑥*.

/

1. Dominio limitado por la recta *𝑦* = *𝑥* y la curva *𝑦*2 = *𝑥*3

**Ejercicio 3.** Evaluar cada una de las siguientes integrales con el recta´ ngulo *𝑅* especificado: a) ∬ (*𝑥*2 + *𝑦*)d*𝑥*d *𝑦*, *𝑅* = [0*,* 1] × [0*,* 2]

*𝑅*

b) ∬ (*𝑥 𝑦*)2 cos *𝑥*3d*𝑥*d *𝑦* , *𝑅* = [0*,* 1] × [0*,* 2]

*𝑅*

c) ∬ *𝑥*2 *𝑦*d*𝑥*d *𝑦* , *𝑅* = [0*,* 1] × [0*,* 2]

*𝑅*

d) ∬ 1 d*𝑥*d *𝑦* , *𝑅* = [1*,* 2] × [1*,* 3]

*𝑅*

*𝑥*

e) ∬ *𝑥*2 *𝑦*2d*𝑥*d *𝑦* , *𝑅* = [2*,* 5] × [1*,* 3]

*𝑅*

f) ∬ 1 d*𝑥*d *𝑦* , *𝑅* = [3*,* 4] × [1*,* 2]

(*𝑥* + *𝑦*)2

*𝑅*

Solucio´ n.

1. 8 3
2. 8 sin 1 9
3. 2 3

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 23

4 INTEGRACIO´ N MU´ LTIPLE

1. 2 log 2

e) 338

f) log 25 .

24

**Ejercic**∬**io 4.** Calcular las integrales siguiente1 s

(a) ∬*𝐷 𝑥*d(*𝑥, 𝑦*) siendo *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 11

◀

≤ *𝑥* ≤ 2*,* 2*𝑥*2 − 2 ≤ *𝑦* ≤ *𝑥*2 + *𝑥*}.

(b) *𝐷* (*𝑥* + *𝑦*)d*𝐴* siendo *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 *𝑦* ≤ *𝑥* ≤ 3 *𝑦,* 1 ≤ *𝑦* ≤ 2}.

**Ejercicio 5.** Calcular la integral

∬

#### *𝑥 𝑦*d*𝐴,*

*𝐷*

siendo *𝐷* el recinto limitado por las rectas *𝑦* = −1, *𝑦* = 1, *𝑦* = *𝑥* y la curva *𝑥* = *𝑦* + *𝑦*2.

∬ √︁≤ ≤ + −

**Ejercicio 6.** Calcular la integral *𝑦*d*𝑥*d *𝑦*, siendo *𝐷* el conjunto definido por √ *𝑦 𝑥* 1 1 *𝑦*2

*𝐷*

y 0 ≤ *𝑦* ≤ 1.

Solucio´ n. 13 ◀

30

**Ejercicio 7.** Cambiar el orden de integracio´ n, esbozar las regiones correspondientes y obtener el valor de la integral:

∫

∫

a) 1

−1

1

| *𝑦* |

(*𝑥* + *𝑦*)2d*𝑥*d *𝑦*

b) ∫ 1 ∫ 1

*𝑒𝑦*3 d *𝑦*d*𝑥*

0

Solucio´ n.

a) 2 3

√*𝑥*

b) *𝑒* − 1 .

3

**Ejercicio 8.** Calcular ∫ 1 ∫ 3

0

3 *𝑦*

*𝑒𝑥*2 d*𝑥*) d *𝑦* invirtiendo previamente el orden de integracio´ n.

**Ejercicio 9.** Calcula la siguiente integral

◀

Solucio´ n.

6

*𝑦*=0

∫

2 *𝑒𝑥*2

*𝑦*

∫

3

*𝑑𝑥𝑑𝑦*

3 (*𝑒*4 − 1) ◀

2

**Ejercicio 10.** Calcular mediante una integral doble el volumen cubierto por la superficie *𝑧* = √*𝑥*

sobre el recinto limitado, en el plano XY, por la curva *𝑥*2 + *𝑦*2 − *𝑥* = 0.

Solucio´ n. 8 ◀

15

**Ejercicio 11.** Calcular mediante una integral doble el volumen comprendido entre el cilindro el´ıptico

*𝑥*2 + 4 *𝑦*2 = 1, el paraboloide *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧* y el plano *𝑧* = 0.

24 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

Solucio´ n. 5*𝜋* ◀

32

**Ejercicio 12.** Calcular la integral ∬ *𝑥*d*𝑥*d *𝑦*, siendo *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 : 1 ≤ *𝑥* ≤ 2*,* 2*𝑥*2 −2 ≤ *𝑦* ≤ *𝑥*2 +*𝑥*}.

*𝐷*

Solucio´ n. 19 ◀

12

**Ejercicio 13.** Calcular la integral ∬ (*𝑥* + *𝑦*)d*𝑥*d *𝑦*, siendo *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 : *𝑦* ≤ *𝑥* ≤ 3 *𝑦,* 1 ≤ *𝑦* ≤ 2}. Solucio´ n. 14 ◀

∬ −

*𝐷*

**Ejercicio 14.** Calcular la integral √*𝑎*2 *𝑥*2d*𝑥*d *𝑦*, siendo *𝐷* el recinto del primer cuadrante limitado

*𝐷*

por el c´ırculo centrado en el origen y de radio *𝑎 >* 0.

Solucio´ n. 2*𝑎*3

3

**Ejercicio 15.** Utilizando el cambio a coordenadas polares, calcular la integral ∬ √︁

*𝐷*

1

1 + *𝑥*2 + *𝑦*2

◀

d*𝑥*d *𝑦*,

siendo *𝐷* el recinto del primer cuadrante limitado por el c´ırculo centrado en el origen y de radio 1.

Solucio´ n. (√2 − 1) *𝜋*

2

**Ejercicio 16.** Usa coordenadas polares para calcular ∫ ∞ ∫ ∞ (1+*𝑥* 1 *𝑦* )

◀

d*𝑥*d *𝑦*

Solucio´ n. *𝜋*

2

**Ejercicio 17.** Usa coordenadas polares para calcular ∫ ∞ ∫ ∞ *𝑒*−*𝑥*2 − *𝑦*2 d*𝑥*d *𝑦.* Utiliza el resultado para

0 0 2 + 2 2

◀

calcular ∫ ∞ *𝑒*

0

−*𝑥*2

0 0

*𝑑𝑥*.

∬

**Ejercicio 18.** Calcular

*𝐷 𝑦*2

*𝑦* = 2 y *𝑦*3 = *𝑥*2.

*𝑥* d*𝐴*, siendo *𝐷* el recinto del primer cuadrante limitado por *𝑥* = 0, *𝑦* = 1,

**Ejercicio 19.** Calcular *𝐷 𝑥*d*𝐴*, siendo *𝐷* el recinto limitado por *𝑦* = *𝑥*2 y *𝑦* = *𝑥*3.

**Ejercicio 20.** Calcular ∬∭*𝐷* | *𝑦* − sin(*𝑥*) |d*𝐴*, siendo *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 1 0 ≤ *𝑥* ≤ *𝜋,* 0 ≤ *𝑦* ≤ 1}.

**Ejercicio 21.** Calcular

*𝑦𝑧*2*𝑒𝑥*d*𝑥*d *𝑦*d*𝑧* siendo *𝑃* = [0*,* 1] × [1*,* 2] × [−1*,* 1].

*𝑃*

Solucio´ n. *𝑒* − 1 ◀

**Ejercicio 22.** Calcular *𝑥*2 *𝑦*2 *𝑧*2d*𝑥*d *𝑦*d*𝑧* siendo *𝐷* el recinto limitado por una esfera de radio

*𝐷*

∭ √︁ + +

*𝑅* centrada en el origen.

Solucio´ n. *𝜋𝑅*4 ◀

**Ejercicio 23.** Calcular el volumen de un cono dado por *𝑧*2

2

*𝑎*

= *𝑥*2 + *𝑦*2 (es decir, radio ma´ ximo *𝑟* y

*𝑟*

2

altura *𝑎*). So´ lo consideramos valores positivos de *𝑧*.

Solucio´ n. *𝜋𝑟*2 *𝑎* ◀

∭

3

**Ejercicio 24.** Calcular d*𝑥*d *𝑦*d*𝑧*, siendo *𝐷* el tetraedro limitado por los planos coordenados y el

*𝐷*

plano *𝑥* + *𝑦* + *𝑧* = 1 (el valor de la integral es el volumen del tetraedro).

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 25

4 INTEGRACIO´ N MU´ LTIPLE

Solucio´ n. 1/6 ◀

**Ejercicio 25.** Hallar el volumen limitado por los paraboloides de ecuaciones *𝑧* = *𝑥*2 + *𝑦*2 y *𝑧* =

2 − *𝑥*2 − *𝑦*2.

Solucio´ n. *𝜋* ◀

**Ejercicio 26.** Sea el so´ lido limitado inferiormente por el paraboloide *𝑧* = *𝑥*2 + *𝑦*2 y superiormente por la esfera *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 6. Calcular dicho volumen mediante un cambio de coordenadas apropiado.

+

Solucio´ n. 2*𝜋* −11 2√6 ◀

3

**Ejercicio 27.** Hallar el volumen limitado por dentro por la superficie *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*2 y por fuera por la superficie *𝑥*2 + *𝑦*2 + 3*𝑧* = 4.

Solucio´ n. 125*𝜋* ◀

6

**Ejercicio 28.** Obte´ n el a´ rea de la interseccio´ n y de la unio´ n las siguientes regiones

1. Bola de radio 2 centrada en el origen y bola de radio 2 centrada en el punto (2*,* 0).
2. Bola de radio 2 centrada en el origen y bola de radio 2 centrada en el punto (3*,* 0).
3. Bola de radio 1 centrada en el origen y elipse *𝑥*2 + 3 *𝑦*2 = 1 .

2

**Ejercicio 29.** Sea Ω la regio´ n del plano encerrada por las para´ bolas *𝑦* = *𝑥*2*, 𝑦* = 2 − *𝑥*2*.* Sea *𝑓* : Ω −→

ℝ dada por *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = |*𝑥*|*𝑒𝑦*.

1. Calcula el a´ rea de Ω.
2. Calcula el volumen bajo la gra´ fica de *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) y sobre el plano *𝑋𝑌*.

**Ejercicio 30.** Calcula

∬ 1( ) ∈ ≤ + ≤ ≥*𝑄*

a) *𝑥*2 *𝑦*d*𝑥*d *𝑦,* donde *𝑄* = *𝑥, 𝑦* ℝ2 1 *𝑥*2 *𝑦*2 3*, 𝑥* 0

b) ∬ *𝑦𝑒𝑥*d*𝑥*d *𝑦,* donde *𝑄* = *𝑥, 𝑦* ℝ2 2 *𝑥*2 *𝑦*2 4*, 𝑦* 0

1( ) ∈ ≤ + ≤ ≤*𝑄*

c) ∬ *𝑥 𝑦*2d*𝑥*d *𝑦,* donde *𝑄* = *𝑥, 𝑦* ℝ2 1 2*𝑥*2 3 *𝑦*2 4*, 𝑥* 0*, 𝑦* 0

1( ) ∈ ≤ + ≤ ≥ ≥*𝑄*

d) ∬ *𝑥*2 *𝑦*2d*𝑥*d *𝑦,* donde *𝑄* = *𝑥, 𝑦* ℝ2 *𝑥*2 *𝑦*2 4*, 𝑦 𝑥*

1( ) ∈ + ≤ ≤*𝑄*

e) ∬*𝑄 𝑥*2 *𝑦*3d*𝑥*d *𝑦,* donde *𝑄* = (*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ211 ≤ *𝑥*2 + 5 *𝑦*2 ≤ 2*, 𝑥* ≤ 0*, 𝑦* ≤ 0

∬*𝑄*

*𝑥*2 *𝑦*d*𝑥*d *𝑦* = 0*.*

**Ejercicio 31.** Calcular el volumen de la porcio´ n de la esfera centrada en el origen y de radio 2 superior al plano horizontal *𝑧* = 1.

**Ejercicio 32.** A trave´ s de una esfera so´ lida de radio 2 se perfora un tu´ nel cil´ındrico de radio 1. Supo- niendo que el eje del cilindro pasa por el centro de la esfera y que el interior del cilindro perforado se elimina, calcula el volumen del so´ lido que queda.

1

**Ejercicio 33.** Sea *𝑄* = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ *𝑧* ≤ *𝑥*2 + *𝑦*2 + 1*, 𝑥*2 ≤ *𝑦* ≤ 2 − *𝑥*2

a) Calcula el volumen de *𝑄*

26 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

b) ∭*𝑄 𝑥*d*𝑉.*

c) ∭*𝑄 𝑦*d*𝑉.*

d) ∭*𝑄 𝑥𝑧*d*𝑉.*

∭

e) *𝑄 𝑧*d*𝑉.* Ayuda: (*𝑎* + *𝑏*)3 = *𝑎*3 + 3*𝑎*2*𝑏* + 3*𝑎𝑏*2 + *𝑏*3

Solucio´ n.

1. 8

3

1. 0
2. 8

3

1. 0

◀

**Ejercicio 34.** Calcular el volumen del recinto del primer octante obtenido al quitar a una esfera de centro (0*,* 0*,* 0) y radio 4 la esfera de mismo centro y la mitad de radio.

**Ejercicio 35.** Calcular los siguientes volu´ menes:

* 1. El volumen del cilindro de ecuacio´ n *𝑥*2 *𝑦*2 = 4 limitado por el primer octante y los planos

+

*𝑧* = 0 y *𝑧* = 4.

* 1. El volumen del cuerpo so´ lido limitado por los paraboloides *𝑧* = *𝑥*2 + *𝑦*2 y *𝑧* = 2 − *𝑥*2 − *𝑦*2.

**Ejercicio 36.** Sean

*𝑄* =

(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ

3 1*𝑥*2

+ *𝑦*2

+ *𝑧*2 ≤ 1

*𝑄*- = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 1*𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 3*𝑧*2*, 𝑧* ∈ [0*,* 2] *.*

-a) Calcula el volumen de *𝑄* ∩ *𝑄*

1. Calcula el volumen de *𝑄* ∪ *𝑄*

-

1. La densidad de un cuerpo que ocupa el volumen *𝑄* viene dada por

*𝑑*(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥*2 *𝑦*2*𝑧*2*.*

Obte´ n su masa.

-

1. La densidad de un cuerpo que ocupa el volumen *𝑄* viene dada por

*𝑑*(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑧*(*𝑥*2 + *𝑦*2)*.*

Obte´ n su masa.

Solucio´ n.

a) *𝜋*

3

b) 9*𝜋*

4*𝜋*

c)

945

d) 48*𝜋*

◀

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 27

4 INTEGRACIO´ N MU´ LTIPLE

###### Ejercicio 37. Sea

1

*𝑄* = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ *𝑧*4*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0 *𝑧* ∈ [0*,* 1]

1. Calcula el volumen de *𝑄*

b) Calcula ∭*𝑄 𝑒𝑧 𝑑𝑉*

5

**Ejercicio 38.** Sean

*𝑄* =

(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ

3 1*𝑥*2

+ *𝑦*2

+ *𝑧*2 ≤ 4

*𝑄* = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 (*𝑥* − 3)2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 ≤ 4 *.*

-

-

1

1. Calcula el volumen de *𝑄* ∩ *𝑄*
2. Calcula el volumen de *𝑄* ∪ *𝑄*-

c) Calcula ∭ - *𝑦𝑧*d*𝑉𝑄*∩

**Ejercicio 39.** Sea *𝑄* la esfera de radio unidad centrada en el origen y sea

- 1

*𝑄* = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑧* ≥ *𝑥*2 + *𝑦*2 *.*

-∩

a) Calcula el volumen de *𝑄 𝑄*

b) Calcula ∭*𝑄*∩*𝑄*- *𝑥*3 *𝑦*2*𝑑𝑉*

c) Calcula ∭*𝑄*∩*𝑄*- √︁(*𝑥*2 + *𝑦*2)3 *𝑑𝑉*

###### Ejercicio 40. Sea

*𝑄* =

(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ

3 12*𝑥*2

+ *𝑦*2

≤ *𝑧* ≤ 1 *.*

a) Calcula el volumen de *𝑄*

b) Calcula ∭*𝑄* (2*𝑥*2 + *𝑦*2)*𝑑𝑉*

c) Calcula ∭*𝑄* (*𝑥*2 + *𝑦*2)*𝑑𝑉*

28 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

###### A. Ejercicios resueltos.

1. Hallar el volumen del so´ lido situado debajo del paraboloide *𝑧* = *𝑥*2 *𝑦*2, arriba del plano *𝑧* = 0 y dentro del cilindro *𝑥*2 *𝑦*2 = 2*𝑥*.

+

+

**Solucio´n**. En este caso, la forma del dominio nos sugiere que es una buena idea trabajar con coordenadas polares. Por tanto, se hace el cambio de variable habitual a polares *𝑥* = *𝑟* cos *𝜃*, *𝑦* =

*𝑟* sin *𝜃*, con el jacobiano de la transformacio´ n igual a *𝑟*. Los l´ımites de integracio´ n de *𝑟* y *𝜃* se obtienen a trave´ s de la idea habitual de **traducir las fronteras del dominio** *𝐷* **a las nuevas coordenadas**. En nuestro caso, la frontera del c´ırculo *𝑥*2 *𝑦*2 = 2*𝑥* (que es el c´ırculo de centro el punto 1*,* 0 y radio 1) se traduce en *𝑟*2 = 2*𝑟* cos *𝜃*, o bien *𝑟* = 2 cos *𝜃*, es decir, que en el interior de la base del cilindro se tiene 0 ≤ *𝑟* ≤ 2 cos *𝜃*. Es tambie´ n evidente (dibujando el c´ırculo de centro (1*,* 0) y radio 1, o por ejemplo poniendo que cos *𝜃* ≥ 0 para que pueda haber una *𝑟* intermedia) que

+ ( )

Por tanto, tenemos que calcular

*𝜋*

– 2 ≤ *𝜃* ≤

*𝜋 .*

2

∬ (*𝑥*2

+ *𝑦*2)d*𝐴* =

∫ *𝜋*/2 ∫ 2 cos *𝜃*

*𝑟*2

· *𝑟*d*𝑟*d*𝜃* = 4

∫ *𝜋*/2

cos4

*𝜃*d*𝜃* =

3*𝜋 ,*

2

*𝐷* −*𝜋*/2 0 −*𝜋*/2

donde he omitido los detalles de ca´ lculo de la integral de una variable en *𝜃*, que hemos visto en

detalle en un ejercicio resuelto en clase.

1. (a) Se considera *𝐷* el tria´ ngulo de ve´ rtices (0*,* 0), (0*,* 2) y (4*,* 2). Calcular

∫ ∫*𝐷 𝑒*

*𝑦*2

d*𝑥*d *𝑦*.

(b) Cambiar el orden de integracio´ n pasando primero a una integral doble y luego a la otra

posibilidad de integral iterada, para calcular

### ∫ 9 ∫ 3

√ *𝑦*

1

*𝑥𝑒𝑦*d*𝑥*d *𝑦.*

**Solucio´n**. (a) En este caso el tria´ ngulo base se nos da de forma expl´ıcita, pero es la forma de la funcio´ n a integrar la que determina el orden de integracio´ n. Ma´ s precisamente, si intentamos inte- grar primero respecto a la variable *𝑦*, **la integral (en una variable) de la funcio´n** *𝑒𝑦*2 **no se puede**

**efectuar**. Por ello, estamos obligados de integrar primero respecto a *𝑥*, es decir, la integral interior sera´ respecto a *𝑥* y la integral exterior respecto a *𝑦*. Eso significa que al pasar a integrales iteradas, necesitamos ver *𝑦* entre l´ımites de integracio´ n fijas y *𝑥* entre l´ımites de integracio´ n variables que pueden depender de *𝑦*. Con esta idea, podemos observar (dibujando a escala correcta el tria´ ngulo se ve de inmediato) que el tria´ ngulo se escribe como

*𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 : 0 ≤ *𝑥* ≤ 2 *𝑦,* 0 ≤ *𝑦* ≤ 2} y la integral se calcula de la siguiente forma

d*𝐴* =

d*𝑥*d *𝑦* =

2 *𝑦𝑒*

∬ *𝑦*2

*𝑒*

*𝐷*

∫ 2 ∫ 2 *𝑦*

0

0

*𝑦*2

*𝑒*

∫ 2 *𝑦*2

0

*𝑦*2 12 4

(b) En este ejemplo, las integrales iteradas nos dicen que estamos integrando sobre un dominio

d *𝑦* = *𝑒*

10 =

– 1*.*

*𝐷* con los l´ımites

*𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2

: √ *𝑦* ≤ *𝑥* ≤ 3*,* 1 ≤ *𝑦* ≤ 9}

Si queremos expresar *𝑥* entre l´ımites fijos e *𝑦* entre l´ımites variables, tenemos que examinar los l´ımites precedentes y ver que´ podemos deducir. Primero, queremos los l´ımites (fijos) para *𝑥*. Obser-

vamos que por un lado ya ten√emos *𝑥* ≤ 3, que ya es fijo, y por otro lado tenemos *𝑥* ≥ √ *𝑦* pero a

la vez *𝑦* ≥ 1, por tanto *𝑥* ≥ 1 = 1. Es decir, 1 ≤ *𝑥* ≤ 3. En cuanto a los l´ımites (ahora posible-

mente variables, dependiendo de *𝑥*) de la variable *𝑦*, por un lado observamos que 1 ≤ *𝑦*, que no

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 29

4 INTEGRACIO´ N MU´ LTIPLE

se puede mejorar, y por otro tenemos que √ *𝑦 𝑥*, lo que elevando al cuadrado nos lleva a *𝑦 𝑥*2. Resumiendo, podemos escribir el mismo dominio de integracio´ n *𝐷* en la forma

≤ ≤

*𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 : 1 ≤ *𝑥* ≤ 3*,* 1 ≤ *𝑦* ≤ *𝑥*2}*,*

y las integrales iteradas correspondientes a esta nueva forma de describir el mismo dominio *𝐷* son

∫ 3 ∫ *𝑥*2

1

1

*𝑥𝑒𝑦*d *𝑦*d*𝑥* =

∫ 3 *𝑥*(*𝑒𝑥*2

– *𝑒*)d*𝑥* =

1 *𝑒𝑥*2 −

*𝑒𝑥*2 1 13 =

*𝑒*9 − 9*𝑒 .*

1. Hallar el volumen del so´ lido limitado por el paraboloide *𝑧* = *𝑥*2 3 *𝑦*2 y los planos *𝑥* = 0, *𝑦* = 1,

+

1

2

2

1

2

*𝑦* = *𝑥*, *𝑧* = 0.

*𝑥*2

**Solucio´n**. La funcio´ n a integrar, como es habitual en ejercicios de volu´ menes, es *𝑧* = *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

+ 3 *𝑦*2. En cuanto al dominio de integracio´ n dentro del plano base *𝑧* = 0, es el tria´ ngulo obtenido

como interseccio´ n de las rectas *𝑥* = 0, *𝑦* = *𝑥* e *𝑦* = 1, es decir el tria´ ngulo recta´ ngulo de ve´ rtices los puntos de coordenadas 0*,* 0 , 0*,* 1 y 1*,* 1 . En este caso es indiferente que´ variable consideramos entre l´ımites fijos (se puede hacer de ambas maneras), pero ya que nos hemos acostumbrado en los ejercicios precedentes a considerar *𝑦* entre l´ımites fijos y *𝑥* entre l´ımites variables (que puedan depender de *𝑦*), seguimos con esta convencio´ n y obtenemos que

( ) ( ) ( )

*𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 : 0 ≤ *𝑥* ≤ *𝑦,* 0 ≤ *𝑦* ≤ 1}*,* por tanto la integral se calcula como sigue:

∬ 2 2

(*𝑥*

+ 3 *𝑦* )d*𝐴* =

*𝐷*

∫ 1 ∫ *𝑦* 2 2

0

0

10 ∫ 1 3

0

10 5

3

1. Calcular las integrales dobles de las funciones indicadas en cada apartado sobre la regio´ n indicada en el mismo apartado:

(*𝑥*

+ 3 *𝑦* )d*𝑥*d *𝑦* =

*𝑦* d *𝑦* = 12 = 6 *.*

(a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥* − *𝑦*, donde *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) : *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 1*, 𝑥* + *𝑦* ≥ 1}.

(b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥*2 + *𝑦*2)−3/2, donde *𝐷* es la misma regio´ n que en el apartado anterior.

**Solucio´n.** En este ejercicio pasamos a coordenadas polares, ya que la regio´ n que tenemos tiene como una de las fronteras parte de una circunferencia. Poniendo *𝑥* = *𝑟* cos *𝜃*, *𝑦* = *𝑟* sin *𝜃* obtenemos los l´ımites de integracio´ n **traduciendo las fronteras del dominio** *𝐷* **en las nuevas coordenadas**, como hemos visto en otros ejemplos de clase:

*𝑥*2 + *𝑦*2 = 1 =⇒ *𝑟*2 = 1 =⇒ *𝑟* = 1

y

por tanto

*𝑥 𝑦* = 1 = *𝑟* cos *𝜃* sin *𝜃* = 1 = *𝑟* = 1 *,*

cos *𝜃* + sin *𝜃*

+ ⇒ ( + ) ⇒

1

cos *𝜃* + sin *𝜃* ≤ *𝑟* ≤ 1*,* 0 ≤ *𝜃* ≤

*𝜋 ,*

2

los l´ımites del a´ ngulo *𝜃* son evidentes si hacemos un dibujo o directamente nos damos cuenta de que la recta *𝑥 𝑦* = 1 une los puntos 1*,* 0 y 0*,* 1 pasando solo por el primer cuadrante. Con esta preparacio´ n y sin olvidar el **Jacobiano igual a** *𝑟*, podemos pasar a efectuar los ca´ lculos en los dos apartados.

+ ( ) ( )

30 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

1. En este caso tenemos

∬ *𝑥* − *𝑦*d*𝐴* =

∫ *𝜋*/2 ∫ 1

*𝑟*2

(cos *𝜃* − sin *𝜃*)d*𝑟*d*𝜃*

*𝐷* 0 1/(cos *𝜃*+sin *𝜃*)

∫ *𝜋*/2 *𝑟*3

1*𝑟*=1

= 0∫ 3 (cos *𝜃* − sin *𝜃*)1*𝑟*=1/(cos *𝜃*+sin *𝜃*) d*𝜃* 1

1

*𝜋*/2

(cos *𝜃* − sin *𝜃*)

= 3 0 (cos *𝜃* − sin *𝜃*) − cos *𝜃* + sin *𝜃*)3 d*𝜃*

∫

### ( 1

1

*𝜋*/2

(cos *𝜃* + sin *𝜃*)′

= 3 0 (cos *𝜃* − sin *𝜃*) − (cos *𝜃* + si1n1*𝜃*)3 d*𝜃*

1

1. En este caso tenemos

= 1

3

+ +

= 0*.*

sin *𝜃* cos *𝜃* 1 1

2 (cos *𝜃* + sin *𝜃*)2

*𝜃*=*𝜋*/2

*𝜃*=0

∬ (*𝑥*2

+ *𝑦*2)−3/2

d*𝐴* =

∫ *𝜋*/2 ∫ 1

1 *𝑟*d*𝑟*d*𝜃* =

*𝑟*

3

∫ *𝜋*/2 ∫ 1

1 d*𝑟*d*𝜃*

*𝑟*

2

*𝐷* ∫

0

1/(c1os1*𝜃*+sin *𝜃*)

0 1/(cos *𝜃*+sin *𝜃*)

*𝜋*/2

11

=

∫

0

*𝜋*/2

1

– *𝑟*

*𝑟*=1 d*𝜃*

*𝑟*=1/(cos *𝜃*+sin *𝜃*)

1*𝜃*=*𝜋*/2

= 0 (−1 + cos *𝜃* + sin *𝜃*)d*𝜃* = (sin *𝜃* − cos *𝜃* − *𝜃*)1*𝜃*=0

= 2 *𝜋 .*

−

2

1. Evaluar la integral doble

∬

*𝐷*

*𝑥 𝑦*

*𝑒 𝑥*− *𝑦* d*𝐴,*

+

donde *𝐷* es el trapecio de ve´ rtices (1*,* 0), (2*,* 0), (0*,* −2) y (0*,* −1). Sugerencia: utilizar el cambio de variable (*𝑢, 𝑣*) = *𝑇* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* + *𝑦, 𝑥* − *𝑦*) presentado en clase.

**Solucio´n.** Se trata de un cambio de variable nuevo y vamos a seguir exactamente los mismos tres pasos que en los ejercicios vistos en clase (transformar la funcio´ n, calcular el jacobiano y hallar los nuevos l´ımites de integracio´ n). Es un algoritmo general a seguir cuando se trata de cambios de variable en dos variables.

