Ejercicios de Matemáticas II

Cédric M. Campos, Razvan G. Iagar, Marta Latorre Balado,
David Puertas Centeno, Michael Stich, Elio V. Toranzo
Área de Matemática Aplicada, ESCET

27 de marzo de 2023

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS
urjc.es

0. Conjuntos y funciones en varias variables

Ejercicio 1. Escribe las coordenadas polares o cartesianas de los siguientes puntos de $\mathbb{R}^2$.

Coordenadas cartesianas	Coordenadas polares
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	
$(-1, \sqrt{3})$	
	$(2, {}^{\pi}/_{6})$
	$(3, {}^{7\pi}/_{4})$
$(0, 5)$	
$(-1, 1)$	

Solución.

Coordenadas cartesianas	Coordenadas polares
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(2, {}^{\pi}/_{4})$
$(-1, \sqrt{3})$	$(2, {}^{2\pi}/_{3})$
$(\sqrt{3}, 1)$	$(2, {}^{\pi}/_{6})$
$({}^{3\sqrt{2}}/_{2}, -{}^{3\sqrt{2}}/_{2})$	$(3, {}^{7\pi}/_{4})$
$(0, 5)$	$(5, {}^{\pi}/_{2})$
$(-1, 1)$	$(\sqrt{2}, {}^{3\pi}/_{4})$

◄

Ejercicio 2. Representa gráficamente en el plano cartesiano los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1,\ y > 0\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - y)(x + y) \geq 0\}$

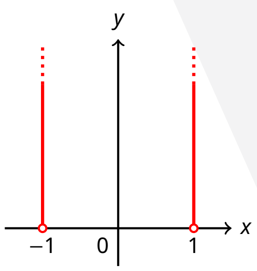
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

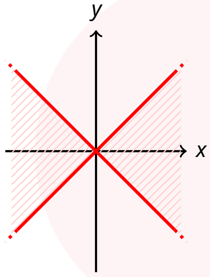
d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 - 6x + y^2 < 4\}$

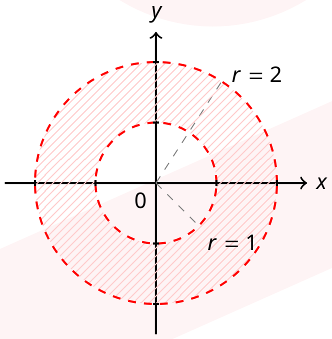
e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 5x + y^2 + 4y \leq 4\}$

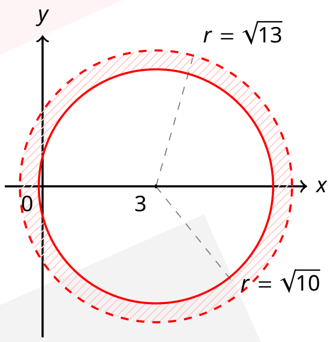
f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$

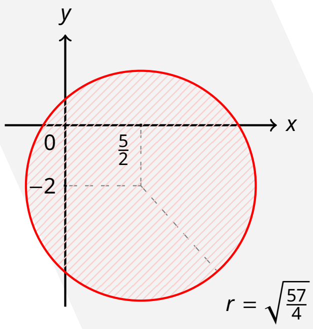
Solución.

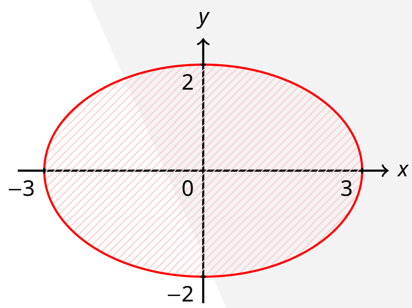
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

◀

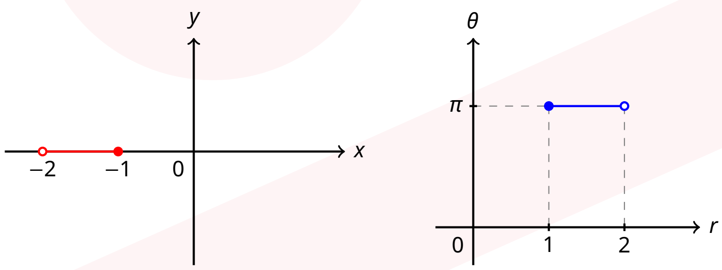
Ejercicio 3. Representa gráficamente en el plano cartesiano y en el plano polar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

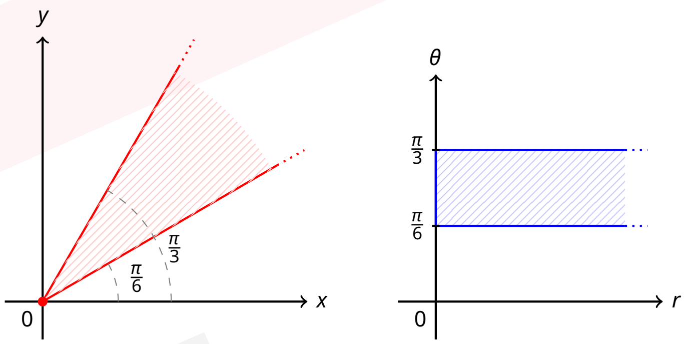
a) $A = \{(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \mid 1 \leq r < 2,\ \theta = \pi\}$

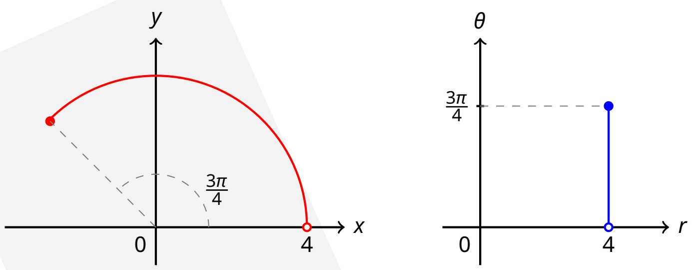
b) $B = \{(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \mid {}^{\pi}/_{6} \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{3}\}$

c) $C = \{(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \mid r = 4,\ 0 < \theta \leq {}^{3\pi}/_{4}\}$

Solución.

a) 

b) 

c) 

◀

Ejercicio 4. Representa gráficamente en el plano cartesiano los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1\}$

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z \geq 1\}$

c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + z^2 < 4,\ -2 \leq y \leq 5\}$

Solución.

a) Cubo (laterales e interior) centrado en el $(0,0,0)$ y de lado 2.

b) Parte exterior de la esfera centrada en el $(-2,0,1)$ y de radio $\sqrt{6}$.

c) Zona comprendida entre dos cilindros verticales centrados en el $(0,0,0)$ y con radios 1 y 2.

d) Zona comprendida entre dos cilindros horizontales (entre $y = -2$ e $y = 5$) centrados en el $(0, 0, 0)$ y de radios 1 y 2.

◀

Ejercicio 5. Representa gráficamente en el plano cartesiano los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mid z = 2\}$

b) $B = \{(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{4}\}$

c) $C = \{(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mid 1 < r^2 + z^2 < 4\}$

d) $D = \{(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mid r \leq 1,\ |z| \leq 1\}$

Solución.

a) Plano horizontal a la altura $z = 2$.

b) Semiplano vertical que corta al plano XY en la bisectriz del primer cuadrante.

c) Zona comprendida entre dos esferas centradas en el $(0, 0, 0)$ y de radios 1 y 2.

d) Cilindro vertical (entre $z = -1$ y $z = 1$) centrados en el $(0, 0, 0)$ y radio 1.

◀

Ejercicio 6. Representa gráficamente en el plano cartesiano los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{(\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \mid 1 \leq \rho \leq 2\}$

b) $B = \{(\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \mid \theta = \frac{7\pi}{4}\}$

c) $C = \{(\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \mid \rho < 4,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}$

Solución.

a) Zona comprendida entre dos esferas centradas en el $(0, 0, 0)$ y con radios 1 y 2.

b) Semiplano vertical que corta al plano XY en la bisectriz del cuarto cuadrante.

c) Parte de la esfera esfera centrada en el $(0, 0, 0)$ y de radio 4 de la parte positiva del eje OY y negativa del eje OZ.

◀

Ejercicio 7. Estudia el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

a) $f(x, y) = \log(x + y - 1)$

b) $f(x, y) = 2 - \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

c) $f(x, y) = \arcsin\left(x/2\right) + \sqrt{xy}$

d) $f(x, y) = xy + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$, para $R > 0$.

e) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$

f) $f(x, y) = \tan((x + y)\pi)$

g) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{|x+y|}$

h) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y > 1\}$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom}(f) = \cup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, k\pi \le x^2+y^2 \le (k+1)\pi\}$

$\text{Im}(f) = [1,2]$

c) $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -2 \le x \le 2,\ xy \ge 0\}$

$\text{Im}(f) = [-\frac{\pi}{2}, +\infty)$

d) $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \ge R^2\}$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

e) $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \ne 0\}$

$\text{Im}(f) = (0, +\infty)$

f) $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y \ne \frac{2k+1}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

g) $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y \ne 0\}$

$\text{Im}(f) = \{-1,\ 1\}$

h) $\text{Dom}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \ge 1\}$

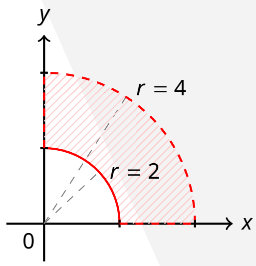
$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

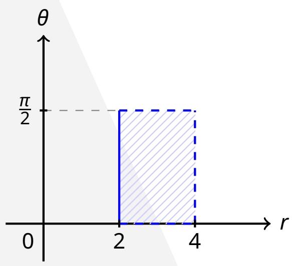
◀

Ejercicio 8. Calcula y representa en el plano cartesiano y polar el dominio de la siguiente función.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2-4},\ \log(16-x^2-y^2),\ \log(x)+\log(y)\right)$$

Solución.



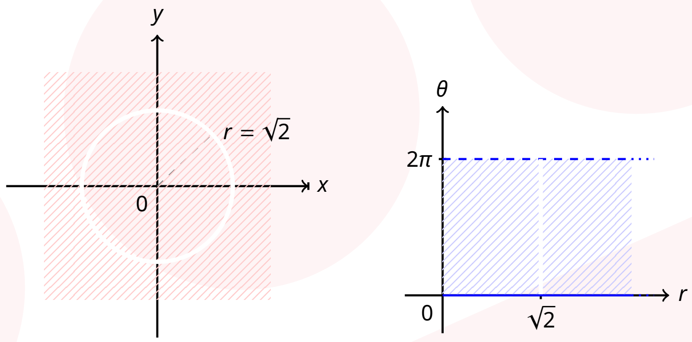


◀

Ejercicio 9. Calcula y representa en el plano cartesiano y polar el dominio de la siguiente función.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \frac{4}{2-x^2-y^2}$$

Solución. $\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \neq 2\}$



◀

Ejercicio 10. Calcula $f \circ g$ en los siguientes casos.

a) $f(x,y) = x^2 - y$
$g(t) = (t, t^2)$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
$g(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

Solución.

a) 0

b) r^2

◀

Ejercicio 11. Dibuja las curvas de nivel de las siguientes funciones.

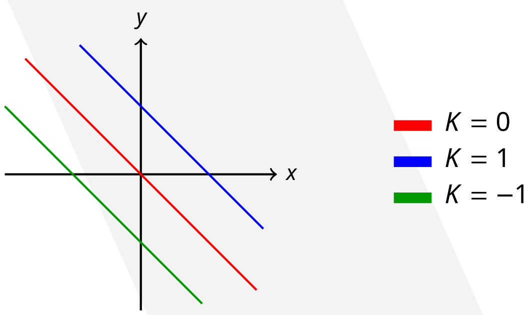
a) $f(x,y) = x + y$

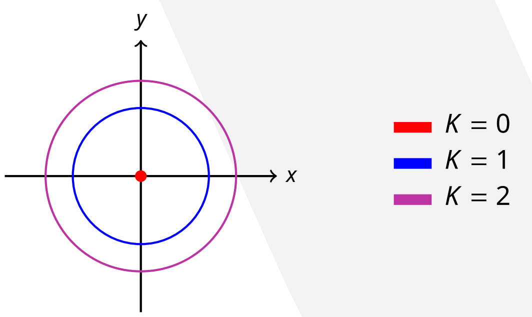
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

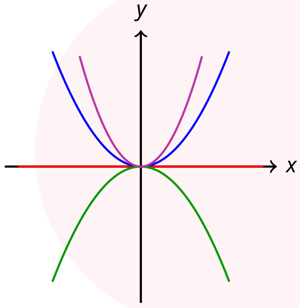
c) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$

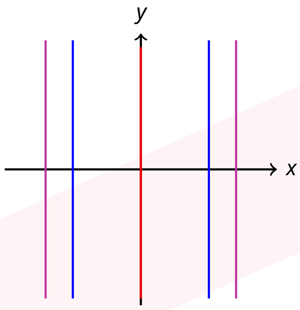
d) $f(x,y) = x^2$

Solución.

a)


b)


c) 

d) 

◀

Ejercicio 12. Para los siguientes conjuntos, indica si son abiertos, cerrados, acotados y determina el interior, la clausura y la frontera.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x,\ -1 \leq y \leq 0\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2,\ y > 0\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

Solución.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x,\ -1 \leq y \leq 0\}$

- No abierto
- Cerrado
- No acotado
- $\mathrm{Int}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x,\ -1 < y < 0\}$
- $\overline{A} = A$
- $\mathrm{Fr}(A) = [-2, -\infty) \times \{-1, 0\} \bigcup \{-2\} \times [-1, 0]$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2,\ y > 0\}$

- No abierto
- No cerrado
- No acotado
- $\mathrm{Int}(B) = \emptyset$

- $\overline{B} = B \cup \{(2,0)\}$
- $\mathrm{Fr}(B) = B \cup \{(2,0)\}$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$

- Abierto
- No cerrado
- No acotado
- $\mathrm{Int}(C) = C$
- $\overline{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$
- $\mathrm{Fr}(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$

- No abierto
- Cerrado
- Acotado $D \subseteq B_3((0,0))$
- $\mathrm{Int}(D) = \emptyset$
- $\overline{D} = D$
- $\mathrm{Fr}(D) = D$

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

- Abierto
- No cerrado
- Acotado $E \subseteq B_3((0,0))$
- $\mathrm{Int}(E) = E$
- $\overline{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $\mathrm{Fr}(E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$

f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

- No abierto
- Cerrado
- No acotado
- $\mathrm{Int}(F) = \emptyset$
- $\overline{F} = F$
- $\mathrm{Fr}(F) = F$

◀

Ejercicio 13. Determina si las siguientes funciones son acotadas y, en su caso, da una cota.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = \sin^2(x+y)\cos(x - e^y)$

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = e^{x+y} + z$

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2}}$$

d) $f\colon [0,1]\times[-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(x,y) = x + y^2$

$f(0,y) = 0$

e) $f\colon [-5,5]\times[2,8] \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ si $x \neq 0$

f) $f\colon [0,4]\times[0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(x,y) = \dfrac{y}{x+3}$

Solución.

a) Acotada por 1

b) No acotada

c) Acotada por 1

d) Acotada por 5

e) No acotada

f) Acotada por $\frac{4}{3}$

◀

1. Límites y continuidad en varias variables

Ejercicio 1. Calcula, si existe, el límite de las siguientes funciones en el punto $(0,0)$.

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

f) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

g) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^4}$

h) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$

i) $f(x,y) = \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

j) $f(x,y) = \dfrac{xy-x+y}{x+y}$

k) $f(x,y) = x\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) + y\cos\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

l) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{x^2y^4+(x-y^2)^2}$

Solución.

a) 0

b) No existe

c) 0

d) No existe

e) No existe

f) 0

g) No existe

h) 0

i) 0

j) No existe

k) 0

l) No existe

◀

Ejercicio 2. Calcula, si existen, los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\log(x)+\log(y)}{x+2y-3}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3-x-y}{x-2y+3}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x}{y-1}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)^2(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2}$

Solución.

a) No existe

b) No existe

c) No existe

d) 0

◀

Ejercicio 3. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2(y-2)}{(x+1)^2+(y-2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(-1,2) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(-1,2) \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(1,0) \end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ -1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\neq 0 \text{ e } y\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \text{ o } y=0 \end{cases}$ en el $(0,0)$.

Solución.

a) Es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

b) Es continua en $\mathbb{R}^2$

c) Es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

d) Es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$

e) Es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

f) No es continua

◀

Ejercicio 4. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,, \end{cases}$$

a) Calcula el límite direccional en el punto $(0,0)$ tomando las rectas $y=\lambda x$ para $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Calcula el límite direccional en el punto $(0,0)$ tomando la curva $y=x^3$.

c) Determina si f es continua en el origen.

Solución.

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) No es continua

◀

Ejercicio 5. Dada la función

$$f(x,y)=\frac{x^4-y^3}{x^4-y} \qquad \text{para } (x,y)\neq(0,0),\ (1,1)\,,$$

indica, si es posible, los valores que debe tomar la función en $(0,0)$ y $(1,1)$ para que sea continua en dichos puntos.

Solución. Con ningún valor la función es continua ◀

Ejercicio 6. Determina, si es posible, el valor de $K \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy - 3y - x + 3}{(x-3)^2 + (y-1)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (3,1)\,, \\ K & \text{si} \quad (x,y) = (3,1)\,, \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Con ningún valor de K la función es continua ◄

Ejercicio 7. Sea $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| \leq K\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \qquad \text{para todo } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\,,$$

con $K > 0$. Prueba que $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

2. Diferenciabilidad: nociones fundamentales

Ejercicio 1. Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = 3x^2\cos^2(x-y)$

b) $f(x,y) = \log\left(x^2 e^{2y}\right)$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sin(x^2-y^2)}$

d) $f(x,y) = \sin\left(e^{x+y}\right)\cos\left(\log(x-y)\right)$

e) $f(x,y) = e^{x\sin(y)+y\sin(x)}$

f) $f(s,t) = (2s^2+t)^2$

g) $f(a,b) = ae^{\arctan(b)}$

h) $f(x,y,z) = \dfrac{\sin\left(y^2-z\right)}{5z}$

i) $f(u,v) = uv\log(u+v)$

j) $f(r,s) = \log\left(e^r+s^2\right)+(r+s)^2$

Ejercicio 2. Calcula las siguientes derivadas direccionales.

a) $D_{\boldsymbol{v}}f(-1,1,7)$ siendo $f(x,y,z) = xy+yz+xz$ y $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$.

b) $D_{\boldsymbol{v}}f\left(\log(3),\frac{\pi}{2},-3\right)$ siendo $f(x,y,z) = z-e^x\sin(y)$ y $\boldsymbol{v} = (-1,0,1)$.

c) $D_{\boldsymbol{v}}f(x,y,z)$ siendo $f(x,y,z) = x^2-2xy+z^3$ y $\boldsymbol{v} = (1,-1,2)$.

d) $D_\theta f(x,y)$ siendo $f(x,y) = x^5-2xy$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Solución.

a) $D_{\frac{v}{\|v\|}}f(-1,1,7) = \dfrac{14}{\sqrt{3}}$

b) $D_{\frac{v}{\|v\|}}f\left(\log(3),\frac{\pi}{2},-3\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c) $D_{\frac{v}{\|v\|}}f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(4x-2y+6z^2)$

d) $D_\theta f(x,y) = 2x$

◀

Ejercicio 3. Calcula el vector gradiente de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ en los puntos $(0,0)$ y $(-1,0)$.

b) $f(x,y,z) = \log\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)$ en el punto $(1,1,1)$.

c) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ para todo $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Solución.

a) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y $\nabla f(-1,0) = \left(\frac{2}{e},0\right)$

b) $\nabla f(1,1,1) = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

c) $\nabla f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (2x_1,2x_2,\ldots,2x_n)$

◀

Ejercicio 4. Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de las siguientes funciones, y calcula, en su caso, la aplicación diferencial.

a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(4\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,. \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} xy\log(x^2+y^2) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{x}{x+y}\right) & \text{si} \quad x+y \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x+y = 0\,. \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right) & \text{si} \quad x+y \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x+y = 0\,. \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

h) $f(x,y) = e^{x+y}$

Solución.

a) f es continua, existen las parciales y es diferenciable en el $(0,0)$ con $Df(0,0) = (0,0)$

b) f es continua, existen las parciales pero no es diferenciable en el $(0,0)$

c) f es continua, existen las parciales y es diferenciable en el $(0,0)$ con $Df(0,0) = (0,0)$

d) f es continua, existen las parciales y es diferenciable en el $(0,0)$ con $Df(0,0) = (0,0)$

e) f es continua, existen las parciales y es diferenciable en el $(0,0)$ con $Df(0,0) = (0,0)$

f) f no es continua, existen las parciales pero no es diferenciable en el $(0,0)$

g) f es continua, existen las parciales pero no es diferenciable en el $(0,0)$

h) f es continua, existen las parciales y es diferenciable en $(0,0)$ y en el $(0,0)$ y $Df(0,0) = (1,1)$

◂

Ejercicio 5. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^2x-2y^3}{y^2+x^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

comprueba que tiene todas las derivadas direccionales bien definidas pero no es diferenciable en el origen.