**Paso 1. Transformacio´n de la funcio´n a integrar**. Hacemos el cambio de variable *𝑢* = *𝑥* + *𝑦* y

*𝑣* = *𝑥* − *𝑦*, por tanto

*𝑒*(*𝑥*+ *𝑦*)/(*𝑥*− *𝑦*) = *𝑒𝑢*/*𝑣 .*

**Paso 2. Calcular el jacobiano de la transformacio´n** *𝑇*. Para ello, es conveniente despejar *𝑥* e *𝑦* a partir de las ecuaciones *𝑢* = *𝑥 𝑦*, *𝑣* = *𝑥 𝑦* (eso en te´ rminos matema´ ticos se llama calcular la inversa de la transformacio´ n), ya que el jacobiano se calcula derivando *𝑥* respecto a *𝑢* y *𝑣* (y tambie´ n

+ −

*𝑦*) y no al reve´ s. En este caso es muy fa´ cil, obtenemos de forma inmediata (sumando por ejemplo las dos ecuaciones) que

*𝑥* = *𝑥*(*𝑢, 𝑣*) = *𝑢* + *𝑣 , 𝑦* = *𝑦*(*𝑢, 𝑣*) = *𝑢* − *𝑣 .*

2 2

La matriz de las derivadas parciales respecto a *𝑢* y *𝑣* es

1 1

2 2

1 1

−

2 2

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 31

4 INTEGRACIO´ N MU´ LTIPLE

y su determinante es 1 2. Por tanto el jacobiano de la tranformacio´ n es 1 2, y no tenemos que olvidar en este punto que en la fo´ rmula del cambio de variable se utiliza el **valor absoluto del jacobiano**. Es decir, que en el ca´ lculo efectivo de la integral habra´ que multiplicar por 1/2.

– / − /

**Paso 3. Transformar el dominio de integracio´n para hallar los l´ımites de integracio´n de** *𝑢* **y** *𝑣*. Eso se hace transformando simplemente en las nuevas variables (*𝑢, 𝑣*) las ecuaciones de las rectas que dan la frontera del dominio *𝐷* inicial. El dominio *𝐷* inicial es el trapecio de ve´ rtices (0*,* −2), (0*,* −1), (1*,* 0) y (2*,* 0), es decir, sus aristas son segmentos de las rectas, respectivamente, *𝑦* = 0, *𝑦* = *𝑥* − 1,

*𝑥* = 0 e *𝑦* = *𝑥* − 2. Teniendo en cuenta la definicio´ n de *𝑢* y *𝑣* la traduccio´ n es ahora inmediata.

* La recta *𝑦* = 0 se transforma en *𝑢* = *𝑣*.
* La recta *𝑦* = *𝑥* − 1, o equivalente *𝑥* − *𝑦* = 1, se transforma en *𝑣* = 1.
* La recta *𝑥* = 0 se transforma en *𝑢* = −*𝑣*.
* La recta *𝑦* = *𝑥* − 2, o equivalente *𝑥* − *𝑦* = 2, se transforma en *𝑣* = 2.

Deducimos que los l´ımites de integracio´ n para las nuevas variables *𝑢*, *𝑣* son −*𝑣* ≤ *𝑢* ≤ *𝑣*, 1 ≤ *𝑣* ≤

2.

Finalmente, podemos efectuar el ca´ lculo de la integral utilizando la fo´ rmula general del cambio

de variable y los pasos anteriores:

∫ ∫d

∫

∬ *𝑒*

(*𝑥*+ *𝑦*)/(*𝑥*− *𝑦*)

1 2 *𝑣*

*𝐴* = 2

*𝑒𝑢*/*𝑣*

d*𝑢*d*𝑣* = 1 2

2

*𝑣*(*𝑒* − *𝑒*−1

)d*𝑣*

*𝐷* 1

3

−*𝑣* 1

= 4 (*𝑒* − *𝑒*−1)*.*

1. De forma parecida al ejercicio anterior, calcular la integral doble

∬*𝐷*

(*𝑥* + *𝑦*)2 *𝑒𝑥*2 − *𝑦*2 d*𝐴,*

donde *𝐷* es el cuadrado de ve´ rtices 1*,* 0 , 0*,* 1 , 1*,* 0 , 0*,* 1 .

( ) ( ) (− ) ( − )

**Solucio´n.** Se trata del mismo cambio de variable que en el ejercicio precedente y vamos a apro- vechar lo que hemos calculado antes.

**Paso 1. Transformacio´n de la funcio´n a integrar**. Ponemos *𝑢* = *𝑥* + *𝑦* y *𝑣* = *𝑥* − *𝑦*, por tanto

(*𝑥* + *𝑦*)2 *𝑒𝑥*2 − *𝑦*2 = (*𝑥* + *𝑦*)2 *𝑒*(*𝑥*+ *𝑦*) (*𝑥*− *𝑦*) = *𝑢*2 *𝑒𝑢𝑣 .*

**Paso 2. Calcular el jacobiano de la transformacio´n** *𝑇*. Se ha hecho en el paso 2 del Ejercicio 6, nos ha dado 1 2, por tanto hay que multiplicar con su valor absoluto 1 2.

– / /

**Paso 3. Transformar el dominio de integracio´n para hallar los l´ımites de integracio´n de** *𝑢* **y** *𝑣*. Eso se hace transformando simplemente en las nuevas variables (*𝑢, 𝑣*) las ecuaciones de las rectas que dan la frontera del dominio *𝐷* inicial. El dominio *𝐷* inicial es el cuadrado de ve´ rtices (0*,* 1), (0*,* −1), (1*,* 0) y (−1*,* 0), es decir, sus aristas son segmentos de las rectas, respectivamente, *𝑥*+ *𝑦* = 1, *𝑥*− *𝑦* = 1,

*𝑦* − *𝑥* = 1 y −*𝑥* − *𝑦* = 1. Teniendo en cuenta la definicio´ n de *𝑢* y *𝑣* la traduccio´ n es ahora inmediata.

* La recta *𝑥* + *𝑦* = 1 se transforma en *𝑢* = 1.
* La recta −*𝑥* − *𝑦* = 1, o equivalente *𝑥* + *𝑦* = −1, se transforma en *𝑢* = −1.
* La recta *𝑥* − *𝑦* = 1 se transforma en *𝑣* = 1.
* La recta *𝑦* − *𝑥* = 1, o equivalente *𝑥* − *𝑦* = −1, se transforma en *𝑣* = −1.

Deducimos que los l´ımites de integracio´ n para las nuevas variables *𝑢*, *𝑣* son −1 ≤ *𝑢* ≤ 1, −1 ≤

1.

*𝑣*

≤

Finalmente, podemos efectuar el ca´ lculo de la integral utilizando la fo´ rmula general del cambio de variable y los pasos anteriores:

### ∫ ∫ 2

*𝑥*2 − *𝑦*2

### ∫ 1 ∫ 1 1

2 *𝑢𝑣*

∫ 1 1

2 *𝑒𝑢𝑣* 11

(*𝑥* + *𝑦*) *𝑒*

*𝐷*

1 *𝑢𝑒*−*𝑢*d*𝑢* = 2*.*

d*𝑥*d *𝑦* =

−∫1

2

*𝑢 𝑒*

−1

2

= 1

1 *𝑢*(*𝑒𝑢* − *𝑒*−*𝑢*)d*𝑢* = 1

−1

d*𝑣*d*𝑢* =

*𝑢*

−∫1

2

1 *𝑢𝑒𝑢*d*𝑢* − 1

2

−1

*𝑢* 1−1d*𝑢*∫

2

−1

*𝑒*

32 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

1. Sea *𝑊* el so´ lido en **R**3 acotado por las superficies *𝑦* = *𝑥*2, *𝑥* = *𝑦*2, y por los planos *𝑧* = 0 y

*𝑧* = *𝑥* + *𝑦*. Calcular ∭

*𝑊*

*𝑥 𝑦*d*𝑉.*

**Solucio´n.** En este ejercicio no se puede utilizar de forma conveniente ninguno de los cambios de coordenadas estudiados (ni esfe´ ricas ni cil´ındricas) y lo mejor es usar lo que llamamos la *estrategia*

2 1, es decir, pasar de la integral triple a una integral doble limitando la variable *𝑧* y despue´ s calcular tambie´ n la integral doble. En nuestro caso, observamos que el enunciado nos dice que 0 *𝑧 𝑥 𝑦*,

≤ ≤ +

+

por tanto podemos escribir

∫ ∫ ∫*𝑊*

#### *𝑥 𝑦*d*𝑉* =

∫ ∫*𝐷*

∫ *𝑥*+ *𝑦*

0

#### *𝑥 𝑦*d*𝑧*

d*𝐴* =

∫ ∫*𝐷*

*𝑥 𝑦*(*𝑥* + *𝑦*)d*𝐴,*

donde *𝐷* ⊂ ℝ2 es el dominio plano limitado por las para´ bolas *𝑦* = *𝑥*2 y *𝑥* = *𝑦*2 dentro del plano base *𝑧* = 0. Para poder decir eso, es importante que el plano *𝑧* = *𝑥* + *𝑦* no corte la base *𝐷* descrita en la l´ınea anterior, pero eso es evidente: si *𝑥*, *𝑦 >* 0, no se puede tener *𝑥* + *𝑦* = 0. Los puntos de

interseccio´ n de las para´ bolas *𝑦* = *𝑥*2 y *𝑥* =√*𝑦*2 son (0*,* 0) y (1*,* 1), por tanto los l´ımites de integracio´ n

en el dominio *𝐷* son 0 ≤ *𝑥* ≤ 1, *𝑥*2 ≤ *𝑦* ≤ *𝑥*. Tenemos pues

d*𝑥* =

2 +

∬ ∫ 1 (∫ √*𝑥*

*𝑥 𝑦*(*𝑥* + *𝑦*)d*𝐴* =

2 *𝑥 𝑦*(*𝑥* + *𝑦*)d *𝑦*

\ ∫ 1 *𝑥*2 *𝑦*2

*𝑥 𝑦*3 1 *𝑦*=√*𝑥*

= ∫ 1 *𝑥*3

*𝐷*

0

*𝑥*

2 −

0

*𝑥*6

*𝑥*2√*𝑥* − *𝑥*7 d*𝑥* = 1

1 2

0

3

1 *𝑦*=*𝑥*2 d*𝑥*

2 +

3

3

8 − 14 + 21 − 24

28

1 = 3 *.*

1. Hallar el volumen del so´ lido limitado por el cilindro *𝑥*2 *𝑦*2 = 9 y los planos *𝑦 𝑧* = 5 y *𝑧* = 1. **Solucio´n.** Como el so´ lido a integrar es una parte de un cilindro, lo ma´ s fa´ cil es usar coordenadas cil´ındricas. Recordamos que las coordenadas cil´ındricas representan el cambio de variable siguiente:

+ +

*𝑥* = *𝑟* cos *𝜃, 𝑦* = *𝑟* sin *𝜃, 𝑧* = *𝑧,* Jacobiano = *𝑟.*

Tenemos un corte con dos planos en el cilindro, por tanto un paso intermedio es averiguar si los dos planos se pueden intersectar dentro del cilindro. La interseccio´ n de los dos planos que cortan el cilindro, es decir *𝑧* = 1 y *𝑧* = 5 *𝑦*, se da sobre *𝑦* = 4 (y *𝑥* cualquiera), pero el cilindro tiene como base el c´ırculo de radio 3, por tanto la recta *𝑦* = 4 no intersecta nunca el cilindro (va por fuera). Por tanto, en el cilindro siempre *los dos planos esta´ n ordenados*. Pasando a las coordenadas cil´ındricas, observamos que los l´ımites de integracio´ n son:

−

0 ≤ *𝜃* ≤ 2*𝜋,* 0 ≤ *𝑟* ≤ 3*,* 1 ≤ *𝑧* ≤ 5 − *𝑦* = 5 − *𝑟* sin *𝜃.*

Por tanto el volumen se calcula como sigue (no olvidando el jacobiano del cambio, es decir multipli- car por una *𝑟*)

11

*𝑉* = ∭

1d*𝑉* =

∫ 2*𝜋* ∫ 3 ∫ 5−*𝑟* sin *𝜃*

*𝑟*d*𝑧*d*𝑟*d*𝜃* =

∫ 2*𝜋* ∫ 3

(4 − *𝑟* sin *𝜃*)*𝑟*d*𝑟*d*𝜃*

∫ 2 *𝑊*

0 0 11 ∫ 2 0 0

*𝜋*

= 2*𝑟*2

−

0

*𝑟*3 sin *𝜃*

3

*𝑟*=3d*𝜃* =

*𝑟*=0

*𝜋*

0 (18 − 9 sin *𝜃*)d*𝜃* = 36*𝜋.*

1. Calcular usando coordenadas cil´ındricas:

(a) ∭

*𝑊*

(*𝑥*3 + *𝑥 𝑦*2)*𝑑𝑉,*

donde *𝑊* es el so´ lido en el primer octante (es decir coordenadas positivas *𝑥* ≥ 0, *𝑦* ≥ 0, *𝑧* ≥ 0) que se halla debajo del paraboloide *𝑧* = 1 − *𝑥*2 − *𝑦*2.

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 33

4 INTEGRACIO´ N MU´ LTIPLE (b)

∭

*𝑊*

*𝑥𝑑𝑉,*

donde *𝑊* es el so´ lido limitado por los planos *𝑧* = 0 y *𝑧* = *𝑥 𝑦* 5 y situado entre los cilindros

+ +

*𝑥*2 *𝑦*2 = 4 y *𝑥*2 *𝑦*2 = 9.

+ +

**Solucio´n.** Ya hemos recordado en los ejercicios precedentes las coordenadas cil´ındricas que va- mos a usar en estos dos apartados. Pasamos directamente a la solucio´ n.

1. El so´ lido *𝑊* que tenemos en este apartado tiene como l´ımites de integracio´ n los siguientes: por un lado, es evidente que 0 *𝑧* 1 *𝑥*2 *𝑦*2 = 1 *𝑟*2, por el enunciado. El corte del paraboloide con el plano base *𝑧* = 0 se da cuando 1 *𝑥*2 *𝑦*2 = 0, es decir, sobre la circunferencia de radio 1. Como estamos en coordenadas positivas, tenemos pues los l´ımites de integracio´ n

– −

≤ ≤ − − −

0 ≤ *𝜃* ≤ *𝜋 ,* 0 ≤ *𝑟* ≤ 1*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 1 − *𝑟*2*,*

2

y no tenemos que olvidar **el Jacobiano** *𝑟*. Pasamos a efectuar el ca´ lculo:

∭ (*𝑥*3 + *𝑥 𝑦*2)*𝑑𝑉* =

∫ *𝜋*/2 ∫ 1 ∫ 1−*𝑟*2

(*𝑟*3 cos3 *𝜃* + *𝑟*3 cos *𝜃* sin2 *𝜃*)*𝑟*d*𝑧*d*𝑟*d*𝜃*

*𝑊* 0 0 0

∫

∫

*𝜋*/2 1 2 4 3 2

= 0 0 (1 − *𝑟* )*𝑟* (cos *𝜃* + cos *𝜃* sin

0

*𝜃*)d*𝑟*d*𝜃*

∫ *𝜋*/2 cos cos2 sin2 d

0 *𝜃*(

=

*𝜃* + *𝜃*) *𝜃*

∫ 1 (*𝑟*4

– *𝑟*6

)d*𝑟*

1 1 ∫ *𝜋*/2 2

=

5 − 7

0 cos *𝜃*d*𝜃* = 35 *.*

1. En este caso, poniendo de nuevo coordenadas cil´ındricas, el so´ lido *𝑊* tiene como l´ımites de integracio´ n (evidentes)

0 ≤ *𝜃* ≤ 2*𝜋,* 2 ≤ *𝑟* ≤ 3*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ *𝑥* + *𝑦* + 5 = *𝑟* (cos *𝜃* + sin *𝜃*) + 5*.*

Efectuamos el ca´ lculo:

∭ *𝑥*d*𝑉* =

∫ 2*𝜋* ∫ 3 ∫ *𝑟* (cos *𝜃*+sin *𝜃*)+5

*𝑟*2

cos *𝜃*d*𝑧*d*𝑟*d*𝜃*

*𝑊* 0 2

∫

∫

2*𝜋* 3

=

∫0 ∫2

0

*𝑟*2 (*𝑟* (cos *𝜃* + sin *𝜃*) + 5) cos *𝜃*d*𝑟*d*𝜃*

2*𝜋* 3 [ 3 2 3 2

=

*𝑟*

cos

*𝜃* + *𝑟*

cos *𝜃* sin *𝜃* + 5*𝑟*

cos *𝜃*

d*𝑟*d*𝜃.*

*𝑟*=2

*𝜃*=0

0

2

Calculando por separado cada una de las integrales de los te´ rminos que se suman en la u´ ltima expre- sio´ n y usando en ellos la propiedad de factorizacio´ n (ya que cada uno por separado es un producto de te´ rminos de variables separadas en *𝑟* y *𝜃* y los l´ımites de integracio´ n son fijos) obtenemos

0

2

∫ 2*𝜋* ∫ 3 3

1 41*𝑟*=3 sin2 *𝜃* 1*𝜃*=2*𝜋*

y finalmente

3

∫ 2*𝜋* ∫ 3 5*𝑟*2 cos *𝜃*d*𝑟*d*𝜃* = 5 *𝑟*31*𝑟*=3 sin *𝜃*1*𝜃*=2*𝜋* = 0*,*

0 2 *𝑟* cos *𝜃* sin *𝜃*d*𝑟*d*𝜃* = 4 *𝑟*

1*𝑟*=2

2 1*𝜃*=0 = 0*,*

∫ 2*𝜋* ∫ 3 3

1 41*𝑟*=3 ∫ 2*𝜋* 2

0 2 *𝑟* cos *𝜃* sin *𝜃*d*𝑟*d*𝜃* = 4 *𝑟* ∫1*𝑟*=2

65

65*𝜋*

2 d*𝜃* =

=

4

0

cos

0

2*𝜋* 1 + cos(2*𝜃*)

*𝜃*d*𝜃*

4 *,*

34 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

ya que la integral del te´ rmino en *𝜃* de la u´ ltima expresio´ n tambie´ n vale 0. Por tanto, el resultado final nos queda 65*𝜋* 4.

/

1. Calcular usando coordenadas esfe´ ricas:
2. ∭

*𝑥*2d*𝑉,*

d√onde *𝑊* es el so´ lido acotado por el plano *𝑦* = 0 y por las semiesferas *𝑦* = √9 − *𝑥*2 − *𝑧*2 e *𝑦* =

√︁

*𝑊*

16 *𝑥*2 *𝑧*2.

– −

1. El volumen de la regio´ n so´ lida que se halla en el interior del cono *𝑧* =

plano *𝑧* = 0 y debajo de la esfera *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 4*𝑧*.

*𝑥*2 + *𝑦*2, encima del

**Solucio´n.** Recordamos aqu´ı las fo´ rmulas de cambio para las coordenadas esfe´ ricas, que vamos a usar ma´ s abajo:

*𝑥* = *𝜌* cos *𝜃* sin *𝜑, 𝑦* = *𝜌* sin *𝜃* sin *𝜑, 𝑧* = *𝜌* cos *𝜑,*

√︁

+ +

con el **Jacobiano igual a** *𝜌*2 sin *𝜑*, donde *𝜌* = *𝑥*2 *𝑦*2 *𝑧*2.

1. Pasando a coordenadas esfe´ ricas, obtenemos que 9 *𝑥*2 *𝑦*2 *𝑧*2 16, es decir, 3 *𝜌* 4. Por otra parte, tenemos *𝑦* 0 y ninguna limitacio´ n sobre el a´ ngulo *𝜑* (ya que tanto el polo norte como el polo sur de la esfera ma´ s grande esta´ n en la frontera de la figura considerada). La condicio´ n

≥

≤ + + ≤ ≤ ≤

*𝑦* 0 limita el a´ ngulo *𝜃*, que es el a´ ngulo polar habitual: 0 *𝜃 𝜋* y lo mismo, 0 *𝜑 𝜋* (los

≥ ≤ ≤ ≤ ≤

l´ımites habituales del a´ ngulo *𝜑*). Pasamos a efectuar el ca´ lculo:

∭ *𝑥*2d*𝑉* =

∫ *𝜋* ∫ *𝜋* ∫ 4

*𝜌*2

cos2

*𝜃* sin2

#### *𝜑𝜌*2

sin *𝜑*d*𝜌*d*𝜑*d*𝜃*

*𝑊* 0 0

∫

∫

∫

*𝜋 𝜋*

=

3

4

*𝜌*4 sin3 *𝜑* cos2*, 𝜃*d*𝜌*d*𝜑*d*𝜃*

∫0 *𝜋* 0 3

cos2 *𝜃*d*𝜃*

sin3 *𝜑*d*𝜑*

*𝜌*4d*𝜌*

=

0

∫ *𝜋*

0

### ∫ 4

3

*,*

donde en la u´ ltima igualdad hemos usado la propiedad de factorizacio´ n para reducir la integral triple a un producto de integrales elementales. Tenemos

∫ 4 *𝜌*4d*𝜌* = 45 − 35 = 781 *,*

3

5

5

∫ *𝜋* cos2 d

∫ *𝜋* 1 + cos(2*𝜃*) d *𝜋*

y ∫ *𝜋*

0

*𝜃 𝜃* =

0 0

1

sin3 *𝜑*d*𝜑* =

(cos(3*𝜑*) − 9 cos *𝜑*)1

12

2

1*𝜑*=*𝜋*

*𝜑*=0

*𝜃* = 2

1 4

=

(−1 − 1 + 9 + 9)=

*.*

12

3

Multiplicando los resultados precedentes obtenemos como resultado final

781 *𝜋* 4 = 1562*𝜋 .*

5 2 3 15

1. Para hallar los l´ımites de integracio´ n, tenemos que usar una vez ma´ s nuestra te´ cnica favorita de **traducir las fronteras a las nuevas coordenadas**. En este caso, las dos fronteras son: la frontera superior esfera de ecuacio´ n *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 4*𝑧*, es decir

*𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 4*𝑧* =⇒ *𝜌*2 = 4*𝜌* cos *𝜑* =⇒ *𝜌* = 4 cos *𝜑*

y la frontera inferior el cono *𝑧*2 = *𝑥*2 *𝑦*2, que ha sido ya trabajado en coordenadas esfe´ ricas en un ejercicio de clase, obtenemos

+

*𝜌*2 cos2 *𝜑* = *𝜌*2 sin2 *𝜑* =⇒ cos2 *𝜑* = sin2 *𝜑,*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 35

4 INTEGRACIO´ N MU´ LTIPLE

y obtenemos los l´ımites del a´ ngulo *𝜑* entre 0 y *𝜋* 4 (ver el ejercicio resuelto en clase para ma´ s detalles de ca´ lculo). Por tanto, los l´ımites de integracio´ n obtenidos son

/

0 ≤ *𝜃* ≤ 2*𝜋,* 0 ≤ *𝜑* ≤ *𝜋 ,* 0 ≤ *𝜌* ≤ 4 cos *𝜑.*

4

Procedemos ahora al ca´ lculo:

*𝑉* = ∭

1d*𝑉* =

∫ 2*𝜋* ∫ *𝜋*/4 ∫ 4 cos *𝜑*

*𝜌*2

sin *𝜑*d*𝜌*d*𝜑*d*𝜃*

∫ *𝑊*∫ 1 0 0

0

2*𝜋 𝜋*/4 *𝜌*3 1*𝜌*=4 cos *𝜑*

=

0 ∫ 0 ∫

64

2*𝜋*

=

cos

0

*𝜑* sin *𝜑*d*𝜑*d*𝜃*

3 1*𝜌*=0 sin *𝜑*d*𝜑*d*𝜃*

*𝜋*/4

3

128*𝜋* ∫ *𝜋*/4 3

3

0

128*𝜋*

cos4 *𝜑*  1*𝜑*=*𝜋*/4

= cos

3 0

*𝜑* sin *𝜑*d*𝜑* = 3 − 4

1*𝜑*=0

= 32*𝜋*

3

1

− 4 +

1 = 8*𝜋.*

36 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

# Integrales de l´ınea

**Ejercicio 1.** Hallar la longitud de un arco de circunferencia de radio *𝑟* y *𝛼* radianes.

Solucio´ n. *𝛼𝑟* ◀

**Ejercicio 2.** Sea *𝐶* la curva parametrizada por *𝛾*(*𝑡*) = ( *𝑡*2 *, 𝑡*3 )*, 𝑡* ∈ [0*,* 1]. Calcula la longitud de *𝐶*.

2 3

Solucio´ n. *𝐿*(*𝐶*) = 2√2−1 ◀

3

**Ejercicio 3.** Sea *𝐶* la curva parametrizada por

*𝛾*(*𝑡*) = *𝑡, 𝑡*2 *,* 2 √2*𝑡*3 *.*

2

3

Calcula la longitud de *𝐶* en los intervalos *𝑡* ∈ [0*,* 1]*, 𝑡* ∈ [−2*,* −1]*, 𝑡* ∈ [−2*,* 1]

Solucio´ n.

*𝑡* ∈ [0*,* 1]*, 𝐿*(*𝐶*) = 3 ; *𝑡* ∈ [−2 − 1]*, 𝐿*(*𝐶*) = 1 ; *𝑡* ∈ [−2*,* 1]*, 𝐿*(*𝐶*) = 5 *.* ◀

2 2 2

**Ejercicio 4.** Sea *𝐶* la curva parametrizada por

*𝛾*(*𝑡*) = *𝑡*2 *, 𝑡*3 *,* 2 √2*𝑡*5 *, 𝑡* ∈ [0*,* 1]*.*

Calcula la longitud de *𝐶.*

Solucio´ n.

*𝐿*(*𝐶*) = 5

6

2 3 5

◀

*𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2. Evaluar la integral Solucio´ n. 2*𝜋*√2(1 + 4*𝜋*2 )

3

**Ejercicio 5.** Sea *𝜎* la he´ lice defi∫nida por *𝜎*: [0*,* 2*𝜋*] → ℝ3, *𝑡* → (cos *𝑡,* sin *𝑡, 𝑡*) y sea *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) =

*𝜎 𝑓* d*𝑠*.

◀

**Ejercicio 6.** Sea una cu√︁rva *𝐶* parametriza∫da por *𝛾*(*𝑡*) = (*𝑡* cos *𝑡, 𝑡* sin *𝑡*)*, 𝑡* ∈ [0*,* √3]*,* y sea *𝑓* : ℝ2 −→

ℝ dada por *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

*𝑥*2 + *𝑦*2 *.* Calcula

*𝐶 𝑓* (*𝑥, 𝑦*)d*𝑠*

Solu∫cio´ n. 7

*𝐶 𝑓* d*𝑠* = 3 ◀

**Ejercicio 7.** Sea *𝜎*: 0*, 𝜋* 2 ℝ2 la curva *𝜎 𝑡* = 30 cos3 *𝑡,* 30 sin3 *𝑡* y *𝑓 𝑥, 𝑦* = 1 *𝑦* 3. Calcular la integral de *𝑓* sobre la curva *𝜎*.

[ / ] → ( ) ( ) ( ) + /

Solucio´ n. 225 ◀

**Ejercicio 8.** Calcular las integrales de l´ınea de las siguientes funciones a lo largo de los caminos indicados.

* 1. *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥 𝑦*4 en la mitad superior de la circunferencia *𝑥*2 *𝑦*2 = 16 recorrida en sentido antihorario.

( ) +

b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑦* en *𝑐*(*𝑡*) = (*𝑡*4*, 𝑡*3) con 0 ≤ *𝑡* ≤ 1.

*𝑥*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 37

5 INTEGRALES DE LI´NEA

c) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑦 𝑒𝑥* en el segmento que une (1*,* 2) con (4*,* 7).

d) *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = sin *𝑦* en el arco de la curva *𝑥* = *𝑦*4 desde el punto (1*,* −1) a (1*,* 1).

**Ejercicio 9.** Sea una curva *𝐶* parametrizada por

*𝛾*(*𝑡*) = (*𝑡, 𝑡*)*, 𝑡* 2∈ [0*,* 1)*, ,*

(2 − *𝑡,* (2 − *𝑡*) ) *𝑡* ∈ [1*,* 2)

y sea *𝑓* : ℝ2 −→ ℝ dada por *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥.* Calcula ∫*𝐶 𝑓* (*𝑥, 𝑦*)d*𝑠*

Solucio´ n. ∫

*𝑓* d*𝑠* = 6√2+5√5−1 ◀

**Ejercicio 10.** Evaluar las siguientes integrales de l´ınea:

12

(a) *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑒*√*𝑧* y *𝜎*(*𝑡*) = (1*,* 2*, 𝑡*2), *𝑡* ∈ [0*,* 1].

(b) *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑦𝑧* y *𝜎*(*𝑡*) = (*𝑡,* 3*𝑡,* 2*𝑡*), *𝑡* ∈ [1*,* 3].

(c) *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥*+ *𝑦* y *𝜎*(*𝑡*) = (*𝑡,* 2 *𝑡*3/2*, 𝑡*), *𝑡* ∈ [1*,* 2].

*𝑦*+*𝑧* 3

(d) *𝑓* : ℝ3\{(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : *𝑦* = 0} → ℝ con *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = 1/ *𝑦*3 y *𝜎*(*𝑡*) = (log *𝑡, 𝑡,* 2), *𝑡* ∈ [1*, 𝑒*].

Solucio´ n. (a) 2; (b) 52√14; (c) 16/3 − 2√3; (d) 1 (23/2 − (1 + *𝑒*−2)3/2).

3

◀

**Ejercicio 11.** Sea *𝑓 𝑥, 𝑦* = 2*𝑥 𝑦*, *𝑥* = *𝑡*4, *𝑦* = *𝑡*4, 1 *𝑡* 0. Calcular la integral de *𝑓* a lo largo de esta trayectoria.

( ) − − ≤ ≤

Solucio´ n. √2/2 ◀

**Ejercicio 12.** Calcular las integrales de l´ınea de las funciones dadas sobre las curvas indicadas:

(a) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*), *𝜎*(*𝑡*) = (sin *𝑡,* cos *𝑡, 𝑡*), con *𝑡* ∈ [0*,* 2*𝜋*].

(b) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑦𝑧* *𝑖* + *𝑥𝑧*  *𝑗* + *𝑥 𝑦𝑘* , *𝜎* : [−5*,* 10] → ℝ3 definida por *𝑡* → (*𝑡, 𝑡*2*, 𝑡*3).