Ejercicio 6. Calcula las derivadas direccionales en el origen en cualquier dirección de la siguiente función.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Solución. $D_\theta f(0,0) = 0$ si $\theta \neq 0, \pi$ y $D_0 f(0,0) = D_\pi f(0,0) = 0$ ◀

Ejercicio 7. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el punto $(0,0)$.

Solución. f es continua, existen las parciales y es diferenciable en el $(0,0)$ ◀

Ejercicio 8. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el $(0,0)$. ¿Son $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ continuas en $(0,0)$?

Solución. f no es continua, existen las derivadas parciales y no es diferenciable en el $(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en el $(0,0)$ ◀

Ejercicio 9. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en el $(0,0)$?

b) Calcula las derivadas parciales de f en el $(0,0)$.

c) ¿Es $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ continua en el $(0,0)$?

d) ¿Es f diferenciable en el $(0,0)$?

Solución.

a) Sí

b) $Jf(0,0) = (1,0)$

c) No

d) No

◀

Ejercicio 10. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^3-(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0)\,, \end{cases}$$

estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el punto $(1,0)$.

Solución. f es continua, exsiten las parciales y no es diferenciable en el $(1,0)$ ◀

Ejercicio 11. Calcula la matriz jacobiana y el jacobiano, si existe, de las siguientes funciones.

a) $f(x,y,z) = (x+2y,\ 2xy+y^2,\ xy+z^2)$

b) $f(x,y,z) = (xyz,\ x^2+y^2+z^2)$

c) $f(x,y) = 3x^2 + e^y$

Solución.

a) $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2y & 2x+2y & 0 \\ y & x & 2z \end{pmatrix}$ y $\det(J_f(x,y,z)) = 4z(x+y) - 8yz$

b) $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$

c) $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & e^y \end{pmatrix}$

◀

Ejercicio 12. Calcula, si existe, la ecuación del plano tangente a la superficie generada por las siguientes funciones en el punto indicado.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \sin(xy)$ en el punto $(0,2)$.

b) $f(x,y) = \log(x+y) + x\cos(y)$ en el punto $(1,0)$.

c) $f(s,t) = \sqrt{s^2+t^2}$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Solución.

a) $2x + 4y - z = 4$ b) $2x + y - z = 1$ c) $2s + t - \sqrt{5}z = 0$

◀

Ejercicio 13. Calcula la matriz jacobiana de $f \circ g$ en el punto $(1,1)$ siendo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(u,v) &= (u+v, u, v^2) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(x,y) &= (x^2+1, y^2)\,. \end{aligned}$$

Solución. $J_{f\circ g}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ◀

Ejercicio 14. Calcula la matriz jacobiana de $g \circ f$ en el punto $(0,0)$ siendo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y) &= (e^{x+y}, x-y, x^2) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(u,v,w) &= (uw, \sin(v+w))\,. \end{aligned}$$

Solución. $J_{g\circ f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ◀

Ejercicio 15. La temperatura en un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ viene dada por la función diferenciable $T(x,y,z)$. Una partícula viaja por la hélice $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ y denotamos por $f(t)$ la temperatura de la partícula en el instante t (es decir, $f = T \circ \sigma$). Calcula $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sabiendo que $\nabla T\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right) = (2,1,3)$.

Solución. $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$ ◀

Ejercicio 16. Calcula las derivadas parciales de $h = f \circ g$ en el punto $(1, 0)$ sabiendo que

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + y, x + z, y) \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{l} g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \quad g(x, y) = (x \sin(y), x, e^y) \,. \end{array}$$

Solución. $\dfrac{\partial h}{\partial x}(1, 0) = 1$ y $\dfrac{\partial h}{\partial x}(1, 0) = 2$ ◀

Ejercicio 17. Sabiendo que f, g y h son funciones diferenciables tales que

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \text{con } \nabla f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)\,, & \text{con } g(0, 0) = 1\,, & \quad h(x, y) = (x, y, g(x, y))\,, \end{array}$$

y $(f \circ h)(x, y) = x + \cos(y)$, calcula $\nabla g(0, 0)$.

Solución. $\nabla g(0, 0) = (0, -\frac{1}{2})$ ◀

Ejercicio 18. La temperatura de cada uno de los puntos de una placa cuadrada viene determinada por la función

$$T(x, y) = (x - 1)^3 (y - 2)^2\,, \qquad \text{si } (x, y) \in [-10, 10] \times [-10, 10]\,.$$

Calcula cuáles son, en el punto $(0, 0)$, las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.

Solución. Mayor crecimiento: $\nabla f(0, 0) = (12, 4)$ y mayor decrecimiento $-\nabla f(0, 0) = (-12, -4)$ ◀

Ejercicio 19. Denotemos por

$$f(x, y) = 2e^{x^2} + e^{3y^2}\,,$$

la altura de una montaña en la posición $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Indica en qué dirección, partiendo desde el punto $(1, 0)$, deberíamos comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible.

Solución. $\nabla f(1, 0) = (4e, 0)$ ◀

Ejercicio 20. Supongamos que una montaña tiene forma de paraboloide elíptico

$$f(x, y) = 1 - x^2 - 2y^2\,, \qquad \text{si } (x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]\,.$$

Si se suelta una canica en el punto $(1, 1, -2)$, ¿en qué direción comenzará a rodar?

Solución. $-\nabla f(1, 1) = -(-2, -4) = (2, 4)$ ◀

Ejercicio 21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$D_{\frac{\pi}{3}} f(1, 1) = 2\,, \qquad D_{\frac{\pi}{6}} f(1, 1) = 0 \qquad \text{y} \qquad D_{\frac{\pi}{2}} f(1, 1) = 1\,.$$

¿Puedes justificar si f es diferenciable en $(1, 1)$?

Solución. No es diferenciable ◀

Ejercicio 22. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables. Comprueba que las siguientes igualdades son ciertas.

a) Si $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$, entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x, y) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h(x, y) = 0\,.$$

b) Si $h(x,y) = x f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, entonces

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x,y) + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h(x,y) + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} h(x,y) = 0\,.$$

Ejercicio 23. Calcula las siguientes derivadas parciales de orden superior.

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ siendo $f(x,y) = e^x \cos(y)$.

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2,1)$ siendo $f(x,y,z) = 3x^2 + 5xy - 5y^2 z$.

c) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0)$ siendo $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$.

Solución.

a) 1 b) 5 c) 0

◂

3. Diferenciabilidad: aplicaciones

Ejercicio 1. Calcula y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

b) $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$

c) $f(x,y) = x^2y^2(1-x-y)$

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3axy$ con $a \in \mathbb{R}$

e) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2)$

f) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$

g) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

h) $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 3x^2 - 3y^2 + 2$

Solución.

a) Mínimo local: $(0,1)$

b) Máximo local: $(2,3)$ y $(0,y)$ si $y \in (-\infty,0) \cup (6,+\infty)$

Mínimo local: $(0,y)$ si $y \in (0,6)$

Punto de silla: $(0,0)$ y $(0,6)$

c) Máximo local: $(\frac{2}{5},\frac{2}{5})$, $(0,y)$ si $y \in (1,+\infty)$ y $(x,0)$ si $x \in (1,+\infty)$

Mínimo local: $(0,y)$ si $y \in (-\infty,1)$ y $(x,0)$ si $x \in (-\infty,1)$

Punto de silla: $(0,1)$ y $(1,0)$

d) Si $a=0$, $(0,0)$ es punto de silla

Si $a>0$, $(-a,-a)$ es máximo local

Si $a<0$, $(-a,-a)$ es mínimo local

e) Máximo local: $(-4,-2)$

Punto de silla: $(0,0)$

f) Máximo local: $(x,\sqrt{1-x^2})$ y $(x,-\sqrt{1-x^2})$ con $x \in [-1,1]$

Mínimo local: $(0,0)$

g) Mínimo local: $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

Punto de silla: $(0,0)$

h) Máximo local:$(0,0)$

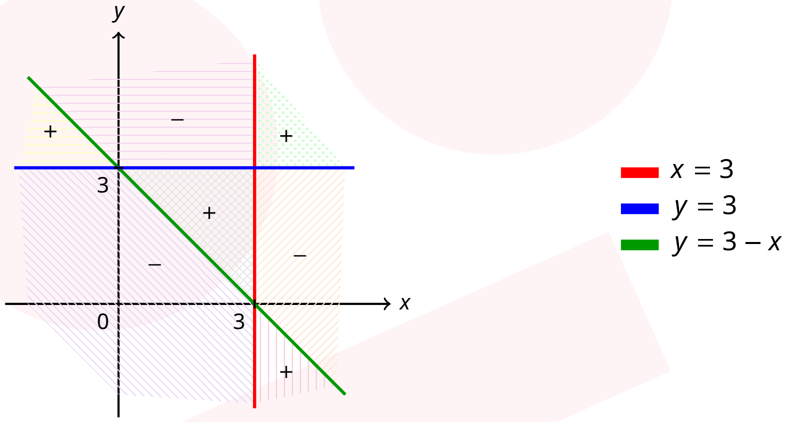
Mínimo local: $(0,2)$

Punto de silla: $(-1,1)$ y $(1,1)$

◄

Ejercicio 2. Dada la función $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$, representa gráficamente los puntos en los que $f(x,y)$ es mayor, menor e igual a 0 y determina y clasifica sus puntos críticos.

Solución.



Punto de silla: $(3,0)$, $(0,3)$ y $(3,3)$.
Máximo local: $(2,2)$.

◀

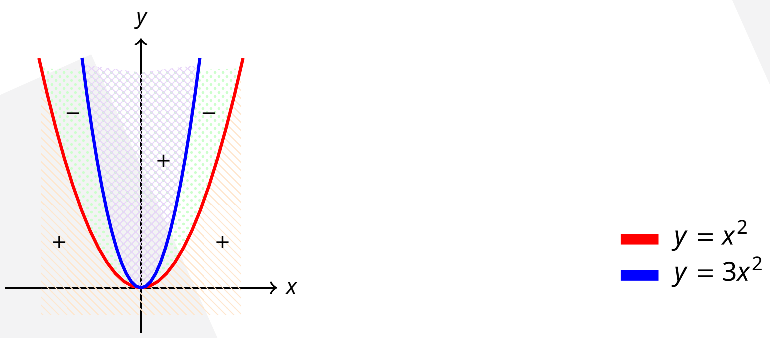
Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

a) Prueba que $f(x,y)$ tiene un mínimo en $(0,0)$ sobre cualquier recta $y = \lambda x$.

b) Representa gráficamente los puntos en los que $f(x,y)$ es mayor, menor e igual a 0.

c) Deduce que $(0,0)$ no es un mínimo relativo de $f(x,y)$.

Solución.



◀

Ejercicio 4. Estudia los extremos absolutos de las siguientes funciones en los recintos indicados.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ en $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \leq 1\}$.

b) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Solución.

a) Mínimo absoluto en $(0,0)$

b) Mínimo absoluto en $(1,0)$ y máximo absoluto en $(-1,0)$

◀

4. Integración múltiple

Ejercicio 1. Calcula (sin realizar ninguna integral) el área de

a) $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 2 \le x^2 + y^2 \le 3\right\}$

b) $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 2 \le 3x^2 + y^2 \le 3\right\}$

c) $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x^2 + y^2 \le 2, \quad y \le x\right\}$

d) $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le 2x^2 + y^2 \le 2, \quad y \le x\right\}$

Solución.

a) π

b) $\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - \sqrt{3}\right)\pi$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\frac{\pi}{2}$

◀

Ejercicio 2. Calcular el área de los siguientes dominios en $\mathbb{R}^2$
(a) Dominio limitado por las rectas $x = 0$, $x = \pi/4$ y las curvas $y = \sin x$, $y = \cos x$.
(b) Dominio limitado por las rectas $x = 2$, $x = 6$, $y = 0$ y la curva $y = 1/x$.
(c) Dominio limitado por la recta $y = x$ y la curva $y^2 = x^3$

Ejercicio 3. Evaluar cada una de las siguientes integrales con el rectángulo R especificado:

a) $\iint_R (x^2 + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $R = [0,1] \times [0,2]$

b) $\iint_R (xy)^2 \cos x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $R = [0,1] \times [0,2]$

c) $\iint_R x^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $R = [0,1] \times [0,2]$

d) $\iint_R \frac{1}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $R = [1,2] \times [1,3]$

e) $\iint_R x^2 y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $R = [2,5] \times [1,3]$

f) $\iint_R \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $R = [3,4] \times [1,2]$

Solución.

a) $\frac{8}{3}$

b) $\frac{8}{9}\sin 1$

c) $\frac{2}{3}$

d) $2\log 2$

e) 338

f) $\log\left(\dfrac{25}{24}\right)$.

◀

Ejercicio 4. Calcular las integrales siguientes

(a) $\iint_D x\,\mathrm{d}(x,y)$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2,\ 2x^2 - 2 \le y \le x^2 + x\}$.

(b) $\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}A$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x \le 3y,\ 1 \le y \le 2\}$.

Ejercicio 5. Calcular la integral

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}A,$$

siendo D el recinto limitado por las rectas $y = -1$, $y = 1$, $y = x$ y la curva $x = y + y^2$.

Ejercicio 6. Calcular la integral $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, siendo D el conjunto definido por $\sqrt{y} \le x \le 1 + \sqrt{1-y^2}$ y $0 \le y \le 1$.

Solución. $\dfrac{13}{30}$ ◀

Ejercicio 7. Cambiar el orden de integración, esbozar las regiones correspondientes y obtener el valor de la integral:

a) $\int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{1}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

b) $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Solución.

a) $\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{e-1}{3}$.

◀

Ejercicio 8. Calcular $\int_0^1\left(\int_{3y}^{3} e^{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ invirtiendo previamente el orden de integración.

Ejercicio 9. Calcula la siguiente integral

$$\int_{y=0}^{6}\int_{\frac{y}{3}}^{2} e^{x^2}\,dx\,dy$$

Solución.

$\frac{3}{2}(e^4 - 1)$ ◀

Ejercicio 10. Calcular mediante una integral doble el volumen cubierto por la superficie $z = \sqrt{x}$ sobre el recinto limitado, en el plano XY, por la curva $x^2 + y^2 - x = 0$.

Solución. $\dfrac{8}{15}$ ◀

Ejercicio 11. Calcular mediante una integral doble el volumen comprendido entre el cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 1$, el paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y el plano $z = 0$.

Solución. $\dfrac{5\pi}{32}$ ◀

Ejercicio 12. Calcular la integral $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, 2x^2-2 \le y \le x^2+x\}$.

Solución. $\dfrac{19}{12}$ ◀

Ejercicio 13. Calcular la integral $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x \le 3y, 1 \le y \le 2\}$.

Solución. 14 ◀

Ejercicio 14. Calcular la integral $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, siendo D el recinto del primer cuadrante limitado por el círculo centrado en el origen y de radio $a > 0$.

Solución. $\dfrac{2a^3}{3}$ ◀

Ejercicio 15. Utilizando el cambio a coordenadas polares, calcular la integral $\iint\limits_D \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, siendo D el recinto del primer cuadrante limitado por el círculo centrado en el origen y de radio 1.

Solución. $(\sqrt{2}-1)\dfrac{\pi}{2}$ ◀

Ejercicio 16. Usa coordenadas polares para calcular $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Solución. $\frac{\pi}{2}$ ◀

Ejercicio 17. Usa coordenadas polares para calcular $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Utiliza el resultado para calcular $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Ejercicio 18. Calcular $\iint_D \frac{x}{y^2}\mathrm{d}A$, siendo D el recinto del primer cuadrante limitado por $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ y $y^3 = x^2$.

Ejercicio 19. Calcular $\iint_D x\,\mathrm{d}A$, siendo D el recinto limitado por $y = x^2$ y $y = x^3$.

Ejercicio 20. Calcular $\iint_D |y-\sin(x)|\mathrm{d}A$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1\}$.

Ejercicio 21. Calcular $\iiint\limits_P yz^2e^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ siendo $P = [0,1] \times [1,2] \times [-1,1]$.

Solución. $e-1$ ◀

Ejercicio 22. Calcular $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ siendo D el recinto limitado por una esfera de radio R centrada en el origen.

Solución. πR^4 ◀

Ejercicio 23. Calcular el volumen de un cono dado por $\dfrac{z^2}{a^2} = \dfrac{x^2+y^2}{r^2}$ (es decir, radio máximo r y altura a). Sólo consideramos valores positivos de z.

Solución. $\dfrac{\pi r^2 a}{3}$ ◀

Ejercicio 24. Calcular $\iiint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, siendo D el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x+y+z = 1$ (el valor de la integral es el volumen del tetraedro).

Solución. 1/6 ◀

Ejercicio 25. Hallar el volumen limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

Solución. π ◀

Ejercicio 26. Sea el sólido limitado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Calcular dicho volumen mediante un cambio de coordenadas apropiado.

Solución. $2\pi\left(\frac{-11}{3} + 2\sqrt{6}\right)$ ◀

Ejercicio 27. Hallar el volumen limitado por dentro por la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ y por fuera por la superficie $x^2 + y^2 + 3z = 4$.

Solución. $\frac{125\pi}{6}$ ◀

Ejercicio 28. Obtén el área de la intersección y de la unión las siguientes regiones

a) Bola de radio 2 centrada en el origen y bola de radio 2 centrada en el punto $(2, 0)$.

b) Bola de radio 2 centrada en el origen y bola de radio 2 centrada en el punto $(3, 0)$.

c) Bola de radio 1 centrada en el origen y elipse $\frac{x^2}{2} + 3y^2 = 1$.

Ejercicio 29. Sea Ω la región del plano encerrada por las parábolas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = |x|e^y$.

a) Calcula el área de Ω.

b) Calcula el volumen bajo la gráfica de $f(x, y)$ y sobre el plano XY.

Ejercicio 30. Calcula

a) $\iint_Q x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad$ donde $Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x^2 + y^2 \le 3, \quad x \ge 0\right\}$

b) $\iint_Q ye^x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad$ donde $Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 2 \le x^2 + y^2 \le 4, \quad y \le 0\right\}$

c) $\iint_Q xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad$ donde $Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le 2x^2 + 3y^2 \le 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0\right\}$

d) $\iint_Q x^2y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad$ donde $Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le 4, \quad y \le x\right\}$

e) $\iint_Q x^2y^3 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad$ donde $Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x^2 + 5y^2 \le 2, \quad x \le 0, \quad y \le 0\right\}$

$$\iint_Q x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Ejercicio 31. Calcular el volumen de la porción de la esfera centrada en el origen y de radio 2 superior al plano horizontal $z = 1$.