1. **F**(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥 𝑦* + 1*, 𝑥*2 − *𝑦*2), siendo *𝜎* la media circunferencia centrada en el origen y en la que el punto inicial es (1*,* 0) recorrida en sentido antihorario.
2. **F**(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥 𝑦* + 1*, 𝑥*2 − *𝑦*2), siendo *𝜎* la media circunferencia centrada en el origen y en la que el punto inicial es (−1*,* 0) recorrida en sentido horario.
3. **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥* *𝑖* + *𝑦*  *𝑗* + *𝑧𝑘* , siendo *𝜎* el arco de he´ lice de ecuaciones parame´ tricas *𝑥* = 4 cos *𝑡*,

*𝑦* = 4 sin *𝑡*, *𝑧* = 3*𝑡*, para 0 ≤ *𝑡* ≤ 2*𝜋*.

Solucio´ n. (a) 2*𝜋*2; (b) 56 (26 − 1); (c) −2; (d) 2; (e) 18*𝜋*2. ◀

∫

**Ejercicio 13.** Calcular *𝜎* ( *𝑦*d*𝑥* − *𝑥*d *𝑦*) a lo largo de la curva *𝜎* = *𝜎*1 ∩ *𝜎*2, siendo *𝜎*1 el arco de elipse de

ecuacio´ n *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1 que une el punto (4*,* 0) con el (0*,* 3) y *𝜎* el segmento que une ambos puntos,

16

9

2

tomando como orientacio´ n, la contraria a las agujas del reloj.

38 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

Solucio´ n. 12 6*𝜋* ◀

−

**Ejercicio 14.** Evaluar la integral ∫*𝜎* (cos *𝑧*d*𝑥* + *𝑒𝑥𝑑𝑦* + *𝑒𝑦*d*𝑧*) donde *𝜎*(*𝑡*) = (1*, 𝑡, 𝑒𝑡*) y *𝑡* ∈ [0*,* 2].

Solucio´ n. 2*𝑒* + 1 *𝑒*4 − 1 ◀

2

2

**E**∫**jercicio 15.** Sea *𝜎* la trayectoria *𝑥* = cos3 *𝛼*, *𝑦* = sin3 *𝛼* y *𝑧* = *𝛼* con 0 ≤ *𝛼* ≤ 7*𝜋* . Evaluar la integral

sin *𝑧*d*𝑥* + cos *𝑧*d *𝑦* − (*𝑥 𝑦*)1/3d*𝑧*.

2

*𝜎*

Solucio´ n. − 1 ◀

2

**Ejercicio 16.** Consideramos una part´ıcula que se mueve a lo largo del arco de elipse

*𝑥*2

4 +

*𝑦*2

9 = 1

desde el punto *𝐴* = 2*,* 0 hasta el punto *𝐵* = 0*,* 3 , y despue´ s del punto *𝐵* al punto *𝐴* por l´ınea recta, sometido al campo de fuerzas

( ) ( )

*𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (2*𝑥 𝑦*3 − *𝑦* cos *𝑥,* 1 − sin *𝑥* + 3*𝑥*2 *𝑦*2)*.*

Hallar el trabajo realizado por la part´ıcula en el campo de fuerzas.

Solucio´ n. 0 ◀

**Ejercicio 17.** Dado el campo vectorial

y el arco de la curva

*𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥*3*, 𝑦*3)

9*𝑥*2 + 4 *𝑦*2 = 36

situado en el primer cuadrante y recorrida en sentido positivo. Calcular el trabajo que se realiza so- bre una part´ıcula que se mueve a lo largo de la curva, sometida el campo *𝐹* (*𝑥, 𝑦*).

Solucio´ n. 65 ◀

4

**Ejercicio 18.** Calcular el trabajo realizado por los campos de fuerza *𝐹* en las curvas indicadas.

a) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥, 𝑦* + 2) a lo largo de la cicloide *𝑐*(*𝑡*) = (*𝑡* − sin *𝑡,* 1 − cos *𝑡*) con 0 ≤ *𝑡* ≤ 2*𝜋*.

b) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* sin *𝑦, 𝑦*) a los largo de la para´ bola *𝑦* = *𝑥*2 desde (−1*,* 1) a (2*,* 4).

c) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = ∇ *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 2*𝑥* + 2 *𝑦* a lo largo del segmento que une (1*,* 2) y (2*,* 3).

d) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = ∇ *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 2*𝑥* + 2 *𝑦* a lo largo√de la circunferencia *𝑥*2 + *𝑦*2 = 5 recorrida

en sentido antihorario comenzando en el punto (0*,* 5).

e) *𝐹* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥*2*,* 2 *𝑦, 𝑧* + 1) a lo largo de la he´ lice *𝑐*(*𝑡*) = (cos *𝑡,* sin *𝑡,* 3*𝑡*) desde el punto (1*,* 0*,* 0) hasta (1*,* 0*,* 6*𝜋*).

**Ejercicio 19.** Hallar, utilizando el Teorema de Green, el a´ rea limitada por la elipse de semiejes *𝑎* y *𝑏*,

*𝑥*2 *𝑦*2

*𝑎*2 + *𝑏*2 = 1*.*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 39

5 INTEGRALES DE LI´NEA

Solucio´ n. *𝑎𝑏𝜋* ◀

**Ejercicio 20.** Se pide hallar el trabajo necesario para trasladar una part´ıcula situada en el origen hasta el punto (1*,* 1*,* 1) a trave´ s del segmento que une ambos puntos, sometida a un campo de fuer- zas **F**, siendo **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = 3*𝑥 𝑦* *𝑖* − *𝑧𝑘* . ¿Es el campo conservativo?

Solucio´ n. 1 ; no. ◀

2

**Ejercicio 21.** Determinar el valor del para´ metro *𝜆* ∈ ℝ para que el trabajo realizado por el cam- po de fuerza definido por *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (3 *𝑦*2 + 2*,* 16*𝑥*) a lo largo de la semielipse parametrizada por

*𝛼* (*𝑡*) = (cos(*𝑡*)*, 𝜆* sin(*𝑡*)) con 0 ≤ *𝑡* ≤ *𝜋* sea ma´ ximo.

Solucio´ n. *𝜋* ◀

**Ejercicio 22.** Determinar si el siguiente campo vectorial es conservativo y calcular, si existe, una

√3*,*

funcio´ n potencial:

**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) =

*𝑥𝑒𝑥,*

cos *𝑦*

sin *𝑦* + 2

*𝑧* + 1

√︁

Solucio´ n. Conservativo; potencial: *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥* − 1)*𝑒𝑥* + log | sin *𝑦* + 2| + 3 3 (*𝑧* + 1)4 + *𝐶* ◀

4

**Ejercicio 23.** Determinar si el siguiente campo vectorial es conservativo y calcular, si existe, una fun- cio´ n potencial: *𝐹* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (2 *𝑥 𝑧 𝑒𝑥*2 + *𝑦*2 *,* 2 *𝑦 𝑧 𝑒𝑥*2 + *𝑦*2 *, 𝑒𝑥*2 + *𝑦*2 ).

Solucio´ n. Conservativo; potencial: *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑧𝑒𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝐶* ◀

**Ejercicio 24.** Determinar si el siguiente campo vectorial es conservativo y calcular, si existe, una funcio´ n potencial:

**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (sin *𝑦* + *𝑧* cos *𝑥, 𝑥* cos *𝑦* + cos *𝑧,* sin *𝑥* − *𝑦* sin *𝑧* + 2)

Solucio´ n. Conservativo; potencial: *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥* sin *𝑦* + *𝑧* sin *𝑥* + *𝑦* cos *𝑧* + 2*𝑧.* ◀

**Ejercicio 25.** Determinar el valor del para´ metro *𝜆* ℝ para que el campo *𝐹 𝑥, 𝑦* = *𝑦*2 cos *𝑥 , 𝜆 𝑦* sin *𝑥*

∈ ( ) ( ( ) ( ))

sea conservativo y calcular una funcio´ n potencial correspondiente.

Solucio´ n. *𝜆* = 2; potencial: *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑦*2 sin *𝑥* + *𝐶* ◀

**Ejercicio 26.** Usar el teorema de Green para evaluar la integral de l´ınea del campo *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = ( *𝑦*6*,* −*𝑥 𝑦*5)

a lo largo de la elipse 4*𝑥*2 + *𝑦*2 = 1 recorrida en sentido antihorario (positivo).

Solucio´ n. 0 ◀

**Ejercicio 27.** Consideremos la curva *𝐶* dada por *𝐶* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 + 2 *𝑦*2 = 1}*,* orientada en sentido antihorario. Calcula las siguientes integrales

a) ∫*𝐶* **F**(**r**)d**r** donde **F**(**r**) = ( *𝑦, 𝑥*)

b) ∫*𝐶* **F**(**r**)d**r** donde **F**(**r**) = (− *𝑦, 𝑥*)

c) ∫*𝐶* **F**(**r**)d**r** donde **F**(**r**) = (*𝑒𝑥*+ *𝑦, 𝑒𝑥*+ *𝑦*)

40 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

d) ∫*𝐶* **F**(**r**)d**r** donde **F**(**r**) = ( *𝑦 𝑒𝑥 𝑒*2 *𝑦 , 𝑥*2 *𝑦*2 + 2 *𝑦*4)

2 2

Solucio´ n.

1. 0

b) √2 *𝜋*

c) 0

d) − √*𝑒𝜋*

2

◀

**Ejercicio 28.** Sea **F**(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥 𝑦, 𝑥* + *𝑦*). Calcula las siguientes integrales

1. ∫*𝐶* **F**(**r**)d**r** donde *𝐶* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4} orientada en sentido antihorario.
2. ∫*𝐶* **F**(**r**)d**r** donde *𝐶* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4} orientada en sentido horario.

∫

c) *𝐶* **F**(**r**)d**r** donde *𝐶* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0} orientada en sentido antihorario.

1. ∫*𝐶* **F**(**r**)d**r** donde *𝐶* es la gra´ fica de la funcio´ n *𝑦* = *𝑥*3 desde *𝑥* = −1 hasta *𝑥* = 1.

∫

1. *𝐶* **F**(**r**)d**r** donde *𝐶* viene parametrizada por *𝛾*(*𝑡*) = (*𝑡, 𝑒*−*𝑡*)*, 𝑡* ∈ [0*,* 1] Solucio´ n.

a) ∫*𝐶* **F**(**r**)d**r** = 4*𝜋*

b) ∫*𝐶* **F**(**r**)d**r** = −4*𝜋*

c) ∫*𝐶*

d) ∫*𝐶*

e) ∫*𝐶*

**F**(**r**)d**r** = *𝜋* − 2 **F**(**r**)d**r** = 2 **F**(**r**)d**r** = 1−*𝑒*2

◀

3

5

2 2*𝑒*

∫**Ejercicio 29.** Sea **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥 𝑦, 𝑥*2*, 𝑧*3), y sea *𝐶* ≡ *𝛾*(*𝑡*) = (cos *𝑡,* 2 sin *𝑡, 𝑡*)*, 𝑡* ∈ [0*,* 4*𝜋*]*.* Calcula

**F**(**r**)d**r***.𝐶*

∫

Solucio´ n. *𝐶* **F**(**r**)d**r** = 64*𝜋*4 ◀

∫ + + ( )*𝐶*

**Ejercicio 30.** Resuelve la siguiente integral *𝑧𝑑𝑥 𝑦𝑑𝑦 𝑥*d*𝑧* siendo *𝐶* la curva dada por *𝛾 𝑡* =

(*𝑡* + 1*,* √*𝑡, 𝑡*2)*, 𝑡* ∈ [0*,* 1]*.*

Solucio´ n. ∫*𝐶 𝑧𝑑𝑥* + *𝑦𝑑𝑦* + *𝑥*d*𝑧* = 15 ◀

6

**Ejercicio 31.** Resuelve la siguiente integral ∫*𝐶* ( *𝑦* + *𝑧*)*𝑑𝑥* + *𝑒𝑥 𝑑𝑦* + *𝑒𝑥 𝑦*+*𝑧*d*𝑧* siendo *𝐶* la curva dada por

2

*𝛾*(*𝑡*) = (*𝑡, 𝑡*2*, 𝑡*3)*, 𝑡* ∈ [0*,* 1]

Solucio´ n. ∫ ( *𝑦* + *𝑧*)*𝑑𝑥* + *𝑒𝑥*2 *𝑑𝑦* + *𝑒𝑥 𝑦*+*𝑧*d*𝑧* =  1 + *𝑒* + *𝑒*2

*𝐶*

12

2

◀

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 41

5 INTEGRALES DE LI´NEA

**Ejercicio 32.** Determinar si los siguientes campos son conservativos y calcula, para los conserva- tivos, una funcio´ n potencial para los mismos. Se pide tambie´ n calcular para cada campo vectorial el valor de la integral a lo largo de la frontera del cuadrado de ve´ rtices 0*,* 0 , 1*,* 0 , 1*,* 1 y 0*,* 1 recorrido en sentido antihorario.

( ) ( ) ( ) ( )

a) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (3 + 2*𝑥 𝑦, 𝑥*2 − 3 *𝑦*2)

b) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* − *𝑦, 𝑥* − 2)

c) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑒𝑦, 𝑥 𝑒𝑦*)

d) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (1 + 2*𝑥 𝑦* + log *𝑥, 𝑥*2)

Solucio´ n.

◀

**Ejercicio 33.** Calcular las integrales de l´ınea de los siguientes campos a lo largo de los caminos indicados.

a) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (3 + 2*𝑥 𝑦, 𝑥*2 − 3 *𝑦*2) y *𝑐*(*𝑡*) = (*𝑒𝑡* sin *𝑡, 𝑒𝑡* cos *𝑡*) con 0 ≤ *𝑡* ≤ *𝜋*.

b) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥*3 *𝑦*4*, 𝑥*4 *𝑦*3) sobre el arco de la circunferencia *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4 entre los puntos (2*,* 0) y

(0*,* −2) recorrido en sentido antihorario.

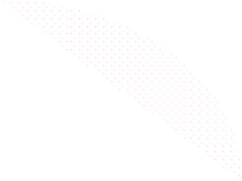
c) *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑒*2 *𝑦,* 1 + 2*𝑥𝑒*2 *𝑦*) y *𝑐*(*𝑡*) = (*𝑡𝑒𝑡,* 1 + *𝑡*) con 0 ≤ *𝑡* ≤ 1.

**Ejercicio 34.** Calcular la integral de l´ınea del campo *𝐹 𝑥, 𝑦* = *𝑦, 𝑥* a lo largo de la curva *𝐶* indicada en la siguiente figura.

( ) ( − )

*𝑦*

*𝑥*



3

*𝑥*

2

*𝑦*

2

16 9

+ = 1

*𝑦* = 3 − 4 *𝑥*

3

4

**Ejercicio 35.** Determinar el valor del para´ metro *𝜆* ℝ para que el campo *𝐹 𝑥, 𝑦* = *𝑦*2 cos *𝑥 , 𝜆 𝑦* sin *𝑥*

∈ ( ) ( ( ) ( ))

sea conservativo y calcular una funcio´ n potencial del mismo.

**Ejercicio 36.** Utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de l´ınea de los siguientes campos en los caminos indicados.

1. *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑒𝑦,* 2*𝑥𝑒𝑦*) a lo largo de la frontera del cuadrado de ve´ rtices (0*,* 0), (1*,* 0), (1*,* 1) y

(0*,* 1) recorrido en el sentido de las agujas del reloj.

1. *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = ( *𝑦*6*,* −*𝑥 𝑦*5) a lo largo de la elipse 4*𝑥*2 + *𝑦*2 = 1 recorrida en sentido antihorario.

**Ejercicio 37.** Calcular de dos maneras distintas la integral de l´ınea del campo vectorial

*𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (5 − *𝑥 𝑦* − *𝑦*2*,* −(2*𝑥 𝑦* − *𝑥*2))

sobre la frontera del cuadrado de ve´ rtices 0*,* 0 , 1*,* 0 , 1*,* 1 y 0*,* 1 recorrido en el sentido antiho- rario comenzando en el origen de coordenadas.

( ) ( ) ( ) ( )

42 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

**Ejercicio 38.** Sean *𝐹*1 (*𝑥, 𝑦*) y *𝐹*2 (*𝑥, 𝑦*) dos funciones diferenciables en ℝ2 con

*𝜕 𝐹*1 (*𝑥, 𝑦*) = *𝜕 𝐹*2 (*𝑥, 𝑦*)*,*

*𝜕 𝑦*

*𝜕𝑥*

y sea *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) una funcio´ n potencial de *𝐹* = (*𝐹*1*, 𝐹*2) con *𝑓* (1*,* 1) = 7 y *𝑓* (2*,* 4) = 13. Calcular la integral de l´ınea del campo *𝐹* a lo largo de la curva *𝐶* si *𝐶* es una curva plana simple con punto inicial (1*,* 1) y punto final (2*,* 4).

**Ejercicio 39.** Verificar, usando el Teorema de Green, que, si *𝐷* ℝ2 es un recinto simplemente conexo y acotado en el plano y *𝐶* es la frontera de *𝐷* recorrida en el sentido antihorario, entonces el a´ rea del recinto *𝐷* se puede calcular con la siguiente expresio´ n

⊂

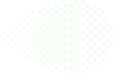
A´ rea(*𝐷*) = 1 ∫ *𝐹* · *𝑑𝑠,* siendo *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (− *𝑦, 𝑥*)*.*

2

*𝐶*

Utilizar la fo´ rmula anterior para calcular el a´ rea encerrada por la curva parametrizada por

*𝑦*



*𝑐*(*𝑡*) = (− sin3 *𝑡,* cos *𝑡* sin3 *𝑡*)

*𝑥* con *𝑡* ∈ [*𝜋,* 2*𝜋*].

**Ejercicio 40.** Consideremos tres funciones derivables *𝑔*1*, 𝑔*2*, 𝑔*3 : ℝ −→ ℝ*,* tales que *𝑔*1 (0) =

0*, 𝑔*1 (1) = 1*, 𝑔*2 (3) = −1*, 𝑔*2 (5) = 4*, 𝑔*3 (7) = *𝜋, 𝑔*3 (−5) = 0*.*

∫

a) Sea **F** *𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑔*1′ *𝑥 , 𝑔*2′ *𝑦 , 𝑔*3′ *𝑧 .* Calcula *𝐶* **F** *𝑥, 𝑦, 𝑧 𝑑***r** donde *𝐶* es una curva que comien- za en el punto 0*,* 3*,* 7 y termina en el punto 1*,* 5*,* 5 *.* ¿Cua´ nto valdr´ıa la integral si recorremos

( ) ( − )

( ) ( ( ) ( ) ( )) ( )

*𝐶* en el sentido opuesto?.

∫

b) Sea **F**(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑔*1′ (*𝑥*)*𝑔*2 ( *𝑦*)*, 𝑔*1 (*𝑥*)*𝑔*2′ ( *𝑦*))*.* Calcula *𝐶* **F**(*𝑥, 𝑦*)*𝑑***r** donde *𝐶* es una curva que co- mienza en el punto (0*,* 5) y termina en el punto (1*,* 3)

∫

c) Sea **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑔*1′ (*𝑥*) (1 + *𝑧*)*, 𝑔*2′ ( *𝑦*)*, 𝑔*1 (*𝑥*))*.* Calcula *𝐶* **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*)*𝑑***r** donde *𝐶* es una curva que

comienza en el punto (0*,* 5*,* 0) y termina en el punto (1*,* 5*,* 1)*.*

**Ejercicio 41.** Sea **F**(*𝑥, 𝑦*) = log( *𝑦*2 + 3) + *𝑥*2*,*  2*𝑥 𝑦* + 3*𝑥*) *.* Sea *𝐶* el contorno del recta´ ngulo de ve´ rti-

∫ *𝑦*2 +3

ces (0*,* 0)*,* (0*,* 2)*,* (3*,* 0)*,* (3*,* 2)*.* Calcula

*𝐶* **F**(**r**)d**r**

**Ejercicio 42.** Se∫a **F**(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*3*𝑥, 𝑦 𝑦* + *𝑥*3 *.* Sea *𝐶* la circunferencia de radio unidad centrada en el

**Ejercicio 43.** Sea **F**(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*3 − *𝑦*5∫− 5 *𝑥*2 *𝑦*3*, 𝑦*7 + *𝑥*5 + 5 *𝑥*3 *𝑦*2 *.* Sea *𝐶* la circunferencia de radio uni-

origen. Calcula

*𝐶* **F**(**r**)d**r**

dad centrada en el origen. Calcula

3

*𝐶* **F**(**r**)d**r**

3

**Ejercicio 44.** Sea *𝐶* ≡ *𝛾*(*𝑡*) = (sin(2*𝑡*)*,* cos *𝑡* sin2 *𝑡*)*, 𝑡* ∈ [0*, 𝜋* ]. Calcula el a´ rea del recinto encerrado

2

por la curva *𝐶*.

**Ejercicio 45.** Sea *𝐶* ≡ *𝛾*(*𝑡*) = (sin *𝑡* cos*𝑛 𝑡,* sin(2*𝑡*))*, 𝑡* ∈ [0*, 𝜋* ]. Calcula el a´ rea del recinto encerrado

2

por la curva *𝐶*.

**Ejercicio 46.** Sea *𝐶 𝛾 𝑡* = sin2 *𝑡* cos *𝑡,* sin *𝑡* cos2 *𝑡 , 𝑡* 0*,* 2*𝜋* . Calcula el a´ rea del recinto ence- rrado por la curva *𝐶*.

≡ ( ) ( ) ∈ [ ]

(Ayuda: Utiliza el campo vectorial **F**(*𝑥, 𝑦*) = (− *𝑦 , 𝑥* )*.*

2

2

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 43

5 INTEGRALES DE LI´NEA

###### A. Ejercicios resueltos.

**1.**. Calcular (usando la fo´ rmula de ca´ lculo esta´ ndar) las siguientes integrales de l´ınea:

∫

1. ∫*𝐶 𝑥𝑒𝑦*d*𝑥*, donde *𝐶* es el arco de la curva *𝑥* = *𝑒𝑦* entre los puntos (1*,* 0) y (*𝑒,* 1).

(b)

*𝐶* sin *𝑥*d*𝑥* + cos *𝑦*d *𝑦*, donde *𝐶* es la curva compuesta por el semic´ırculo superior *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1

entre los puntos (1*,* 0) y (−1*,* 0) y el segmento de recta entre los puntos de coordenadas (−1*,* 0) y

2 3 .

*,*

(− )

**Solucio´n.** (a) Se trata de una curva que se puede parametrizar como gra´ fica de una funcio´ n,

*𝑐*(*𝑡*) = (*𝑒𝑡, 𝑡*) con *𝑡* ∈ [0*,* 1]. Por tanto, usando la fo´ rmula de ca´ lculo para la integral parcial de l´ınea

∫

∫

∫

tenemos

1

*𝐶*

#### *𝑥𝑒𝑦*d*𝑥* =

1

#### *𝑒𝑡𝑒𝑡𝑒𝑡*d*𝑡* =

0

3

0

*𝑒*3*𝑡*d*𝑡* = 1 (*𝑒*3 − 1)*.*

1. En este ejemplo hay que calcular por separado la integral de l´ınea en cada uno de los trozos de curva descritos en el enunciado, y despue´ s sumar para obtener el resultado final. Separamos pues la curva *𝐶* en los dos trozos

* *𝐶*1 es el semic´ırculo superior, parametrizado por coordenadas polares *𝑐*1 (*𝑡*) = (cos *𝑡,* sin *𝑡*) con

*𝑡* ∈ [0*, 𝜋*]. En este caso, usando la fo´ rmula de ca´ lculo de las integrales parciales de l´ınea, tenemos

∫*𝐶*1

sin

*𝑥*d*𝑥* +

cos

*𝑦*d

*𝑦* =

∫ *𝜋*

∫0

*𝜋*

(sin(cos

(*𝑡*))*𝑥*′(*𝑡*) +

cos(sin

(*𝑡*)) *𝑦*′(*𝑡*))

d*𝑡*

= 0 (sin(cos *𝑡*) (− sin *𝑡*) + cos(sin *𝑡*) cos *𝑡*)d*𝑡*

*𝜋*

1

= (− cos(cos *𝑡*) + sin(sin *𝑡*)) 0 = − cos(−1) + cos(1) = 0*.*

* *𝐶*2 es el segmento que une los puntos (−1*,* 0) y (−2*,* 3), es decir, se parametriza con

*𝑐*2 (*𝑡*) = (1 − *𝑡*) (−1*,* 0) + *𝑡* (−2*,* 3) = (−1 − *𝑡,* 3*𝑡*)*,*

y la integral de l´ınea se calcula como:

∫ sin *𝑥*d*𝑥* + cos *𝑦*d *𝑦* = ∫ 1 (sin(−1 − *𝑡*) (−1) + 3 cos(3*𝑡*))d*𝑡* = (sin(3*𝑡*) − cos(1 + *𝑡*))11

*𝐶*2

0 0

= sin 3 − cos 2 + cos 1*.*

( ) ( ) −

( )

Sumando, este u´ ltimo resultado es el resultado final. Como observacio´ n, el campo *𝐹 𝑥, 𝑦* = sin *𝑥,* cos *𝑦* es un campo conservativo con funcio´ n potencial *𝑓 𝑥, 𝑦* = sin *𝑦* cos *𝑥*, por tanto se pod´ıa haber utilizado el Teorema fundamental de las integrales de l´ınea para obtener (con mayor rapidez) el mismo resultado.

(a)

*𝐶* 2*𝑥 𝑦𝑧*d*𝑥* + *𝑥*2*𝑧*d *𝑦* + *𝑥*2 *𝑦*d*𝑧*, donde *𝐶* es la curva parametrizada

*𝑐*(*𝑡*) = *𝑡*2*,* sin *𝜋𝑡 , 𝑒𝑡*2 −2*𝑡 , 𝑡* ∈ [0*,* 2]*.*

4

∫ + + +

(b) *𝐶* sin *𝑥*d*𝑥 𝑧* cos *𝑦*d *𝑦* sin *𝑦*d*𝑧*, donde *𝐶* es la elipse 4*𝑥*2 9 *𝑦*2 = 36 orientada en sentido positivo (es decir antihorario).

**2.** C∫alcular las siguientes dos integrales de l´ınea escalares:

**Solucio´n.** Recordamos la correspondencia entre la integral de l´ınea escalar y la integral de l´ınea

∫

vectorial

*𝐶*

*𝐹* · *𝑑𝑠* =

∫*𝐶*

*𝐹*1d*𝑥* + *𝐹*2d *𝑦* + *𝐹*3d*𝑧,*

donde *𝐹* = *𝐹*1*, 𝐹*2*, 𝐹*3 . Usamos esta correspondencia en este ejercicio para ver las integrales que debemos calcular como integrales de l´ınea de campos vectoriales (que van a ser conservativos) y as´ı usar el Teorema fundamental de las integrales de l´ınea.

( )

44 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

1. En este caso tenemos

∫*𝐶* 2 d + d + d ∫

#### *𝑥 𝑦𝑧 𝑥 𝑥*2*𝑧 𝑦 𝑥*2 *𝑦 𝑧* =

*𝐶*

*𝐹* · d*𝑠, 𝐹* = (2*𝑥 𝑦𝑧, 𝑥*2*𝑧, 𝑥*2 *𝑦*)*.*

Es fa´ cil observar que el campo *𝐹* es conservativo y tiene como funcio´ n potencial *𝑓 𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑥*2 *𝑦𝑧*, y podemos as´ı usar el teorema fundamental de las integrales de l´ınea para calcular la integral eva- luando la funcio´ n potencial en las extremidades de la curva:

( )

∫*𝐶*

2*𝑥 𝑦𝑧*d*𝑥* + *𝑥*2*𝑧*d *𝑦* + *𝑥*2 *𝑦*d*𝑧* = *𝑓* (*𝑐*(2)) − *𝑓* (*𝑐*(0)) = *𝑓* (4*,* 1*,* 1) − *𝑓* (0*,* 0*,* 1) = 16*.*

1. En este caso tenemos

∫*𝐶* sin d + cos d + sin d ∫

*𝑥 𝑥 𝑧 𝑦 𝑦 𝑦 𝑧* =

*𝐶*

*𝐹* · d*𝑠, 𝐹* = (sin *𝑥, 𝑧* cos *𝑦,* sin *𝑦*)

y observamos de nuevo que el campo *𝐹* es conservativo y tiene como funcio´ n potencial *𝑓 𝑥, 𝑦, 𝑧* =

*𝑧* sin *𝑦* cos *𝑥*. Teniendo en cuenta que la curva *𝐶* es una curva cerrada (una elipse), resulta que la integral de l´ınea es igual a cero.

−

( )

1. Decidir cua´ les de los siguientes cuatro campos vectoriales es conservativo, y en caso afir- mativo, hallar su funcio´ n potencial: *𝐹*1 *𝑥, 𝑦* = *𝑒𝑥* sin *𝑦, 𝑒𝑥* cos *𝑦* , *𝐹*2 *𝑥, 𝑦* = *𝑒𝑥* cos *𝑦, 𝑒𝑥* sin *𝑦* ,

( ) ( ) ( ) ( )

*𝐹*3 *𝑥, 𝑦* = *𝑦𝑒𝑥* sin *𝑦, 𝑒𝑥 𝑥* cos *𝑦* y *𝐹*4 *𝑥, 𝑦* = 3*𝑥*2 2 *𝑦*2*,* 4*𝑥 𝑦* 3 .

( ) ( + + ) ( ) ( − + )

**Solucio´n.** Observamos que todos estos campos tienen como dominio de definicio´ n todo ℝ2, sin puntos exceptuados, es decir simplemente conexo, por tanto para decidir si los campos son conservativos basta por verificar la igualdad de las derivadas cruzadas.

* Para el campo *𝐹*1 observamos que

*𝜕𝐹*1 = *𝜕𝐹*2 = *𝑒𝑥* cos *𝑦,*

*𝜕 𝑦 𝜕𝑥*

por tanto el campo es conservativo. Es bastante evidente que *𝑓*1 *𝑥, 𝑦* = *𝑒𝑥* sin *𝑦* es la funcio´ n po- tencial de este campo.

( )

* Para el campo *𝐹*2 observamos que

*𝜕𝐹*1 = −*𝑒𝑥* sin *𝑦, 𝜕𝐹*2 = *𝑒𝑥* sin *𝑦,*

*𝜕 𝑦*

por tanto el campo *𝐹*2 no es conservativo.

* Para el campo *𝐹*3 observamos que

*𝜕𝑥*

*𝜕𝐹*1 = *𝜕𝐹*2 = *𝑒𝑥* + cos *𝑦,*

*𝜕 𝑦*

*𝜕𝑥*

por tanto el campo *𝐹*3 es conservativo. Usando el algoritmo habitual para hallar una funcio´ n po- tencial obtenemos desde el primer intento que una funcio´ n potencial de este campo es *𝑓*3 (*𝑥, 𝑦*) =

*𝑦𝑒𝑥* + *𝑥* sin *𝑦*.

* Para el campo *𝐹*4 observamos que

*𝜕𝐹*1 = −4 *𝑦, 𝜕𝐹*2 = 4 *𝑦,*

*𝜕 𝑦*

por tanto el campo *𝐹*4 no es conservativo.

1. C∫alcular las integrales de l´ınea siguientes: ´

(a)

*𝐶* (log *𝑥* + *𝑦*)d*𝑥* − *𝑥*2d *𝑦*, donde *𝐶* es el rectangulo de vertices (

*𝜕𝑥*

´

1 1 ,

*,*

)

3 1 ,

(

*,*

)

1 4 y

(

*,*

)

3 4 .

(

*,*

)

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 45

5 INTEGRALES DE LI´NEA

∫ · ( ) ( + ) (− ) ( ) ( )

(b) *𝐶 𝐹* d*𝑠*, donde *𝐹 𝑥, 𝑦* = *𝑥 𝑦, 𝑥*2 *𝑥* y *𝐶* es el tria´ ngulo de ve´ rtices 1*,* 0 , 1*,* 0 y 0*,* 1 .

**Solucio´n.** La idea de este ejercicio es darse cuenta que se trata en cada caso de *curvas cerradas*

y poder usar el Teorema de Green.

1. Es evidente que un recta´ ngulo (recorrido en sentido antihorario) es una curva cerrada y como el campo vectorial

*𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (log *𝑥* + *𝑦,* −*𝑥*2)

esta´ definido en el interior del tria´ ngulo, se puede aplicar el teorema de Green. Obtenemos as´ı que

∫ (log *𝑥* + *𝑦*)d*𝑥* − *𝑥*2d *𝑦* = ∫ ∫ *𝜕𝐹*2 − *𝜕𝐹*1 d*𝑥*d *𝑦* = ∫ ∫ (−2*𝑥* + 1)d*𝑥*d *𝑦,*

*𝐶*

*𝐷*

*𝜕𝑥*

*𝜕 𝑦*

*𝐷*

donde *𝐷* es el interior del recta´ ngulo, que se puede describir como 1 *𝑥* 3*,* 1 *𝑦* 4 . Pasando a integrales iteradas tenemos

{ ≤ ≤ ≤ ≤ }

∫ (log *𝑥* + *𝑦*)d*𝑥* − *𝑥*2d *𝑦* = ∫ 3 ∫ 4 (−2*𝑥* + 1)d *𝑦*d*𝑥* = 3 ∫ 3 (−2*𝑥* + 1)d*𝑥* = −18*.*

*𝐶*

1

1

1

1. En este caso, el tria´ ngulo con ve´ rtices 1*,* 0 , 1*,* 0 y 0*,* 1 es una curva cerrada y su interior

(− ) ( ) ( )

*𝐷* se puede describir como 0 *𝑦* 1*, 𝑦* 1 *𝑥* 1 *𝑦* (ya que la arista que une los ve´ rtices 1*,* 0 y 0*,* 1 es un segmento de la recta *𝑥* = *𝑦* 1 y la arista que une los ve´ rtices 1*,* 0 y 0*,* 1 es un segmento de la recta *𝑥 𝑦* = 1) y esta descripcio´ n se va a usar para calcular la integral doble.

+

(− ) ( ) − ( ) ( )

{ ≤ ≤ − ≤ ≤ − }

Usando el Teorema de Green, tenemos

∫ *𝐹* · d*𝑠* = ∫ ∫ (*𝑥* + 1)d*𝑥*d *𝑦* =

∫ 1 ∫ 1− *𝑦*

(*𝑥* + 1)d*𝑥*d *𝑦*

*𝐶* ∫ *𝐷* 1

1

∫

1

0

*𝑥*2

2 + *𝑥*

*𝑥*=1− *𝑦* d *𝑦* =

*𝑥*= *𝑦*−1

=

0 ∫*𝑦*−1

1. Calcular la integral de l´ınea vectorial *𝐶 𝐹* · d*𝑠*, donde *𝐶* es el arco de la para´ bola *𝑦* = 1 + *𝑥*2

entre los puntos de coordenadas (−1*,* 2) y (1*,* 2) y el campo vectorial *𝐹* es

1

0 (2 − 2 *𝑦*)d *𝑦* = 1*.*

*𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥 , 𝑦 .*

*𝑥*2 + *𝑦*2 *𝑥*2 + *𝑦*2

**Solucio´n.** Con la fo´ rmula de ca´ lculo de la definicio´ n, podemos parametrizar la curva como gra´ fica de una funcio´ n *𝑐 𝑡* = *𝑡,* 1 *𝑡*2 , *𝑡* 1*,* 1 y calcular la integral de l´ınea, obteniendo que la funcio´ n de *𝑡* que se debe integrar al final es una funcio´ n impar. En efecto, tenemos

( ) ( + ) ∈ [− ]

*𝐹* (*𝑥*(*𝑡*)*, 𝑦*(*𝑡*)) = *𝐹* (*𝑡,* 1 + *𝑡*2) = *𝑡 ,* 1 + *𝑡*2

*𝑡*2 + (1 + *𝑡*2)2 *𝑡*2 + (1 + *𝑡*2)2

y *𝑐*′(*𝑡*) = (1*,* 2*𝑡*), por tanto usando la fo´ rmula de ca´ lculo de una integral de l´ınea de campo vectorial (con el producto escalar entre los vectores *𝐹* (*𝑐*(*𝑡*)) y *𝑐*′(*𝑡*)) obtenemos

∫ *𝐹* · d*𝑠* = ∫ 1

*𝑡* (2*𝑡*2 + 3)

d*𝑡* = 0*,*

*𝐶* −1 *𝑡*2 + (1 + *𝑡*2)2

ya que el integrando es una funcio´ n impar de *𝑡* y el intervalo de integracio´ n 1*,* 1 es sime´ trico respecto a 0.

[− ]

De forma **alternativa**, observamos que el campo vectorial

*𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥 , 𝑦 .*

*𝑥*2 + *𝑦*2 *𝑥*2 + *𝑦*2

46 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

satisface la condicio´ n de igualdad de las derivadas cruzadas

*𝜕𝐹*1 = *𝜕𝐹*2 = − 2*𝑥 𝑦 ,*

*𝜕 𝑦 𝜕𝑥* (*𝑥*2 + *𝑦*2)4

pero su dominio de definicio´ n no es simplemente conexo (es ℝ2 0 ). Pero en este caso, a diferencia del campo de la vorticidad visto en clase, se puede **probar que este campo s´ı es conservativo** usan- do un teorema que no hemos dado pero hemos comentado en clase: si la integral sobre cualquier circunferencia vale 0, entonces es conservativo (se puede verificar tomando circunferencias centra- das en 0*,* 0 , parametrizando con *𝑥 𝑡 , 𝑦 𝑡* = *𝑟* cos *𝑡, 𝑟* sin *𝑡* y efectuar el ca´ lculo exactamente como hemos hecho para el campo de vorticidad; en este caso s´ı da 0 como resultado). Observamos adema´ s que admite una funcio´ n potencial definida por

\{ }

( ) ( ( ) ( )) ( )

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 1 log(*𝑥*2 + *𝑦*2)*.*

2

Podemos aplicar el Teorema fundamental de las integrales de l´ınea para concluir que

ya que la funcio´ n *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) es par.

∫*𝐶*

*𝐹* · d*𝑠* = *𝑓* (1*,* 2) − *𝑓* (−1*,* 2) = 0*,*

1. Sea el campo vectorial *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (2*𝑥𝑒𝑦, 𝑥* + *𝑥*2*𝑒𝑦*) y sea *𝐶* el cuarto de c´ırculo de radio 4 en el primer cuadrante, es decir la parte del c´ırculo de radio 4 comprendida entre los puntos *𝐴* = (4*,* 0) y

*𝐵* = (0*,* 4). Se pide:

1. Hallar una funcio´ n potencial *𝑉* (*𝑥, 𝑦*) tal que se pueda escribir *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = *𝐺*(*𝑥, 𝑦*) + ∇*𝑉* (*𝑥, 𝑦*), donde *𝐺*(*𝑥, 𝑦*) = (0*, 𝑥*).
2. Verificar que la integral de l´ınea del campo vectorial *𝐺*(*𝑥, 𝑦*) = (0*, 𝑥*) sobre los segmentos *𝑂𝐴*

y *𝑂𝐵* es cero, donde *𝑂* = (0*,* 0) es el origen.

1. Usar los resultados de los apartados (a) y (b) y el teorema de Green para calcular

∫*𝐶 𝐹* · d*𝑠*.

**Solucio´n.** Se trata de un ejercicio algo ma´ s complejo que introduce la *te´cnica de descomposicio´ n* en el ca´ lculo de integrales de l´ınea: cada campo en ℝ2 se puede escribir como una suma entre un campo conservativo y un campo de la forma 0*, 𝐹*2 *𝑥, 𝑦* , y con este segundo campo se puede trabajar ma´ s fa´ cilmente.

( ( ))

1. Observamos que podemos escribir

*𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (0*, 𝑥*) + (2*𝑥𝑒*2*, 𝑥*2*𝑒𝑦*) = (0*, 𝑥*) + ∇*𝑉* (*𝑥, 𝑦*)*,*

donde *𝑉* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2*𝑒𝑦*. Ponemos *𝐺*(*𝑥, 𝑦*) = (0*, 𝑥*).

1. La parametrizacio´ n del segmento *𝑂𝐴* esta´ dada por

*𝑐*1 (*𝑡*) = (1 − *𝑡*) (0*,* 0) + *𝑡* (4*,* 0) = (4*𝑡,* 0)*, 𝑡* ∈ [0*,* 1]*.*

Calculando con la fo´ rmula de definicio´ n, tenemos *𝑐*1′ (*𝑡*) = (4*,* 0) para todo *𝑡* ∈ [0*,* 1], por tanto

*𝐺*(*𝑐*1 (*𝑡*)) · *𝑐*1′ (*𝑡*) = (0*,* 4*𝑡*) · (4*,* 0) = 0*,*

y obtenemos que ∫

*𝑂𝐴*

*𝐺* · d*𝑠* = 0*.*

De la misma manera, la parametrizacio´ n del segmento *𝑂𝐵* esta´ dada por

*𝑐*2 (*𝑡*) = (1 − *𝑡*) (0*,* 0) + *𝑡* (0*,* 4) = (0*,* 4*𝑡*)*, 𝑡* ∈ [0*,* 1]*.*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 47

5 INTEGRALES DE LI´NEA

Calculando con la fo´ rmula de definicio´ n, tenemos *𝑐*2′ (*𝑡*) = (0*,* 4) para todo *𝑡* ∈ [0*,* 1], por tanto

*𝐺*(*𝑐*2 (*𝑡*)) · *𝑐*1′ (*𝑡*) = (0*,* 0) · (0*,* 4) = 0*,*

y obtenemos que ∫

*𝑂𝐵*

*𝐺* · d*𝑠* = 0*.*

1. Usando la linealidad de la integral de l´ınea y la descomposicio´ n efectuada en el apartado (a), y aplicando el Teorema fundamental de las integrales de l´ınea para el campo conservativo ∇*𝑉*,

tenemos

∫

*𝐶*

*𝐹* · d*𝑠* =

∫*𝐶*

*𝐺* · d*𝑠* +

∫*𝐶*

∇*𝑉* · d*𝑠* =

∫*𝐶*

*𝐺* · d*𝑠* + *𝑉* (0*,* 4) − *𝑉* (4*,* 0)*.*

Por una parte, recordando que *𝑉 𝑥, 𝑦* = *𝑥*2*𝑒𝑦* tenemos *𝑉* 0*,* 4 *𝑉* 4*,* 0 = 16. Por otra parte, para calcular la integral de l´ınea del campo vectorial *𝐺*, *podemos an˜adir los segmentos 𝑂𝐴 y 𝐵𝑂* (orientados en esta direccio´ n) para obtener as´ı una curva cerrada y poder aplicar el Teorema de Green. En efecto, como hemos calculado en el apartado (b), la integral del campo *𝐺* sobre dichos segmentos es cero, por tanto se puede escribir

( ) ( ) − ( ) −

∫·

*𝐶*

∫· +

∫*𝐶*

*𝐺* d*𝑠* =

*𝑂𝐴*

*𝐺* · d*𝑠* + ∫

#### *𝐺* d*𝑠*

*𝐵𝑂*

*𝐺* · d*𝑠*

y la u´ ltima suma nos da la integral del campo *𝐺* sobre la curva cerrada que es la frontera del sector de c´ırculo *𝑂𝐴𝐵*. Para esta integral de l´ınea sobre la curva cerrada podemos aplicar el Teorema de

Green y obtener que

*𝐶*

*𝐺* · d*𝑠* =

∫ ∫*𝐷*

1d*𝐴* = 4*𝜋,*

ya que el dominio *𝐷* es el cuarto de c´ırculo de radio 4 y la u´ ltima integral obtenida representa el a´ rea de ese cuarto de c´ırculo (que es un cuarto del a´ rea total del disco de radio 4). Juntando todos los ca´ lculos efectuados, obtenemos que

∫

∫·

∫*𝐶*

*𝐹* d*𝑠* =

*𝐶*

*𝐺* · d*𝑠* + *𝑉* (0*,* 4) − *𝑉* (4*,* 0) = 4*𝜋* − 16*.*

1. C∫alcular las siguientes integrales de l´ınea sobre la curva *𝐶*

(a)

( *𝑦* + *𝑒*√*𝑥* )d*𝑥* + (2*𝑥* + cos *𝑦*2)d *𝑦*, donde *𝐶* es la curva frontera de la regio´ n limitada por las

para´ bolas *𝑦* = *𝑥*2 e *𝑥* = *𝑦*2.

∫

*𝐶*

(b) *𝐶* sin *𝑦*d*𝑥* + *𝑥* cos *𝑦*d *𝑦*, donde *𝐶* es la elipse *𝑥*2 + *𝑥 𝑦* + *𝑦*2 = 1.

**Solucio´n.** (a) Se observa que la curva *𝐶* es una curva cerrada, por tanto se puede aplicar el Teo- rema de Green. Tenemos *𝐹*1 (*𝑥, 𝑦*) = *𝑦* + *𝑒*√*𝑥* , *𝐹*2 (*𝑥, 𝑦*) = 2*𝑥* + cos *𝑦*2, por tanto

*𝜕𝐹*2

*𝜕𝑥* −

*𝜕𝐹*1 = 2 1 = 1*.*

*𝜕 𝑦*

−

Aplicando el teorema de Green, obtenemos que

∫*𝐶* ( + )d + (2 + cos )d ∬

*𝑦 𝑒*√*𝑥 𝑥 𝑥 𝑦*2 *𝑦* =

*𝐷*

1d*𝐴,*

donde *𝐷* es el recinto plano limitado por las dos curvas. Observando que lo√s puntos de interseccio´ n

entre las dos curvas son (0*,* 0) y (1*,* 1), y que si 0 ≤ *𝑥* ≤ 1 tenemos *𝑥*2 ≤ *𝑥*, podemos describir el

dominio *𝐷* en la forma

*𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) : 0 ≤ *𝑥* ≤ 1*, 𝑥*2

≤ *𝑦* ≤

√*𝑥*}

48 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

y pasamos a integrales iteradas:

∬ 1d*𝐴* = ∫ 1 ∫ √*𝑥* 1d *𝑦*d*𝑥* = ∫ 1 (√*𝑥* − *𝑥*2)d*𝑥* = 2*𝑥*3/2 − *𝑥*3 1*𝑥*=1

*𝐷*

0

*𝑥*2

0

3

3

*𝑥*=0

= 2 − 1 = 1 *.*

3 3 3

(b) Observamos que el campo *𝐹 𝑥, 𝑦* = sin *𝑦, 𝑥* cos *𝑦* es conservativo, al estar definido en todo

ℝ (simplemente conexo) y cumplir la igualdad de las derivadas cruzadas (ca´ lculo obvio). Como la

2 ( ) ( )

elipse es una curva cerrada, el resultado de la integral es 0.

**8.** C∫alcular las siguientes integrales de l´ınea de campos vectoriales:

*𝑡* ∈ [0*,* ∫1].

(∗)

(a)

*𝐶 𝐹* ·d*𝑠*, donde *𝐹* = (2*𝑥𝑧*+ *𝑦*2*,* 2*𝑥 𝑦, 𝑥*2+3*𝑧*2) y *𝐶* es la curva parametrizada *𝑐*(*𝑡*) = (*𝑡*2*, 𝑡*+1*,* 2*𝑡*−1),

(b)

*𝐶 𝐹* ·d*𝑠*, donde *𝐹* = (*𝑒𝑦, 𝑥𝑒𝑦,* (*𝑧*+1)*𝑒𝑧*) y *𝐶* es la curva parametrizada *𝑐*(*𝑡*) = (*𝑡, 𝑡*2*, 𝑡*3), *𝑡* ∈ [0*,* 1].

**Solucio´n.** (a) El campo *𝐹* es conservativo, lo que se puede ver verificando las igualdades de las derivadas cruzadas (aquellas que hemos llamado en los apuntes teo´ ricos). Tenemos que hallar su funcio´ n potencial, usando el algoritmo conocido (esta vez en tres pasos, al tratarse de un campo en ℝ3). Integrando primero en *𝑥*, obtenemos

*𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = ∫ (2*𝑥𝑧* + *𝑦*2)d*𝑥* = *𝑥*2*𝑧* + *𝑥 𝑦*2 + *𝑔*( *𝑦, 𝑧*)*,*

donde *𝑔*( *𝑦, 𝑧*) es la c¸ onstante de integracio´ n”. Derivamos ahora respecto de *𝑦* y obtenemos

2*𝑥 𝑦* + *𝜕𝑔* = 2*𝑥 𝑦* =⇒ *𝜕𝑔* = 0*,*

*𝜕 𝑦*

*𝜕 𝑦*

es decir *𝑔*( *𝑦, 𝑧*) = *ℎ*(*𝑧*). Derivando finalmente en *𝑧* tenemos

*𝑥*2 + *ℎ*′(*𝑧*) = *𝑥*2 + 3*𝑧*2 =⇒ *ℎ*′(*𝑧*) = 3*𝑧*2 =⇒ *ℎ*(*𝑧*) = *𝑧*3*.*

Por tanto, una funcio´ n potencial del campo *𝐹* es *𝑓 𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑥*2*𝑧 𝑥 𝑦*2 *𝑧*3. Aplicando el Teorema fundamental de las integrales de l´ınea, obtenemos

( ) + +

∫*𝐶*

*𝐹* · d*𝑠* = *𝑓* (*𝑐*(1)) − *𝑓* (*𝑐*(0)) = *𝑓* (1*,* 2*,* 1) − *𝑓* (0*,* 1*,* −1) = 1 + 4 + 1 − (−1)3 = 7*.*

(b) Seguimos el mismo plan que en el apartado (a), observando que el campo *𝐹* es tambie´ n conservativo y su funcio´ n potencial se obtiene de la misma forma que en el apartado (a). En este caso, en los primeros dos pasos obtenemos

*𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥𝑒𝑦* + *ℎ*(*𝑧*)*, ℎ*′(*𝑧*) = (*𝑧* + 1)*𝑒𝑧,*

e integrando en *𝑧* obtenemos *ℎ 𝑧* = *𝑧𝑒𝑧*, por tanto *𝑓 𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑥𝑒𝑦 𝑧𝑒𝑧*. De nuevo, aplicando el Teorema fundamental de las integrales de l´ınea, obtenemos

( ) ( ) +

∫*𝐶*

*𝐹* · d*𝑠* = *𝑓* (*𝑐*(1)) − *𝑓* (*𝑐*(0)) = *𝑓* (1*,* 1*,* 1) − *𝑓* (0*,* 0*,* 0) = 2*𝑒.*

1. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas *𝐹* = 2 *𝑦*3/2*,* 3*𝑥*√ *𝑦* para mover un objeto desde el punto *𝑃* = 1*,* 1 hasta el punto *𝑄* = 2*,* 4 .

( ) ( )

( )

**Solucio´n.** Como no se tiene ninguna curva espec´ıfica, este ejercicio solo podr´ıa ser correcto si el campo fuera conservativo, y efectivamente lo es: es fa´ cil comprobar la igualdad de las derivadas

cruzadas (ambas dan como resultado 3√ *𝑦*). Por tanto, buscando una funcio´ n potencial, obtenemos

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 2*𝑥 𝑦*3/2*.*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 49

5 INTEGRALES DE LI´NEA

Por el Teorema fundamental de las integrales de l´ınea, obtenemos que el trabajo esta´ dado por

*𝑓* (*𝑄*) − *𝑓* (*𝑃*) = *𝑓* (2*,* 4) − *𝑓* (1*,* 1) = 32 − 2 = 30*.*

1. Un objeto parte desde el punto (−2*,* 0), se mueve hasta el punto (2*,* 0) a lo largo de√l eje *𝑋*, y

despue´ s desde el punto (2*,* 0) vuelve al punto inicial (−2*,* 0) describiendo el semic´ırculo *𝑦* = 4 − *𝑥*2.

Encontrar el trabajo efectuado por el campo de fuerzas *𝐹* = *𝑥, 𝑥*3 3*𝑥 𝑦*2 para mover ese objeto a lo largo del camino indicado.

( + )

**Solucio´n.** Sabemos que el trabajo se calcula con la integral de l´ınea del campo vectorial *𝐹*. Po- demos observar que el objeto describe una curva cerrada y simple, por tanto nos sugiere utilizar el Teorema de Green. Observamos que

*𝜕𝐹*2 − *𝜕𝐹*1 = 3(*𝑥*2 + *𝑦*2)*.*

*𝜕𝑥*

*𝜕 𝑦*

Aplicando el Teorema de Green, obtenemos que

∬

*𝑊* =

*𝐷*

3(*𝑥*2 + *𝑦*2)d*𝐴,*

donde *𝐷* es la mitad superior del disco *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4 con *𝑦* ≥ 0. Podemos pasar a coordenadas polares

*𝑥* = *𝑟* cos *𝜃*, *𝑦* = *𝑟* sin *𝜃*, donde 0 ≤ *𝑟* ≤ 2 y 0 ≤ *𝜃* ≤2 *𝜋* (solo tenemos la regio´ n donde *𝑦* ≥ 0, la mitad

superior del c´ırculo). Por tanto, recordando que *𝑥* + *𝑦*2 = *𝑟*2 y que el jacobiano es *𝑟*, tenemos

∫ *𝜋* ∫ 2 3

*𝑟*4 1*𝑟*=2

*𝑊* = 3

0

0 *𝑟* d*𝑟*d*𝜃* = 3*𝜋* 4 1*𝑟*=0 = 12*𝜋.*

1. Sea una curva *𝐶* parametriza∫da por *𝛾*(*𝑡*) = (cos3 *𝑡,* sin3 *𝑡*)*, 𝑡* ∈ [0*,* 2*𝜋*]*,* y sea *𝑓* : ℝ2 −→ ℝ

( ) +

dada por *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*2 *𝑦*3*.* Calcula

**Solucio´n:**

*𝐶 𝑓* (*𝑥, 𝑦*)d*𝑠*

En primer lugar podemos observar que la curva es sime´ trica respecto a los ejes *𝑋* e *𝑌* respecti- vamente, adema´ s podemos escribir la integral como sigue

∫+

∫*𝐶*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*)d*𝑠* = ∫

(*𝑥*2 + *𝑦*3)d*𝑠* = ∫

*𝑥*2d*𝑠*

*𝐶*

*𝑦*3d*𝑠.*

Ahora bien, la segunda integral es impar en la variable *𝑦*, por lo que es igual a cero ya que la curva es sime´ trica respecto del eje *𝑋.* Por tanto

*𝐶*

*𝐶*

∫

∫*𝐶*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*)d*𝑠* =

∫*𝐶*

*𝑥*2d*𝑠* =

2*𝜋*

0

cos6

*𝑡* · |*𝛾*′(*𝑡*) |*𝑑𝑡,*

lo que simplifica los ca´ lculos. Derivando tenemos que *𝛾*′(√*𝑡*) = (−3 cos2 *𝑡* sin *𝑡,* 3 sin2 *𝑡* cos *𝑡*) = 3 sin *𝑡* cos *𝑡* (− sin *𝑡,* cos

y calculando la norma obtenemos |*𝛾*′(*𝑡*) | = 3| cos *𝑡* sin *𝑡*| cos2 *𝑡* + sin2 *𝑡* = 3| cos *𝑡* sin *𝑡*|*.* Por simetr´ıa

el valor de la integral debe ser igual en los cuatro cuadrantes por lo que simplemente podemos escribir

8

0

2

∫ 2*𝜋*

0

∫ *𝜋*

1 *𝜋*

cos6 *𝑡* · |*𝛾*′(*𝑡*) |*𝑑𝑡* = 4

0

2 3 cos7 *𝑡* sin *𝑡𝑑𝑡* = −12 cos8 *𝑡*1 2

= 3 *.*

50 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

# Integrales de superficie

**Ejercicio 1.** Parametrizar las siguientes superficies (soluciones no son u´ nicas).

a) *𝐶* = { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 1*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0 }

111

b) *𝑃* = { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥* + 2 *𝑦* − *𝑧* = 3 }

11

c) *𝑆* = { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + 4 *𝑦*2 + 9*𝑧*2 = 36*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑧* ≥ 0 }

1

d) *𝐶* = { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*2*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 2*, 𝑥* ≥ 0 }

Solucio´ n. (a) *𝐺*(*𝑢, 𝑣*) = (cos(*𝑢*)*,* sin(*𝑢*)*, 𝑣*)*,* (*𝑢, 𝑣*) ∈ [0*, 𝜋*/2] × [0*,* 1],

(b) *𝐺*(*𝑢, 𝑣*) = (*𝑢, 𝑣, 𝑢* + 2*𝑣* − 3)*,* (*𝑢, 𝑣*) ∈ ℝ2,

(c) *𝐺*(*𝜃, 𝜙*) = (6 sin *𝜙* cos *𝜃,* 3 sin *𝜙* sin *𝜃,* 2 cos *𝜙*)*,* (*𝜃, 𝜙*) ∈ [−*𝜋*/2*, 𝜋*/2] × [0*, 𝜋*/2],

(d) *𝐺*(*𝑢, 𝑣*) = (*𝑣* cos(*𝑢*)*, 𝑣* sin(*𝑢*)*, 𝑣*)*,* (*𝑢, 𝑣*) ∈ [−*𝜋*/2*, 𝜋*/2] × [0*,* 2].)

◀

**Ejercicio 2.** Parametrizar las siguientes superficies.

a) { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 1 }

11

b) { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 1*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0 }

c) { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥* + 2 *𝑦* − *𝑧* = 3 }

11

d) { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 1*, 𝑥* ≥ 0 }

e) { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + 4 *𝑦*2 + 9*𝑧*2 = 36*, 𝑦* ≥ 0*, 𝑧* ≥ 0 }

11

f) { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*2*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 2 }

1

g) { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*2*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 2*, 𝑥* ≥ 0 }

**Ejercicio 3.** Obte´ n el a´ rea de las siguientes superficies:

a) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑧* = 9 − *𝑥*2 − *𝑦*2*, 𝑧* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0 *.*

b) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑧* = 1 − *𝑥*2 − *𝑦*2*, 𝑧* ≥ 0 *.*

2

c) S ≡ *𝜑*(*𝑠, 𝑡*) = *𝑡* − 3*, 𝑠𝑡, 𝑠* + 5)*,* donde *𝑠*2 + *𝑡*2 ≤ 2*.*

d) S ≡ *𝜑*(*𝑠, 𝑡*) = *𝑠* cos *𝑡, 𝑠 𝑠𝑖𝑛𝑡, 𝑠*)*, 𝑠* ∈ [0*,* 1]*, 𝑡* ∈ [0*,* 2*𝜋*]*.*

**Ejercicio 4.** Calcular las siguientes integrales de superficie.

* 1. ∬*𝑆 𝑥*d*𝑆*, siendo *𝑆* el trozo de la esfera de radio 2 del primer octante.
  2. ∬*𝑆 𝑧*d*𝑆*, siendo *𝑆* la interseccio´ n de la esfera de radio 1 con *𝑥* ≥ 0.
  3. ∬*𝑆 𝑥*2 + 1 +*𝑧*2 d*𝑆*, siendo *𝑆* la parte del cilindro *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1 situada entre los planos *𝑧* = 0 y *𝑧* = 2.