Ejercicio 32. A través de una esfera sólida de radio 2 se perfora un túnel cilíndrico de radio 1. Suponiendo que el eje del cilindro pasa por el centro de la esfera y que el interior del cilindro perforado se elimina, calcula el volumen del sólido que queda.

Ejercicio 33. Sea $Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 \le z \le x^2 + y^2 + 1, \quad x^2 \le y \le 2 - x^2 \right\}$

a) Calcula el volumen de Q

b) $\iiint_Q x\,\mathrm{d}V$.

c) $\iiint_Q y\,\mathrm{d}V$.

d) $\iiint_Q xz\,\mathrm{d}V$.

e) $\iiint_Q z\,\mathrm{d}V$. Ayuda: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Solución.

a) $\frac{8}{3}$

b) 0

c) $\frac{8}{3}$

d) 0

◄

Ejercicio 34. Calcular el volumen del recinto del primer octante obtenido al quitar a una esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 4 la esfera de mismo centro y la mitad de radio.

Ejercicio 35. Calcular los siguientes volúmenes:

(a) El volumen del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ limitado por el primer octante y los planos $z = 0$ y $z = 4$.

(b) El volumen del cuerpo sólido limitado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

Ejercicio 36. Sean

$$Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

$$\widetilde{Q} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 3z^2, \quad z \in [0,2]\right\}.$$

a) Calcula el volumen de $Q \cap \widetilde{Q}$

b) Calcula el volumen de $Q \cup \widetilde{Q}$

c) La densidad de un cuerpo que ocupa el volumen Q viene dada por

$$d(x,y,z) = x^2y^2z^2.$$

Obtén su masa.

d) La densidad de un cuerpo que ocupa el volumen $\widetilde{Q}$ viene dada por

$$d(x,y,z) = z(x^2 + y^2).$$

Obtén su masa.

Solución.

a) $\frac{\pi}{3}$

b) 9π

c) $\frac{4\pi}{945}$

d) 48π

◄

Ejercicio 37. Sea

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq z^4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad z \in [0,1]\right\}$$

a) Calcula el volumen de Q

b) Calcula $\iiint_Q e^{z^5} dV$

Ejercicio 38. Sean

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$$
$$\widetilde{Q} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x-3)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}.$$

a) Calcula el volumen de $Q \cap \widetilde{Q}$

b) Calcula el volumen de $Q \cup \widetilde{Q}$

c) Calcula $\iiint_{Q\cap\widetilde{Q}} yz\mathrm{d}V$

Ejercicio 39. Sea Q la esfera de radio unidad centrada en el origen y sea

$$\widetilde{Q} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \geq x^2 + y^2\right\}.$$

a) Calcula el volumen de $Q \cap \widetilde{Q}$

b) Calcula $\iiint_{Q\cap\widetilde{Q}} x^3 y^2 dV$

c) Calcula $\iiint_{Q\cap\widetilde{Q}} \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dV$

Ejercicio 40. Sea

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\}.$$

a) Calcula el volumen de Q

b) Calcula $\iiint_Q (2x^2 + y^2) dV$

c) Calcula $\iiint_Q (x^2 + y^2) dV$

A. Ejercicios resueltos.

1. Hallar el volumen del sólido situado debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, arriba del plano $z = 0$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

Solución. En este caso, la forma del dominio nos sugiere que es una buena idea trabajar con coordenadas polares. Por tanto, se hace el cambio de variable habitual a polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, con el jacobiano de la transformación igual a r. Los límites de integración de r y θ se obtienen a través de la idea habitual de **traducir las fronteras del dominio D a las nuevas coordenadas**. En nuestro caso, la frontera del círculo $x^2 + y^2 = 2x$ (que es el círculo de centro el punto $(1, 0)$ y radio 1) se traduce en $r^2 = 2r\cos\theta$, o bien $r = 2\cos\theta$, es decir, que en el interior de la base del cilindro se tiene $0 \leq r \leq 2\cos\theta$. Es también evidente (dibujando el círculo de centro $(1, 0)$ y radio 1, o por ejemplo poniendo que $\cos\theta \geq 0$ para que pueda haber una r intermedia) que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, tenemos que calcular

$$\iint_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2},$$

donde he omitido los detalles de cálculo de la integral de una variable en θ, que hemos visto en detalle en un ejercicio resuelto en clase.

2. (a) Se considera D el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ y $(4, 2)$. Calcular $\int\int_D e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(b) Cambiar el orden de integración pasando primero a una integral doble y luego a la otra posibilidad de integral iterada, para calcular

$$\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 xe^y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solución. (a) En este caso el triángulo base se nos da de forma explícita, pero es la forma de la función a integrar la que determina el orden de integración. Más precisamente, si intentamos integrar primero respecto a la variable y, **la integral (en una variable) de la función e^{y^2} no se puede efectuar**. Por ello, estamos obligados de integrar primero respecto a x, es decir, la integral interior será respecto a x y la integral exterior respecto a y. Eso significa que al pasar a integrales iteradas, necesitamos ver y entre límites de integración fijas y x entre límites de integración variables que pueden depender de y. Con esta idea, podemos observar (dibujando a escala correcta el triángulo se ve de inmediato) que el triángulo se escribe como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2y,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

y la integral se calcula de la siguiente forma

$$\iint_D e^{y^2}\mathrm{d}A = \int_0^2\int_0^{2y} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 2ye^{y^2}\mathrm{d}y = e^{y^2}\Big|_0^2 = e^4 - 1.$$

(b) En este ejemplo, las integrales iteradas nos dicen que estamos integrando sobre un dominio D con los límites

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y} \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 9\}$$

Si queremos expresar x entre límites fijos e y entre límites variables, tenemos que examinar los límites precedentes y ver qué podemos deducir. Primero, queremos los límites (fijos) para x. Observamos que por un lado ya tenemos $x \leq 3$, que ya es fijo, y por otro lado tenemos $x \geq \sqrt{y}$ pero a la vez $y \geq 1$, por tanto $x \geq \sqrt{1} = 1$. Es decir, $1 \leq x \leq 3$. En cuanto a los límites (ahora posiblemente variables, dependiendo de x) de la variable y, por un lado observamos que $1 \leq y$, que no se puede mejorar, y por otro tenemos que $\sqrt{y} \le x$, lo que elevando al cuadrado nos lleva a $y \le x^2$. Resumiendo, podemos escribir el mismo dominio de integración D en la forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le x^2\},$$

y las integrales iteradas correspondientes a esta nueva forma de describir el mismo dominio D son

$$\int_1^3 \int_1^{x^2} x e^y \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^3 x(e^{x^2} - e)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{ex^2}{2}\right]\Bigg|_1^3 = \frac{e^9 - 9e}{2}.$$

3. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ y los planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$.

Solución. La función a integrar, como es habitual en ejercicios de volúmenes, es $z = f(x, y) = x^2 + 3y^2$. En cuanto al dominio de integración dentro del plano base $z = 0$, es el triángulo obtenido como intersección de las rectas $x = 0$, $y = x$ e $y = 1$, es decir el triángulo rectángulo de vértices los puntos de coordenadas $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. En este caso es indiferente qué variable consideramos entre límites fijos (se puede hacer de ambas maneras), pero ya que nos hemos acostumbrado en los ejercicios precedentes a considerar y entre límites fijos y x entre límites variables (que puedan depender de y), seguimos con esta convención y obtenemos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1\},$$

por tanto la integral se calcula como sigue:

$$\iint_D (x^2 + 3y^2)\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + 3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{10}{3}\int_0^1 y^3 \mathrm{d}y = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

4. Calcular las integrales dobles de las funciones indicadas en cada apartado sobre la región indicada en el mismo apartado:

(a) $f(x, y) = x - y$, donde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1,\ x + y \ge 1\}$.

(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-3/2}$, donde D es la misma región que en el apartado anterior.

Solución. En este ejercicio pasamos a coordenadas polares, ya que la región que tenemos tiene como una de las fronteras parte de una circunferencia. Poniendo $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ obtenemos los límites de integración **traduciendo las fronteras del dominio D en las nuevas coordenadas**, como hemos visto en otros ejemplos de clase:

$$x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow r^2 = 1 \Longrightarrow r = 1$$

y

$$x + y = 1 \Longrightarrow r(\cos\theta + \sin\theta) = 1 \Longrightarrow r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta},$$

por tanto

$$\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

los límites del ángulo θ son evidentes si hacemos un dibujo o directamente nos damos cuenta de que la recta $x + y = 1$ une los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ pasando solo por el primer cuadrante. Con esta preparación y sin olvidar el **Jacobiano igual a** r, podemos pasar a efectuar los cálculos en los dos apartados.

(a) En este caso tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_D x - y \mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/2} \int_{1/(\cos\theta+\sin\theta)}^1 r^2(\cos\theta - \sin\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}(\cos\theta - \sin\theta)\Big|_{r=1/(\cos\theta+\sin\theta)}^{r=1} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \left[(\cos\theta - \sin\theta) - \frac{(\cos\theta - \sin\theta)}{(\cos\theta + \sin\theta)^3}\right] \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \left[(\cos\theta - \sin\theta) - \frac{(\cos\theta + \sin\theta)'}{(\cos\theta + \sin\theta)^3}\right] \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[\sin\theta + \cos\theta + \frac{1}{2}\frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^2}\right]\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) En este caso tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)^{-3/2}\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/2}\int_{1/(\cos\theta+\sin\theta)}^1 \frac{1}{r^3} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\int_{1/(\cos\theta+\sin\theta)}^1 \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{r}\right]\Big|_{r=1/(\cos\theta+\sin\theta)}^{r=1}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}(-1+\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta = (\sin\theta - \cos\theta - \theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= 2 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

5. Evaluar la integral doble

$$\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\mathrm{d}A,$$

donde D es el trapecio de vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ y $(0,-1)$. Sugerencia: utilizar el cambio de variable $(u,v) = T(x,y) = (x+y, x-y)$ presentado en clase.

Solución. Se trata de un cambio de variable nuevo y vamos a seguir exactamente los mismos tres pasos que en los ejercicios vistos en clase (transformar la función, calcular el jacobiano y hallar los nuevos límites de integración). Es un algoritmo general a seguir cuando se trata de cambios de variable en dos variables.

Paso 1. Transformación de la función a integrar. Hacemos el cambio de variable $u = x+y$ y $v = x-y$, por tanto

$$e^{(x+y)/(x-y)} = e^{u/v}.$$

Paso 2. Calcular el jacobiano de la transformación T. Para ello, es conveniente despejar x e y a partir de las ecuaciones $u = x+y$, $v = x-y$ (eso en términos matemáticos se llama calcular la inversa de la transformación), ya que el jacobiano se calcula derivando x respecto a u y v (y también y) y no al revés. En este caso es muy fácil, obtenemos de forma inmediata (sumando por ejemplo las dos ecuaciones) que

$$x = x(u,v) = \frac{u+v}{2}, \quad y = y(u,v) = \frac{u-v}{2}.$$

La matriz de las derivadas parciales respecto a u y v es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y su determinante es $-1/2$. Por tanto el jacobiano de la tranformación es $-1/2$, y no tenemos que olvidar en este punto que en la fórmula del cambio de variable se utiliza el **valor absoluto del jacobiano**. Es decir, que en el cálculo efectivo de la integral habrá que multiplicar por 1/2.

Paso 3. Transformar el dominio de integración para hallar los límites de integración de u y v. Eso se hace transformando simplemente en las nuevas variables (u, v) las ecuaciones de las rectas que dan la frontera del dominio D inicial. El dominio D inicial es el trapecio de vértices $(0, -2)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(2, 0)$, es decir, sus aristas son segmentos de las rectas, respectivamente, $y = 0$, $y = x - 1$, $x = 0$ e $y = x - 2$. Teniendo en cuenta la definición de u y v la traducción es ahora inmediata.

- La recta $y = 0$ se transforma en $u = v$.
- La recta $y = x - 1$, o equivalente $x - y = 1$, se transforma en $v = 1$.
- La recta $x = 0$ se transforma en $u = -v$.
- La recta $y = x - 2$, o equivalente $x - y = 2$, se transforma en $v = 2$.

Deducimos que los límites de integración para las nuevas variables u, v son $-v \leq u \leq v$, $1 \leq v \leq 2$.

Finalmente, podemos efectuar el cálculo de la integral utilizando la fórmula general del cambio de variable y los pasos anteriores:

$$\iint_D e^{(x+y)/(x-y)}\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\int_1^2\int_{-v}^{v} e^{u/v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 v(e - e^{-1})\mathrm{d}v = \frac{3}{4}(e - e^{-1}).$$

6. De forma parecida al ejercicio anterior, calcular la integral doble

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\mathrm{d}A,$$

donde D es el cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

Solución. Se trata del mismo cambio de variable que en el ejercicio precedente y vamos a aprovechar lo que hemos calculado antes.

Paso 1. Transformación de la función a integrar. Ponemos $u = x + y$ y $v = x - y$, por tanto

$$(x+y)^2 e^{x^2-y^2} = (x+y)^2 e^{(x+y)(x-y)} = u^2 e^{uv}.$$

Paso 2. Calcular el jacobiano de la transformación T. Se ha hecho en el paso 2 del Ejercicio 6, nos ha dado $-1/2$, por tanto hay que multiplicar con su valor absoluto $1/2$.

Paso 3. Transformar el dominio de integración para hallar los límites de integración de u y v. Eso se hace transformando simplemente en las nuevas variables (u, v) las ecuaciones de las rectas que dan la frontera del dominio D inicial. El dominio D inicial es el cuadrado de vértices $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, es decir, sus aristas son segmentos de las rectas, respectivamente, $x+y = 1$, $x-y = 1$, $y - x = 1$ y $-x - y = 1$. Teniendo en cuenta la definición de u y v la traducción es ahora inmediata.

- La recta $x + y = 1$ se transforma en $u = 1$.
- La recta $-x - y = 1$, o equivalente $x + y = -1$, se transforma en $u = -1$.
- La recta $x - y = 1$ se transforma en $v = 1$.
- La recta $y - x = 1$, o equivalente $x - y = -1$, se transforma en $v = -1$.

Deducimos que los límites de integración para las nuevas variables u, v son $-1 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$.

Finalmente, podemos efectuar el cálculo de la integral utilizando la fórmula general del cambio de variable y los pasos anteriores:

$$\begin{aligned}\int\int_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}u^2 e^{uv}\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}u^2\frac{e^{uv}}{u}\Big|_{-1}^{1}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(e^u - e^{-u})\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} ue^u\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} ue^{-u}\mathrm{d}u = \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

7. Sea W el sólido en $\mathbf{R}^3$ acotado por las superficies $y = x^2$, $x = y^2$, y por los planos $z = 0$ y $z = x + y$. Calcular

$$\iiint_W xy\,\mathrm{d}V.$$

Solución. En este ejercicio no se puede utilizar de forma conveniente ninguno de los cambios de coordenadas estudiados (ni esféricas ni cilíndricas) y lo mejor es usar lo que llamamos la *estrategia* 2+1, es decir, pasar de la integral triple a una integral doble limitando la variable z y después calcular también la integral doble. En nuestro caso, observamos que el enunciado nos dice que $0 \le z \le x+y$, por tanto podemos escribir

$$\int\int\int_W xy\,\mathrm{d}V = \int\int_D \left(\int_0^{x+y} xy\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}A = \int\int_D xy(x+y)\,\mathrm{d}A,$$

donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es el dominio plano limitado por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ dentro del plano base $z = 0$. Para poder decir eso, es importante que el plano $z = x + y$ no corte la base D descrita en la línea anterior, pero eso es evidente: si $x,\ y > 0$, no se puede tener $x + y = 0$. Los puntos de intersección de las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ son $(0,0)$ y $(1,1)$, por tanto los límites de integración en el dominio D son $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le \sqrt{x}$. Tenemos pues

$$\begin{aligned}\iint_D xy(x+y)\,\mathrm{d}A &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy(x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{2} + \frac{x^2\sqrt{x}}{3} - \frac{x^7}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{8} - \frac{1}{14} + \frac{2}{21} - \frac{1}{24} = \frac{3}{28}.\end{aligned}$$

8. Hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $y + z = 5$ y $z = 1$.

Solución. Como el sólido a integrar es una parte de un cilindro, lo más fácil es usar coordenadas cilíndricas. Recordamos que las coordenadas cilíndricas representan el cambio de variable siguiente:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z, \qquad \text{Jacobiano} = r.$$

Tenemos un corte con dos planos en el cilindro, por tanto un paso intermedio es averiguar si los dos planos se pueden intersectar dentro del cilindro. La intersección de los dos planos que cortan el cilindro, es decir $z = 1$ y $z = 5 - y$, se da sobre $y = 4$ (y x cualquiera), pero el cilindro tiene como base el círculo de radio 3, por tanto la recta $y = 4$ no intersecta nunca el cilindro (va por fuera). Por tanto, en el cilindro siempre *los dos planos están ordenados*. Pasando a las coordenadas cilíndricas, observamos que los límites de integración son:

$$0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 3,\ 1 \le z \le 5 - y = 5 - r\sin\theta.$$

Por tanto el volumen se calcula como sigue (no olvidando el jacobiano del cambio, es decir multiplicar por una r)

$$\begin{aligned}V = \iiint_W 1\,\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_1^{5-r\sin\theta} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (4 - r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(2r^2 - \frac{r^3\sin\theta}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=3}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}(18 - 9\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 36\pi.\end{aligned}$$

9. Calcular usando coordenadas cilíndricas:

(a)

$$\iiint_W (x^3 + xy^2)\,dV,$$

donde W es el sólido en el primer octante (es decir coordenadas positivas $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$) que se halla debajo del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

(b)

$$\iiint_W x dV,$$

donde W es el sólido limitado por los planos $z = 0$ y $z = x + y + 5$ y situado entre los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

Solución. Ya hemos recordado en los ejercicios precedentes las coordenadas cilíndricas que vamos a usar en estos dos apartados. Pasamos directamente a la solución.

(a) El sólido W que tenemos en este apartado tiene como límites de integración los siguientes: por un lado, es evidente que $0 \le z \le 1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, por el enunciado. El corte del paraboloide con el plano base $z = 0$ se da cuando $1 - x^2 - y^2 = 0$, es decir, sobre la circunferencia de radio 1. Como estamos en coordenadas positivas, tenemos pues los límites de integración

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le z \le 1 - r^2,$$

y no tenemos que olvidar **el Jacobiano** r. Pasamos a efectuar el cálculo:

$$\begin{aligned}
\iiint_W (x^3 + xy^2) dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} (r^3 \cos^3\theta + r^3 \cos\theta \sin^2\theta) r \mathrm{d}z \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1 - r^2) r^4 (\cos^3\theta + \cos\theta \sin^2\theta) \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^1 (r^4 - r^6) \mathrm{d}r \right) \\
&= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \int_0^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2}{35}.
\end{aligned}$$

(b) En este caso, poniendo de nuevo coordenadas cilíndricas, el sólido W tiene como límites de integración (evidentes)

$$0 \le \theta \le 2\pi,\ 2 \le r \le 3,\ 0 \le z \le x + y + 5 = r(\cos\theta + \sin\theta) + 5.$$

Efectuamos el cálculo:

$$\begin{aligned}
\iiint_W x \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \int_2^3 \int_0^{r(\cos\theta + \sin\theta)+5} r^2 \cos\theta \mathrm{d}z \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_2^3 r^2 (r(\cos\theta + \sin\theta) + 5) \cos\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_2^3 \left[r^3 \cos^2\theta + r^3 \cos\theta \sin\theta + 5r^2 \cos\theta \right] \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Calculando por separado cada una de las integrales de los términos que se suman en la última expresión y usando en ellos la propiedad de factorización (ya que cada uno por separado es un producto de términos de variables separadas en r y θ y los límites de integración son fijos) obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \int_2^3 5r^2 \cos\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \frac{5}{3} r^3 \Big|_{r=2}^{r=3} \sin\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_2^3 r^3 \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4} r^4 \Big|_{r=2}^{r=3} \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0,$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_2^3 r^3 \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{4} r^4 \Big|_{r=2}^{r=3} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{65}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \mathrm{d}\theta = \frac{65\pi}{4},
\end{aligned}$$

ya que la integral del término en θ de la última expresión también vale 0. Por tanto, el resultado final nos queda $65\pi/4$.