∬

*𝑦*2

* 1. *𝑆 𝑧*2d*𝑆*, siendo *𝑆* la esfera de radio 1.

**Ejercicio 5.** Calcular la integral de los siguientes campos vectoriales en las superficies indicadas.

1

a) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (2*𝑥,* 2 *𝑦,* 2*𝑧*) en el cilindro { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1*,* 0 *< 𝑧 <* 1 }.

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 51

6 INTEGRALES DE SUPERFICIE

1

b) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (0*,* 0*, 𝑥*2 + *𝑦*2) en el disco { (*𝑥, 𝑦,* 3) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 4 }.

c) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = ( *𝑦,* −*𝑥, 𝑧*2) en la esfera centrada en el origen de coordenadas y de radio 2.

**Ejercicio 6.** Sea el campo vectorial **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = ( *𝑦𝑒𝑧, 𝑥𝑒𝑧, 𝑥 𝑦𝑒𝑧*).

1. Determinar si es conservativo.
2. Calcular la integral de l´ınea del campo **F** sobre la elipse **c**(*𝑡*) = (cos *𝑡,* 2 sin *𝑡,* 3) con *𝑡* ∈ [0*,* 2*𝜋*].

**Ejercicio 7.** Calcular, utilizando el teorema de Stokes, la integral de l´ınea del campo **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) =

(2*𝑥, 𝑦*2*, 𝑧*2) sobre la semicircunferencia (con orientacio´ n positiva) de ecuacio´ n *𝑥*2 + *𝑦*2 − 1 = 0 con

*𝑦* ≥ 0 y situada en el plano *𝑧* = 0.

**Ejercicio 8.** Calcular, de dos maneras distintas, la integral de l´ınea

∫*𝐶*

(2 *𝑦,* 3*𝑥,* −*𝑧*3) · d**s***,*

siendo *𝐶* la circunferencia **c**(*𝑡*) = (3 cos *𝑡,* 3 sin *𝑡,* 0) con *𝑡* ∈ [0*,* 2*𝜋*].

**Ejercicio 9.** Calcular, utilizando el teorema de la divergencia, la integral de superficie

∬*𝑆*

**F** · d**S***,*

donde **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥*3*, 𝑦*3*, 𝑧*3) y *𝑆* es la frontera del so´ lido *𝑊* = { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 ≤ 4 }.

1

**Ejercicio 10.** Calcular la integral de superficie del campo **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) sobre las seis caras del

cubo

*𝐶* = { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 1

0 ≤ *𝑥* ≤ 1*,* 0 ≤ *𝑦* ≤ 1*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 1 } *.*

**Ejercicio 11.** Calcular las siguientes integrales de superficie.

1. ∫∫Φ
2. ∫∫

*𝑥*d*𝑆*, siendo Φ el trozo de la esfera de radio 2 del primer octante.

1 d*𝑆*, siendo Φ el trozo del cilindro *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1 entre los planos *𝑧* = 0 y *𝑧* = 2.

Φ *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2

Solucio´ n. (a) 2*𝜋*; (b) 2*𝜋* arctan(2). ◀

**Ejercicio 12.** Calcular la integral de los siguientes campos vectoriales en las superficies indicadas.

1

a) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (0*,* 0*, 𝑥*2 + *𝑦*2) en *𝑅* = { (*𝑥, 𝑦,* 3) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 4 }.

b) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = ( *𝑦,* −*𝑥, 𝑧*2) en la esfera centrada en el origen de coordenadas y de radio 2. Solucio´ n. (a) 8*𝜋*, (b) 0 ◀

**Ejercicio 13.** Calcular, utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, la integral de superficie

siendo

(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥 , 𝑦 , 𝑧* )

###### F

3 3 3

∫*𝜕𝑊*

y

*𝑊* = { *𝑥, 𝑦, 𝑧* ∈ ℝ

**F** · d**S** *,*

3 1 2

*𝑥*

2 2 4

+ *𝑦*

+ *𝑧*

≤

} *.*

Solucio´ n. 384*𝜋*/5. ◀

52 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

**Ejercicio 14.** Calcular, utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, la integral de superficie del campo **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) sobre las seis caras del cubo

1

*𝐶* = { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 0 ≤ *𝑥* ≤ 1*,* 0 ≤ *𝑦* ≤ 1*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 1 } *.*

Solucio´ n. 3 ◀

**Ejercicio 16.** Sea S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 2*𝑧*2*, 𝑧* ∈ [0*,* 1] *,* y sea

*𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥*2 + *𝑦*2*.* Calcula

S *𝑓* (**r**)d*𝑆.*

**Ejercicio 15.** Sea S la super∬ficie de una semiesfera de radio 1 centrada en el origen, con *𝑧* ≥ 0. Sea

*𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥*2 + 2 *𝑦*2 + 3*𝑧*2*.*

∬

Calcula S *𝑓* (**r**)*𝑑𝑆*

**Ejercicio 17.** Sea parametrizada por

S

*𝜑*(*𝑠, 𝑡*) = *𝑠*2 cos *𝑡, 𝑠*2 sin *𝑡, 𝑠*)*, 𝑠* ∈ [0*,* 1]*, 𝑡* ∈ [0*,* 2*𝜋*) y sea *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = 6*𝑥*2*𝑧* + *𝑧*3 + 6 *𝑦*2*𝑧.* Calcula ∬S *𝑓* (**r**)*𝑑𝑆.*

**Ejercicio 18.** Consideremos el campo vectorial **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥*2*, 𝑦*2*, 𝑧*2)*,* calcula

siguientes superficies:

a) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥* + *𝑦* + *𝑧* = 0*,* (*𝑥, 𝑦*) ∈ [−1*,* 1] × [0*,* 1] *.*

b) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 − *𝑧*2 = 0*, 𝑧* ∈ [0*,* 1] *.*

c) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 − *𝑧*2 = 0*, 𝑧* ∈ [0*,* 1]*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0 *.*

d) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑧* = *𝑥*2 + *𝑦*2*,* (*𝑥, 𝑦*) ∈ [0*,* 1] × [0*,* 1] *.*

e) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑧* = *𝑥*2 + *𝑦*2*, 𝑧* ∈ [0*,* 1] *.*

∬ √︁ √︁ )

∬S **F**(**r**) · d**S** para las

**Ejercicio 19.** Consideremos el campo vectorial **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥, 𝑥*2 + *𝑦*2*, 𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 *,* calcula

S **F**(**r**) · d**S** para las siguientes superficies:

{

a) S = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = *𝑟*2*, 𝑧* ≥ 0 *.*

b) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = *𝑟*2*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0*, 𝑧* ≥ 0 *.*

c) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*2*, 𝑧* ∈ [0*,* 1]*, .*

d) S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*2*, 𝑧* ∈ [0*,* 1]*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0 *.*

S ∬S ( ) ·

**Ejercicio 20.** Sea la superficie de una esfera de radio *𝜌* centrada en el origen. Calcula **F r** d**S** para los siguientes campos vectoriales:

a) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (1*,* 1*,* 1)*.*

b) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥,* − *𝑦,* 2*𝑧*)*.*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 53

6 INTEGRALES DE SUPERFICIE

c) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = ( *𝑦, 𝑧, 𝑥*)*.*

**Ejercicio 21.** Sea S una superficie que encierra una regio´ n so´ lida *𝑄*, con volumen *𝑉* (*𝑄*) = 3. Sea **F**

el campo vectorial dado por ∬**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑎𝑥* + *𝑏* sin *𝑧, 𝑏 𝑦* + *𝑐* sin *𝑥, 𝑐𝑧* + *𝑎* sin *𝑦*)*,* donde *𝑎, 𝑏* y *𝑐* son

valores reales. Sabiendo que

*𝑎, 𝑏, 𝑐*.

S **F**(**r**) ·d**S** = 15 determina la relacio´ n que deben satisfacer los valores

**Ejercicio 22.** Resuelve las siguientes integrales

∬ ( ) · ( ) ( + + − ) SS

1. **F r** d**S** donde **F r** = *𝑥*5 *𝑦*4*, 𝑦*3 *𝑒𝑧, 𝑥*7 *𝑦* 5*𝑧𝑥*4 y es la superficie de un cilindro (incluyendo las bases) de altura 2 y cuyas bases tienen radio √3 y esta´ n centradas en los puntos

(0*,* 0*,* 0) y (0*,* 0*,* 2) respectivamente.

∬ ( ) · ( ) ( + + + ) SS

1. **F r** d**S** donde **F r** = *𝑥*3 *𝑦*3*, 𝑦*3 *𝑥*2*, 𝑧*3 *𝑦*2 y es la superficie de la esfera de radio 2 centrada en el origen.
2. ∬S **F**(**r**) · d**S** donde **F**(**r**) = (*𝑥*2 *𝑦𝑧, 𝑥 𝑦*2*𝑧, 𝑥*2 *𝑦*2) y donde S es la superficie que envuelve a

*𝑄* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 ≤ 2*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0*, 𝑧* ≥ 0

1. ∬S **F**(**r**) · d**S** donde **F**(**r**) = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) y donde S es la superficie que envuelve a

*𝑄* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 3*𝑧*2*, 𝑦* ≥ 0*, 𝑧* ∈ [0*,* 1]

1. ∬S **F**(**r**) · d**S** donde **F**(**r**) = (3*𝑥 𝑦, 𝑦𝑥, 𝑧*) y donde S es la superficie que envuelve a

*𝑄* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ *𝑧*2*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0*, 𝑧* ∈ [0*,* 1]

**Ejercicio 23.** Calcula ∬ **G**(**r**)*𝑁𝑑𝑆* siendo *𝐺*(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (2 *𝑦,* 2*𝑧,* 2*𝑥*) y donde

�S

S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = (2cos5 *𝑧* − 1)2*, 𝑧* ∈ [0*, 𝜋* ] *.*

2

**Ayuda:** Ten en cuenta que, tomando **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑧*2*, 𝑥*2*, 𝑦*2) se obtiene

∇ × **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = **G**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*)*.*

###### Ejercicios resueltos.

1. Se considera el tria´ ngulo de ve´ rtices de coordenadas *𝐴* = 0*,* 0*,* 3 , *𝐵* = 1*,* 0*,* 2 y *𝐶* = 0*,* 4*,* 1 .

( ) ( ) ( )

1. Hallar la ecuacio´ n del plano que contiene los puntos *𝐴*, *𝐵* y *𝐶*. Establecer una parametrizacio´ n

del tria´ ngulo.

(b) Calcular la integral de superficie

∫ ∫ *𝑧*

, donde

es el tria´ ngulo de ve´ rtices , , .

*𝑆*

*𝐴*

*𝐵*

*𝐶*

**Solucio´n**. (a) Buscamos un plano de la forma *𝑧* = *𝑎𝑥 𝑏 𝑦 𝑐*, ya que hemos aprendido que un plano se puede escribir como una gra´ fica de una funcio´ n. Tenemos que

+ +

*𝑆* (*𝑥 𝑦* + *𝑒* )*𝑑𝑆*

0*,* 0*,* 3 pertenece al plano, es decir, *𝑐* = 3.

* ( )

1*,* 0*,* 2 pertenece al plano, es decir, 2 = *𝑎 𝑐* y resulta *𝑎* = 1.

* ( ) + −

0*,* 4*,* 1 pertenece al plano, es decir 1 = 4*𝑏* 3 y resulta *𝑏* = 1 2.

* ( ) + − /

Por tanto el plano que pasa por los tres puntos es *𝑧* = *𝑥 𝑦* 2 3, o de forma equivalente

– − / +

*𝑥 𝑦* 2 *𝑧* = 3. Sabemos que el vector normal al plano se obtiene poniendo los coeficientes de *𝑥*, *𝑦*, *𝑧*, es decir **n** = 1*,* 1 2*,* 1 . En cuanto a la parametrizacio´ n, siguiendo la idea de otro ejercicio que hemos resuelto en una clase presencial, el tria´ ngulo incluido en el plano de arriba se parametriza como una

( / )

+ / +

54 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

gra´ fica de una funcio´ n despejando *𝑧*, donde *𝑥, 𝑦* pertenecen al tria´ ngulo (dentro del plano *𝑧* = 0) obtenido por **copiar las componentes** *𝑥, 𝑦* **de cada uno de los ve´rtices** y simplemente borrando

( )

( )

*𝑧*, es decir, el tria´ ngulo (en ℝ2, en coordenadas *𝑥, 𝑦* ) de ve´ rtices 0*,* 0 , 1*,* 0 y 0*,* 4 . Observamos

( ) ( ) ( ) ( )

que se trata de un tria´ ngulo recta´ ngulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta que pasa por los puntos (1*,* 0) y (0*,* 4), es decir la recta *𝑥* + *𝑦*/4 = 1. Por tanto podemos escribir ese dominio como 0 ≤ *𝑥* ≤ 1, 0 ≤ *𝑦* ≤ 4(1 − *𝑥*). Obtenemos finalmente la parametrizacio´ n del tria´ ngulo:

*𝑔*(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥, 𝑦,* 3 − *𝑥* − 1 *𝑦 ,* (*𝑥, 𝑦*) ∈ *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 : 0 ≤ *𝑧* ≤ 1*,* 0 ≤ *𝑦* ≤ 4(1 − *𝑥*)}*.*

2

1. Ahora se puede usar la fo´ rmula directa de ca´ lculo de las integrales de superficie escalares observando que

2

por tanto

∥**n**∥ = √︁1 + 1 + 1/4 = 3 *,*

∫ ∫ (*𝑥 𝑦* + *𝑒𝑧*)d*𝑆* = ∫ ∫

(*𝑥 𝑦* + *𝑒*3−*𝑥*− *𝑦*/2

1

*𝑦*=4 (1−*𝑥*) d*𝑥*

*𝑦*=0

3 1 4 (1−*𝑥*)

) ∥**n**∥d*𝑥*d *𝑦* = 2

∫ ∫

*𝑥 𝑦* + *𝑒*

3−*𝑥*− *𝑦*/2

d *𝑦*

d*𝑥*

*𝑆* ∫*𝐷*

= 3

2

1

0

*𝑥 𝑦*2 2*𝑒*3−*𝑥*− *𝑦*/2

2

1 0 0

= 3 ∫ 1 (8*𝑥*(1 − *𝑥*)2 − 2*𝑒𝑥*+1 + 2*𝑒*3−*𝑥*)d*𝑥*

−

2

0

= 1 + 3*𝑒*(*𝑒* − 1)2 *.*

1. Se considera la superficie *𝑆* obtenida como frontera de la regio´ n limitada por el cilindro *𝑦*2 +

*𝑧*2 = 9 y los planos *𝑥* = 0 y *𝑥* + *𝑦* = 5. Se pide:

1. Hallar una parametrizacio´ n de la∫su∫perficie *𝑆*.

(b) Calcular la integral de superficie

*𝑆 𝑥𝑧*d*𝑆*.

**Solucio´n**. (a) La superficie *𝑆* se compone de tres partes distintas y se debe escribir como una unio´ n *𝑆* = *𝑆*1 ∪ *𝑆*2 ∪ *𝑆*3, donde *𝑆*1 es la base del cilindro (en el plano *𝑥* = 0, observamos que en este caso es la componente *𝑥* la que cuenta como .altura.en vez de *𝑧*) en el plano *𝑥* = 0, *𝑆*2 es la superficie lateral del cilindro y *𝑆*3 es la interseccio´ n del cilindro con el plano *𝑥 𝑦* = 5. Por tanto, tenemos que parametrizar por separado cada una de esas superficies, calcular por separado las integrales de superficie correspondientes y al final sumarlas. No olvidemos que **la variable** *𝑥* **juega el papel de la habitual variable vertical** *𝑧* **en este ejercicio**. Por tanto:

+

* la superficie *𝑆*1 es el disco de radio 3 en variables ( *𝑦, 𝑧*) dentro del plano *𝑥* = 0, y se parametriza con coordenadas polares en ( *𝑦, 𝑧*):

*𝑔*1 (*𝑟, 𝜃*) = (0*, 𝑟* cos *𝜃, 𝑟* sin *𝜃*)*,* 0 ≤ *𝑟* ≤ 3*,* 0 ≤ *𝜃* ≤ 2*𝜋.*

la superficie *𝑆*2 es una parte de la superficie lateral del cil´ındro, por tanto se parametriza con coordenadas cil´ındricas dejando *𝑥* como variable libre y observando que los l´ımites de *𝑥* son entre 0 y 5 − *𝑦*. Ma´ s precisamente tenemos la parametrizacio´ n

•

*𝑔*2 (*𝑥, 𝜃*) = (*𝑥,* 3 cos *𝜃,* 3 sin *𝜃*)*,* 0 ≤ *𝑥* ≤ 5 − *𝑦* = 5 − 3 cos *𝜃,* 0 ≤ *𝜃* ≤ 2*𝜋.*

* la superficie *𝑆*3 representa la interseccio´ n del (interior del) cilindro con el plano *𝑥* + *𝑦* = 5. Por tanto se parametriza con coordenadas cil´ındricas en variables ( *𝑦, 𝑧*) y teniendo en cuenta que

*𝑥* = 5 − *𝑦* sobre la superficie *𝑆*3. Ma´ s precisamente tenemos la parametrizacio´ n

*𝑔*3 (*𝑟, 𝜃*) = (5 − *𝑟* cos *𝜃, 𝑟* cos *𝜃, 𝑟* sin *𝜃*)*,* 0 ≤ *𝑟* ≤ 3*,* 0 ≤ *𝜃* ≤ 2*𝜋.*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 55

6 INTEGRALES DE SUPERFICIE

Hemos obtenido as´ı la parametrizacio´ n de la superficie *𝑆* como una unio´ n de tres superficies para- metrizadas.

1. Tenemos

∫ ∫

∫ ∫+

∫ ∫+

∫ ∫*𝑆*

*𝑥𝑧*d*𝑆* =

*𝑆*1

#### *𝑥𝑧*d*𝑆*

*𝑆*2

#### *𝑥𝑧*d*𝑆*

*𝑆*3

∫ ∫ 1

*𝑥𝑧*d*𝑆* = *𝐼*1 + *𝐼*2 + *𝐼*3*.*

Observamos primero sin calcular nada que *𝐼*1 = *𝑆 𝑥𝑧*d*𝑆* = 0, ya que **el integrando es cero** al ser *𝑆*1 una parte del plano *𝑥* = 0. Pasamos ahora al ca´ lculo de *𝐼*2. Para ello, siguiendo la fo´ rmula de ca´ lculo de las integrales escalares de superficie, calculamos los vectores tangentes principales

*𝑇𝑥* (*𝑥, 𝜃*) = (1*,* 0*,* 0)*, 𝑇𝜃* (*𝑥, 𝜃*) = (0*,* −3 sin *𝜃,* 3 cos *𝜃*)*,*

y el vector normal a la superficie *𝑆*2 y su norma

**n**(*𝑥, 𝜃*) = (0*,* −3 cos *𝜃,* −3 sin *𝜃*)*,* ∥**n**∥ = 3*.*

Por tanto, usando la parametrizacio´ n *𝑔*2 podemos calcular la integral *𝐼*2 (sin olvidar multiplicar por 3 por la norma del vector normal):

∫ 2*𝜋* ∫ 5−3 cos *𝜃*

*𝐼*2 =

9*𝑥* sin *𝜃*d*𝑥*d*𝜃* = 9

0

∫ 2*𝜋* (5 − 3 cos *𝜃*)2

9 ∫ 2*𝜋* 2

0

0

2 sin *𝜃*d*𝜃*

= 2

0 (25 sin *𝜃* − 30 sin *𝜃* cos *𝜃* + 9 cos

*𝜃* sin *𝜃*)d*𝜃* = 0*,*

como se puede averiguar calculando te´ rmino con te´ rmino. Finalmente, llegamos a calcular la inte- gral *𝐼*3. Para ello, usamos la parametrizacio´ n *𝑔*3 y calculamos los dos vectores principales

*𝑇𝑟* (*𝑟, 𝜃*) = (− cos *𝜃,* cos *𝜃,* sin *𝜃*)*, 𝑇𝜃* (*𝑟, 𝜃*) = (*𝑟* sin *𝜃,* −*𝑟* sin *𝜃, 𝑟* cos *𝜃*)*,*

y el vector normal y su norma, haciendo el producto vectorial

**n**(*𝑟, 𝜃*) = (*𝑟, 𝑟,* 0)*,* ∥**n**∥ = *𝑟*√2*.*

Por tanto la integral de superficie *𝐼*3 se calcula como

∫ 2*𝜋* ∫ 3 √

*𝐼*3 =

0 (5 − *𝑟* cos *𝜃*)*𝑟* sin *𝜃𝑟*

2d*𝑟*d*𝜃* = 0*,*

0

ya que la integral entre 0 y 2*𝜋* de las funciones trigonome´ tricas sin *𝜃* y sin *𝜃* cos *𝜃* es 0. Por tanto

∫ ∫*𝑆*

*𝑥𝑧*d*𝑆* = 0*.*

Como observacio´ n, se pod´ıa adivinar este resultado desde el principio dado que la superficie es totalmente sime´ trica respecto a la componente *𝑧* y la componente *𝑧* aparece en el integrando, es decir, ser´ıa como integrar una funcio´ n impar. Otra observacio´ n es que **no podemos usar el Teorema de la Divergencia**: la superficie es cerrada pero **la funcio´n a integrar es escalar, no un campo vectorial**.

1. Calcular las siguientes integrales de superficies escalares:
2. La integral de la funcio´ n *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑦* sobre la superficie *𝑆* porcio´ n de la esfera *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 4

con 0 ≤ *𝑦* ≤ 1.

1. La integral de la funcio´ n *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑧*2

sobre la superficie *𝑆* que es la porcio´ n del plano

*𝑥* + *𝑦* + *𝑧* = 0 contenida en el interior del cilindro *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1.

56 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

**Solucio´n**. (a) Es muy dif´ıcil parametrizar la regio´ n de la esfera 0 *𝑦* 1 con las coordenadas esfe´ ricas esta´ ndar, dado que la condicio´ n 0 *𝑦* 1 se escribir´ıa como una condicio´ n de l´ımites sobre el producto sin *𝜙* sin *𝜃* y ser´ıa complicado de trabajar con ello. Por tanto, tenemos que usar **la observacio´n de que la esfera es sime´trica** respecto a las tres componentes *𝑥, 𝑦, 𝑧* y as´ı observar que **intercambiando el papel de las coordenadas** *𝑦* **y** *𝑧* **da el mismo resultado** (eso es, pensar como si la .altura”fuese *𝑦*). Por tanto, si *𝑆* es la superficie dada en el ejercicio y *𝑆*1 **es la superficie** 0 ≤ *𝑧* ≤ 1 **de la misma esfera** de radio 2, tenemos por simetr´ıa de forma evidente que

≤ ≤

≤ ≤

( )

∫ ∫

∫ ∫*𝑆*

*𝑦*d*𝑆* =

*𝑆*1

#### *𝑧*d*𝑆.*

Ahora, con esta observacio´ n, efectivamente podemos calcular la segunda integral parametrizando la esfera con coordenadas esfe´ ricas esta´ ndar y calculando la integral de superficie con la fo´ rmula de definicio´ n. Sabemos que la parametrizacio´ n de la esfera y la normal a ella son

*𝑔*(*𝜙, 𝜃*) = (2 cos *𝜃* sin *𝜙,* 2 sin *𝜃* sin *𝜙,* 2 cos *𝜙*)*,* **n**(*𝜙, 𝜃*) = 4 sin *𝜙*(cos *𝜃* sin *𝜙,* sin *𝜃* sin *𝜙,* cos *𝜙*)*,*

por tanto la norma del vector normal es 4 sin *𝜙* (como bien sabemos, la norma del vector normal es el jacobiano del cambio a coordenadas esfe´ ricas *𝑅*2 sin *𝜙* y en nuestro caso la esfera tiene radio 2). Por otro lado, en este caso no tenemos toda la esfera, sino solo la parte 0 *𝑧* 1, lo que en coordenadas esfe´ ricas se traduce por

≤ ≤

0 ≤ cos *𝜙* ≤ 1 *,* es decir *𝜋* ≤ *𝜙* ≤ *𝜋 .*

2 3 2

Por tanto, podemos ahora calcular

∫ ∫ *𝑧*d*𝑆* =

*𝑆*1

∫ 2*𝜋* ∫ *𝜋*/2

0

*𝜋*/3

8 cos *𝜙* sin *𝜙*d*𝜙*d*𝜃* = 2*𝜋*4 sin2

*𝜙 𝜙*=*𝜋*/2 = 2*𝜋*

*𝜙*=*𝜋*/3

11

y la integral inicial es tambie´ n igual a 2*𝜋*.

*𝑥*2

(b) Observamos que la porcio´ n del plano *𝑥* + *𝑦* + *𝑧* = 0 que se halla en el interior del cilindro

+ *𝑦*2 = 1 se puede parametrizar como sigue: *𝑧* = −*𝑥* − *𝑦* donde (*𝑥, 𝑦*) pertenecen al disco de radio

1 en el plano (*𝑥, 𝑦*) (la base del cilindro). Como el vector normal al plano *𝑥* + *𝑦* +√*𝑧* = 0 en cualquier

punto esta´ dado por los coeficientes, es decir **n** = (1*,* 1*,* 1) y su norma es ∥**n**∥ = 3, tenemos

∫ ∫

∫ ∫*𝑆*

*𝑧*2d*𝑆* = √3

*𝐷*

(−*𝑥* − *𝑦*)2d*𝑥*d *𝑦,*

donde *𝐷* es el disco de radio 1 en variables *𝑥, 𝑦* . Por tanto, tenemos que calcular una integral doble esta´ ndar. Pasamos a coordenadas polares *𝑥* = *𝑟* cos *𝜃*, *𝑦* = *𝑟* sin *𝜃*, con *𝑟* 0*,* 1 y *𝜃* 0*,* 2*𝜋* y tenemos

∈ [ ] ∈ [ ]

( )

∫ ∫ *𝑧*2d*𝑆* =

√3 ∫ 2*𝜋* ∫ 1

(*𝑟*2

+ 2*𝑟*2

sin *𝜃* cos *𝜃*)*𝑟*d*𝑟*d*𝜃*

*𝑆* ∫0 0 √

=

3

0 (1 + 2 sin *𝜃* cos *𝜃*) 4 d*𝜃* =

2 *.*

√

2*𝜋*

1

*𝜋*

3

1. El campo ele´ ctrico debido a una carga puntual situada en el punto origen (0*,* 0*,* 0) es

**E**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑘* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*)*, 𝑟* = √︁*𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 *.*

*𝑟*3

donde *𝑘* es una constante. Calcular el flujo del campo **E** a trave´ s del disco *𝐷* de centro el punto

(0*,* 0*,* 3), de radio 2 y paralelo al plano *𝑧* = 0.

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 57

6 INTEGRALES DE SUPERFICIE

**Solucio´n**. El disco *𝐷* considerado en el problema observamos que no es otra cosa que el disco de radio 2 en variables *𝑥, 𝑦* (es decir, descrito por *𝑥*2 *𝑦*2 4) pero dentro del plano *𝑧* = 3 en vez del plano *𝑧* = 0. Por tanto, podemos parametrizar como superficie dicho disco muy fa´ cilmente haciendo coordenadas polares en las variables (*𝑥, 𝑦*) y poniendo *𝑧* = 3, ma´ s precisamente poniendo

( ) + ≤

*𝑔*(*𝜌, 𝜃*) = (*𝜌* cos *𝜃, 𝜌* sin *𝜃,* 3)*,* 0 ≤ *𝜌* ≤ 2*,* 0 ≤ *𝜃* ≤ 2*𝜋.*

donde hemos utilizado la notacio´ n *𝜌* para la variable polar para no confundirse con la notacio´ n *𝑟* ya usada en el enunciado. Observamos que los vectores tangentes principales son

*𝑇𝜌*(*𝜌, 𝜃*) = (cos *𝜃,* sin *𝜃,* 0)*, 𝑇𝜃* = (−*𝜌* sin *𝜃, 𝜌* cos *𝜃,* 0)

y el vector normal orientado positivamente (es decir, hacia fuera) es **n** = (0*,* 0*, 𝜌*). Observamos

adema´ s que

*𝑟* =

√︁*𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 =

√︁*𝜌*2 + 9*.*

Por tanto, el flujo del campo ele´ ctrico a trave´ s de la superficie *𝐷* se calcula como la integral de superficie

∭ **E S**

∫ 2*𝜋* ∫ 2 √︁ *𝑘*

3 0 0 d d

*𝑑* =

0

·

0

*𝐷*

∫ (*𝜌*2

+ 9)

3 (*𝑥, 𝑦,*

) · ( *,*

*, 𝜌*) *𝜌 𝜃*

### 1

= 2*𝜋*

2 √︁ 3*𝑘𝜌* d*𝜌* = −6*𝜋𝑘* √︁ 1 1*𝜌*=2

0 (*𝜌*2 + 9 )3

3

√13

= 6*𝜋𝑘*

1 1

−

*.*

*𝜌*2 + 9 *𝜌*=0

1. Usando el teorema de la divergencia, calcular las siguientes integrales de flujo de campos

vectoriales:

(a) **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑒*

*𝑧*2 *,*

2 *𝑦* +

sin

(*𝑥*2

*𝑧*)*,*

4*𝑧* +

√︁*𝑥*2

+ 9 *𝑦*2)

sobre la superficie *𝑆*

frontera de la regio´ n

*𝑊* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ *𝑧* ≤ 8 − *𝑥*2 − *𝑦*2}*.*

(b) **F** *𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑧, 𝑥, 𝑦 𝑧*2 sobre la superficie *𝑆* frontera del so´ lido *𝑊* limitado por el cilindro

( ) ( + )

*𝑥*2 *𝑦*2 = 4, encima del plano *𝑧* = *𝑥* 1 y abajo del plano *𝑧* = 0.