10. Calcular usando coordenadas esféricas:

(a)

$$\iiint_W x^2 \mathrm{d}V,$$

donde W es el sólido acotado por el plano $y = 0$ y por las semiesferas $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ e $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.

(b) El volumen de la región sólida que se halla en el interior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, encima del plano $z = 0$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

Solución. Recordamos aquí las fórmulas de cambio para las coordenadas esféricas, que vamos a usar más abajo:

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi,\ \ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ \ z = \rho\cos\varphi,$$

con el **Jacobiano igual a** $\rho^2 \sin\varphi$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Pasando a coordenadas esféricas, obtenemos que $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16$, es decir, $3 \le \rho \le 4$. Por otra parte, tenemos $y \ge 0$ y ninguna limitación sobre el ángulo φ (ya que tanto el polo norte como el polo sur de la esfera más grande están en la frontera de la figura considerada). La condición $y \ge 0$ limita el ángulo θ, que es el ángulo polar habitual: $0 \le \theta \le \pi$ y lo mismo, $0 \le \varphi \le \pi$ (los límites habituales del ángulo φ). Pasamos a efectuar el cálculo:

$$\begin{aligned}\iiint_W x^2 \mathrm{d}V &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_3^4 \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_3^4 \rho^4 \sin^3\ \varphi \cos^2, \theta \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_0^\pi \cos^2\theta \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^\pi \sin^3\ \varphi \mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_3^4 \rho^4 \mathrm{d}\rho\right),\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado la propiedad de factorización para reducir la integral triple a un producto de integrales elementales. Tenemos

$$\int_3^4 \rho^4 \mathrm{d}\rho = \frac{4^5 - 3^5}{5} = \frac{781}{5},$$

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

y

$$\int_0^\pi \sin^3\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{12}(\cos(3\varphi) - 9\cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{1}{12}(-1 - 1 + 9 + 9) = \frac{4}{3}.$$

Multiplicando los resultados precedentes obtenemos como resultado final

$$\frac{781}{5}\frac{\pi}{2}\frac{4}{3} = \frac{1562\pi}{15}.$$

(b) Para hallar los límites de integración, tenemos que usar una vez más nuestra técnica favorita de **traducir las fronteras a las nuevas coordenadas**. En este caso, las dos fronteras son: la frontera superior esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, es decir

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z \Longrightarrow \rho^2 = 4\rho\cos\varphi \Longrightarrow \rho = 4\cos\varphi$$

y la frontera inferior el cono $z^2 = x^2 + y^2$, que ha sido ya trabajado en coordenadas esféricas en un ejercicio de clase, obtenemos

$$\rho^2 \cos^2\varphi = \rho^2 \sin^2\varphi \Longrightarrow \cos^2\varphi = \sin^2\varphi,$$

y obtenemos los límites del ángulo φ entre 0 y $\pi/4$ (ver el ejercicio resuelto en clase para más detalles de cálculo). Por tanto, los límites de integración obtenidos son

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \rho \leq 4\cos\varphi.$$

Procedemos ahora al cálculo:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_W 1\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{4\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{\rho=4\cos\varphi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \cos^3\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{128\pi}{3}\int_0^{\pi/4} \cos^3\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{128\pi}{3}\left(-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \\
&= \frac{32\pi}{3}\left(-\frac{1}{4}+1\right) = 8\pi.
\end{aligned}$$

5. Integrales de línea

Ejercicio 1. Hallar la longitud de un arco de circunferencia de radio r y α radianes.

Solución. αr ◂

Ejercicio 2. Sea C la curva parametrizada por $\gamma(t) = (\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}), \quad t \in [0,1]$. Calcula la longitud de C.

Solución. $L(C) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ ◂

Ejercicio 3. Sea C la curva parametrizada por

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{2}{3}\sqrt{2t^3}\right).$$

Calcula la longitud de C en los intervalos $t \in [0,1], \quad t \in [-2,-1], \quad t \in [-2,1]$

Solución.
$t \in [0,1],\ L(C) = \frac{3}{2}; \quad t \in [-2-1],\ L(C) = \frac{1}{2}; \quad t \in [-2,1],\ L(C) = \frac{5}{2}.$ ◂

Ejercicio 4. Sea C la curva parametrizada por

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, \frac{2}{5}\sqrt{2t^5}\right), \quad t \in [0,1].$$

Calcula la longitud de C.

Solución.
$L(C) = \frac{5}{6}$

◂

Ejercicio 5. Sea σ la hélice definida por $\sigma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \to (\cos t, \sin t, t)$ y sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Evaluar la integral $\int_\sigma f \mathrm{d}s$.

Solución. $2\pi\sqrt{2}(1 + \frac{4\pi^2}{3})$

◂

Ejercicio 6. Sea una curva C parametrizada por $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t), \quad t \in [0,\sqrt{3}]$, y sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Calcula $\int_C f(x,y)\mathrm{d}s$

Solución.
$\int_C f \mathrm{d}s = \frac{7}{3}$ ◂

Ejercicio 7. Sea $\sigma\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\sigma(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$ y $f(x,y) = 1 + y/3$. Calcular la integral de f sobre la curva σ.

Solución. 225 ◂

Ejercicio 8. Calcular las integrales de línea de las siguientes funciones a lo largo de los caminos indicados.

a) $f(x,y) = xy^4$ en la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ recorrida en sentido antihorario.

b) $f(x,y) = \frac{y}{x}$ en $c(t) = (t^4, t^3)$ con $0 \leq t \leq 1$.

c) $f(x,y) = y\,e^x$ en el segmento que une $(1,2)$ con $(4,7)$.

d) $f(x,y) = \sin y$ en el arco de la curva $x = y^4$ desde el punto $(1,-1)$ a $(1,1)$.

Ejercicio 9. Sea una curva C parametrizada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,t), & t \in [0,1), \\ (2-t,(2-t)^2) & t \in [1,2) \end{cases},$$

y sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x$. Calcula $\int_C f(x,y)\mathrm{d}s$

Solución. $\int_C f\mathrm{d}s = \frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1}{12}$ ◀

Ejercicio 10. Evaluar las siguientes integrales de línea:

(a) $f(x,y,z) = e^{\sqrt{z}}$ y $\sigma(t) = (1,2,t^2)$, $t \in [0,1]$.

(b) $f(x,y,z) = yz$ y $\sigma(t) = (t,3t,2t)$, $t \in [1,3]$.

(c) $f(x,y,z) = \frac{x+y}{y+z}$ y $\sigma(t) = (t,\frac{2}{3}t^{3/2},t)$, $t \in [1,2]$.

(d) $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\} \to \mathbb{R}$ con $f(x,y,z) = 1/y^3$ y $\sigma(t) = (\log t, t, 2)$, $t \in [1,e]$.

Solución. (a) 2; (b) $52\sqrt{14}$; (c) $16/3 - 2\sqrt{3}$; (d) $\frac{1}{3}(2^{3/2} - (1+e^{-2})^{3/2})$.

◀

Ejercicio 11. Sea $f(x,y) = 2x - y$, $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \leq t \leq 0$. Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria.

Solución. $\sqrt{2}/2$ ◀

Ejercicio 12. Calcular las integrales de línea de las funciones dadas sobre las curvas indicadas:

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, con $t \in [0,2\pi]$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, $\sigma : [-5,10] \to \mathbb{R}^3$ definida por $t \to (t,t^2,t^3)$.

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (xy+1, x^2-y^2)$, siendo σ la media circunferencia centrada en el origen y en la que el punto inicial es $(1,0)$ recorrida en sentido antihorario.

(d) $\mathbf{F}(x,y) = (xy+1, x^2-y^2)$, siendo σ la media circunferencia centrada en el origen y en la que el punto inicial es $(-1,0)$ recorrida en sentido horario.

(e) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, siendo σ el arco de hélice de ecuaciones paramétricas $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = 3t$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución. (a) $2\pi^2$; (b) $5^6(2^6-1)$; (c) -2; (d) 2; (e) $18\pi^2$. ◀

Ejercicio 13. Calcular $\int_\sigma (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)$ a lo largo de la curva $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2$, siendo σ_1 el arco de elipse de ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ que une el punto $(4,0)$ con el $(0,3)$ y σ_2 el segmento que une ambos puntos, tomando como orientación, la contraria a las agujas del reloj.

Solución. $12 - 6\pi$ ◀

Ejercicio 14. Evaluar la integral $\int_\sigma (\cos z\mathrm{d}x + e^x\mathrm{d}y + e^y\mathrm{d}z)$ donde $\sigma(t) = (1, t, e^t)$ y $t \in [0, 2]$.

Solución. $2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$ ◀

Ejercicio 15. Sea σ la trayectoria $x = \cos^3\alpha$, $y = \sin^3\alpha$ y $z = \alpha$ con $0 \leq \alpha \leq \frac{7\pi}{2}$. Evaluar la integral $\int_\sigma \sin z\mathrm{d}x + \cos z\mathrm{d}y - (xy)^{1/3}\mathrm{d}z$.

Solución. $-\frac{1}{2}$ ◀

Ejercicio 16. Consideramos una partícula que se mueve a lo largo del arco de elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

desde el punto $A = (2, 0)$ hasta el punto $B = (0, 3)$, y después del punto B al punto A por línea recta, sometido al campo de fuerzas

$$F(x, y) = (2xy^3 - y\cos x, 1 - \sin x + 3x^2y^2).$$

Hallar el trabajo realizado por la partícula en el campo de fuerzas.

Solución. 0 ◀

Ejercicio 17. Dado el campo vectorial

$$F(x, y) = (x^3, y^3)$$

y el arco de la curva

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

situado en el primer cuadrante y recorrida en sentido positivo. Calcular el trabajo que se realiza sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva, sometida el campo $F(x, y)$.

Solución. $\frac{65}{4}$ ◀

Ejercicio 18. Calcular el trabajo realizado por los campos de fuerza F en las curvas indicadas.

a) $F(x, y) = (x, y + 2)$ a lo largo de la cicloide $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) $F(x, y) = (x\sin y, y)$ a los largo de la parábola $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ a $(2, 4)$.

c) $F(x, y) = \nabla f(x, y)$ siendo $f(x, y) = 2x + 2y$ a lo largo del segmento que une $(1, 2)$ y $(2, 3)$.

d) $F(x, y) = \nabla f(x, y)$ siendo $f(x, y) = 2x + 2y$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ recorrida en sentido antihorario comenzando en el punto $(0, \sqrt{5})$.

e) $F(x, y, z) = (x^2, 2y, z + 1)$ a lo largo de la hélice $c(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 6\pi)$.

Ejercicio 19. Hallar, utilizando el Teorema de Green, el área limitada por la elipse de semiejes a y b,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solución. $ab\pi$ ◀

Ejercicio 20. Se pide hallar el trabajo necesario para trasladar una partícula situada en el origen hasta el punto $(1, 1, 1)$ a través del segmento que une ambos puntos, sometida a un campo de fuerzas **F**, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy\vec{i} - z\vec{k}$. ¿Es el campo conservativo?

Solución. $\frac{1}{2}$; no. ◀

Ejercicio 21. Determinar el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el trabajo realizado por el campo de fuerza definido por $F(x, y) = (3y^2 + 2,\ 16x)$ a lo largo de la semielipse parametrizada por $\alpha(t) = (\cos(t), \lambda \sin(t))$ con $0 \le t \le \pi$ sea máximo.

Solución. π ◀

Ejercicio 22. Determinar si el siguiente campo vectorial es conservativo y calcular, si existe, una función potencial:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xe^x,\ \frac{\cos y}{\sin y + 2},\ \sqrt[3]{z+1}\right)$$

Solución. Conservativo; potencial: $f(x, y, z) = (x-1)e^x + \log|\sin y + 2| + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(z+1)^4} + C$ ◀

Ejercicio 23. Determinar si el siguiente campo vectorial es conservativo y calcular, si existe, una función potencial: $F(x, y, z) = (2\,x\,z\,e^{x^2+y^2},\ 2\,y\,z\,e^{x^2+y^2},\ e^{x^2+y^2})$.

Solución. Conservativo; potencial: $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2} + C$ ◀

Ejercicio 24. Determinar si el siguiente campo vectorial es conservativo y calcular, si existe, una función potencial:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin y + z\cos x,\ x\cos y + \cos z,\ \sin x - y\sin z + 2)$$

Solución. Conservativo; potencial: $f(x, y, z) = x\sin y + z\sin x + y\cos z + 2z$. ◀

Ejercicio 25. Determinar el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el campo $F(x, y) = (y^2\cos(x),\ \lambda\, y\sin(x))$ sea conservativo y calcular una función potencial correspondiente.

Solución. $\lambda = 2$; potencial: $f(x, y, z) = y^2 \sin x + C$ ◀

Ejercicio 26. Usar el teorema de Green para evaluar la integral de línea del campo $F(x, y) = (y^6,\ -xy^5)$ a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido antihorario (positivo).

Solución. 0 ◀

Ejercicio 27. Consideremos la curva C dada por $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x^2 + 2y^2 = 1\}$, orientada en sentido antihorario. Calcula las siguientes integrales

a) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y, x)$

b) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (-y, x)$

c) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (e^{x+y}, e^{x+y})$

d) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y\, e^{x^2} e^{2y^2}, x^2y^2 + 2y^4)$

Solución.

a) 0

b) $\sqrt{2}\,\pi$

c) 0

d) $-\frac{e\pi}{\sqrt{2}}$

◀

Ejercicio 28. Sea $\mathbf{F}(x, y) = (xy, x + y)$. Calcula las siguientes integrales

a) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$ donde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x^2 + y^2 = 4\}$ orientada en sentido antihorario.

b) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$ donde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x^2 + y^2 = 4\}$ orientada en sentido horario.

c) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$ donde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$ orientada en sentido antihorario.

d) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$ donde C es la gráfica de la función $y = x^3$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$.

e) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$ donde C viene parametrizada por $\gamma(t) = (t, e^{-t}), \quad t \in [0, 1]$

Solución.

a) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = 4\pi$

b) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = -4\pi$

c) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \pi - \frac{2}{3}$

d) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{2}{5}$

e) $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1-e^2}{2e^2}$

◀

Ejercicio 29. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, x^2, z^3)$, y sea $C \equiv \gamma(t) = (\cos t, 2\sin t, t), \quad t \in [0, 4\pi]$. Calcula $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$.

Solución. $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = 64\pi^4$ ◀

Ejercicio 30. Resuelve la siguiente integral $\int_C z dx + y dy + x\mathrm{d}z$ siendo C la curva dada por $\gamma(t) = (t + 1, \sqrt{t}, t^2), \quad t \in [0, 1]$.

Solución. $\int_C z dx + y dy + x\mathrm{d}z = \frac{15}{6}$ ◀

Ejercicio 31. Resuelve la siguiente integral $\int_C (y + z)dx + e^{x^2} dy + e^{xy+z}\mathrm{d}z$ siendo C la curva dada por $\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in [0, 1]$

Solución. $\int_C (y + z)dx + e^{x^2} dy + e^{xy+z}\mathrm{d}z = \frac{1}{12} + e + \frac{e^2}{2}$

◀

Ejercicio 32. Determinar si los siguientes campos son conservativos y calcula, para los conservativos, una función potencial para los mismos. Se pide también calcular para cada campo vectorial el valor de la integral a lo largo de la frontera del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ recorrido en sentido antihorario.

a) $F(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$

b) $F(x, y) = (x - y, x - 2)$

c) $F(x, y) = (e^y, x\,e^y)$

d) $F(x, y) = (1 + 2xy + \log x, x^2)$

Solución.

◄

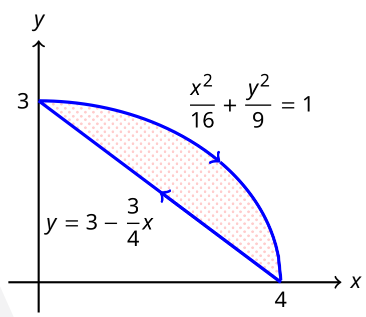
Ejercicio 33. Calcular las integrales de línea de los siguientes campos a lo largo de los caminos indicados.

a) $F(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$ y $c(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$ con $0 \le t \le \pi$.

b) $F(x, y) = (x^3y^4, x^4y^3)$ sobre el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ entre los puntos $(2, 0)$ y $(0, -2)$ recorrido en sentido antihorario.

c) $F(x, y) = (e^{2y}, 1 + 2xe^{2y})$ y $c(t) = (te^t, 1 + t)$ con $0 \le t \le 1$.

Ejercicio 34. Calcular la integral de línea del campo $F(x, y) = (y, -x)$ a lo largo de la curva C indicada en la siguiente figura.



Ejercicio 35. Determinar el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el campo $F(x, y) = (y^2 \cos(x),\ \lambda\, y \sin(x))$ sea conservativo y calcular una función potencial del mismo.

Ejercicio 36. Utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea de los siguientes campos en los caminos indicados.

a) $F(x, y) = (e^y, 2xe^y)$ a lo largo de la frontera del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ recorrido en el sentido de las agujas del reloj.

b) $F(x, y) = (y^6, -xy^5)$ a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido antihorario.

Ejercicio 37. Calcular de dos maneras distintas la integral de línea del campo vectorial

$$F(x, y) = (5 - xy - y^2, -(2xy - x^2))$$

sobre la frontera del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ recorrido en el sentido antihorario comenzando en el origen de coordenadas.

Ejercicio 38. Sean $F_1(x,y)$ y $F_2(x,y)$ dos funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$ con

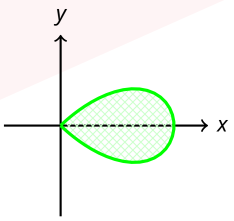
$$\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y),$$

y sea $f(x,y)$ una función potencial de $F = (F_1, F_2)$ con $f(1,1) = 7$ y $f(2,4) = 13$. Calcular la integral de línea del campo F a lo largo de la curva C si C es una curva plana simple con punto inicial $(1,1)$ y punto final $(2,4)$.

Ejercicio 39. Verificar, usando el Teorema de Green, que, si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un recinto simplemente conexo y acotado en el plano y C es la frontera de D recorrida en el sentido antihorario, entonces el área del recinto D se puede calcular con la siguiente expresión

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2}\int_C F \cdot d\vec{s}, \quad \text{siendo} \quad F(x,y) = (-y, x).$$

Utilizar la fórmula anterior para calcular el área encerrada por la curva parametrizada por



$c(t) = (-\sin^3 t,\ \cos t \sin^3 t)$

con $t \in [\pi, 2\pi]$.

Ejercicio 40. Consideremos tres funciones derivables $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $g_1(0) = 0, g_1(1) = 1, g_2(3) = -1, g_2(5) = 4, g_3(7) = \pi, g_3(-5) = 0$.

a) Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (g_1'(x), g_2'(y), g_3'(z))$. Calcula $\int_C \mathbf{F}(x,y,z)d\mathbf{r}$ donde C es una curva que comienza en el punto $(0,3,7)$ y termina en el punto $(1,5,-5)$. ¿Cuánto valdría la integral si recorremos C en el sentido opuesto?.

b) Sea $\mathbf{F}(x,y) = (g_1'(x)g_2(y), g_1(x)g_2'(y))$. Calcula $\int_C \mathbf{F}(x,y)d\mathbf{r}$ donde C es una curva que comienza en el punto $(0,5)$ y termina en el punto $(1,3)$

c) Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (g_1'(x)(1+z), g_2'(y), g_1(x))$. Calcula $\int_C \mathbf{F}(x,y,z)d\mathbf{r}$ donde C es una curva que comienza en el punto $(0,5,0)$ y termina en el punto $(1,5,1)$.

Ejercicio 41. Sea $\mathbf{F}(x,y) = \left(\log(y^2+3) + x^2,\ \frac{2xy}{y^2+3} + 3x\right)$. Sea C el contorno del rectángulo de vértices $(0,0),\ (0,2),\ (3,0),\ (3,2)$. Calcula $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$

Ejercicio 42. Sea $\mathbf{F}(x,y) = \left(x^{3x},\ y^y + x^3\right)$. Sea C la circunferencia de radio unidad centrada en el origen. Calcula $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$

Ejercicio 43. Sea $\mathbf{F}(x,y) = \left(x^3 - y^5 - \frac{5}{3}x^2y^3,\ y^7 + x^5 + \frac{5}{3}x^3y^2\right)$. Sea C la circunferencia de radio unidad centrada en el origen. Calcula $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$

Ejercicio 44. Sea $C \equiv \gamma(t) = (\sin(2t), \cos t \sin^2 t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Calcula el área del recinto encerrado por la curva C.

Ejercicio 45. Sea $C \equiv \gamma(t) = (\sin t \cos^n t, \sin(2t)), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Calcula el área del recinto encerrado por la curva C.

Ejercicio 46. Sea $C \equiv \gamma(t) = (\sin^2 t \cos t, \sin t \cos^2 t), \quad t \in [0, 2\pi]$. Calcula el área del recinto encerrado por la curva C.

(Ayuda: Utiliza el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$).

A. Ejercicios resueltos.

1.. Calcular (usando la fórmula de cálculo estándar) las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C xe^y \mathrm{d}x$, donde C es el arco de la curva $x = e^y$ entre los puntos $(1,0)$ y $(e,1)$.

(b) $\int_C \sin x \mathrm{d}x + \cos y \mathrm{d}y$, donde C es la curva compuesta por el semicírculo superior $x^2 + y^2 = 1$ entre los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ y el segmento de recta entre los puntos de coordenadas $(-1,0)$ y $(-2,3)$.

Solución. (a) Se trata de una curva que se puede parametrizar como gráfica de una función, $c(t) = (e^t, t)$ con $t \in [0,1]$. Por tanto, usando la fórmula de cálculo para la integral parcial de línea tenemos

$$\int_C xe^y \mathrm{d}x = \int_0^1 e^t e^t e^t \mathrm{d}t = \int_0^1 e^{3t} \mathrm{d}t = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$

(b) En este ejemplo hay que calcular por separado la integral de línea en cada uno de los trozos de curva descritos en el enunciado, y después sumar para obtener el resultado final. Separamos pues la curva C en los dos trozos

• C_1 es el semicírculo superior, parametrizado por coordenadas polares $c_1(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0,\pi]$. En este caso, usando la fórmula de cálculo de las integrales parciales de línea, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \sin x \mathrm{d}x + \cos y \mathrm{d}y &= \int_0^\pi (\sin(\cos(t))x'(t) + \cos(\sin(t))y'(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi (\sin(\cos t)(-\sin t) + \cos(\sin t)\cos t)\mathrm{d}t \\ &= (-\cos(\cos t) + \sin(\sin t))\Big|_0^\pi = -\cos(-1) + \cos(1) = 0.\end{aligned}$$

• C_2 es el segmento que une los puntos $(-1,0)$ y $(-2,3)$, es decir, se parametriza con

$$c_2(t) = (1-t)(-1,0) + t(-2,3) = (-1-t, 3t),$$

y la integral de línea se calcula como:

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \sin x \mathrm{d}x + \cos y \mathrm{d}y &= \int_0^1 (\sin(-1-t)(-1) + 3\cos(3t))\mathrm{d}t = (\sin(3t) - \cos(1+t))\Big|_0^1 \\ &= \sin 3 - \cos 2 + \cos 1.\end{aligned}$$

Sumando, este último resultado es el resultado final. Como observación, el campo $\overline{F}(x,y) = (\sin x, \cos y)$ es un campo conservativo con función potencial $f(x,y) = \sin y - \cos x$, por tanto se podía haber utilizado el Teorema fundamental de las integrales de línea para obtener (con mayor rapidez) el mismo resultado.

2. Calcular las siguientes dos integrales de línea escalares:

(a) $\int_C 2xyz\mathrm{d}x + x^2 z\mathrm{d}y + x^2 y\mathrm{d}z$, donde C es la curva parametrizada

$$c(t) = \left(t^2, \sin\frac{\pi t}{4}, e^{t^2-2t}\right), \quad t \in [0,2].$$

(b) $\int_C \sin x \mathrm{d}x + z\cos y \mathrm{d}y + \sin y \mathrm{d}z$, donde C es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ orientada en sentido positivo (es decir antihorario).

Solución. Recordamos la correspondencia entre la integral de línea escalar y la integral de línea vectorial

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{s} = \int_C F_1 \mathrm{d}x + F_2 \mathrm{d}y + F_3 \mathrm{d}z,$$

donde $\overline{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Usamos esta correspondencia en este ejercicio para ver las integrales que debemos calcular como integrales de línea de campos vectoriales (que van a ser conservativos) y así usar el Teorema fundamental de las integrales de línea.

(a) En este caso tenemos

$$\int_C 2xyz\mathrm{d}x + x^2z\mathrm{d}y + x^2y\mathrm{d}z = \int_C \overline{F}\cdot \mathrm{d}s, \qquad \overline{F} = (2xyz, x^2z, x^2y).$$

Es fácil observar que el campo $\overline{F}$ es conservativo y tiene como función potencial $f(x,y,z) = x^2yz$, y podemos así usar el teorema fundamental de las integrales de línea para calcular la integral evaluando la función potencial en las extremidades de la curva:

$$\int_C 2xyz\mathrm{d}x + x^2z\mathrm{d}y + x^2y\mathrm{d}z = f(c(2)) - f(c(0)) = f(4,1,1) - f(0,0,1) = 16.$$

(b) En este caso tenemos

$$\int_C \sin x\mathrm{d}x + z\cos y\mathrm{d}y + \sin y\mathrm{d}z = \int_C \overline{F}\cdot \mathrm{d}s, \qquad \overline{F} = (\sin x, z\cos y, \sin y)$$

y observamos de nuevo que el campo $\overline{F}$ es conservativo y tiene como función potencial $f(x,y,z) = z\sin y - \cos x$. Teniendo en cuenta que la curva C es una curva cerrada (una elipse), resulta que la integral de línea es igual a cero.

3. Decidir cuáles de los siguientes cuatro campos vectoriales es conservativo, y en caso afirmativo, hallar su función potencial: $\overline{F}_1(x,y) = (e^x\sin y, e^x\cos y)$, $\overline{F}_2(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y)$, $\overline{F}_3(x,y) = (ye^x + \sin y, e^x + x\cos y)$ y $\overline{F}_4(x,y) = (3x^2 - 2y^2, 4xy + 3)$.

Solución. Observamos que todos estos campos tienen como dominio de definición todo $\mathbb{R}^2$, sin puntos exceptuados, es decir simplemente conexo, por tanto para decidir si los campos son conservativos basta por verificar la igualdad de las derivadas cruzadas.

• Para el campo $\overline{F}_1$ observamos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x\cos y,$$

por tanto el campo es conservativo. Es bastante evidente que $f_1(x,y) = e^x\sin y$ es la función potencial de este campo.

• Para el campo $\overline{F}_2$ observamos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -e^x\sin y, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x\sin y,$$

por tanto el campo $\overline{F}_2$ no es conservativo.

• Para el campo $\overline{F}_3$ observamos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x + \cos y,$$

por tanto el campo $\overline{F}_3$ es conservativo. Usando el algoritmo habitual para hallar una función potencial obtenemos desde el primer intento que una función potencial de este campo es $f_3(x,y) = ye^x + x\sin y$.

• Para el campo $\overline{F}_4$ observamos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -4y, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 4y,$$

por tanto el campo $\overline{F}_4$ no es conservativo.

4. Calcular las integrales de línea siguientes:

(a) $\int_C (\log x + y)\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y$, donde C es el rectángulo de vértices $(1,1)$, $(3,1)$, $(1,4)$ y $(3,4)$.

(b) $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{s}$, donde $\overline{F}(x, y) = (xy, x^2 + x)$ y C es el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Solución. La idea de este ejercicio es darse cuenta que se trata en cada caso de *curvas cerradas* y poder usar el Teorema de Green.

(a) Es evidente que un rectángulo (recorrido en sentido antihorario) es una curva cerrada y como el campo vectorial

$$\overline{F}(x, y) = (\log x + y, -x^2)$$

está definido en el interior del triángulo, se puede aplicar el teorema de Green. Obtenemos así que

$$\int_C (\log x + y)dx - x^2 dy = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D (-2x + 1)dxdy,$$

donde D es el interior del rectángulo, que se puede describir como $\{1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$. Pasando a integrales iteradas tenemos

$$\int_C (\log x + y)dx - x^2 dy = \int_1^3 \int_1^4 (-2x + 1)dydx = 3\int_1^3 (-2x + 1)dx = -18.$$

(b) En este caso, el triángulo con vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ es una curva cerrada y su interior D se puede describir como $\{0 \leq y \leq 1, y - 1 \leq x \leq 1 - y\}$ (ya que la arista que une los vértices $(-1, 0)$ y $(0, 1)$ es un segmento de la recta $x = y - 1$ y la arista que une los vértices $(1, 0)$ y $(0, 1)$ es un segmento de la recta $x + y = 1$) y esta descripción se va a usar para calcular la integral doble. Usando el Teorema de Green, tenemos

$$\begin{aligned}\int_C \overline{F} \cdot d\overline{s} &= \int\int_D (x + 1)dxdy = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (x + 1)dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg\|_{x=y-1}^{x=1-y} dy = \int_0^1 (2 - 2y)dy = 1.\end{aligned}$$

5. Calcular la integral de línea vectorial $\int_C \overline{F} \cdot ds$, donde C es el arco de la parábola $y = 1 + x^2$ entre los puntos de coordenadas $(-1, 2)$ y $(1, 2)$ y el campo vectorial $\overline{F}$ es

$$\overline{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Solución. Con la fórmula de cálculo de la definición, podemos parametrizar la curva como gráfica de una función $c(t) = (t, 1 + t^2)$, $t \in [-1, 1]$ y calcular la integral de línea, obteniendo que la función de t que se debe integrar al final es una función impar. En efecto, tenemos

$$\overline{F}(x(t), y(t)) = \overline{F}(t, 1 + t^2) = \left(\frac{t}{t^2 + (1 + t^2)^2}, \frac{1 + t^2}{t^2 + (1 + t^2)^2}\right)$$

y $c'(t) = (1, 2t)$, por tanto usando la fórmula de cálculo de una integral de línea de campo vectorial (con el producto escalar entre los vectores $\overline{F}(c(t))$ y $c'(t)$) obtenemos

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{s} = \int_{-1}^1 \frac{t(2t^2 + 3)}{t^2 + (1 + t^2)^2} dt = 0,$$

ya que el integrando es una función impar de t y el intervalo de integración $[-1, 1]$ es simétrico respecto a 0.

De forma **alternativa**, observamos que el campo vectorial

$$\overline{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

satisface la condición de igualdad de las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^4},$$

pero su dominio de definición no es simplemente conexo (es $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$). Pero en este caso, a diferencia del campo de la vorticidad visto en clase, se puede **probar que este campo sí es conservativo** usando un teorema que no hemos dado pero hemos comentado en clase: si la integral sobre cualquier circunferencia vale 0, entonces es conservativo (se puede verificar tomando circunferencias centradas en $(0,0)$, parametrizando con $(x(t), y(t)) = (r\cos t, r\sin t)$ y efectuar el cálculo exactamente como hemos hecho para el campo de vorticidad; en este caso sí da 0 como resultado). Observamos además que admite una función potencial definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2).$$

Podemos aplicar el Teorema fundamental de las integrales de línea para concluir que

$$\int_C \overline{F} \cdot \mathrm{d}\overline{s} = f(1,2) - f(-1,2) = 0,$$

ya que la función $f(x,y)$ es par.

6. Sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y) = (2xe^y, x + x^2e^y)$ y sea C el cuarto de círculo de radio 4 en el primer cuadrante, es decir la parte del círculo de radio 4 comprendida entre los puntos $A = (4,0)$ y $B = (0,4)$. Se pide:

(a) Hallar una función potencial $V(x,y)$ tal que se pueda escribir $\overline{F}(x,y) = \overline{G}(x,y) + \nabla V(x,y)$, donde $\overline{G}(x,y) = (0,x)$.

(b) Verificar que la integral de línea del campo vectorial $\overline{G}(x,y) = (0,x)$ sobre los segmentos OA y OB es cero, donde $O = (0,0)$ es el origen.

(c) Usar los resultados de los apartados (a) y (b) y el teorema de Green para calcular $\int_C \overline{F} \cdot \mathrm{d}s$.

Solución. Se trata de un ejercicio algo más complejo que introduce la *técnica de descomposición* en el cálculo de integrales de línea: cada campo en $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como una suma entre un campo conservativo y un campo de la forma $(0, F_2(x,y))$, y con este segundo campo se puede trabajar más fácilmente.

(a) Observamos que podemos escribir

$$\overline{F}(x,y) = (0,x) + (2xe^2, x^2e^y) = (0,x) + \nabla V(x,y),$$

donde $V(x,y) = x^2e^y$. Ponemos $\overline{G}(x,y) = (0,x)$.

(b) La parametrización del segmento OA está dada por

$$c_1(t) = (1-t)(0,0) + t(4,0) = (4t, 0), \qquad t \in [0,1].$$

Calculando con la fórmula de definición, tenemos $c_1'(t) = (4,0)$ para todo $t \in [0,1]$, por tanto

$$\overline{G}(c_1(t)) \cdot c_1'(t) = (0,4t) \cdot (4,0) = 0,$$

y obtenemos que

$$\int_{OA} \overline{G} \cdot \mathrm{d}\overline{s} = 0.$$

De la misma manera, la parametrización del segmento OB está dada por

$$c_2(t) = (1-t)(0,0) + t(0,4) = (0,4t), \qquad t \in [0,1].$$

Calculando con la fórmula de definición, tenemos $c_2'(t) = (0,4)$ para todo $t \in [0,1]$, por tanto

$$\overline{G}(c_2(t)) \cdot c_1'(t) = (0,0) \cdot (0,4) = 0,$$

y obtenemos que

$$\int_{OB} \overline{G} \cdot \mathrm{d}\overline{s} = 0.$$

(c) Usando la linealidad de la integral de línea y la descomposición efectuada en el apartado (a), y aplicando el Teorema fundamental de las integrales de línea para el campo conservativo ∇V, tenemos

$$\int_C \overline{F} \cdot \mathrm{d}\overline{s} = \int_C \overline{G} \cdot \mathrm{d}s + \int_C \nabla V \cdot \mathrm{d}s = \int_C \overline{G} \cdot \mathrm{d}s + V(0,4) - V(4,0).$$

Por una parte, recordando que $V(x,y) = x^2 e^y$ tenemos $V(0,4) - V(4,0) = -16$. Por otra parte, para calcular la integral de línea del campo vectorial $\overline{G}$, *podemos añadir los segmentos OA y BO* (orientados en esta dirección) para obtener así una curva cerrada y poder aplicar el Teorema de Green. En efecto, como hemos calculado en el apartado (b), la integral del campo $\overline{G}$ sobre dichos segmentos es cero, por tanto se puede escribir

$$\int_C \overline{G} \cdot \mathrm{d}s = \int_{OA} \overline{G} \cdot \mathrm{d}s + \int_C \overline{G} \cdot \mathrm{d}s + \int_{BO} \overline{G} \cdot \mathrm{d}s$$

y la última suma nos da la integral del campo $\overline{G}$ sobre la curva cerrada que es la frontera del sector de círculo OAB. Para esta integral de línea sobre la curva cerrada podemos aplicar el Teorema de Green y obtener que

$$\int_C \overline{G} \cdot \mathrm{d}\overline{s} = \int \int_D 1 \mathrm{d}A = 4\pi,$$

ya que el dominio D es el cuarto de círculo de radio 4 y la última integral obtenida representa el área de ese cuarto de círculo (que es un cuarto del área total del disco de radio 4). Juntando todos los cálculos efectuados, obtenemos que

$$\int_C \overline{F} \cdot \mathrm{d}\overline{s} = \int_C \overline{G} \cdot \mathrm{d}\overline{s} + V(0,4) - V(4,0) = 4\pi - 16.$$

7. Calcular las siguientes integrales de línea sobre la curva C

(a) $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})\mathrm{d}x + (2x + \cos y^2)\mathrm{d}y$, donde C es la curva frontera de la región limitada por las parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

(b) $\int_C \sin y \mathrm{d}x + x \cos y \mathrm{d}y$, donde C es la elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Solución. (a) Se observa que la curva C es una curva cerrada, por tanto se puede aplicar el Teorema de Green. Tenemos $F_1(x,y) = y + e^{\sqrt{x}}$, $F_2(x,y) = 2x + \cos y^2$, por tanto

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 - 1 = 1.$$

Aplicando el teorema de Green, obtenemos que

$$\int_C (y + e^{\sqrt{x}})\mathrm{d}x + (2x + \cos y^2)\mathrm{d}y = \iint_D 1 \mathrm{d}A,$$

donde D es el recinto plano limitado por las dos curvas. Observando que los puntos de intersección entre las dos curvas son $(0,0)$ y $(1,1)$, y que si $0 \leq x \leq 1$ tenemos $x^2 \leq \sqrt{x}$, podemos describir el dominio D en la forma

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

y pasamos a integrales iteradas:

$$\iint_D 1\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

(b) Observamos que el campo $\overline{F}(x,y) = (\sin y, x\cos y)$ es conservativo, al estar definido en todo $\mathbb{R}^2$ (simplemente conexo) y cumplir la igualdad de las derivadas cruzadas (cálculo obvio). Como la elipse es una curva cerrada, el resultado de la integral es 0.

8. Calcular las siguientes integrales de línea de campos vectoriales:

(a) $\int_C \overline{F}\cdot\mathrm{d}\overline{s}$, donde $\overline{F} = (2xz+y^2, 2xy, x^2+3z^2)$ y C es la curva parametrizada $c(t) = (t^2, t+1, 2t-1)$, $t \in [0,1]$.

(b) $\int_C \overline{F}\cdot\mathrm{d}\overline{s}$, donde $\overline{F} = (e^y, xe^y, (z+1)e^z)$ y C es la curva parametrizada $c(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$.

Solución. (a) El campo $\overline{F}$ es conservativo, lo que se puede ver verificando las igualdades de las derivadas cruzadas (aquellas que hemos llamado $(*)$ en los apuntes teóricos). Tenemos que hallar su función potencial, usando el algoritmo conocido (esta vez en tres pasos, al tratarse de un campo en $\mathbb{R}^3$). Integrando primero en x, obtenemos

$$f(x,y,z) = \int (2xz + y^2)\mathrm{d}x = x^2z + xy^2 + g(y,z),$$

donde $g(y,z)$ es la çonstante de integración". Derivamos ahora respecto de y y obtenemos

$$2xy + \frac{\partial g}{\partial y} = 2xy \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

es decir $g(y,z) = h(z)$. Derivando finalmente en z tenemos

$$x^2 + h'(z) = x^2 + 3z^2 \Longrightarrow h'(z) = 3z^2 \Longrightarrow h(z) = z^3.$$

Por tanto, una función potencial del campo $\overline{F}$ es $f(x,y,z) = x^2z + xy^2 + z^3$. Aplicando el Teorema fundamental de las integrales de línea, obtenemos

$$\int_C \overline{F}\cdot\mathrm{d}\overline{s} = f(c(1)) - f(c(0)) = f(1,2,1) - f(0,1,-1) = 1 + 4 + 1 - (-1)^3 = 7.$$

(b) Seguimos el mismo plan que en el apartado (a), observando que el campo $\overline{F}$ es también conservativo y su función potencial se obtiene de la misma forma que en el apartado (a). En este caso, en los primeros dos pasos obtenemos

$$f(x,y,z) = xe^y + h(z), \qquad h'(z) = (z+1)e^z,$$

e integrando en z obtenemos $h(z) = ze^z$, por tanto $f(x,y,z) = xe^y + ze^z$. De nuevo, aplicando el Teorema fundamental de las integrales de línea, obtenemos

$$\int_C \overline{F}\cdot\mathrm{d}\overline{s} = f(c(1)) - f(c(0)) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 2e.$$

9. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\overline{F} = (2y^{3/2}, 3x\sqrt{y})$ para mover un objeto desde el punto $P = (1,1)$ hasta el punto $Q = (2,4)$.