+ +

**Solucio´n**. La idea de este ejercicio es usar el Teorema de la Divergencia y as´ı transformar el ca´ lculo de las integrales de superficie en integrales triples.

1. Observamos que

div**F** = *𝜕 𝑒𝑧*2

*𝜕𝑥*

*𝜕*

+ *𝜕 𝑦* (

2 *𝑦* + sin(*𝑥*2*𝑧*

*𝜕*

)) + *𝜕𝑧* (

4*𝑧* + √︁*𝑥*2 + 9 *𝑦*2) = 6*,*

y por el Teorema de la Divergencia obtenemos

∭·

∬*𝑆*

**F** *𝑑***S** =

*𝑊*

#### 6*𝑑𝑉.*

Para pasar a integrales iteradas y calcular la integral triple usamos coordenadas cil´ındricas. Pone- mos *𝑥* = *𝑟* cos *𝜃*, *𝑦* = *𝑟* sin *𝜃* y *𝑧* = *𝑧*. Sabiendo que *𝑥*2 *𝑦*2 = *𝑟*2 obtenemos los siguientes l´ımites de integracio´ n: *𝑟*2 *𝑧* 8 *𝑟*2, 0 *𝜃* 2*𝜋* y en cuanto a *𝑟*, su ma´ ximo se alcanza sobre el c´ırculo de interseccio´ n entre el paraboloide inferior *𝑧* = *𝑥*2 *𝑦*2 y el paraboloide superior *𝑧* = 8 *𝑥*2 *𝑦*2, es decir cuando *𝑟*2 = 8 *𝑟*2 lo que implica *𝑟*2 = 4, *𝑟* = 2. Por tanto 0 *𝑟* 2. Sin olvidar multiplicar por una *𝑟* (el Jacobiano del cambio a coordenadas cil´ındricas), tenemos

– ≤ ≤

+ − −

≤ ≤ − ≤ ≤

+

∭ 6*𝑑𝑉* =

∫ 2*𝜋* ∫ 2 ∫ 8−*𝑟*2

6*𝑟*d*𝑧*d*𝑟*d*𝜃* = 2*𝜋* ∫ 2

6*𝑟* (8 − 2*𝑟*2)d*𝑟*

*𝑊* 0

∫

= 24*𝜋*

0 *𝑟*2 0

2

*𝑟* (4 − *𝑟*2)d*𝑟* = 96*𝜋.*

0

58 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

1. Observamos que

div**F** = *𝜕 𝑧* + *𝜕 𝑥*

*𝜕*

+ *𝜕𝑧* (

2

*𝑦* + *𝑧* ) = 2*𝑧,*

que es nuestra funcio´ n a integrar sobre el so´ lido *𝑊*. Observamos que estamos en una situacio´ n en la cual **el plano** *𝑧* = *𝑥* 1 **corta la base del cilindro en el interior** y al pedir que *𝑥* 1 *𝑧* 0 (condicio´ n impuesta en el enunciado, por la formulacio´ n se entiende que *𝑥* 1 0 y nuestra regio´ n so´ lida se situ´ a debajo del plano *𝑧* = 0, que en este ejercicio funciona como ”techo”) obtenemos que la regio´ n *𝐷* a la que pertenecen *𝑥, 𝑦* es la regio´ n del disco *𝑥*2 *𝑦*2 4 (el c´ırculo de radio 2 centrado en el origen) donde *𝑥* 1. Por el Teorema de la Divergencia, e integrando primero en *𝑧* (.estrategia 2+1”), obtenemos

+ ≤

≤ −

+ + ≤ ≤

( ) + ≤

∬

∫(

∬)

∬−

*𝜕𝑥*

*𝜕 𝑦*

∭*𝑊*

2*𝑧*d*𝑉* =

*𝐷*

0

*𝑥*+1

2*𝑧*d*𝑧 𝑑𝐴* =

*𝐷*

*𝑧*2 *𝑧*=0

*𝑧*=*𝑥*+1

1

d*𝐴* =

*𝐷*

(*𝑥* + 1)2d*𝐴.*

Para calcular la integral doble que nos ha quedado, pasamos a coordenadas polares. Recordamos que tenemos la parte del c´ırculo de radio 2 (centrado en el origen) con *𝑥* 1. Como estamos en los cuadrantes 2 y 3, tenemos que cos *𝜃 <* 0 en dichos cuadrantes. Para hallar los l´ımites de integra- cio´ n en coordendas polares, traducimos las fronteras de la regio´ n a las coordenadas polares (como hemos hecho en muchos otros ejercicios y nos tiene que resultar una te´ cnica ya bien conocida):

≤ −

* frontera superior (circunferencia) *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4, es decir *𝑟*2 = 4 y resulta *𝑟* = 2

frontera inferior *𝑥* = 1, es decir *𝑟* cos *𝜃* = 1 o bien *𝑟* = 1 cos *𝜃*, que es **un nu´ mero positivo**

* − − − /

dado que el coseno es negativo.

Deducimos que 1 cos *𝜃 𝑟* 2. En cuanto al a´ ngulo, basta con igualar los extremos de los l´ımites de integracio´ n de la *𝑟* y resolver la ecuacio´ n en *𝜃* obtenida para hallar los l´ımites de integra-

– / ≤ ≤

cio´ n de la variable *𝜃*:

1

1 2*𝜋*

4*𝜋*

−cos *𝜃* = 2 =⇒ cos *𝜃* = − 2 =⇒ *𝜃* = 3 o *𝜃* = 3

(lo mismo se ve tambie´ n de forma geome´ trica sobre un dibujo, resolviendo tria´ ngulos recta´ ngulos). Deducimos que

2*𝜋*

3 ≤ *𝜃* ≤

4*𝜋 .*

3

Podemos ahora pasar a integrales iteradas en la integral doble que nos hab´ıa quedado:

∬ (*𝑥* + 1)

2d*𝐴* =

∫ 4*𝜋*/3 ∫ 2

(*𝑟* cos *𝜃* + 1)

2*𝑟*d*𝑟*d*𝜃*

*𝐷* 2*𝜋*/3 −1/cos *𝜃*

∫ 4*𝜋*/3 ∫ 2

=

(*𝑟*3

cos2

*𝜃* + 2*𝑟*2

cos *𝜃* + *𝑟*)d*𝑟*d*𝜃*

*𝜋*/3

2

∫

−1/cos *𝜃* 1 1

4*𝜋*/3

+

11

=

2*𝜋*/3

∫

∫

=

2

16

4*𝜋*/3

*𝑟*4 cos2

16

1

4 cos

*𝜃* +

4*𝜋*/3

2

*𝜃* +

2*𝑟*3 cos *𝜃*

3

1

*𝑟*2

2

*𝑟*=2 d*𝜃*

*𝑟*=−1/cos *𝜃*

4

3 cos *𝜃* + 2 − 4 cos2 *𝜃* + 3 cos2 *𝜃* − 2 cos2 *𝜃*

d*𝜃*

2

1

*𝜋*/3 1

=

2

2*𝜋*/3

que se reduce a una integral elemental, sabiendo que la primitiva de 1 cos2 *𝜃* es la funcio´ n tangente. Es tambie´ n inmediato ver (fo´ rmula con el a´ ngulo doble, la hemos usado muchas veces en ejercicios) que la integral de 4 cos2 *𝜃* es 2*𝜃* + sin(2*𝜃*). Por tanto, la u´ ltima integral obtenida se reduce a calcular

/

1

1

4 cos

*𝜃* +

3 cos *𝜃* + 2 − 12 cos2 *𝜃*

d*𝜃,*

2*𝜃* + sin(2*𝜃*) + 16 sin *𝜃* + 2*𝜃* − 1

3

12

tan *𝜃*1 1*𝜃*=4*𝜋*/3

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 59

*𝜃*=2*𝜋*/3

6 INTEGRALES DE SUPERFICIE

que es igual a

8*𝜋*

√3 16 √3 1 √

8*𝜋*

9√3

3 + 2 2 −

3 2 2 − 12 2

3 = 3 −

2 ∼ 0*.*58

por tanto el resultado final del ca´ lculo de la integral (recordando el signo menos que hemos obviado al pasar a coordenadas polares) es aproximadamente −0*.*58.

1. Sea **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (0*,* −*𝑧,* 1) y sea *𝑆* la frontera del so´ lido que es la parte superior de la esfera unitaria *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 ≤ 1 situada encima del plano *𝑧* = 1/2. Calcular

∫ ∫

*𝑆* **F** · d**S**

primero usando la fo´ rmula directa de ca´ lculo de una integral de superficie. A continuacio´ n, verificar que **F** = rot **G** donde **G** *𝑥, 𝑦, 𝑧* = 0*, 𝑥, 𝑥𝑧* y calcular de nuevo la integral de superficie usando el Teorema de Stokes.

( ) ( ) ( )

**Solucio´n**. **Primer me´todo**: calculamos la integral de superficie usando una parametrizacio´ n y la fo´ rmula de ca´ lculo directa. Como estamos con una parte de la esfera (ve´ ase tambie´ n el ejercicio 3(a)), usamos coordenadas esfe´ ricas y conocemos ya la parametrizacio´ n y el vector normal:

*𝑔*(*𝜙, 𝜃*) = (sin *𝜙* cos *𝜃,* sin *𝜙* sin *𝜃,* cos *𝜙*)*,* **n**(*𝜙, 𝜃*) = sin *𝜙𝑔*(*𝜙, 𝜃*)*,*

Para hallar los l´ımites de los a´ ngulos *𝜙*, *𝜃* recordamos que estamos con una regio´ n de la esfera,

*𝑧* 1 2, lo que limita el a´ ngulo *𝜙*. Traduciendo a coordenadas esfe´ ricas tenemos cos *𝜙* 1 2, es decir 0 *𝜙 𝜋* 3 y obviamente no tenemos ninguna limitacio´ n en *𝜃*, es decir 0 *𝜃* 2*𝜋*. Observamos tambie´ n que

≤ ≤ / ≤ ≤

≥ / ≥ /

**F**(*𝑔*(*𝜙, 𝜃*)) = (0*,* − cos *𝜙,* 1)*,* **F**(*𝑔*(*𝜙, 𝜃*)) · **n**(*𝜙, 𝜃*) = − sin2 *𝜙* cos *𝜙* sin *𝜃* + sin *𝜙* cos *𝜙.*

Por tanto, la integral de superficie se calcula como

## ∫ ∫ **F**

**S** ∫ 2*𝜋* ∫ *𝜋*/3

sin2

(−

cos

*𝜙*

sin

*𝜙*

sin

*𝜃* +

cos d

*𝜙*

*𝜙*)*𝑑𝜙*

*𝜃*

*𝑆* 0 0 ∫ 1

· *𝑑*

=

*𝜋*/3

2 1*𝜙*=*𝜋*/3

3*𝜋*

= 0 + 2*𝜋* 0 (sin *𝜙* cos *𝜙*)*𝑑𝜙* = *𝜋* sin *𝜙*1*𝜙*=0 = 4 *.*

**Segundo me´todo**: calculamos la misma integral con la ayuda del Teorema de Stokes, observa- mos primero que la frontera de la superficie *𝑆* es la circunferencia obtenida intersectando el plano

*𝑧* = 1/2 con la esfera *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 1. Poniendo *𝑧* = 1/2 obtenemos que dicha circunferencia tiene

como ecuacio´ n *𝑥*2 + *𝑦*2 = 3/4. Llamemos *𝐶* esta curva. Usando el Teorema de Stokes obtenemos

∬·

∫·

∬*𝑆*

1. d**S** =

*𝑆*

rot**G** d**S** =

*𝐶*

**G** · *𝑑***s***,*

donde **G** = (0*, 𝑥, 𝑥𝑧*) viene dado en el enunciado. Sabemos que la curva *𝐶* esta´ dada por *𝑥*2 + *𝑦*2 = 3/4 dentro del plano *𝑧* = 1/2, por tanto la podemos parametrizar con coordenadas polares en las variables (*𝑥, 𝑦*) y poniendo *𝑧* = 1/2 fijo:

( \

**c**(*𝑡*) = √3 cos *𝑡,* √3 sin *𝑡,* 1 *, 𝑡* ∈ [0*,* 2*𝜋*]*.*

2 2 2

En este caso tenemos

**G**(**c**(*𝑡*)) = (0*,* √3 cos *𝑡,* √3 cos *𝑡*\ *,* **c**′ (*𝑡*) = (−√3 sin *𝑡,* √3 cos *𝑡,* 0\

2

4

2

2

60 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

y su producto escalar es

**G**(**c**(*𝑡*)) · **c**′ (*𝑡*) = 3 cos2 *𝑡* = 3 1 + cos(2*𝑡*) *.*

4 4 2

Usando la fo´ rmula de ca´ lculo de la integral de l´ınea tenemos

= 4

0

2

*𝑡* =

∫ **G** d**s**

*𝐶*

·

3 ∫ 2*𝜋* 1 + cos(2*𝑡*) d

3*𝜋*

4 *,*

por tanto observamos que obtenemos el mismo resultado.

1. Sea *𝐼* el flujo del campo **F** *𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑒𝑦,* 2*𝑥𝑒𝑥*2 *, 𝑧*2 a trave´ s de la semiesfera superior *𝑆* de radio

( ) ( )

1. Se pide:
   1. Descomponer el campo **F** como una suma **F** = **G H** donde **G** *𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑒𝑦,* 2*𝑥𝑒𝑥*2 *,* 0 y hallar

+ ( ) ( )

un campo vectorial **A** tal que rot **A** = **G**.

( )

* 1. Usar el Teorema de Stokes para probar que el flujo de **G** a trave´ s de la semiesfera superior *𝑆*

es cero.

* 1. Calcular *𝐼* usando la descomposicio´ n y el resultado del apartado (b).

**Solucio´n**. Este ejercicio es en cierta manera **un ana´logo en 3D del Ejercicio 6, Hoja 2**, donde se usa de nuevo, en este caso para calcular una integral de superficie, **el me´todo de descomposicio´n**.

1. Podemos escribir (como indica el enunciado)

**F** = **G** + **H***,* **G** = (*𝑒𝑦,* 2*𝑥𝑒𝑥*2 *,* 0)*,* **H** = (0*,* 0*, 𝑧*2)

y queremos encontrar un campo vectorial **A** tal que rot **A** = **G**. En general el problema de encontrar un potencial vectorial para un campo dado es un problema muy dif´ıcil, pero **en nuestro caso el campo G solo depende de** *𝑥* **e** *𝑦*, lo que simplifica la bu´ squeda, ya que tenemos que buscar el campo **A** tambie´ n dependiendo solo de (*𝑥, 𝑦*), es decir de la forma

**A** = ( *𝐴*1 (*𝑥, 𝑦*)*, 𝐴*2 (*𝑥, 𝑦*)*, 𝐴*3 (*𝑥, 𝑦*))*.*

Escribiendo componente por componente la relacio´ n rot **A** = **G** y teniendo en cuenta que la variable

*𝑧* no cuenta en la fo´ rmula del rotacional, obtenemos

*𝜕𝐴*3 = *𝑒𝑦,* − *𝜕𝐴*3 = 2

*𝜕 𝑦*

*𝜕𝑥*

*𝑥*2

*𝑥𝑒*

*𝜕𝐴 𝜕𝐴*

− = 0*.*

2 1

*,*

*𝜕𝑥*

*𝜕 𝑦*

Observamos ahora de forma fa´ cil que basta con poner *𝐴*1 = *𝐴*2 = 0 y *𝐴*3 (*𝑥, 𝑦*) = *𝑒𝑦* − *𝑒𝑥*2 , por tanto

**A** = (0*,* 0*, 𝑒𝑦* − *𝑒𝑥*2 )*.*

1. Por el Teorema de Stokes tenemos que

∬·

∫·

∬*𝑆*

1. d**S** =

*𝑆*

rot**A** d**S** =

*𝜕𝑆*

**A** · *𝑑***s***,*

donde *𝜕𝑆* es la curva frontera de la superficie *𝑆*, es decir la circunferencia de radio 1 dentro del plano

*𝑧* = 0. La parametrizacio´ n de esa curva es **c**(*𝑡*) = (cos *𝑡,* sin *𝑡,* 0) con *𝑡* ∈ [0*,* 2*𝜋*] y observamos de forma evidente que **c**′ (*𝑡*) = (− sin *𝑡,* cos *𝑡,* 0) y por tanto

**A** · **c**′ (*𝑡*) = 0*.*

Por tanto, la integral de l´ınea de **A** tambie´ n es cero.

1. Por la descomposicio´ n del apartado (a) y el resultado del apartado (b) tenemos

∬·

*𝑆*

*𝑆*

∬*𝑆*

**F** *𝑑𝑆* =

*𝑆*

**G** · *𝑑𝑆* + ∬

**H** · *𝑑𝑆* = ∫ ∫

**H** · *𝑑𝑆*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 61

6 INTEGRALES DE SUPERFICIE

ya que hemos demostrado en el apartado (b) que el primer te´ rmino de la suma anterior vale cero. Para seguir el ca´ lculo no nos queda ma´ s remedio que calcular la u´ ltima integral de forma esta´ ndar, con la fo´ rmula de ca´ lculo, pero el campo que queda **H** = 0*,* 0*, 𝑧*2 es ya bastante sencillo. Sabemos que la parametrizacio´ n y el vector normal positivo de la semiesfera superior de radio 1 son

( )

*𝑔*(*𝜙, 𝜃*) = (sin *𝜙* cos *𝜃,* sin *𝜙* sin *𝜃,* cos *𝜙*)*,* **n**(*𝜙, 𝜃*) = sin *𝜙𝑔*(*𝜙, 𝜃*)*,*

y podemos efectuar el producto escalar entre el vector normal y el campo **H** en coordenadas esfe´ ri- cas, que es muy fa´ cil ya que solo cuenta la u´ ltima componente:

**H**(*𝑔*(*𝜙, 𝜃*)) · **n**(*𝜙, 𝜃*) = cos3 *𝜙* sin *𝜙.*

Como para la semiesfera superior, los l´ımites de integracio´ n son *𝜃* ∈ [0*,* 2*𝜋*], *𝜙* ∈ [0*, 𝜋*/2] obtenemos

*𝜋*

−

4

= *.*

*𝜙*=0 2

∬ **H** d**S**

*𝑆*

·

=

0

0

∫ 2*𝜋* ∫ *𝜋*/2 cos3

sin d d 2

*𝜙*

*𝜙*

*𝜙*

*𝜃* =

cos4 *𝜙*  1*𝜙*=*𝜋*/2 *𝜋*

**8.** Calcular las siguientes integrales de superficie:

1. La integr√al del campo vectorial **F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) sobre la parte de la esfera *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 1

con 1/2 ≤ *𝑧* ≤ 3/2. 2

1. La integral del campo vectorial **V**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥, 𝑦, 𝑥 𝑦*) sobre la porcio´ n de la elipse

dentro del plano *𝑥 𝑦*.

*𝑥*2

4 +

*𝑦*2

9 = 1*, 𝑥, 𝑦* ≥ 0*,*

**Solucio´n.** En estos ejercicios las integrales se calculan con la definicio´ n.

1. Sabemos que la parametrizacio´ n esta´ ndar de la esfera se realiza con la ayuda de las coorde- nadas esfe´ ricas

**g**(*𝑢, 𝑣*) = (cos *𝑢* sin *𝑣,* sin *𝑢* sin *𝑣,* cos *𝑣*)

y la normal a la esfera, calculada en los apuntes de teor´ıa, es

**n**(*𝑢, 𝑣*) = sin *𝑣*(cos *𝑢* sin *𝑣,* sin *𝑢* sin *𝑣,* cos *𝑣*)*.*

Nos quedan por establecer los l´ımites de integracio´ n de los para´ metros (a´ ngulos) *𝑢* y *𝑣*. Si para *𝑢* no tenemos restriccio´ n (es el a´ ngulo polar habitual, de rotacio´ n en el plano horizontal, y tenemos 0 ≤ *𝑢* ≤ 2*𝜋*), en cambio s´ı tenemos una restriccio´ n para el a´ ngulo *𝑣*: tenemos

1 √3 *𝜋 𝜋*

2 ≤ *𝑧* = cos *𝑣* ≤ 2 =⇒ 6 ≤ *𝑣* ≤ 3 *.*

Efectuamos el producto escalar entre el campo y la normal

**F**(**g**(*𝑢, 𝑣*)) · **n**(*𝑢, 𝑣*) = **g**(*𝑢, 𝑣*) · **n**(*𝑢, 𝑣*) = sin *𝑣*(cos2 *𝑢* sin2 *𝑣* + sin2 *𝑢* sin2 *𝑣* + cos2 *𝑣*) = sin *𝑣,*

y nos queda por calcular la integral, que en integrales iteradas (teniendo en cuenta los l´ımites de integracio´ n anteriores) se escribe

∫ 2*𝜋* ∫ *𝜋*/3 sin *𝑣*d*𝑣*d*𝑢* = 2*𝜋*(− cos *𝑣*)1*𝑣*=*𝜋*/3 = *𝜋*(√3 − 1)*.*

0

*𝜋*/6

*𝑣*=*𝜋*/6

1. La parametrizacio´ n de la elipse como superficie dentro del plano *𝑥 𝑦* (es decir, *𝑧* = 0) se realiza con la ayuda de las coordenadas polares el´ıpticas que hemos visto en algunos ejercicios de integra- les triples resueltos en clase. Observando que la elipse del ejercicio es (*𝑥*/2)2 + ( *𝑦*/3)2 = 1, ponemos

**g**(*𝑟, 𝜃*) = (2*𝑟* cos *𝜃,* 3*𝑟* sin *𝜃,* 0)*,* 0 ≤ *𝜃* ≤ *𝜋 ,* 0 ≤ *𝑟* ≤ 1*.*

2

62 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

donde la limitacio´ n del a´ ngulo *𝜃* proviene de la hipo´ tesis *𝑥*, *𝑦* 0. Calculamos los vectores tangentes principales y la normal a la elipse:

≥

**T***𝑟* (*𝑟, 𝜃*) = (2 cos *𝜃,* 3 sin *𝜃,* 0)*,* **T***𝜃* (*𝑟, 𝜃*) = (−2*𝑟* sin *𝜃,* 3*𝑟* cos *𝜃,* 0) y efectuando el producto vectorial obtenemos

**n**(*𝑟, 𝜃*) = (0*,* 0*,* 6*𝑟*)*.*

El producto escalar que tenemos que calcular es

**F**(**g**(*𝑟, 𝜃*)) · **n**(*𝑟, 𝜃*) = (2*𝑟* cos *𝜃,* 3*𝑟* sin *𝜃,* 12*𝑟*3 cos2 *𝜃* sin *𝜃*) · (0*,* 0*,* 6*𝑟*)

= 72*𝑟*4 cos2 *𝜃* sin *𝜃.*

Nos queda por calcular la integral de superficie del campo, que al pasar a integrales iteradas se escribe como

∫ *𝜋*/2 ∫ 1 72 4 cos2 sin d d 72 ∫ 1 4d ∫ *𝜋*/2 cos2 sin d d

0

0

*𝑟*

*𝜃*

*𝜃*

*𝑟*

*𝜃* =

0

*𝑟*

*𝑟*

0

*𝜃*

*𝜃*

*𝑟*

*𝜃*

= 72 *𝑟*5 1*𝑟*=1 − cos3 *𝜃* 1*𝜃*=*𝜋*/2 = 24 *.*

5

*𝑟*=0

3

*𝜃*=0

5

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 63

7 ECUACIONES DIFERENCIALES

# Ecuaciones diferenciales

##### Ecuaciones de variables separables

**Ejercicio 1.** *𝑦* log *𝑦*d*𝑥* − *𝑥*d *𝑦* = 0.

Solucio´ n. Separando variables, podemos escribir la ecuacio´ n

∫ ∫

d *𝑦* = *𝑦* log *𝑦 ,* ⇒ 1 d *𝑦* = 1 d*𝑥* ⇒ 1 d *𝑦* = 1 d*𝑥,*

d*𝑥*

*𝑥*

*𝑦* log *𝑦*

*𝑥*

*𝑦* log *𝑦*

*𝑥*

y calculando las integrales indefinidas obtenemos log log *𝑦* = log *𝑥 𝐾* y aplicando la funcio´ n exponencial se obtiene log *𝑦* = *𝐾𝑥* y la solucio´ n final (aplicando una vez ma´ s la funcio´ n exponencial)

( ) +

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑒𝐾𝑥* donde *𝐾* ∈ ℝ es la constante de integracio´ n. ◀

**Ejercicio 2.** *𝑥 𝑦 𝑦*′ = *𝑦* − 1

Solucio´ n. Observamos que *𝑦* = 1 es la u´ nica solucio´ n constante. Suponiendo a partir de ahora *𝑦* ≠ 1 y separando variables como es habitual, obtenemos

∫ ∫

*𝑦* − 1 *𝑥 𝑦* − 1 *𝑥*

*𝑦* d *𝑦* = 1 d*𝑥* ⇒ *𝑦* d *𝑦* = 1 d*𝑥* ⇒ *𝑦* + log | *𝑦* − 1| = *𝐾* + log *𝑥*

y aplicando la funcio´ n exponencial obtenemos como solucio´ n en forma impl´ıcita

| *𝑦* − 1|*𝑒𝑦* = *𝐾𝑥, 𝐾* ∈ ℝ*,*

que no se puede despejar de forma expl´ıcita. ◀

##### Ecuaciones exactas

**Ejercicio 3.** (2*𝑥 𝑦*3 + *𝑦* cos *𝑥*)d*𝑥* + (3*𝑥*2 *𝑦*2 + sin *𝑥*)d *𝑦* = 0.

Solucio´ n. Observamos que el campo vectorial **F**(*𝑥, 𝑦*) = (2*𝑥 𝑦*3 + *𝑦* cos *𝑥,* 3*𝑥*2 *𝑦*2 + sin *𝑥*) satisface

*𝜕𝐹*1 = 6*𝑥 𝑦*2 + cos *𝑥* = *𝜕𝐹*2 *,*

*𝜕 𝑦*

*𝜕𝑥*

por tanto tenemos una ecuacio´ n diferencial exacta. Buscamos una funcio´ n potencial para **F**: inte- grando la primera componente en *𝑥* obtenemos

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 *𝑦*3 + *𝑦* sin *𝑥* + *𝑔*( *𝑦*)

y despue´ s, al derivar *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) respecto a *𝑦* observamos que *𝑔*( *𝑦*) = 0, por tanto una funcio´ n potencial es *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) indicada anteriormente. Se obtiene que la solucio´ n de la ecuacio´ n en forma impl´ıcita es

*𝑥*2 *𝑦*3 + *𝑦* sin *𝑥* = *𝐾, 𝐾* ∈ ℝ*.*

◀

**Ejercicio 4.** (sin *𝑥* sin *𝑦* − *𝑥𝑒𝑦*)d *𝑦* = (*𝑒𝑦* + cos *𝑥* cos *𝑦*)d*𝑥*.

Solucio´ n. Observamos que el campo vectorial **F**(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑒𝑦* +cos *𝑥* cos *𝑦,* − sin *𝑥* sin *𝑦* + *𝑥𝑒𝑦*) satisface

*𝜕𝐹*1 = *𝑒𝑦* − cos *𝑥* sin *𝑦* = *𝜕𝐹*2 *,*

*𝜕 𝑦*

*𝜕𝑥*

por tanto tenemos una ecuacio´ n diferencial exacta. Buscamos una funcio´ n potencial para **F**: inte- grando la primera componente en *𝑥* obtenemos

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥𝑒𝑦* + sin *𝑥* cos *𝑦* + *𝑔*( *𝑦*)*,*

y de nuevo derivando esta fo´ rmula respecto a *𝑦* se ve fa´ cilmente que *𝑔 𝑦* = 0. Resulta que la solucio´ n de la ecuacio´ n en forma impl´ıcita es

( )

*𝑥𝑒𝑦* + sin *𝑥* cos *𝑦* = *𝐾, 𝐾* ∈ ℝ*.*

◀

64 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

7.3 Ecuaciones con factores integrantes

##### Ecuaciones con factores integrantes

**Ejercicio 5.** (3*𝑥*2 − *𝑦*2)d *𝑦* − 2*𝑥 𝑦*d*𝑥* = 0.

Solucio´ n. Se observa que se puede escribir en la forma cano´ nica *𝑃* (*𝑥, 𝑦*)d*𝑥* + *𝑄*(*𝑥, 𝑦*)d *𝑦* = 0, donde

*𝑃* (*𝑥, 𝑦*) = −2*𝑥 𝑦*, *𝑄*(*𝑥, 𝑦*) = 3*𝑥*2 − *𝑦*2. Observamos que

*𝑃𝑦* = *𝜕𝑃* = −2*𝑥, 𝑄𝑥* = *𝜕𝑄* = 6*𝑥,*

por tanto la funcio´ n

*𝜕 𝑦 𝜕𝑥*

*𝑃𝑦* − *𝑄𝑥* = −8*𝑥* = 4

#### *𝑃* −2*𝑥 𝑦 𝑦*

es una funcio´ n que solo depende de la variable *𝑦*. Por el criterio para factores integrantes depen- diendo de una sola variable se deduce que la ecuacio´ n tiene un factor integrante que solo depende de la variable *𝑦*. Ma´ s precisamente, buscando *𝜇* = *𝜇*( *𝑦*), por la ecuacio´ n del factor integrante obte-

nemos

*𝜕𝑄 𝜕𝑃* 1

6*𝑥* + 2*𝑥* 4

*𝑃* (*𝑥, 𝑦*)*𝜇*′( *𝑦*) = *𝜇*( *𝑦*)