Solución. Como no se tiene ninguna curva específica, este ejercicio solo podría ser correcto si el campo fuera conservativo, y efectivamente lo es: es fácil comprobar la igualdad de las derivadas cruzadas (ambas dan como resultado $3\sqrt{y}$). Por tanto, buscando una función potencial, obtenemos

$$f(x,y) = 2xy^{3/2}.$$

Por el Teorema fundamental de las integrales de línea, obtenemos que el trabajo está dado por

$$f(Q) - f(P) = f(2,4) - f(1,1) = 32 - 2 = 30.$$

10. Un objeto parte desde el punto $(-2,0)$, se mueve hasta el punto $(2,0)$ a lo largo del eje X, y después desde el punto $(2,0)$ vuelve al punto inicial $(-2,0)$ describiendo el semicírculo $y = \sqrt{4-x^2}$. Encontrar el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\overline{F} = (x, x^3 + 3xy^2)$ para mover ese objeto a lo largo del camino indicado.

Solución. Sabemos que el trabajo se calcula con la integral de línea del campo vectorial $\overline{F}$. Podemos observar que el objeto describe una curva cerrada y simple, por tanto nos sugiere utilizar el Teorema de Green. Observamos que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3(x^2 + y^2).$$

Aplicando el Teorema de Green, obtenemos que

$$W = \iint_D 3(x^2 + y^2)\mathrm{d}A,$$

donde D es la mitad superior del disco $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$. Podemos pasar a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, donde $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq \pi$ (solo tenemos la región donde $y \geq 0$, la mitad superior del círculo). Por tanto, recordando que $x^2 + y^2 = r^2$ y que el jacobiano es r, tenemos

$$W = 3\int_0^{\pi}\int_0^2 r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 3\pi \frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=2} = 12\pi.$$

11. Sea una curva C parametrizada por $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi]$, y sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^3$. Calcula $\int_C f(x,y)\mathrm{d}s$

Solución:

En primer lugar podemos observar que la curva es simétrica respecto a los ejes X e Y respectivamente, además podemos escribir la integral como sigue

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_C (x^2 + y^3)\mathrm{d}s = \int_C x^2\mathrm{d}s + \int_C y^3\mathrm{d}s.$$

Ahora bien, la segunda integral es impar en la variable y, por lo que es igual a cero ya que la curva es simétrica respecto del eje X. Por tanto

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_C x^2\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \cos^6 t \cdot |\gamma'(t)|dt,$$

lo que simplifica los cálculos. Derivando tenemos que $\gamma'(t) = (-3\cos^2 t\sin t,\ 3\sin^2 t\cos t) = 3\sin t\cos t(-\sin t, \cos$ y calculando la norma obtenemos $|\gamma'(t)| = 3|\cos t\sin t|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3|\cos t\sin t|$. Por simetría el valor de la integral debe ser igual en los cuatro cuadrantes por lo que simplemente podemos escribir

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 t \cdot |\gamma'(t)|dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^7 t\sin t dt = \frac{-12}{8}\cos^8 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

6. Integrales de superficie

Ejercicio 1. Parametrizar las siguientes superficies (soluciones no son únicas).

a) $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$

b) $P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 3 \}$

c) $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36,\ x \geq 0,\ z \geq 0 \}$

d) $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 2,\ x \geq 0 \}$

Solución. (a) $G(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v), (u, v) \in [0, \pi/2] \times [0, 1]$,
(b) $G(u, v) = (u, v, u + 2v - 3), (u, v) \in \mathbb{R}^2$,
(c) $G(\theta, \phi) = (6 \sin\phi \cos\theta, 3 \sin\phi \sin\theta, 2 \cos\phi), (\theta, \phi) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, \pi/2]$,
(d) $G(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), v), (u, v) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2]$.)

◄

Ejercicio 2. Parametrizar las siguientes superficies.

a) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1 \}$

b) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$

c) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 3 \}$

d) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0 \}$

e) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \}$

f) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 2 \}$

g) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 2,\ x \geq 0 \}$

Ejercicio 3. Obtén el área de las siguientes superficies:

a) $\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0, y \geq 0 \right\}$.

b) $\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ z = 1 - \frac{x^2}{2} - y^2, \quad z \geq 0 \right\}$.

c) $\mathcal{S} \equiv \varphi(s, t) = \Big(t - 3, st, s + 5\Big), \quad \text{donde} \quad s^2 + t^2 \leq 2.$

d) $\mathcal{S} \equiv \varphi(s, t) = \Big(s\ \cos t,\ s\, sint,\ s\Big), \quad s \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi].$

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales de superficie.

a) $\iint_S x \mathrm{d}S$, siendo S el trozo de la esfera de radio 2 del primer octante.

b) $\iint_S z \mathrm{d}S$, siendo S la intersección de la esfera de radio 1 con $x \geq 0$.

c) $\iint_S \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \mathrm{d}S$, siendo S la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ situada entre los planos $z = 0$ y $z = 2$.

d) $\iint_S z^2 \mathrm{d}S$, siendo S la esfera de radio 1.

Ejercicio 5. Calcular la integral de los siguientes campos vectoriales en las superficies indicadas.

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ en el cilindro $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1 \}$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, x^2 + y^2)$ en el disco $\{ (x, y, 3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \}$.

c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ en la esfera centrada en el origen de coordenadas y de radio 2.

Ejercicio 6. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$.

a) Determinar si es conservativo.

b) Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F}$ sobre la elipse $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 2\sin t, 3)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 7. Calcular, utilizando el teorema de Stokes, la integral de línea del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$ sobre la semicircunferencia (con orientación positiva) de ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ con $y \geq 0$ y situada en el plano $z = 0$.

Ejercicio 8. Calcular, de dos maneras distintas, la integral de línea

$$\int_C (2y, 3x, -z^3) \cdot d\mathbf{s},$$

siendo C la circunferencia $\mathbf{c}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 9. Calcular, utilizando el teorema de la divergencia, la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ y S es la frontera del sólido $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \}$.

Ejercicio 10. Calcular la integral de superficie del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ sobre las seis caras del cubo

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 \}.$$

Ejercicio 11. Calcular las siguientes integrales de superficie.

a) $\displaystyle\iint_\Phi x\, dS$, siendo Φ el trozo de la esfera de radio 2 del primer octante.

b) $\displaystyle\iint_\Phi \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS$, siendo Φ el trozo del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre los planos $z = 0$ y $z = 2$.

Solución. (a) 2π; (b) $2\pi \arctan(2)$. ◂

Ejercicio 12. Calcular la integral de los siguientes campos vectoriales en las superficies indicadas.

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0,\ 0,\ x^2 + y^2)$ en $R = \{ (x, y, 3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \}$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y,\ -x,\ z^2)$ en la esfera centrada en el origen de coordenadas y de radio 2.

Solución. (a) 8π, (b) 0 ◂

Ejercicio 13. Calcular, utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, la integral de superficie

$$\int_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\ ,$$

siendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3,\ y^3,\ z^3) \quad \text{y} \quad W = \{ x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \}.$$

Solución. $384\pi/5$. ◂

Ejercicio 14. Calcular, utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, la integral de superficie del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$ sobre las seis caras del cubo

$$C = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1 \,\}\,.$$

Solución. 3 ◄

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{S}$ la superficie de una semiesfera de radio 1 centrada en el origen, con $z \geq 0$. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcula $\iint_{\mathcal{S}} f(\mathbf{r})\mathrm{d}S$.

Ejercicio 16. Sea $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ x^2 + y^2 = 2z^2, z \in [0, 1]\right\}$, y sea

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2.$$

Calcula $\iint_{\mathcal{S}} f(\mathbf{r})dS$

Ejercicio 17. Sea $\mathcal{S}$ parametrizada por

$$\varphi(s, t) = \left(s^2 \cos t,\ s^2 \sin t, s\right), \quad s \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi)$$

y sea $f(x, y, z) = 6x^2z + z^3 + 6y^2z$. Calcula $\iint_{\mathcal{S}} f(\mathbf{r})dS$.

Ejercicio 18. Consideremos el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcula $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ para las siguientes superficies:

a) $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ x + y + z = 0, \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]\right\}$.

b) $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad z \in [0, 1]\right\}$.

c) $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad z \in [0, 1], \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\right\}$.

d) $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ z = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\right\}$.

e) $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ z = x^2 + y^2, \quad z \in [0, 1]\right\}$.

Ejercicio 19. Consideremos el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x,\ \sqrt{x^2 + y^2},\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, calcula $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ para las siguientes superficies:

a) $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad z \geq 0\right\}$.

b) $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\right\}$.

c) $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ x^2 + y^2 = z^2, \quad z \in [0, 1],\right\}$.

d) $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ x^2 + y^2 = z^2, \quad z \in [0, 1], \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\right\}$.

Ejercicio 20. Sea $\mathcal{S}$ la superficie de una esfera de radio ρ centrada en el origen. Calcula $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ para los siguientes campos vectoriales:

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -y, 2z)$.

c) $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,z,x)$.

Ejercicio 21. Sea $\mathcal{S}$ una superficie que encierra una región sólida Q, con volumen $V(Q)=3$. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x,y,z)=(ax+b\sin z, by+c\sin x, cz+a\sin y)$, donde a,b y c son valores reales. Sabiendo que $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}=15$ determina la relación que deben satisfacer los valores a,b,c.

Ejercicio 22. Resuelve las siguientes integrales

a) $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(x^5+y^4,\ y^3+e^z,\ x^7y-5zx^4)$ y $\mathcal{S}$ es la superficie de un cilindro (incluyendo las bases) de altura 2 y cuyas bases tienen radio $\sqrt{3}$ y están centradas en los puntos $(0,0,0)$ y $(0,0,2)$ respectivamente.

b) $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(x^3+y^3,\ y^3+x^2,\ z^3+y^2)$ y $\mathcal{S}$ es la superficie de la esfera de radio 2 centrada en el origen.

c) $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(x^2yz,\ xy^2z,\ x^2y^2)$ y donde $\mathcal{S}$ es la superficie que envuelve a

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\Big/x^2+y^2+z^2\leq 2,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0\right\}$$

d) $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(x,\ y,\ z)$ y donde $\mathcal{S}$ es la superficie que envuelve a

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\Big/x^2+y^2\leq 3z^2,\quad y\geq 0,\quad z\in[0,1]\right\}$$

e) $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(3xy,\ yx,\ z)$ y donde $\mathcal{S}$ es la superficie que envuelve a

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\Big/x^2+y^2\leq z^2,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\in[0,1]\right\}$$

Ejercicio 23. Calcula $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{G}(\mathbf{r})\widehat{N}dS$ siendo $G(x,y,z)=(2y,2z,2x)$ y donde

$$\mathcal{S}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\Big/x^2+y^2=(2^{\cos^5 z}-1)^2,\quad z\in[0,\frac{\pi}{2}]\right\}.$$

Ayuda: Ten en cuenta que, tomando $\mathbf{F}(x,y,z)=(z^2,x^2,y^2)$ se obtiene

$$\nabla\times\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{G}(x,y,z).$$

Ejercicios resueltos.

1. Se considera el triángulo de vértices de coordenadas $A=(0,0,3)$, $B=(1,0,2)$ y $C=(0,4,1)$.
(a) Hallar la ecuación del plano que contiene los puntos A, B y C. Establecer una parametrización del triángulo.
(b) Calcular la integral de superficie $\int\int_S(xy+e^z)dS$, donde S es el triángulo de vértices A, B, C.
Solución. (a) Buscamos un plano de la forma $z=ax+by+c$, ya que hemos aprendido que un plano se puede escribir como una gráfica de una función. Tenemos que
• $(0,0,3)$ pertenece al plano, es decir, $c=3$.
• $(1,0,2)$ pertenece al plano, es decir, $2=a+c$ y resulta $a=-1$.
• $(0,4,1)$ pertenece al plano, es decir $1=4b+3$ y resulta $b=-1/2$.
Por tanto el plano que pasa por los tres puntos es $z=-x-y/2+3$, o de forma equivalente $x+y/2+z=3$. Sabemos que el vector normal al plano se obtiene poniendo los coeficientes de x,y,z, es decir $\mathbf{n}=(1,1/2,1)$. En cuanto a la parametrización, siguiendo la idea de otro ejercicio que hemos resuelto en una clase presencial, el triángulo incluido en el plano de arriba se parametriza como una

gráfica de una función despejando z, donde (x, y) pertenecen al triángulo (dentro del plano $z = 0$) obtenido por **copiar las componentes** (x, y) **de cada uno de los vértices** y simplemente borrando z, es decir, el triángulo (en $\mathbb{R}^2$, en coordenadas (x, y)) de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 4)$. Observamos que se trata de un triángulo rectángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(0, 4)$, es decir la recta $x + y/4 = 1$. Por tanto podemos escribir ese dominio como $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 4(1 - x)$. Obtenemos finalmente la parametrización del triángulo:

$$g(x, y) = \left(x, y, 3 - x - \frac{1}{2}y\right), \qquad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le z \le 1, 0 \le y \le 4(1 - x)\}.$$

(b) Ahora se puede usar la fórmula directa de cálculo de las integrales de superficie escalares observando que

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{1 + 1 + 1/4} = \frac{3}{2},$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\int\int_S (xy + e^z)\mathrm{d}S &= \int\int_D (xy + e^{3-x-y/2})\|\mathbf{n}\|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{4(1-x)} xy + e^{3-x-y/2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} - 2e^{3-x-y/2}\right)\Big|_{y=0}^{y=4(1-x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 (8x(1-x)^2 - 2e^{x+1} + 2e^{3-x})\mathrm{d}x \\
&= 1 + 3e(e-1)^2.
\end{aligned}$$

2. Se considera la superficie S obtenida como frontera de la región limitada por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$ y $x + y = 5$. Se pide:

(a) Hallar una parametrización de la superficie S.

(b) Calcular la integral de superficie $\int\int_S xz\mathrm{d}S$.

Solución. (a) La superficie S se compone de tres partes distintas y se debe escribir como una unión $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde S_1 es la base del cilindro (en el plano $x = 0$, observamos que en este caso es la componente x la que cuenta como .altura.en vez de z) en el plano $x = 0$, S_2 es la superficie lateral del cilindro y S_3 es la intersección del cilindro con el plano $x + y = 5$. Por tanto, tenemos que parametrizar por separado cada una de esas superficies, calcular por separado las integrales de superficie correspondientes y al final sumarlas. No olvidemos que **la variable** x **juega el papel de la habitual variable vertical** z **en este ejercicio**. Por tanto:

• la superficie S_1 es el disco de radio 3 en variables (y, z) dentro del plano $x = 0$, y se parametriza con coordenadas polares en (y, z):

$$g_1(r, \theta) = (0, r\cos\theta, r\sin\theta), \qquad 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

• la superficie S_2 es una parte de la superficie lateral del cilíndro, por tanto se parametriza con coordenadas cilíndricas dejando x como variable libre y observando que los límites de x son entre 0 y $5 - y$. Más precisamente tenemos la parametrización

$$g_2(x, \theta) = (x, 3\cos\theta, 3\sin\theta), \qquad 0 \le x \le 5 - y = 5 - 3\cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

• la superficie S_3 representa la intersección del (interior del) cilindro con el plano $x + y = 5$. Por tanto se parametriza con coordenadas cilíndricas en variables (y, z) y teniendo en cuenta que $x = 5 - y$ sobre la superficie S_3. Más precisamente tenemos la parametrización

$$g_3(r, \theta) = (5 - r\cos\theta, r\cos\theta, r\sin\theta), \qquad 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Hemos obtenido así la parametrización de la superficie S como una unión de tres superficies parametrizadas.

(b) Tenemos

$$\int\int_S xz\mathrm{d}S = \int\int_{S_1} xz\mathrm{d}S + \int\int_{S_2} xz\mathrm{d}S + \int\int_{S_3} xz\mathrm{d}S = I_1 + I_2 + I_3.$$

Observamos primero sin calcular nada que $I_1 = \int\int_{S_1} xz\mathrm{d}S = 0$, ya que **el integrando es cero** al ser S_1 una parte del plano $x = 0$. Pasamos ahora al cálculo de I_2. Para ello, siguiendo la fórmula de cálculo de las integrales escalares de superficie, calculamos los vectores tangentes principales

$$T_x(x,\theta) = (1,0,0), \qquad T_\theta(x,\theta) = (0, -3\sin\theta, 3\cos\theta),$$

y el vector normal a la superficie S_2 y su norma

$$\mathbf{n}(x,\theta) = (0, -3\cos\theta, -3\sin\theta), \qquad \|\mathbf{n}\| = 3.$$

Por tanto, usando la parametrización g_2 podemos calcular la integral I_2 (sin olvidar multiplicar por 3 por la norma del vector normal):

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{5-3\cos\theta} 9x\sin\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = 9\int_0^{2\pi}\frac{(5-3\cos\theta)^2}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(25\sin\theta - 30\sin\theta\cos\theta + 9\cos^2\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0, \end{aligned}$$

como se puede averiguar calculando término con término. Finalmente, llegamos a calcular la integral I_3. Para ello, usamos la parametrización g_3 y calculamos los dos vectores principales

$$T_r(r,\theta) = (-\cos\theta, \cos\theta, \sin\theta), \qquad T_\theta(r,\theta) = (r\sin\theta, -r\sin\theta, r\cos\theta),$$

y el vector normal y su norma, haciendo el producto vectorial

$$\mathbf{n}(r,\theta) = (r,r,0), \qquad \|\mathbf{n}\| = r\sqrt{2}.$$

Por tanto la integral de superficie I_3 se calcula como

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (5 - r\cos\theta)r\sin\theta r\sqrt{2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0,$$

ya que la integral entre 0 y 2π de las funciones trigonométricas $\sin\theta$ y $\sin\theta\cos\theta$ es 0. Por tanto

$$\int\int_S xz\mathrm{d}S = 0.$$

Como observación, se podía adivinar este resultado desde el principio dado que la superficie es totalmente simétrica respecto a la componente z y la componente z aparece en el integrando, es decir, sería como integrar una función impar. Otra observación es que **no podemos usar el Teorema de la Divergencia**: la superficie es cerrada pero **la función a integrar es escalar, no un campo vectorial**.

3. Calcular las siguientes integrales de superficies escalares:

(a) La integral de la función $f(x,y,z) = y$ sobre la superficie S porción de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ con $0 \leq y \leq 1$.

(b) La integral de la función $f(x,y,z) = z^2$ sobre la superficie S que es la porción del plano $x+y+z = 0$ contenida en el interior del cilindro $x^2+y^2 = 1$.

Solución. (a) Es muy difícil parametrizar la región de la esfera $0 \leq y \leq 1$ con las coordenadas esféricas estándar, dado que la condición $0 \leq y \leq 1$ se escribiría como una condición de límites sobre el producto $\sin\phi \sin\theta$ y sería complicado de trabajar con ello. Por tanto, tenemos que usar **la observación de que la esfera es simétrica** respecto a las tres componentes (x, y, z) y así observar que **intercambiando el papel de las coordenadas** y **y** z **da el mismo resultado** (eso es, pensar como si la .ªltura"fuese y). Por tanto, si S es la superficie dada en el ejercicio y S_1 **es la superficie** $0 \leq z \leq 1$ **de la misma esfera** de radio 2, tenemos por simetría de forma evidente que

$$\int\int_S y\mathrm{d}S = \int\int_{S_1} z\mathrm{d}S.$$

Ahora, con esta observación, efectivamente podemos calcular la segunda integral parametrizando la esfera con coordenadas esféricas estándar y calculando la integral de superficie con la fórmula de definición. Sabemos que la parametrización de la esfera y la normal a ella son

$$g(\phi,\theta) = (2\cos\theta\sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\phi), \qquad \mathbf{n}(\phi,\theta) = 4\sin\phi(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi),$$

por tanto la norma del vector normal es $4\sin\phi$ (como bien sabemos, la norma del vector normal es el jacobiano del cambio a coordenadas esféricas $R^2\sin\phi$ y en nuestro caso la esfera tiene radio 2). Por otro lado, en este caso no tenemos toda la esfera, sino solo la parte $0 \leq z \leq 1$, lo que en coordenadas esféricas se traduce por

$$0 \leq \cos\phi \leq \frac{1}{2}, \quad \text{es decir } \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, podemos ahora calcular

$$\int\int_{S_1} z\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2} 8\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = 2\pi 4\sin^2\phi\Big|_{\phi=\pi/3}^{\phi=\pi/2} = 2\pi$$

y la integral inicial es también igual a 2π.

(b) Observamos que la porción del plano $x + y + z = 0$ que se halla en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ se puede parametrizar como sigue: $z = -x - y$ donde (x, y) pertenecen al disco de radio 1 en el plano (x, y) (la base del cilindro). Como el vector normal al plano $x + y + z = 0$ en cualquier punto está dado por los coeficientes, es decir $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ y su norma es $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{3}$, tenemos

$$\int\int_S z^2\mathrm{d}S = \sqrt{3}\int\int_D(-x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

donde D es el disco de radio 1 en variables (x, y). Por tanto, tenemos que calcular una integral doble estándar. Pasamos a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, con $r \in [0, 1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ y tenemos

$$\begin{aligned}\int\int_S z^2\mathrm{d}S &= \sqrt{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1(r^2 + 2r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \sqrt{3}\int_0^{2\pi}(1 + 2\sin\theta\cos\theta)\frac{1}{4}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

4. El campo eléctrico debido a una carga puntual situada en el punto origen $(0, 0, 0)$ es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{k}{r^3}(x, y, z), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

donde k es una constante. Calcular el flujo del campo $\mathbf{E}$ a través del disco D de centro el punto $(0, 0, 3)$, de radio 2 y paralelo al plano $z = 0$.

Solución. El disco D considerado en el problema observamos que no es otra cosa que el disco de radio 2 en variables (x, y) (es decir, descrito por $x^2 + y^2 \leq 4$) pero dentro del plano $z = 3$ en vez del plano $z = 0$. Por tanto, podemos parametrizar como superficie dicho disco muy fácilmente haciendo coordenadas polares en las variables (x, y) y poniendo $z = 3$, más precisamente poniendo

$$g(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 3), \qquad 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

donde hemos utilizado la notación ρ para la variable polar para no confundirse con la notación r ya usada en el enunciado. Observamos que los vectores tangentes principales son

$$T_\rho(\rho, \theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \qquad T_\theta = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0)$$

y el vector normal orientado positivamente (es decir, hacia fuera) es $\mathbf{n} = (0, 0, \rho)$. Observamos además que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + 9}.$$

Por tanto, el flujo del campo eléctrico a través de la superficie D se calcula como la integral de superficie

$$\begin{aligned}\iiint_D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{k}{\sqrt{(\rho^2+9)^3}}(x, y, 3) \cdot (0, 0, \rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 \frac{3k\rho}{\sqrt{(\rho^2+9)^3}}\mathrm{d}\rho = -6\pi k \frac{1}{\sqrt{\rho^2+9}}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} \\ &= 6\pi k \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{13}}\right).\end{aligned}$$

5. Usando el teorema de la divergencia, calcular las siguientes integrales de flujo de campos vectoriales:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{z^2}, 2y + \sin(x^2 z), 4z + \sqrt{x^2 + 9y^2})$ sobre la superficie S frontera de la región

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}.$$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y + z^2)$ sobre la superficie S frontera del sólido W limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, encima del plano $z = x + 1$ y abajo del plano $z = 0$.

Solución. La idea de este ejercicio es usar el Teorema de la Divergencia y así transformar el cálculo de las integrales de superficie en integrales triples.

(a) Observamos que

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}e^{z^2} + \frac{\partial}{\partial y}(2y + \sin(x^2 z)) + \frac{\partial}{\partial z}(4z + \sqrt{x^2 + 9y^2}) = 6,$$

y por el Teorema de la Divergencia obtenemos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W 6dV.$$

Para pasar a integrales iteradas y calcular la integral triple usamos coordenadas cilíndricas. Ponemos $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $z = z$. Sabiendo que $x^2 + y^2 = r^2$ obtenemos los siguientes límites de integración: $r^2 \leq z \leq 8 - r^2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y en cuanto a r, su máximo se alcanza sobre el círculo de intersección entre el paraboloide inferior $z = x^2 + y^2$ y el paraboloide superior $z = 8 - x^2 - y^2$, es decir cuando $r^2 = 8 - r^2$ lo que implica $r^2 = 4$, $r = 2$. Por tanto $0 \leq r \leq 2$. Sin olvidar multiplicar por una r (el Jacobiano del cambio a coordenadas cilíndricas), tenemos

$$\begin{aligned}\iiint_W 6dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^{8-r^2} 6r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^2 6r(8 - 2r^2)\mathrm{d}r \\ &= 24\pi \int_0^2 r(4 - r^2)\mathrm{d}r = 96\pi.\end{aligned}$$

(b) Observamos que

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}z + \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial z}(y + z^2) = 2z,$$

que es nuestra función a integrar sobre el sólido W. Observamos que estamos en una situación en la cual **el plano** $z = x + 1$ **corta la base del cilindro en el interior** y al pedir que $x + 1 \le z \le 0$ (condición impuesta en el enunciado, por la formulación se entiende que $x+1 \le 0$ y nuestra región sólida se sitúa debajo del plano $z = 0$, que en este ejercicio funciona como "techo") obtenemos que la región D a la que pertenecen (x, y) es la región del disco $x^2+y^2 \le 4$ (el círculo de radio 2 centrado en el origen) donde $x \le -1$. Por el Teorema de la Divergencia, e integrando primero en z (.[es]trategia 2+1"), obtenemos

$$\iiint_W 2z\mathrm{d}V = \iint_D \left(\int_{x+1}^{0} 2z\mathrm{d}z\right)dA = \iint_D z^2\Big|_{z=x+1}^{z=0}\mathrm{d}A = -\iint_D (x+1)^2\mathrm{d}A.$$

Para calcular la integral doble que nos ha quedado, pasamos a coordenadas polares. Recordamos que tenemos la parte del círculo de radio 2 (centrado en el origen) con $x \le -1$. Como estamos en los cuadrantes 2 y 3, tenemos que $\cos\theta < 0$ en dichos cuadrantes. Para hallar los límites de integración en coordendas polares, traducimos las fronteras de la región a las coordenadas polares (como hemos hecho en muchos otros ejercicios y nos tiene que resultar una técnica ya bien conocida):

- frontera superior (circunferencia) $x^2 + y^2 = 4$, es decir $r^2 = 4$ y resulta $r = 2$
- frontera inferior $x = -1$, es decir $r\cos\theta = -1$ o bien $r = -1/\cos\theta$, que es **un número positivo** dado que el coseno es negativo.

Deducimos que $-1/\cos\theta \le r \le 2$. En cuanto al ángulo, basta con igualar los extremos de los límites de integración de la r y resolver la ecuación en θ obtenida para hallar los límites de integración de la variable θ:

$$-\frac{1}{\cos\theta} = 2 \Longrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ o } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

(lo mismo se ve también de forma geométrica sobre un dibujo, resolviendo triángulos rectángulos). Deducimos que

$$\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{4\pi}{3}.$$

Podemos ahora pasar a integrales iteradas en la integral doble que nos había quedado:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+1)^2\mathrm{d}A &= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3}\int_{-1/\cos\theta}^{2} (r\cos\theta + 1)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3}\int_{-1/\cos\theta}^{2} (r^3\cos^2\theta + 2r^2\cos\theta + r)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \left[\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{2r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^2}{2}\right]\Big|_{r=-1/\cos\theta}^{r=2}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \left[4\cos^2\theta + \frac{16}{3}\cos\theta + 2 - \frac{1}{4\cos^2\theta} + \frac{2}{3\cos^2\theta} - \frac{1}{2\cos^2\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \left[4\cos^2\theta + \frac{16}{3}\cos\theta + 2 - \frac{1}{12}\frac{1}{\cos^2\theta}\right]\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

que se reduce a una integral elemental, sabiendo que la primitiva de $1/\cos^2\theta$ es la función tangente. Es también inmediato ver (fórmula con el ángulo doble, la hemos usado muchas veces en ejercicios) que la integral de $4\cos^2\theta$ es $2\theta + \sin(2\theta)$. Por tanto, la última integral obtenida se reduce a calcular

$$\left[2\theta + \sin(2\theta) + \frac{16}{3}\sin\theta + 2\theta - \frac{1}{12}\tan\,\theta\right]\Big|_{\theta=2\pi/3}^{\theta=4\pi/3}$$

que es igual a

$$\frac{8\pi}{3}+2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{16}{3}2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{12}2\sqrt{3}=\frac{8\pi}{3}-\frac{9\sqrt{3}}{2}\sim 0.58$$

por tanto el resultado final del cálculo de la integral (recordando el signo menos que hemos obviado al pasar a coordenadas polares) es aproximadamente -0.58.

6. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=(0,-z,1)$ y sea S la frontera del sólido que es la parte superior de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2\leq 1$ situada encima del plano $z=1/2$. Calcular

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

primero usando la fórmula directa de cálculo de una integral de superficie. A continuación, verificar que $\mathbf{F}=\mathrm{rot}(\mathbf{G})$ donde $\mathbf{G}(x,y,z)=(0,x,xz)$ y calcular de nuevo la integral de superficie usando el Teorema de Stokes.

Solución. **Primer método**: calculamos la integral de superficie usando una parametrización y la fórmula de cálculo directa. Como estamos con una parte de la esfera (véase también el ejercicio 3(a)), usamos coordenadas esféricas y conocemos ya la parametrización y el vector normal:

$$g(\phi,\theta)=(\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi),\qquad \mathbf{n}(\phi,\theta)=\sin\phi\, g(\phi,\theta),$$

Para hallar los límites de los ángulos ϕ, θ recordamos que estamos con una región de la esfera, $z\geq 1/2$, lo que limita el ángulo ϕ. Traduciendo a coordenadas esféricas tenemos $\cos\phi\geq 1/2$, es decir $0\leq\phi\leq\pi/3$ y obviamente no tenemos ninguna limitación en θ, es decir $0\leq\theta\leq 2\pi$. Observamos también que

$$\mathbf{F}(g(\phi,\theta))=(0,-\cos\phi,1),\qquad \mathbf{F}(g(\phi,\theta))\cdot\mathbf{n}(\phi,\theta)=-\sin^2\phi\cos\phi\sin\theta+\sin\phi\cos\phi.$$

Por tanto, la integral de superficie se calcula como

$$\begin{aligned}\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(-\sin^2\phi\cos\phi\sin\theta+\sin\phi\cos\phi)d\phi\mathrm{d}\theta\\ &=0+2\pi\int_0^{\pi/3}(\sin\phi\cos\phi)d\phi=\pi\sin^2\phi\Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/3}=\frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Segundo método: calculamos la misma integral con la ayuda del Teorema de Stokes, observamos primero que la frontera de la superficie S es la circunferencia obtenida intersectando el plano $z=1/2$ con la esfera $x^2+y^2+z^2=1$. Poniendo $z=1/2$ obtenemos que dicha circunferencia tiene como ecuación $x^2+y^2=3/4$. Llamemos C esta curva. Usando el Teorema de Stokes obtenemos

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{G}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s},$$

donde $\mathbf{G}=(0,x,xz)$ viene dado en el enunciado. Sabemos que la curva C está dada por $x^2+y^2=3/4$ dentro del plano $z=1/2$, por tanto la podemos parametrizar con coordenadas polares en las variables (x,y) y poniendo $z=1/2$ fijo:

$$\mathbf{c}(t)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\frac{1}{2}\right),\qquad t\in[0,2\pi].$$

En este caso tenemos

$$\mathbf{G}(\mathbf{c}(t))=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\frac{\sqrt{3}}{4}\cos t\right),\qquad \mathbf{c}'(t)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,0\right)$$

y su producto escalar es

$$\mathbf{G}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \frac{3}{4}\cos^2 t = \frac{3}{4}\frac{1+\cos(2t)}{2}.$$

Usando la fórmula de cálculo de la integral de línea tenemos

$$\int_C \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{4},$$

por tanto observamos que obtenemos el mismo resultado.

7. Sea I el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^y, 2xe^{x^2}, z^2)$ a través de la semiesfera superior S de radio 1. Se pide:

(a) Descomponer el campo $\mathbf{F}$ como una suma $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$ donde $\mathbf{G}(x,y,z) = (e^y, 2xe^{x^2}, 0)$ y hallar un campo vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{G}$.

(b) Usar el Teorema de Stokes para probar que el flujo de $\mathbf{G}$ a través de la semiesfera superior S es cero.

(c) Calcular I usando la descomposición y el resultado del apartado (b).

Solución. Este ejercicio es en cierta manera **un análogo en 3D del Ejercicio 6, Hoja 2**, donde se usa de nuevo, en este caso para calcular una integral de superficie, **el método de descomposición**.

(a) Podemos escribir (como indica el enunciado)

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}, \qquad \mathbf{G} = (e^y, 2xe^{x^2}, 0),\ \mathbf{H} = (0,0,z^2)$$

y queremos encontrar un campo vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{G}$. En general el problema de encontrar un potencial vectorial para un campo dado es un problema muy difícil, pero **en nuestro caso el campo G solo depende de** x **e** y, lo que simplifica la búsqueda, ya que tenemos que buscar el campo $\mathbf{A}$ también dependiendo solo de (x,y), es decir de la forma

$$\mathbf{A} = (A_1(x,y), A_2(x,y), A_3(x,y)).$$

Escribiendo componente por componente la relación $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{G}$ y teniendo en cuenta que la variable z no cuenta en la fórmula del rotacional, obtenemos

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} = e^y,\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} = 2xe^{x^2},\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0.$$

Observamos ahora de forma fácil que basta con poner $A_1 = A_2 = 0$ y $A_3(x,y) = e^y - e^{x^2}$, por tanto

$$\mathbf{A} = (0,0,e^y - e^{x^2}).$$

(b) Por el Teorema de Stokes tenemos que

$$\iint_S \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s},$$

donde ∂S es la curva frontera de la superficie S, es decir la circunferencia de radio 1 dentro del plano $z = 0$. La parametrización de esa curva es $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$ y observamos de forma evidente que $\mathbf{c}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ y por tanto

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}'(t) = 0.$$

Por tanto, la integral de línea de $\mathbf{A}$ también es cero.

(c) Por la descomposición del apartado (a) y el resultado del apartado (b) tenemos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S \mathbf{G} \cdot dS + \iint_S \mathbf{H} \cdot dS = \int\int_S \mathbf{H} \cdot dS$$

ya que hemos demostrado en el apartado (b) que el primer término de la suma anterior vale cero. Para seguir el cálculo no nos queda más remedio que calcular la última integral de forma estándar, con la fórmula de cálculo, pero el campo que queda $\mathbf{H} = (0, 0, z^2)$ es ya bastante sencillo. Sabemos que la parametrización y el vector normal positivo de la semiesfera superior de radio 1 son

$$g(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi), \qquad \mathbf{n}(\phi, \theta) = \sin\phi\, g(\phi, \theta),$$

y podemos efectuar el producto escalar entre el vector normal y el campo $\mathbf{H}$ en coordenadas esféricas, que es muy fácil ya que solo cuenta la última componente:

$$\mathbf{H}(g(\phi, \theta)) \cdot \mathbf{n}(\phi, \theta) = \cos^3\phi\sin\phi.$$

Como para la semiesfera superior, los límites de integración son $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi/2]$ obtenemos

$$\iint_S \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^3\phi\sin\phi \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = 2\pi\left(-\frac{\cos^4\phi}{4}\right)\Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

8. Calcular las siguientes integrales de superficie:

(a) La integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ sobre la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $1/2 \le z \le \sqrt{3}/2$.

(b) La integral del campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, x^2 y)$ sobre la porción de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad x, y \ge 0,$$

dentro del plano xy.

Solución. En estos ejercicios las integrales se calculan con la definición.

(a) Sabemos que la parametrización estándar de la esfera se realiza con la ayuda de las coordenadas esféricas

$$\mathbf{g}(u, v) = (\cos u\sin v, \sin u\sin v, \cos v)$$

y la normal a la esfera, calculada en los apuntes de teoría, es

$$\mathbf{n}(u, v) = \sin v(\cos u\sin v, \sin u\sin v, \cos v).$$

Nos quedan por establecer los límites de integración de los parámetros (ángulos) u y v. Si para u no tenemos restricción (es el ángulo polar habitual, de rotación en el plano horizontal, y tenemos $0 \le u \le 2\pi$), en cambio sí tenemos una restricción para el ángulo v: tenemos

$$\frac{1}{2} \le z = \cos v \le \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \frac{\pi}{6} \le v \le \frac{\pi}{3}.$$

Efectuamos el producto escalar entre el campo y la normal

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) = \mathbf{g}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) = \sin v(\cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 v) = \sin v,$$

y nos queda por calcular la integral, que en integrales iteradas (teniendo en cuenta los límites de integración anteriores) se escribe

$$\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin v \mathrm{d}v\mathrm{d}u = 2\pi(-\cos v)\Big|_{v=\pi/6}^{v=\pi/3} = \pi(\sqrt{3} - 1).$$

(b) La parametrización de la elipse como superficie dentro del plano xy (es decir, $z = 0$) se realiza con la ayuda de las coordenadas polares elípticas que hemos visto en algunos ejercicios de integrales triples resueltos en clase. Observando que la elipse del ejercicio es $(x/2)^2 + (y/3)^2 = 1$, ponemos

$$\mathbf{g}(r, \theta) = (2r\cos\theta, 3r\sin\theta, 0), \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1.$$

donde la limitación del ángulo θ proviene de la hipótesis $x, y \geq 0$. Calculamos los vectores tangentes principales y la normal a la elipse:

$$\mathbf{T}_r(r,\theta) = (2\cos\theta, 3\sin\theta, 0), \qquad \mathbf{T}_\theta(r,\theta) = (-2r\sin\theta, 3r\cos\theta, 0)$$

y efectuando el producto vectorial obtenemos

$$\mathbf{n}(r,\theta) = (0,0,6r).$$

El producto escalar que tenemos que calcular es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{g}(r,\theta)) \cdot \mathbf{n}(r,\theta) &= (2r\cos\theta, 3r\sin\theta, 12r^3\cos^2\theta\sin\theta) \cdot (0,0,6r) \\ &= 72r^4\cos^2\theta\sin\theta.\end{aligned}$$

Nos queda por calcular la integral de superficie del campo, que al pasar a integrales iteradas se escribe como

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 72r^4\cos^2\theta\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= 72\left(\int_0^1 r^4\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right) \\ &= 72\frac{r^5}{5}\Big|_{r=0}^{r=1}\frac{-\cos^3\theta}{3}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{24}{5}.\end{aligned}$$

7. Ecuaciones diferenciales

7.1. Ecuaciones de variables separables

Ejercicio 1. $y \log y \mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$.