*𝜕𝑥* − *𝜕 𝑦*

⇒ *𝜇*′( *𝑦*) = *𝜇*( *𝑦*)

−2*𝑥 𝑦* = −*𝜇*( *𝑦*) *𝑦 .*

Resolviendo la ecuacio´ n obtenida para *𝜇* como funcio´ n de *𝑦* (ecuacio´ n de variables separables, ver parte A) se obtiene (obviando la constante de integracio´ n en este caso, ya que nos basta con un solo factor integrante)

*𝜇*′ ( *𝑦*) = − 4 ⇒ *𝜇*( *𝑦*) = 1 *.*

*𝜇*( *𝑦*) *𝑦*

*𝑦*4

Multiplicando con el factor integrante que hemos encontrado obtenemos la ecuacio´ n

− 2*𝑥* d*𝑥* + 3*𝑥*2 − *𝑦*2 d *𝑦* = 0*,*

*𝑦*3

*𝑦*4

que es una ecuacio´ n diferencial exacta (como debe ser si hemos calculado bien el factor integrante, se verifica de forma inmediata que las dos derivadas cruzadas valen ambas 6*𝑥*/ *𝑦*4). Buscamos una

funcio´ n potencial del campo

2*𝑥*

**F** = − *𝑦*3*,*

3*𝑥*2 − *𝑦*2 *.*

*𝑦*4

Integrando la primera componente respecto de *𝑥* obtenemos

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

*𝑥*2

– *𝑦*3 +

*𝑔 𝑦 𝜕 𝑓*

*𝜕 𝑦*

( ) ⇒

= 3*𝑥*2 *𝑔*′ *𝑦 .*

*𝑦*4

+ ( )

Igualando la u´ ltima expresio´ n con la segunda componente del campo vectorial obtenemos *𝑔*′( *𝑦*) =

−1/ *𝑦*2, es decir *𝑔*( *𝑦*) = 1/ *𝑦*. Finalmente, la funcio´ n potencial es

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

*𝑥*2 1

– *𝑦*3 + *𝑦*

y la solucio´ n en forma impl´ıcita de la ecuacio´ n esta´ dada por *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝐾* con *𝐾* ℝ constante de integracio´ n arbitraria. ◀

( ) ∈

**Ejercicio 6.** ( *𝑦*2 + *𝑥 𝑦* + 1)d*𝑥* + (*𝑥*2 + *𝑥 𝑦* + 1)d *𝑦* = 0.

Solucio´ n. Se observa que se puede escribir en la forma cano´ nica *𝑃* (*𝑥, 𝑦*)d*𝑥* + *𝑄*(*𝑥, 𝑦*)d *𝑦* = 0, donde

*𝑃* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑦*2 + *𝑥 𝑦* + 1, *𝑄*(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + *𝑥 𝑦* + 1. Observamos que

*𝜕𝑃* = 2 *𝑦* + *𝑥, 𝑄𝑥* = *𝜕𝑄* = 2*𝑥* + *𝑦.*

*𝜕 𝑦*

*𝜕𝑥*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 65

7 ECUACIONES DIFERENCIALES

Como nos indica el ejercicio, buscamos un factor integrante de la forma *𝜇 𝑥 𝑦* . Poniendo como notacio´ n *𝑥 𝑦* = *𝑡*, observamos que

( )

*𝜕𝜇* = *𝑦𝜇*′(*𝑡*)*, 𝜕𝜇* = *𝑥𝜇*′(*𝑡*)*.*

*𝜕𝑥*

*𝜕𝑥*

Sustituyendo en la ecuacio´ n del factor integrante obtenemos

*𝑥𝑃* (*𝑥, 𝑦*)*𝜇*′(*𝑡*) − *𝑦𝑄*(*𝑥, 𝑦*)*𝜇*′(*𝑡*) = *𝜇*(*𝑡*) *𝜕𝑄* − *𝜕𝑃* 1

*𝜕𝑥*

*𝜕 𝑦*

o de forma equivalente sustituyendo los valores de *𝑃* (*𝑥, 𝑦*), *𝑄*(*𝑥, 𝑦*) y sus derivadas

(*𝑥 𝑦*2 + *𝑥*2 *𝑦* + *𝑥* − *𝑥*2 *𝑦* − *𝑥 𝑦*2 − *𝑦*)*𝜇*′(*𝑡*) = *𝜇*(*𝑡*) (2*𝑥* + *𝑦* − 2 *𝑦* − *𝑥*) ⇒ *𝜇*′(*𝑡*) = *𝜇*(*𝑡*)*,*

obteniendo *𝜇 𝑡* = *𝑒𝑡* o *𝜇 𝑥, 𝑦* = *𝑒𝑥 𝑦* (recordamos que *𝑡* = *𝑥 𝑦*). Multiplicando por el factor integrante obtenido, tenemos la ecuacio´ n

( ) ( )

( *𝑦*2 + *𝑥 𝑦* + 1)*𝑒𝑥 𝑦*d*𝑥* + (*𝑥*2 + *𝑥 𝑦* + 1)*𝑒𝑥 𝑦*d *𝑦* = 0*,*

que es exacta como es fa´ cil de averiguar calculando las derivadas cruzadas (ambas dan como re- sultado *𝑥 𝑦*2 *𝑥*2 *𝑦* 2*𝑥* 2 *𝑦 𝑒𝑥 𝑦*). Nos queda calcular una funcio´ n potencial del campo vectorial conservativo **F** = *𝑦*2 *𝑥 𝑦* 1 *𝑒𝑥 𝑦, 𝑥*2 *𝑥 𝑦* 1 *𝑒𝑥 𝑦* . Integrando la primera componente respecto a *𝑥* obtenemos (despue´ s de una necesaria integracio´ n por partes)

(( + + ) ( + + ) )

( + + + )

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* + *𝑦*)*𝑒𝑥 𝑦* + *𝑔*( *𝑦*)

y es fa´ cil ver calculando la derivada respecto a *𝑦* que *𝑔 𝑦* = 0. Por tanto obtenemos *𝑓 𝑥, 𝑦* =

( ) ( )

*𝑥 𝑦 𝑒𝑥 𝑦* y la solucio´ n general en forma impl´ıcita se escribe *𝑥 𝑦 𝑒𝑥 𝑦* = *𝐾* con *𝐾* ℝ constante de integracio´ n arbitraria. ◀

( + ) ( + ) ∈

**Ejercicio 7.** (*𝑥* + 2) sin *𝑦*d*𝑥* + *𝑥* cos *𝑦*d *𝑦* = 0.

Solucio´ n. Se observa que se puede escribir en la forma cano´ nica *𝑃* (*𝑥, 𝑦*)d*𝑥* + *𝑄*(*𝑥, 𝑦*)d *𝑦* = 0, donde

*𝑃* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* + 2) sin *𝑦*, *𝑄*(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥* cos *𝑦*. Observamos que

*𝑃𝑦* = *𝜕𝑃* = (*𝑥* + 2) cos *𝑦, 𝑄𝑥* = *𝜕𝑄* = cos *𝑦,*

por tanto la funcio´ n

*𝜕 𝑦*

*𝜕𝑥*

*𝑃𝑦* − *𝑄𝑥* = (*𝑥* + 1) cos *𝑦* = *𝑥* + 1

*𝑄 𝑥* cos *𝑦 𝑥*

es una funcio´ n que solo depende de la variable *𝑥*. Se deduce que la ecuacio´ n tiene un factor inte- grante que solo depende de la variable *𝑥*. Ma´ s precisamente, buscando *𝜇* = *𝜇 𝑥* , por la ecuacio´ n del factor integrante obtenemos

( )

−*𝑄*(*𝑥, 𝑦*)*𝜇*′(*𝑥*) = *𝜇*(*𝑥*) *𝜕𝑄* − *𝜕𝑃* 1 ⇒ *𝜇*′(*𝑥*) = *𝜇*(*𝑥*) −(*𝑥* + 1) cos *𝑦* = *𝑥* + 1 *𝜇*(*𝑥*)*.*

*𝜕𝑥*

*𝜕 𝑦*

−*𝑥* cos *𝑦 𝑥*

Resolviendo la ecuacio´ n obtenida para *𝜇* como funcio´ n de *𝑥* (ecuacio´ n de variables separables) se

obtiene *𝜇*′ (*𝑥*)

*𝜇*(*𝑥*)

= *𝑥* + 1

*𝑥*

⇒ *𝜇*(*𝑥*) = *𝑥𝑒𝑥.*

Multiplicando con el factor integrante, obtenemos la ecuacio´ n diferencial

(*𝑥* + 2)*𝑥𝑒𝑥* sin *𝑦*d*𝑥* + *𝑥*2*𝑒𝑥* cos *𝑦*d *𝑦* = 0*,*

66 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

7.3 Ecuaciones con factores integrantes

que se verifica fa´ cilmente que es una ecuacio´ n exacta, ya que al calcular las derivadas cruzadas de las componentes del campo vectorial **F** = *𝑥* 2 *𝑥𝑒𝑥* sin *𝑦, 𝑥*2*𝑒𝑥* cos *𝑦* obtenemos el mismo valor *𝑥*2 2*𝑥 𝑒𝑥* cos *𝑦*. Por tanto, tenemos que hallar una funcio´ n potencial del campo vectorial **F**. Integrando la segunda componente respecto a *𝑦* (es ma´ s fa´ cil hacerlo en este orden en este caso) obtenemos

( + )

(( + ) )

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2*𝑒𝑥* sin *𝑦* + *𝑔*(*𝑥*)

y al derivar respecto a *𝑥* es fa´ cil ver que *𝑔*(*𝑥*) = 0, por tanto *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2*𝑒𝑥* sin *𝑦* y la solucio´ n general en forma impl´ıcita se escribe *𝑥*2*𝑒𝑥* sin *𝑦* = *𝐾* con *𝐾* ∈ ℝ constante de integracio´ n arbitraria. ◀

**Ejercicio 8.** ( *𝑦* log *𝑦* − 2*𝑥 𝑦*)d*𝑥* + (*𝑥* + *𝑦*)d *𝑦* = 0.

Solucio´ n. Se observa que se puede escribir en la forma cano´ nica *𝑃* (*𝑥, 𝑦*)d*𝑥* + *𝑄*(*𝑥, 𝑦*)d *𝑦* = 0, donde

*𝑃* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑦* log *𝑦* − 2*𝑥 𝑦*, *𝑄*(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥* + *𝑦*. Observamos que

*𝑃𝑦* = *𝜕𝑃* = log *𝑦* + 1 − 2*𝑥, 𝑄𝑥* = *𝜕𝑄* = 1*,*

por tanto la funcio´ n

*𝜕 𝑦*

*𝜕𝑥*

*𝑃𝑦* − *𝑄𝑥* = log *𝑦* − 2*𝑥* = 1

*𝑃 𝑦* log *𝑦* − 2*𝑥 𝑦 𝑦*

es una funcio´ n que solo depende de la variable *𝑦*. Se deduce que la ecuacio´ n tiene un factor inte- grante que solo depende de la variable *𝑦*. Ma´ s precisamente, buscando *𝜇* = *𝜇 𝑦* , por la ecuacio´ n del factor integrante obtenemos

( )

*𝑃* (*𝑥, 𝑦*)*𝜇*′( *𝑦*) = *𝜇*( *𝑦*) *𝜕𝑄* − *𝜕𝑃* 1 ⇒ *𝜇*′( *𝑦*) = −*𝜇*( *𝑦*) 1

*𝜕𝑥*

*𝜕 𝑦*

*𝑦*

que es una ecuacio´ n de variables separables que se integra dividiendo primero por *𝜇 𝑦* e integran- do para obtener logaritmos log *𝜇 𝑦* = log *𝑦* o bien *𝜇 𝑦* = 1 *𝑦*. Multiplicamos con 1 *𝑦* toda la ecuacio´ n y verificamos si la ecuacio´ n obtenida

( ) − ( ) / /

( )

+

(log *𝑦* − 2*𝑥*)d*𝑥* + *𝑦* 1 d *𝑦* = 0

*𝑥*

es exacta. Efectivamente lo es, ya que las derivadas cruzadas de sus dos componentes dan ambas

1 *𝑦*. Por tanto tenemos que buscar una funcio´ n potencial del campo conservativo **F** *𝑥, 𝑦* = log *𝑦* 2*𝑥, 𝑥* 1 . Integrando la primera componente solo respecto a *𝑥* obtenemos que la forma de la funcio´ n potencial deseada es

*𝑦*

+ )

/ ( ) ( −

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥* log *𝑦* − *𝑥*2 + *𝑔*( *𝑦*)*,*

y derivando respecto a *𝑦* e igualando a la segunda componente se obtiene

*𝑥* + *𝑔*′( *𝑦*) = *𝑥* + 1 ⇒ *𝑔*′( *𝑦*) = 1 ⇒ *𝑔*( *𝑦*) = *𝑦,*

*𝑦*

*𝑦*

es decir, la funcio´ n potencial es *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥* log *𝑦 𝑥*2 *𝑦* y la solucio´ n general de la ecuacio´ n (en forma impl´ıcita) es

( ) − +

*𝑥* log *𝑦* − *𝑥*2 + *𝑦* = *𝐶, 𝐶* ∈ ℝ*.*

◀

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 67

7 ECUACIONES DIFERENCIALES

##### Ecuaciones homoge´neas

**Ejercicio 9.** (*𝑥*2 *𝑦*′ − 3*𝑥 𝑦* − 2 *𝑦*2 = 0.

Solucio´ n. Se puede escribir en forma normal como *𝑦*′ = 2 *𝑦*2 +3*𝑥 𝑦* y se ve que es una ecuacio´ n ho- moge´ nea (cociente de polinomios homoge´ neos del mismo grado). Como se indica en la teor´ıa, se hace el cambio de variable *𝑧* = *𝑦*/*𝑥* o *𝑦* = *𝑥𝑧* y se obtiene una ecuacio´ n de variables separables

*𝑥*2

*𝑧* + *𝑥𝑧*′ = 2*𝑥*2 *𝑧*2 + 3*𝑥*2 *𝑧* = 2*𝑧*2 + 3*𝑧* ⇒ *𝑥𝑧*′ = 2*𝑧*2 + 2*𝑧* ⇒ d*𝑧* = 1 d*𝑥*

*𝑥*2

2(*𝑧*2 + *𝑧*) *𝑥*

e integrando en ambos lados respecto a su variable y aplicando la funcio´ n exponencial encontramos

*𝑧* = *𝐾𝑥*2*, 𝐾 ,*

∈ ℝ

*𝑧* + 1

por tanto despejando *𝑧*(*𝑥*) y recordando que *𝑦* = *𝑥𝑧* se obtiene

*𝐾𝑥*2 *𝐾𝑥*3

*𝑧*(*𝑥*) = 1 − *𝐾𝑥*2 *, 𝑦*(*𝑥*) = *𝑥𝑧*(*𝑥*) = 1 − *𝐾𝑥*2 *.*

Como una observacio´ n fuera del contexto de este ejercicio pero curiosa, esta ecuacio´ n tambie´ n presenta el feno´ meno de explosio´ n en tiempo finito de sus soluciones. ◀

**Ejercicio 10.** *𝑥* sin *𝑦* d *𝑦* = *𝑦* sin *𝑦* + *𝑥*.

*𝑥* d*𝑥*

*𝑥*

Solucio´ n. Se puede escribir tambie´ n de forma equivalente dividiendo por *𝑥* en ambos lados como

sin *𝑦* d *𝑦* = *𝑦* sin *𝑦* + 1*,*

#### *𝑥* d*𝑥 𝑥 𝑥*

y en esta forma se reconoce como una ecuacio´ n homoge´ nea, ya que al sustituir simulta´ neamente

*𝑦* por *𝑡 𝑦* y *𝑥* por *𝑡𝑥*, se simplifica la *𝑡* de forma trivial al expresarse toda la ecuacio´ n en te´ rminos del cociente *𝑦 𝑥*. Por tanto, ponemos de nuevo *𝑦 𝑥* = *𝑧* y obtenemos de nuevo una ecuacio´ n de variables separables

/ /

(*𝑧* + *𝑥𝑧*′) sin *𝑧* = *𝑧* sin *𝑧* + 1 ⇒ *𝑥𝑧*′ sin *𝑧* = 1 ⇒ sin *𝑧*d*𝑧* = 1 d*𝑥*

*𝑥*

donde por integracio´ n obtenemos cos *𝑧* = *𝐾* −log *𝑥* o bien *𝑧*(*𝑥*) = arc cos(*𝐾* −log *𝑥*) y como resultado final *𝑦*(*𝑥*) = *𝑥* arc cos(*𝐾* − log *𝑥*). ◀

##### Ecuaciones lineales de orden 1

**Ejercicio 11.** *𝑦*′ + *𝑦* = 2*𝑥𝑒*−*𝑥* + *𝑥*2.

Solucio´ n. Se puede tambie´ n escribir como *𝑦*′ = *𝑦* 2*𝑥𝑒*−*𝑥 𝑥*2 y es una ecuacio´ n lineal de primer or- den con *𝑎 𝑥* = 1, *𝑏 𝑥* = 2*𝑥𝑒*−*𝑥 𝑥*2. En el **primer paso**, resolvemos la ecuacio´ n lineal homoge´ nea poniendo *𝑏 𝑥* a cero por un instante, es decir *𝑦*′ = *𝑦*, con la solucio´ n muy conocida *𝑦 𝑥* = *𝐾𝑒*−*𝑥*,

( ) − ( )

( ) − ( ) +

− + +

*𝐾* ℝ. En el segundo paso, usamos el **me´todo de la variacio´n de las constantes** para buscar una

∈

solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa: buscamos esa solucio´ n de la forma

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝐾* (*𝑥*)*𝑒*−*𝑥, 𝐾* (*𝑥*) a determinar*,*

y se obtiene derivando y simplificando el te´ rmino con *𝐾* (*𝑥*) sin derivar (ver teor´ıa)

*𝐾*′(*𝑥*)*𝑒*−*𝑥* = *𝑏*(*𝑥*) = 2*𝑥𝑒*−*𝑥* + *𝑥*2 ⇒ *𝐾*′(*𝑥*) = 2*𝑥* + *𝑥*2*𝑒𝑥* ⇒ *𝐾* (*𝑥*) = *𝑥*2 + (*𝑥*2 − 2*𝑥* + 2)*𝑒𝑥,*

y multiplicando concluimos con *𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝑥*2*𝑒*−*𝑥*+*𝑥*2−2*𝑥*+2. Para obtener la solucio´ n general sumamos la solucio´ n general de la ecuacio´ n homoge´ nea del primer paso con *𝑦𝑝*(*𝑥*):

*𝑦*(*𝑥*) = *𝐾𝑒*−*𝑥* + *𝑥*2*𝑒*−*𝑥* + *𝑥*2 − 2*𝑥* + 2*, 𝐾* ∈ ℝ*.*

◀

68 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

**Ejercicio 12.** (1 + *𝑥*2)d *𝑦* + 2*𝑥 𝑦*d*𝑥* = cot *𝑥*d*𝑥*.

* 1. Ecuaciones de tipo Bernoulli

Solucio´ n. Se puede poner de forma alternativa (separando *𝑦*′ = d *𝑦*/d*𝑥*) como d *𝑦* = − 2*𝑥 𝑦* + cot *𝑥 , 𝑎*(*𝑥*) = − 2*𝑥 , 𝑏*(*𝑥*) = cot *𝑥 .*

d*𝑥* 1 + *𝑥*2 1 + *𝑥*2

1 + *𝑥*2

1 + *𝑥*2

Primero resolvemos la ecuacio´ n lineal homoge´ nea

∫ ∫

d*𝑥*

d *𝑦* = − 2*𝑥 𝑦* ⇒ 1 d *𝑦* = − 2*𝑥* d*𝑥* ⇒ 1 d *𝑦* = − 2*𝑥* d*𝑥*

1 + *𝑥*2 *𝑦*

1 + *𝑥*2 *𝑦*

1 + *𝑥*2

e integrando y aplicando la funcio´ n exponencial para eliminar los logaritmos obtenemos *𝑦*(*𝑥*) =

1 *𝐾* 2 . Pasamos ahora al segundo paso, el de la variacio´ n de la constante, y buscamos una solucio´ n particular de la forma

+*𝑥*

*𝑦* (*𝑥*) = *𝐾* (*𝑥*) *, 𝐾* (*𝑥*) a determinar*,*

*𝑝* 1 + 2*𝑥*

y se obtiene derivando y simplificando el te´ rmino con *𝐾* (*𝑥*) sin derivar (ver teor´ıa)

*𝐾*′(*𝑥*)

sin *𝑥*

1 + *𝑥*2

= *𝑏 𝑥* = cot *𝑥*

1 + *𝑥*2

( )

⇒ *𝐾*′(*𝑥*) = cot *𝑥* = cos *𝑥* ⇒ *𝐾* (*𝑥*) = log(sin *𝑥*)*.*

Por tanto la solucio´ n particular es

y la solucio´ n general es

*𝑦 𝑥* = log(sin *𝑥*)

1 + *𝑥*2

( )*𝑝*

*𝑦 𝑥* = *𝐾* + log(sin *𝑥*) *, 𝐾 .*

( ) ∈ ℝ

+

1 *𝑥*2

◀

##### Ecuaciones de tipo Bernoulli

**Ejercicio 13.** *𝑥 𝑦*′ + *𝑦* = *𝑥*4 *𝑦*3.

Solucio´ n. Se escribe en forma normal (despejando *𝑦*′) como

*𝑦*′ = − 1 *𝑦* + *𝑥*3 *𝑦*3*,* Bernoulli con *𝑎*(*𝑥*) = − 1 *, 𝑏*(*𝑥*) = *𝑥*3*, 𝑟* = 3*.*

*𝑥*

*𝑥*

Efectuamos el cambio de variable *𝑧* = *𝑦*1−*𝑟* = *𝑦*−2 = 1/ *𝑦*2. Entonces

*𝑧*′ = − 2 *𝑦*′ = − 2 − 1 *𝑦* + *𝑥*3 *𝑦*3 = 2 *𝑧* − 2*𝑥*3*,*

*𝑦*3

*𝑦*3

*𝑥*

*𝑥*

y hemos obtenido una ecuacio´ n lineal de primer orden para *𝑧*. Por tanto la resolvemos como hemos visto en el apartado precedente. La ecuacio´ n lineal homoge´ nea

*𝑧*′ = 2 *𝑧* ⇒ *𝑧*(*𝑥*) = *𝐾𝑥*2*, 𝐾* ∈ ℝ*.*

*𝑥*

Con la variacio´ n de la constante, buscamos una solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa de la forma *𝑧𝑝*(*𝑥*) = *𝐾* (*𝑥*)*𝑥*2, y derivando obtenemos

*𝐾*′(*𝑥*)*𝑥*2 = −2*𝑥*3 ⇒ *𝐾*′(*𝑥*) = −2*𝑥, 𝐾* (*𝑥*) = −*𝑥*2*,* ⇒ *𝑧𝑝*(*𝑥*) = −*𝑥*4*.*

Por tanto, la solucio´ n general de la ecuacio´ n lineal de primer orden obtenida es *𝑧 𝑥* = *𝐾𝑥*2 *𝑥*4 y recordando el cambio de variable efectuado al principio, obtenemos

√︂

( ) −

1 = *𝐾𝑥*2 − *𝑥*4 ⇒ *𝑦*(*𝑥*) = ± 1 *, 𝐾* ∈ ℝ*.*

*𝑦*2

*𝐾𝑥*2 − *𝑥*4

◀

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 69

7 ECUACIONES DIFERENCIALES

**Ejercicio 14.** *𝑥*d *𝑦* + *𝑦*d*𝑥* = *𝑥 𝑦*2d*𝑥*.

Solucio´ n. De forma equivalente se puede escribir

d *𝑦* = − 1 *𝑦* + *𝑦*2*,* Bernoulli con *𝑎*(*𝑥*) = − 1 *, 𝑏*(*𝑥*) = 1*, 𝑟* = 2*.*

#### d*𝑥 𝑥 𝑥*

Efectuamos el cambio de variable *𝑧* = *𝑦*1−*𝑟* = *𝑦*−1 = 1/ *𝑦*. Entonces

*𝑧*′ = − 1 *𝑦*′ = − 1 − 1 *𝑦* + *𝑦*2 = 1 *𝑧* − 1*,*

*𝑦*2

*𝑦*2

*𝑥*

*𝑥*

y hemos obtenido una ecuacio´ n lineal de primer orden para *𝑧*. Por tanto la resolvemos como hemos visto en el apartado precedente. La ecuacio´ n lineal homoge´ nea

*𝑧*′ = 1 *𝑧* ⇒ *𝑧*(*𝑥*) = *𝐾𝑥, 𝐾* ∈ ℝ*.*

*𝑥*

Con la variacio´ n de la constante, buscamos una solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa de la forma *𝑧𝑝*(*𝑥*) = *𝐾* (*𝑥*)*𝑥*, y derivando obtenemos

*𝐾*′(*𝑥*)*𝑥* = −1 ⇒ *𝐾*′(*𝑥*) = − 1 *, 𝐾* (*𝑥*) = − log *𝑥,* ⇒ *𝑧𝑝*(*𝑥*) = −*𝑥* log *𝑥.*

*𝑥*

Obtenemos en final *𝑧*(*𝑥*) = *𝐾𝑥* + *𝑧𝑝*(*𝑥*) = *𝐾𝑥* − *𝑥* log *𝑥* y volviendo a la funcio´ n *𝑦*(*𝑥*)

*𝑦 𝑥* = 1 *, 𝐾 .*

( ) ∈ ℝ

*𝐾𝑥* − *𝑥* log *𝑥*

◀

##### Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes constantes

**Ejercicio 15.** *𝑦*′′ + 10 *𝑦*′ + 25 *𝑦* = 14*𝑒*−5*𝑥*.

Solucio´ n. Siguiendo los pasos de la teor´ıa, primero resolvemos la ecuacio´ n lineal homoge´ nea *𝑦*′′ + 10 *𝑦*′ +25 *𝑦* = 0. El polinomio caracter´ıstico asociado a esta ecuacio´ n es *𝑃* (*𝜆*) = *𝜆*2 +10*𝜆*+25 = (*𝜆*+5)2, teniendo *𝜆* = −5 como ra´ız doble. Usando la conocida receta.obtenemos que una base de la ecuacio´ n lineal homoge´ nea es {*𝑒*−5*𝑥, 𝑥𝑒*−5*𝑥* } y su solucio´ n general es

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒*−5*𝑥* + *𝑐*2*𝑥𝑒*−5*𝑥, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

Pasamos ahora a buscar una solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa. Teniendo en cuenta la simplicidad y forma particular del te´ rmino libre *𝑏 𝑥* = 14*𝑒*−5*𝑥* podemos emplear el me´ todo de los coeficientes indeterminados que nos lleva a una carga de ca´ lculo menor. Pero estamos en **el caso excepcional donde el te´rmino libre** *𝑒*−5*𝑥* **es solucio´n de la ecuacio´n homoge´nea**. Por tanto no se puede buscar la solucio´ n particular de la forma *𝐴𝑒*−5*𝑥* y como hemos visto en un ejemplo en clase, se debe multiplicar por *𝑥* tantas veces hasta encontrar por primera vez una forma que no pertenezca a la base de soluciones de la ecuacio´ n lineal homoge´ nea. Como *𝑥𝑒*−5*𝑥* tambie´ n es solucio´ n de la ecuacio´ n homoge´ nea, seguimos multiplicando por *𝑥* una vez ma´ s y encontramos la forma deseada

( )

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝐴𝑥*2*𝑒*−5*𝑥, 𝐴* coeficiente a determinar*.*

Derivando y agrupando te´ rminos es fa´ cil calcular

*𝑦𝑝*′ (*𝑥*) = (2*𝐴𝑥* − 5*𝐴𝑥*2)*𝑒*−5*𝑥, 𝑦𝑝*′′ (*𝑥*) = (2*𝐴* − 20*𝐴𝑥* + 25*𝐴𝑥*2)*𝑒*−5*𝑥,*

70 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

* 1. Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes constantes

por tanto

*𝑦𝑝*′′ (*𝑥*) + 10 *𝑦𝑝*′ (*𝑥*) + 25 *𝑦𝑝*(*𝑥*) = (2*𝐴* − 20*𝐴𝑥* + 25*𝐴𝑥*2 + 20*𝐴𝑥* − 50*𝐴𝑥*2 + 25*𝐴𝑥*2)*𝑒*−5*𝑥* = 2*𝐴𝑒*−5*𝑥.*

Identificando obtenemos 2*𝐴𝑒*−5*𝑥* = 14*𝑒*−5*𝑥*, es decir *𝐴* = 7. Por tanto *𝑦𝑝 𝑥* = 7*𝑥*2*𝑒*−5*𝑥* y la solucio´ n general de la ecuacio´ n es

( )

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒*−5*𝑥* + *𝑐*2*𝑥𝑒*−5*𝑥* + 7*𝑥*2*𝑒*−5*𝑥, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

◀

**Ejercicio 16.** *𝑦*′′ − 3 *𝑦*′ + 2 *𝑦* = 14 sin(2*𝑥*) − 18 cos(2*𝑥*).

Solucio´ n. Primero resolvemos la ecuacio´ n lineal homoge´ nea *𝑦*′′ 3 *𝑦*′ 2 *𝑦* = 0. El polinomio carac- ter´ıstico asociado a esta ecuacio´ n es *𝑃 𝜆* = *𝜆*2 3*𝜆* 2, teniendo *𝜆*1 = 1, *𝜆*2 = 2 como ra´ıces reales. Usando la conocida receta.obtenemos que una base de la ecuacio´ n lineal homoge´ nea es *𝑒𝑥, 𝑒*2*𝑥* y su solucio´ n general es

{ }

( ) − +

− +

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒𝑥* + *𝑐*2*𝑒*2*𝑥, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

Pasamos ahora a buscar una solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa. Teniendo en cuenta la simplicidad y forma particular del te´ rmino libre *𝑏 𝑥* = 14 sin 2*𝑥* 18 cos 2*𝑥* podemos emplear el me´ todo de los coeficientes indeterminados que nos lleva a una carga de ca´ lculo menor. Tenemos que buscar una solucio´ n particular de la forma

( ) ( ) − ( )

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝐴* sin(2*𝑥*) + *𝐵* cos(2*𝑥*)*, 𝐴, 𝐵* coeficientes a determinar*.*

Es fa´ cil calcular

*𝑦𝑝*′ (*𝑥*) = 2*𝐴* cos(2*𝑥*) − 2*𝐵* sin(2*𝑥*)*, 𝑦𝑝*′′ (*𝑥*) = −4*𝐴* sin(2*𝑥*) − 4*𝐵* cos(2*𝑥*)*,*

por tanto agrupando te´ rminos similares

*𝑦𝑝*′′ (*𝑥*) − 3 *𝑦𝑝*′ (*𝑥*) + 2 *𝑦𝑝*(*𝑥*) = (−2*𝐴* + 6*𝐵*) sin(2*𝑥*) + (−2*𝐵* − 6*𝐴*) cos(2*𝑥*)*.*

Identificando la u´ ltima expresio´ n con el te´ rmino libre obtenemos el sistema de ecuaciones 6*𝐵*−2*𝐴* =

14, 6*𝐴* + 2*𝐵* = 18 con soluciones *𝐴* = 2, *𝐵* = 3. Se obtiene *𝑦𝑝*(*𝑥*) = 2 sin(2*𝑥*) + 3 cos(2*𝑥*) y la solucio´ n

general

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒𝑥* + *𝑐*2*𝑒*2*𝑥* + 2 sin(2*𝑥*) + 3 cos(2*𝑥*)*, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

◀

**Ejercicio 17.** *𝑦*′′ − 2 *𝑦*′ + 2 *𝑦* = *𝑒𝑥* sin *𝑥*.

Solucio´ n. Primero resolvemos la ecuacio´ n lineal homoge´ nea *𝑦*′′ − 2 *𝑦*′ + 2 *𝑦* = 0. El polinomio carac- ter´ıstico asociado a esta ecuacio´ n es *𝑃* (*𝜆*) = *𝜆*2 − 2*𝜆* + 2 = (*𝜆* − 1)2 + 1, teniendo ra´ıces complejas conjugadas *𝜆*1 = 1 + *𝑖*, *𝜆*2 = 1 − *𝑖*. Usando la conocida receta.obtenemos que una base de la ecuacio´ n lineal homoge´ nea es {*𝑒𝑥* cos *𝑥, 𝑒𝑥* sin *𝑥*} y su solucio´ n general es

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒𝑥* cos *𝑥* + *𝑐*2*𝑒𝑥* sin *𝑥, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

Pasamos ahora a buscar una solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa. Teniendo en cuenta la simplicidad y forma particular del te´ rmino libre *𝑏 𝑥* = *𝑒𝑥* sin *𝑥* podemos emplear el me´ todo de los coeficientes indeterminados que nos lleva a una carga de ca´ lculo menor. Pero estamos en **el caso excepcional donde el te´rmino libre** *𝑒𝑥* sin *𝑥* **es solucio´n de la ecuacio´n homoge´nea**. Por tanto no se puede buscar la solucio´ n particular de la forma *𝐴𝑒𝑥* cos *𝑥 𝐵𝑒𝑥* sin *𝑥* como ser´ıa normal y como hemos visto ya en el ejemplo (a) (y en otro ejemplo en los apuntes de clase), se debe multiplicar por

+

( )

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 71

7 ECUACIONES DIFERENCIALES

*𝑥* tantas veces hasta encontrar por primera vez una forma que no sea solucio´ n de la ecuacio´ n lineal homoge´ nea. Por ello, vamos a buscar la solucio´ n particular en la forma

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝑥*( *𝐴𝑒𝑥* cos *𝑥* + *𝐵𝑒𝑥* sin *𝑥*) = *𝑥𝑒𝑥* ( *𝐴* cos *𝑥* + *𝐵* sin *𝑥*)*, 𝐴, 𝐵* coeficientes a determinar*.*

Calculamos

y despue´ s

*𝑦𝑝*′ (*𝑥*) = (*𝑥* + 1)*𝑒𝑥* ( *𝐴* cos *𝑥* + *𝐵* sin *𝑥*) + *𝑥𝑒𝑥* (−*𝐴* sin *𝑥* + *𝐵* cos *𝑥*)*,*

*𝑦𝑝*′′ (*𝑥*) = (*𝑥* + 2)*𝑒𝑥* ( *𝐴* cos *𝑥* + *𝐵* sin *𝑥*) + (2*𝑥* + 2)*𝑒𝑥* (−*𝐴* sin *𝑥* + *𝐵* cos *𝑥*) − *𝑥𝑒𝑥* ( *𝐴* cos *𝑥* + *𝐵* sin *𝑥*)

= 2*𝑒𝑥* ( *𝐴* cos *𝑥* + *𝐵* sin *𝑥*) + 2(*𝑥* + 1)*𝑒𝑥* (−*𝐴* sin *𝑥* + *𝐵* cos *𝑥*)*.*

Por tanto, sustituyendo en la ecuacio´ n y simplificando te´ rminos similares obtenemos

*𝑦𝑝*′′ − 2 *𝑦𝑝*′ + 2 *𝑦𝑝* = [2*𝑒𝑥* − 2(*𝑥* + 1)*𝑒𝑥* + 2*𝑥𝑒𝑥*] ( *𝐴* cos *𝑥* + *𝐵* sin *𝑥*) + [2(*𝑥* + 1)*𝑒𝑥* − 2*𝑥𝑒𝑥*] (−*𝐴* sin *𝑥* + *𝐵* cos *𝑥*)

= 2*𝑒𝑥* (−*𝐴* sin *𝑥* + *𝐵* cos *𝑥*)*,*

observando que el factor de dentro del primer corchete es cero. Tenemos pues que identificar el u´ ltimo resultado obtenido con el te´ rmino libre de la ecuacio´ n *𝑏*(*𝑥*) = *𝑒𝑥* sin *𝑥*. Identificando los co- eficientes obtenemos −2*𝐴* = 1 y 2*𝐵* = 0, es decir *𝐴* = −1/2 y *𝐵* = 0 y por tanto una solucio´ n particular

de la ecuacio´ n es

y la solucio´ n general

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = − 1 *𝑥𝑒𝑥* cos *𝑥*

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒𝑥* cos *𝑥* + *𝑐*2*𝑒𝑥* sin *𝑥* − 1 *𝑥𝑒𝑥* cos *𝑥, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

2

2

◀

**Ejercicio 18.** *𝑦*′′ − 2 *𝑦*′ + 5 *𝑦* = 25*𝑥*2 + 12.

Solucio´ n. Primero resolvemos la ecuacio´ n lineal homoge´ nea *𝑦*′′ − 2 *𝑦*′ + 5 *𝑦* = 0. El polinomio ca- racter´ıstico asociado a esta ecuacio´ n es *𝑃* (*𝜆*) = *𝜆*2 − 2*𝜆* + 5, teniendo ra´ıces complejas conjugadas

*𝜆*1 = 1 + 2*𝑖*, *𝜆*2 = 1 − 2*𝑖*. Usando la conocida receta.obtenemos que una base de la ecuacio´ n lineal homoge´ nea es {*𝑒𝑥* cos(2*𝑥*)*, 𝑒𝑥* sin(2*𝑥*)} y su solucio´ n general es

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒𝑥* cos(2*𝑥*) + *𝑐*2*𝑒𝑥* sin(2*𝑥*)*, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

Pasamos ahora a buscar una solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa. Teniendo en cuenta la simplicidad y forma particular del te´ rmino libre *𝑏 𝑥* = 25*𝑥*2 12 (polinomio de segundo grado) podemos emplear el me´ todo de los coeficientes indeterminados buscando la solucio´ n particular tambie´ n como un polinomio de segundo grado

( ) +

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝐴𝑥*2 + *𝐵𝑥* + *𝐶, 𝐴, 𝐵, 𝐶* coeficientes a determinar*.*

Tenemos

*𝑦𝑝*′ (*𝑥*) = 2*𝐴𝑥* + *𝐵, 𝑦𝑝*′′ (*𝑥*) = 2*𝐴*

y sustituyendo en la ecuacio´ n obtenemos

*𝑦𝑝*′′ − 2 *𝑦𝑝*′ + 5 *𝑦𝑝* = 2*𝐴* − 4*𝐴𝑥* − 2*𝐵* + 5*𝐴𝑥*2 + 5*𝐵𝑥* + 5*𝐶* = 5*𝐴𝑥*2 + (5*𝐵* − 4*𝐴*)*𝑥* + 5*𝐶* − 2*𝐵* + 2*𝐴* = 25*𝑥*2 + 12*.*

Identificando coeficiente con coeficiente obtenemos 5*𝐴* = 25, es decir *𝐴* = 5, luego 5*𝐵* − 4*𝐴* = 0 y como *𝐴* = 5 obtenemos *𝐵* = 4. Y por fin 5*𝐶* − 2*𝐵* + 2*𝐴* = 12 y conociendo *𝐴* = 5 y *𝐵* = 4 obtenemos

*𝐶* = 2. Por tanto una solucio´ n particular es *𝑦𝑝*(*𝑥*) = 5*𝑥*2 + 4*𝑥* + 2 y la solucio´ n general es

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒𝑥* cos(2*𝑥*) + *𝑐*2*𝑒𝑥* sin(2*𝑥*) + 5*𝑥*2 + 4*𝑥* + 2*, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

◀

72 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

* 1. Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes constantes

**Ejercicio 19.** *𝑦*′′ + 2 *𝑦*′ + *𝑦* = *𝑒*−*𝑥* log *𝑥*.

Solucio´ n. Primero resolvemos la ecuacio´ n lineal homoge´ nea *𝑦*′′ 2 *𝑦*′ *𝑦* = 0. El polinomio carac- ter´ıstico asociado a esta ecuacio´ n es *𝑃 𝜆* = *𝜆*2 2*𝜆* 1 = *𝜆* 1 2, teniendo *𝜆* = 1 como ra´ız real doble. Usando la conocida receta.obtenemos que una base de la ecuacio´ n lineal homoge´ nea es

( ) + + ( + ) −

+ +

{*𝑒*−*𝑥, 𝑥𝑒*−*𝑥* } y su solucio´ n general es

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒*−*𝑥* + *𝑐*2*𝑥𝑒*−*𝑥, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

Pasamos ahora a buscar una solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa. Esta vez la forma del te´ rmino libre no permite usar algu´ n procedimiento de coeficientes indeterminados y tenemos que trabajar con el me´ todo general de la variacio´ n de las constantes. Por tanto, buscamos la solucio´ n particular de la forma

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝑐*1 (*𝑥*)*𝑒*−*𝑥* + *𝑐*2 (*𝑥*)*𝑥𝑒*−*𝑥, 𝑐*1 (*𝑥*)*, 𝑐*2 (*𝑥*) funciones a determinar*,*

y por la teor´ıa obtenemos que las derivadas de las dos funciones *𝑐*1 (*𝑥*), *𝑐*2 (*𝑥*) resuelven el sistema

*𝑐*1′ (*𝑥*)*𝑒*−*𝑥* + *𝑐*2′ (*𝑥*)*𝑥𝑒*−*𝑥* = 0*,*

−*𝑐*1′ (*𝑥*)*𝑒*−*𝑥* + *𝑐*2′ (*𝑥*) (1 − *𝑥*)*𝑒*−*𝑥* = *𝑒*−*𝑥* log *𝑥,*

que se puede simplificar dividiendo con *𝑒*−*𝑥* para obtener

*𝑐*1′ (*𝑥*) + *𝑐*2′ (*𝑥*)*𝑥* = 0*,*

−*𝑐*1′ (*𝑥*) + *𝑐*2′ (*𝑥*) (1 − *𝑥*) = log *𝑥,*

Este sistema se resuelve fa´ cilmente, por ejemplo sumando las ecuaciones para obtener directamen-

te *𝑐*2′ (*𝑥*): ′ ′ ′

y despue´ s

*𝑐*2 (*𝑥*)*𝑥* + *𝑐*2 (*𝑥*) (1 − *𝑥*) = log *𝑥* ⇒ *𝑐*2 (*𝑥*) = log *𝑥* ⇒ *𝑐*2 (*𝑥*) = *𝑥* log *𝑥* − *𝑥,*

*𝑐*1′ (*𝑥*) = −*𝑥𝑐*2′ (*𝑥*) = −*𝑥* log *𝑥* ⇒ *𝑐*1 (*𝑥*) = − 1 *𝑥*2 log *𝑥* + 1 *𝑥*2*.*

2 4

Finalmente, obtenemos la solucio´ n particular

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = − 1 *𝑥*2 log *𝑥* + 1 *𝑥*2 *𝑒*−*𝑥* + (*𝑥* log *𝑥* − *𝑥*)*𝑥𝑒*−*𝑥*

2

4

y la solucio´ n general se obtiene sumando *𝑐*1*𝑒*−*𝑥* + *𝑐*2*𝑥𝑒*−*𝑥* a la solucio´ n particular *𝑦𝑝*(*𝑥*) obtenida. ◀

**Ejercicio 20.** *𝑦*′′ − 3 *𝑦*′ + 2 *𝑦* = 1 1−*𝑥* .

+*𝑒*

Solucio´ n. Ya hemos visto en un apartado anterior que la solucio´ n general de la ecuacio´ n lineal ho- moge´ nea *𝑦*′′ − 3 *𝑦*′ + 2 *𝑦* = 0 era

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒𝑥* + *𝑐*2*𝑒*2*𝑥, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

Pasamos ahora a buscar una solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa. Esta vez la forma del te´ rmino libre no permite usar algu´ n procedimiento de coeficientes indeterminados y tenemos que trabajar con el me´ todo general de la variacio´ n de las constantes. Por tanto, buscamos la solucio´ n particular de la forma

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝑐*1 (*𝑥*)*𝑒𝑥* + *𝑐*2 (*𝑥*)*𝑒*2*𝑥, 𝑐*1 (*𝑥*)*, 𝑐*2 (*𝑥*) funciones a determinar*,*

y por la teor´ıa obtenemos que las derivadas de las dos funciones *𝑐*1 (*𝑥*), *𝑐*2 (*𝑥*) resuelven el sistema

*𝑐*1′ (*𝑥*)*𝑒𝑥* + *𝑐*2′ (*𝑥*)*𝑒*2*𝑥* = 0*,*

*𝑐*1′ (*𝑥*)*𝑒𝑥* + 2*𝑐*2′ (*𝑥*)*𝑒*2*𝑥* = 1 1−*𝑥 ,*

+*𝑒*

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 73

7 ECUACIONES DIFERENCIALES

Restando las dos ecuaciones del sistema obtenemos

′ 2*𝑥*  1 ′

*𝑒*−2*𝑥*  1

−*𝑥*

−*𝑥*

*𝑐*2 (*𝑥*)*𝑒*

= 1 + *𝑒*−*𝑥* ⇒ *𝑐*2 (*𝑥*) = 1 + *𝑒*−*𝑥* = *𝑒𝑥* (1 + *𝑒𝑥* ) ⇒ *𝑐*2 (*𝑥*) = log(1 + *𝑒*

) − *𝑒*

y por la primera ecuacio´ n del sistema, simplificando con *𝑒𝑥*, se tiene

′ ′ *𝑥*

*𝑒*−*𝑥* 1 *𝑥*

*𝑐*1 (*𝑥*) = −*𝑐*2 (*𝑥*)*𝑒*

Finalmente tenemos

= 1 + *𝑒*−*𝑥* = 1 + *𝑒𝑥* ⇒ *𝑐*1 (*𝑥*) = *𝑥* − log(1 + *𝑒* )*.*

y la solucio´ n general

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝑥𝑒𝑥* − *𝑒𝑥* log(1 + *𝑒𝑥*) + *𝑒*2*𝑥* log(1 + *𝑒*−*𝑥*) − *𝑒𝑥*

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑒𝑥* + *𝑐*2*𝑒*2*𝑥* + *𝑥𝑒𝑥* − *𝑒𝑥* log(1 + *𝑒𝑥*) + *𝑒*2*𝑥* log(1 + *𝑒*−*𝑥*) − *𝑒𝑥, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

◀

##### Ecuaciones de tipo Euler

**Ejercicio 21.** *𝑥*2 *𝑦*′′ + 2*𝑥 𝑦*′ − 2 *𝑦* = 0.

Solucio´ n. Es una ecuacio´ n de tipo Euler con coeficientes (en las notaciones de la teor´ıa) *𝑎*1 = 2,

*𝑎*0 = −2. Con el cambio de variable *𝑥* = *𝑒𝑡* obtenemos (siguiendo los ca´ lculos generales efectuados en la teor´ıa) la ecuacio´ n lineal homoge´ nea para la funcio´ n *𝑦*(*𝑡*)

*𝑦*′′ + *𝑦*′ − 2 *𝑦* = 0*,*

cuyo polinomio caracter´ıstico es *𝑃* (*𝜆*) = *𝜆*2 + *𝜆* − 2 con ra´ıces *𝜆*1 = 1, *𝜆*2 = −2. Es decir, una base de las soluciones de esta ecuacio´ n es {*𝑒𝑡, 𝑒*−2*𝑡* } y la solucio´ n general es

*𝑦*(*𝑡*) = *𝑐*1*𝑒𝑡* + *𝑐*2*𝑒*−2*𝑡, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

Volviendo a la variable *𝑥* = *𝑒𝑡* obtenemos la solucio´ n general de la ecuacio´ n de Euler dada

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑥* + *𝑐*2 1 *, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

*𝑥*2

◀

**Ejercicio 22.** *𝑥*2 *𝑦*′′ − 3*𝑥 𝑦*′ + 3 *𝑦* = 2 log *𝑥*, con condiciones iniciales *𝑦*(1) = 1, *𝑦*′(1) = 0.

Solucio´ n. Es una ecuacio´ n de tipo Euler con coeficientes (en las notaciones de la teor´ıa) *𝑎*1 = −3,

*𝑎*0 = 3. Con el cambio de variable *𝑥* = *𝑒𝑡* obtenemos (siguiendo los ca´ lculos generales efectuados en la teor´ıa) la ecuacio´ n lineal con coeficientes constantes para la funcio´ n *𝑦*(*𝑡*)

*𝑦*′′ − 4 *𝑦*′ + 3 *𝑦* = 2*𝑡,*

que podemos resolver por el procedimiento visto en el apartado G. La ecuacio´ n lineal homoge´ nea

*𝑦*′′ 4 *𝑦*′ 3 *𝑦* = 0 tiene polinomio caracter´ıstico *𝜆*2 4*𝜆* 3 = 0 con ra´ıces *𝜆*1 = 1, *𝜆*2 = 3, por tanto la solucio´ n general de la ecuacio´ n lineal homoge´ nea es

− + − +

*𝑦*(*𝑡*) = *𝑐*1*𝑒𝑡* + *𝑐*2*𝑒*3*𝑡, 𝑐*1*, 𝑐*2 ∈ ℝ*.*

Pasando ahora a buscar una solucio´ n particular de la ecuacio´ n completa, observamos que el te´ rmino libre *𝑏*(*𝑡*) = 2*𝑡* permite usar el me´ todo de los coeficientes indeterminados (al ser un polinomio de

74 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

* 1. Ecuaciones de tipo Euler

primer grado), por tanto podemos buscar la solucio´ n particular en la misma forma de polinomio de primer grado

*𝑦𝑝*(*𝑡*) = *𝐴* + *𝐵𝑡, 𝐴, 𝐵* coeficientes a determinar*.*

Como *𝑦𝑝*′′ = 0, *𝑦𝑝*′ = *𝐵* obtenemos −4*𝐵* + 3*𝐴* + 3*𝐵𝑡* = 2*𝑡*, es decir *𝐵* = 2/3 y *𝐴* = 8/9. Obtenemos la

solucio´ n general de la ecuacio´ n completa para *𝑦*(*𝑡*)

*𝑦*(*𝑡*) = *𝑐*1*𝑒𝑡* + *𝑐*2*𝑒*3*𝑡* + 2 *𝑡* + 8

3 9

y volviendo a la variable *𝑥* = *𝑒𝑡* tenemos

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑐*1*𝑥* + *𝑐*2*𝑥*3 + 2 log *𝑥* + 8 *.*

3 9

Finalmente podemos pasar a las condiciones iniciales para hallar los coeficientes *𝑐*1 y *𝑐*2. Tenemos

*𝑦*(1) = 1, es decir *𝑐*1 + *𝑐*2 + 8/9 = 1 o bien *𝑐*1 + *𝑐*2 = 1/9. Despue´ s tambie´ n usamos la condicio´ n inicial para la derivada *𝑦*′(1) = 0, y observando que

*𝑦*′(*𝑥*) = *𝑐*1 + 3*𝑐*2*𝑥*2 + 2

3*𝑥*

se obtiene *𝑐*1 + 3*𝑐*2 + 2/3 = 0 o bien *𝑐*1 + 3*𝑐*2 = −2/3. Restando las dos ecuaciones para *𝑐*1 y *𝑐*2

obtenemos 2*𝑐*2 = −7/9, es decir *𝑐*2 = −7/18 y *𝑐*1 = 1/9 + 7/18 = 1/2. La solucio´ n final es

*𝑦*(*𝑥*) = 1 *𝑥* − 7 *𝑥*3 + 2 log *𝑥* + 8 *.*

2 18 3 9

◀

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 75

8 CA´ LCULO NUME´ RICO

# Ca´lculo nume´rico

##### Interpolacio´n nume´rica

**Ejercicio 1** (Interpolacio´ n de Vandermonde y Lagrange)**.** Se quiere interpolar a una funcio´ n “desco- nocida” *𝑓* : *𝐼* ⊂ ℝ → ℝ de la que se sabe pasa por los puntos de control {(−1*,* −1)*,* (1*,* 1)*,* (4*,* 64)}.

* + 1. Determina el polinomio de orden 2 (o menor) que interpola a dicha funcio´ n considerando la base mono´ mica de polinomios, esto es, determina los coeficientes del polinomio *𝑝*2 (*𝑥*) =

*𝑎*0 + *𝑎*1*𝑥* + *𝑎*2*𝑥*2 tales que *𝑝*2 (−1) = −1, *𝑝*2 (1) = 1 y *𝑝*2 (4) = 64.

* + 1. Calcula y representa gra´ ficamente la base de polinomios de Lagrange con soporte {−1*,* 1*,* 4}. Determina ahora *𝑝*2 utilizando dicha base.
    2. Se sabe ahora que la funcio´ n original es realmente el monomio *𝑓 𝑥* = *𝑥*3. ¿Que´ error real se produce al interpolar la funcio´ n en *𝑥* = 3? ¿Cua´ l es el error ma´ ximo producido?

( )

* + 1. Se an˜ade a los datos anteriores el punto (2*,* 8). Repite los apartados [a)](#_bookmark0) y [b)](#_bookmark1) para determinar

*𝑝*3. De igual forma, rep´ıtelos para obtener *𝑝*4 an˜adiendo 3*,* 27 . ¿Que´ conclusiones sacas de los resultados obtenidos?

( )

**Ejercicio 2** (Interpolacio´ n de Lagrange y Newton)**.** Dada la siguiente tabla de datos

*𝑥*

*𝑦*

se pide:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 | 3 |
| – 1/4 | 1 − √2/8 | 0 | √2/4 − 1 | 1 | 4 |

1. Usando los nodos 0*,* 3 2*,* 3, determina *𝑝*2 en su forma de Lagrange y en su forma de Newton. Represe´ ntalo gra´ ficamente.

/

1. Utilizando todos los nodos excepto *𝑥* = 1, determina *𝑝*4. Considera los nodos ordenados y haz todos los ca´ lculos necesarios.
2. An˜ade ahora *𝑥* = 1 a la lista de nodos y determina *𝑝*5 con el m´ınimo de ca´ lculos necesarios.
3. Sabiendo que la funcio´ n interpolada es *𝑓* (*𝑥*) = sin *𝜋𝑥* + (*𝑥* − 1)2*𝑥*−2, obte´ n una expresio´ n para la cota de error para *𝑝*2.

**Ejercicio 3** (Feno´ meno de Runge)**.** Dada la funcio´ n *𝑓* (*𝑥*) = 1 , sea {*𝑥*0*, 𝑥*1*, . . . , 𝑥* } una particio´ n

*𝑛*

+ .

del intervalo

[−1*,* 1], es decir,

*𝑥*0

= −1, *𝑥𝑛*

= 1 y

1 25*𝑥*2

*𝑥𝑘*−1 *< 𝑥𝑘* con *𝑘* = 1*, . . . , 𝑛*

1. Calcula y representa *𝑝*4 y *𝑝*8 con particiones uniformes, *𝑥𝑘* = −1 + 2 *𝑘* , *𝑘* = 0*, . . . , 𝑛*. ¿Que´

*𝑛*

deduces de las gra´ ficas? ¿Concuerda con los resultados teo´ ricos?

1. Repite el ejercicio con nodos de Chebychev: *𝑥𝑘* = cos *𝜋*(*𝑘*+ /2) ), *𝑘* = 0*, . . . , 𝑛*. ¿Que´ deduccio´ n

1

*𝑛*+1

sacas ahora?

##### Derivacio´n nume´rica

**Ejercicio 4** (Interpolacio´ n de Newton y derivacio´ n)**.** Considera la funcio´ n *𝑓* (*𝑥*) = *.*6*𝑒𝑥* + cot(*.*9*𝑥* + *.*2).

* + 1. Determina los polinomios interpoladores *𝑝*2 y *𝑝*4 de *𝑓* en el intervalo 0*,* 3 con sendas parti- ciones uniformes.

[ ]

76 2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo

8.3 Integracio´ n nume´ rica

* + 1. Calcula las derivadas de primer y segundo orden de *𝑓* , *𝑝*2 y *𝑝*4.
    2. Calcula el error que se produce en los nodos al aproximar las derivadas de *𝑓* con los polinomios interpoladores.
    3. ¿Que´ conclusiones sacas?

**Ejercicio 5** (Primeras derivadas: aproximacio´ n y orden de)**.** Para la funcio´ n anterior, se quiere apro- ximar el valor de la derivada de *𝑓* en 0*.*5, esto es, *𝑓* ′(0*.*5).

1. En el papel, utiliza diferencias progresivas y centrales para determinar *𝑓* ′ 0*.*5 con paso *ℎ* = 0*.*5*,* 0*.*25*,* 0*.*125. Calcula en cada caso el error y verifica que en uno el error se divide por dos y en el otro, por cuatro.

( )

1. Comprueba si uno de los valores que acabas de calcular coincide con alguno de los calculados en el ejercicio anterior. En caso afirmativa, determina la razo´ n.
2. En Octave, repite el literal anterior, hasta *ℎ* = 2−6, de forma “manual” y utilizando una funcio´ n (prueba a implementarla tu´ mismo).
3. Utiliza otra fo´ rmula de orden 2 y comprueba nume´ ricamente su orden. Entre las fo´ rmulas utilizadas, ¿cua´ l es de uso preferible y por que´ ?

**Ejercicio 6** (Segundas derivadas: aproximacio´ n y orden de)**.** Para la funcio´ n inicial, se quiere apro- ximar el valor de la segunda derivada de *𝑓* en 0*.*5, esto es, *𝑓* ′′(0*.*5).

1. Repite los dos primeros literales del ejercicio anterior con las fo´ rmulas correspondientes.
2. ¿A que´ polinomio interpolador esta´ n asociadas estas fo´ rmulas y co´ mo? ¿No entra en conflicto con lo visto en el ejercicio 1?
3. Utiliza una expresio´ n general de *𝑝*3 para obtener una fo´ rmula progresiva para la segunda derivada y determina nume´ ricamente su orden.

##### Integracio´n nume´rica

**Ejercicio 7** (Integracio´ n simple)**.** Dadas las siguientes integrales definidas,

∫ ∫ ∫

2 4*𝑥*3d*𝑥* 1 *𝑒𝑥*d*𝑥* 2 4 d*𝑥*

1

se pide:

0 0 4 + *𝑥*2

* + 1. Calcula el valor exacto de cada una de dichas integrales.
    2. Calcula el valor aproximado utilizando las siguientes reglas simples: rectangular a izquierda y derecha, punto medio, trapecio y Simpson.
    3. En cada caso, obte´ n el error exacto y una cota del error. ¿Concuerdan?
    4. ¿Es algu´ n me´ todo exacto en algu´ n caso? Si s´ı, ¿por que´ ?

**Ejercicio 8** (Integracio´ n compuesta)**.**

1. Repite el ejercicio anterior con las reglas compuestas de punto medio, trapecio y Simpson. Considera un nu´ mero de subintervalos *𝑁* = 2*,* 4*,* 8*,* 16.
2. ¿Que´ se observa y deduce de los errores cometidos?

Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es) 77