Solución. Separando variables, podemos escribir la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y\log y}{x}, \Rightarrow \frac{1}{y\log y}\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{1}{y\log y}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

y calculando las integrales indefinidas obtenemos $\log(\log y) = \log x + K$ y aplicando la función exponencial se obtiene $\log y = Kx$ y la solución final (aplicando una vez más la función exponencial) $y(x) = e^{Kx}$ donde $K \in \mathbb{R}$ es la constante de integración. ◄

Ejercicio 2. $xyy' = y - 1$

Solución. Observamos que $y = 1$ es la única solución constante. Suponiendo a partir de ahora $y \neq 1$ y separando variables como es habitual, obtenemos

$$\frac{y}{y-1}\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{y}{y-1}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow y + \log|y-1| = K + \log x$$

y aplicando la función exponencial obtenemos como solución en forma implícita

$$|y-1|e^y = Kx, \qquad K \in \mathbb{R},$$

que no se puede despejar de forma explícita. ◄

7.2. Ecuaciones exactas

Ejercicio 3. $(2xy^3 + y\cos x)\mathrm{d}x + (3x^2y^2 + \sin x)\mathrm{d}y = 0$.

Solución. Observamos que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (2xy^3 + y\cos x, 3x^2y^2 + \sin x)$ satisface

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 6xy^2 + \cos x = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

por tanto tenemos una ecuación diferencial exacta. Buscamos una función potencial para $\mathbf{F}$: integrando la primera componente en x obtenemos

$$f(x, y) = x^2y^3 + y\sin x + g(y)$$

y después, al derivar $f(x, y)$ respecto a y observamos que $g(y) = 0$, por tanto una función potencial es $f(x, y)$ indicada anteriormente. Se obtiene que la solución de la ecuación en forma implícita es

$$x^2y^3 + y\sin x = K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

◄

Ejercicio 4. $(\sin x \sin y - xe^y)\mathrm{d}y = (e^y + \cos x \cos y)\mathrm{d}x$.

Solución. Observamos que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (e^y + \cos x \cos y, -\sin x \sin y + xe^y)$ satisface

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^y - \cos x \sin y = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

por tanto tenemos una ecuación diferencial exacta. Buscamos una función potencial para $\mathbf{F}$: integrando la primera componente en x obtenemos

$$f(x, y) = xe^y + \sin x \cos y + g(y),$$

y de nuevo derivando esta fórmula respecto a y se ve fácilmente que $g(y) = 0$. Resulta que la solución de la ecuación en forma implícita es

$$xe^y + \sin x \cos y = K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

◄

7.3. Ecuaciones con factores integrantes

Ejercicio 5. $(3x^2 - y^2)\mathrm{d}y - 2xy\mathrm{d}x = 0$.

Solución. Se observa que se puede escribir en la forma canónica $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$, donde $P(x,y) = -2xy$, $Q(x,y) = 3x^2 - y^2$. Observamos que

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = -2x, \qquad Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x,$$

por tanto la función

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = \frac{-8x}{-2xy} = \frac{4}{y}$$

es una función que solo depende de la variable y. Por el criterio para factores integrantes dependiendo de una sola variable se deduce que la ecuación tiene un factor integrante que solo depende de la variable y. Más precisamente, buscando $\mu = \mu(y)$, por la ecuación del factor integrante obtenemos

$$P(x,y)\mu'(y) = \mu(y)\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \Rightarrow \mu'(y) = \mu(y)\frac{6x + 2x}{-2xy} = -\mu(y)\frac{4}{y}.$$

Resolviendo la ecuación obtenida para μ como función de y (ecuación de variables separables, ver parte A) se obtiene (obviando la constante de integración en este caso, ya que nos basta con un solo factor integrante)

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{4}{y} \Rightarrow \mu(y) = \frac{1}{y^4}.$$

Multiplicando con el factor integrante que hemos encontrado obtenemos la ecuación

$$-\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x + \frac{3x^2 - y^2}{y^4}\mathrm{d}y = 0,$$

que es una ecuación diferencial exacta (como debe ser si hemos calculado bien el factor integrante, se verifica de forma inmediata que las dos derivadas cruzadas valen ambas $6x/y^4$). Buscamos una función potencial del campo

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{2x}{y^3}, \frac{3x^2 - y^2}{y^4}\right).$$

Integrando la primera componente respecto de x obtenemos

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{y^3} + g(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^2}{y^4} + g'(y).$$

Igualando la última expresión con la segunda componente del campo vectorial obtenemos $g'(y) = -1/y^2$, es decir $g(y) = 1/y$. Finalmente, la función potencial es

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y}$$

y la solución en forma implícita de la ecuación está dada por $f(x,y) = K$ con $K \in \mathbb{R}$ constante de integración arbitraria. ◀

Ejercicio 6. $(y^2 + xy + 1)\mathrm{d}x + (x^2 + xy + 1)\mathrm{d}y = 0$.

Solución. Se observa que se puede escribir en la forma canónica $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$, donde $P(x,y) = y^2 + xy + 1$, $Q(x,y) = x^2 + xy + 1$. Observamos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + x, \qquad Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + y.$$

Como nos indica el ejercicio, buscamos un factor integrante de la forma $\mu(xy)$. Poniendo como notación $xy = t$, observamos que

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = y\mu'(t), \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = x\mu'(t).$$

Sustituyendo en la ecuación del factor integrante obtenemos

$$xP(x,y)\mu'(t) - yQ(x,y)\mu'(t) = \mu(t)\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

o de forma equivalente sustituyendo los valores de $P(x,y)$, $Q(x,y)$ y sus derivadas

$$(xy^2 + x^2y + x - x^2y - xy^2 - y)\mu'(t) = \mu(t)(2x + y - 2y - x) \Rightarrow \mu'(t) = \mu(t),$$

obteniendo $\mu(t) = e^t$ o $\mu(x,y) = e^{xy}$ (recordamos que $t = xy$). Multiplicando por el factor integrante obtenido, tenemos la ecuación

$$(y^2 + xy + 1)e^{xy}\mathrm{d}x + (x^2 + xy + 1)e^{xy}\mathrm{d}y = 0,$$

que es exacta como es fácil de averiguar calculando las derivadas cruzadas (ambas dan como resultado $(xy^2 + x^2y + 2x + 2y)e^{xy}$). Nos queda calcular una función potencial del campo vectorial conservativo $\mathbf{F} = ((y^2 + xy + 1)e^{xy}, (x^2 + xy + 1)e^{xy})$. Integrando la primera componente respecto a x obtenemos (después de una necesaria integración por partes)

$$f(x,y) = (x+y)e^{xy} + g(y)$$

y es fácil ver calculando la derivada respecto a y que $g(y) = 0$. Por tanto obtenemos $f(x,y) = (x+y)e^{xy}$ y la solución general en forma implícita se escribe $(x+y)e^{xy} = K$ con $K \in \mathbb{R}$ constante de integración arbitraria. ◂

Ejercicio 7. $(x+2)\sin y\mathrm{d}x + x\cos y\mathrm{d}y = 0.$

Solución. Se observa que se puede escribir en la forma canónica $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$, donde $P(x,y) = (x+2)\sin y$, $Q(x,y) = x\cos y$. Observamos que

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = (x+2)\cos y, \qquad Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y,$$

por tanto la función

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{(x+1)\cos y}{x\cos y} = \frac{x+1}{x}$$

es una función que solo depende de la variable x. Se deduce que la ecuación tiene un factor integrante que solo depende de la variable x. Más precisamente, buscando $\mu = \mu(x)$, por la ecuación del factor integrante obtenemos

$$-Q(x,y)\mu'(x) = \mu(x)\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \Rightarrow \mu'(x) = \mu(x)\frac{-(x+1)\cos y}{-x\cos y} = \frac{x+1}{x}\mu(x).$$

Resolviendo la ecuación obtenida para μ como función de x (ecuación de variables separables) se obtiene

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow \mu(x) = xe^x.$$

Multiplicando con el factor integrante, obtenemos la ecuación diferencial

$$(x+2)xe^x\sin y\mathrm{d}x + x^2e^x\cos y\mathrm{d}y = 0,$$

que se verifica fácilmente que es una ecuación exacta, ya que al calcular las derivadas cruzadas de las componentes del campo vectorial $\mathbf{F} = ((x+2)xe^x \sin y, x^2e^x \cos y)$ obtenemos el mismo valor $(x^2+2x)e^x \cos y$. Por tanto, tenemos que hallar una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F}$. Integrando la segunda componente respecto a y (es más fácil hacerlo en este orden en este caso) obtenemos

$$f(x,y) = x^2e^x \sin y + g(x)$$

y al derivar respecto a x es fácil ver que $g(x) = 0$, por tanto $f(x,y) = x^2e^x \sin y$ y la solución general en forma implícita se escribe $x^2e^x \sin y = K$ con $K \in \mathbb{R}$ constante de integración arbitraria. ◂

Ejercicio 8. $(y \log y - 2xy)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y = 0.$

Solución. Se observa que se puede escribir en la forma canónica $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$, donde $P(x,y) = y\log y - 2xy$, $Q(x,y) = x+y$. Observamos que

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = \log y + 1 - 2x, \qquad Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

por tanto la función

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = \frac{\log y - 2x}{y\log y - 2xy} = \frac{1}{y}$$

es una función que solo depende de la variable y. Se deduce que la ecuación tiene un factor integrante que solo depende de la variable y. Más precisamente, buscando $\mu = \mu(y)$, por la ecuación del factor integrante obtenemos

$$P(x,y)\mu'(y) = \mu(y)\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \Rightarrow \mu'(y) = -\mu(y)\frac{1}{y}$$

que es una ecuación de variables separables que se integra dividiendo primero por $\mu(y)$ e integrando para obtener logaritmos $\log \mu(y) = -\log y$ o bien $\mu(y) = 1/y$. Multiplicamos con $1/y$ toda la ecuación y verificamos si la ecuación obtenida

$$(\log y - 2x)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y} + 1\right)\mathrm{d}y = 0$$

es exacta. Efectivamente lo es, ya que las derivadas cruzadas de sus dos componentes dan ambas $1/y$. Por tanto tenemos que buscar una función potencial del campo conservativo $\mathbf{F}(x,y) = (\log y - 2x, \frac{x}{y} + 1)$. Integrando la primera componente solo respecto a x obtenemos que la forma de la función potencial deseada es

$$f(x,y) = x\log y - x^2 + g(y),$$

y derivando respecto a y e igualando a la segunda componente se obtiene

$$\frac{x}{y} + g'(y) = \frac{x}{y} + 1 \Rightarrow g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y,$$

es decir, la función potencial es $f(x,y) = x\log y - x^2 + y$ y la solución general de la ecuación (en forma implícita) es

$$x\log y - x^2 + y = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

◂

7.4. Ecuaciones homogéneas

Ejercicio 9. $(x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0.$

Solución. Se puede escribir en forma normal como $y' = \frac{2y^2+3xy}{x^2}$ y se ve que es una ecuación homogénea (cociente de polinomios homogéneos del mismo grado). Como se indica en la teoría, se hace el cambio de variable $z = y/x$ o $y = xz$ y se obtiene una ecuación de variables separables

$$z + xz' = \frac{2x^2z^2 + 3x^2z}{x^2} = 2z^2 + 3z \Rightarrow xz' = 2z^2 + 2z \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{2(z^2+z)} = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

e integrando en ambos lados respecto a su variable y aplicando la función exponencial encontramos

$$\frac{z}{z+1} = Kx^2, \qquad K \in \mathbb{R},$$

por tanto despejando $z(x)$ y recordando que $y = xz$ se obtiene

$$z(x) = \frac{Kx^2}{1-Kx^2}, \qquad y(x) = xz(x) = \frac{Kx^3}{1-Kx^2}.$$

Como una observación fuera del contexto de este ejercicio pero curiosa, esta ecuación también presenta el fenómeno de explosión en tiempo finito de sus soluciones. ◂

Ejercicio 10. $x \sin\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \sin\frac{y}{x} + x.$

Solución. Se puede escribir también de forma equivalente dividiendo por x en ambos lados como

$$\sin\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} + 1,$$

y en esta forma se reconoce como una ecuación homogénea, ya que al sustituir simultáneamente y por ty y x por tx, se simplifica la t de forma trivial al expresarse toda la ecuación en términos del cociente y/x. Por tanto, ponemos de nuevo $y/x = z$ y obtenemos de nuevo una ecuación de variables separables

$$(z + xz')\sin z = z\sin z + 1 \Rightarrow xz'\sin z = 1 \Rightarrow \sin z\mathrm{d}z = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

donde por integración obtenemos $\cos z = K - \log x$ o bien $z(x) = \arccos(K - \log x)$ y como resultado final $y(x) = x\arccos(K - \log x)$. ◂

7.5. Ecuaciones lineales de orden 1

Ejercicio 11. $y' + y = 2xe^{-x} + x^2.$

Solución. Se puede también escribir como $y' = -y + 2xe^{-x} + x^2$ y es una ecuación lineal de primer orden con $a(x) = -1$, $b(x) = 2xe^{-x} + x^2$. En el **primer paso**, resolvemos la ecuación lineal homogénea poniendo $b(x)$ a cero por un instante, es decir $y' = -y$, con la solución muy conocida $y(x) = Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$. En el segundo paso, usamos el **método de la variación de las constantes** para buscar una solución particular de la ecuación completa: buscamos esa solución de la forma

$$y_p(x) = K(x)e^{-x}, \qquad K(x) \text{ a determinar},$$

y se obtiene derivando y simplificando el término con $K(x)$ sin derivar (ver teoría)

$$K'(x)e^{-x} = b(x) = 2xe^{-x} + x^2 \Rightarrow K'(x) = 2x + x^2e^x \Rightarrow K(x) = x^2 + (x^2 - 2x + 2)e^x,$$

y multiplicando concluimos con $y_p(x) = x^2e^{-x} + x^2 - 2x + 2$. Para obtener la solución general sumamos la solución general de la ecuación homogénea del primer paso con $y_p(x)$:

$$y(x) = Ke^{-x} + x^2e^{-x} + x^2 - 2x + 2, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

◂

Ejercicio 12. $(1+x^2)\mathrm{d}y + 2xy\mathrm{d}x = \cot x\mathrm{d}x$.

Solución. Se puede poner de forma alternativa (separando $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$) como

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{\cot x}{1+x^2}, \qquad a(x) = -\frac{2x}{1+x^2},\ b(x) = \frac{\cot x}{1+x^2}.$$

Primero resolvemos la ecuación lineal homogénea

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x}{1+x^2}y \Rightarrow \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

e integrando y aplicando la función exponencial para eliminar los logaritmos obtenemos $y(x) = \frac{K}{1+x^2}$. Pasamos ahora al segundo paso, el de la variación de la constante, y buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = \frac{K(x)}{1+x^2}, \qquad K(x) \text{ a determinar,}$$

y se obtiene derivando y simplificando el término con $K(x)$ sin derivar (ver teoría)

$$\frac{K'(x)}{1+x^2} = b(x) = \frac{\cot x}{1+x^2} \Rightarrow K'(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow K(x) = \log(\sin x).$$

Por tanto la solución particular es

$$y_p(x) = \frac{\log(\sin x)}{1+x^2}$$

y la solución general es

$$y(x) = \frac{K + \log(\sin x)}{1+x^2}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

◂

7.6. Ecuaciones de tipo Bernoulli

Ejercicio 13. $xy' + y = x^4y^3$.

Solución. Se escribe en forma normal (despejando y') como

$$y' = -\frac{1}{x}y + x^3y^3, \qquad \text{Bernoulli con } a(x) = -\frac{1}{x},\ b(x) = x^3,\ r = 3.$$

Efectuamos el cambio de variable $z = y^{1-r} = y^{-2} = 1/y^2$. Entonces

$$z' = -\frac{2}{y^3}y' = -\frac{2}{y^3}\left(-\frac{1}{x}y + x^3y^3\right) = \frac{2}{x}z - 2x^3,$$

y hemos obtenido una ecuación lineal de primer orden para z. Por tanto la resolvemos como hemos visto en el apartado precedente. La ecuación lineal homogénea

$$z' = \frac{2}{x}z \Rightarrow z(x) = Kx^2, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Con la variación de la constante, buscamos una solución particular de la ecuación completa de la forma $z_p(x) = K(x)x^2$, y derivando obtenemos

$$K'(x)x^2 = -2x^3 \Rightarrow K'(x) = -2x,\ K(x) = -x^2, \Rightarrow z_p(x) = -x^4.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación lineal de primer orden obtenida es $z(x) = Kx^2 - x^4$ y recordando el cambio de variable efectuado al principio, obtenemos

$$\frac{1}{y^2} = Kx^2 - x^4 \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{Kx^2 - x^4}}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

◂

Ejercicio 14. $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = xy^2\mathrm{d}x$.

Solución. De forma equivalente se puede escribir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x}y + y^2, \qquad \text{Bernoulli con } a(x) = -\frac{1}{x},\ b(x) = 1,\ r = 2.$$

Efectuamos el cambio de variable $z = y^{1-r} = y^{-1} = 1/y$. Entonces

$$z' = -\frac{1}{y^2}y' = -\frac{1}{y^2}\left(-\frac{1}{x}y + y^2\right) = \frac{1}{x}z - 1,$$

y hemos obtenido una ecuación lineal de primer orden para z. Por tanto la resolvemos como hemos visto en el apartado precedente. La ecuación lineal homogénea

$$z' = \frac{1}{x}z \Rightarrow z(x) = Kx, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Con la variación de la constante, buscamos una solución particular de la ecuación completa de la forma $z_p(x) = K(x)x$, y derivando obtenemos

$$K'(x)x = -1 \Rightarrow K'(x) = -\frac{1}{x},\ K(x) = -\log x, \Rightarrow z_p(x) = -x\log x.$$

Obtenemos en final $z(x) = Kx + z_p(x) = Kx - x\log x$ y volviendo a la función $y(x)$

$$y(x) = \frac{1}{Kx - x\log x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

◄

7.7. Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes constantes

Ejercicio 15. $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$.

Solución. Siguiendo los pasos de la teoría, primero resolvemos la ecuación lineal homogénea $y'' + 10y' + 25y = 0$. El polinomio característico asociado a esta ecuación es $P(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda + 25 = (\lambda+5)^2$, teniendo $\lambda = -5$ como raíz doble. Usando la conocida receta.ºbtenemos que una base de la ecuación lineal homogénea es $\{e^{-5x}, xe^{-5x}\}$ y su solución general es

$$y(x) = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pasamos ahora a buscar una solución particular de la ecuación completa. Teniendo en cuenta la simplicidad y forma particular del término libre $b(x) = 14e^{-5x}$ podemos emplear el método de los coeficientes indeterminados que nos lleva a una carga de cálculo menor. Pero estamos en **el caso excepcional donde el término libre e^{-5x} es solución de la ecuación homogénea**. Por tanto no se puede buscar la solución particular de la forma Ae^{-5x} y como hemos visto en un ejemplo en clase, se debe multiplicar por x tantas veces hasta encontrar por primera vez una forma que no pertenezca a la base de soluciones de la ecuación lineal homogénea. Como xe^{-5x} también es solución de la ecuación homogénea, seguimos multiplicando por x una vez más y encontramos la forma deseada

$$y_p(x) = Ax^2e^{-5x}, \qquad A \text{ coeficiente a determinar.}$$

Derivando y agrupando términos es fácil calcular

$$y_p'(x) = (2Ax - 5Ax^2)e^{-5x},\ y_p''(x) = (2A - 20Ax + 25Ax^2)e^{-5x},$$

por tanto

$$y_p''(x) + 10y_p'(x) + 25y_p(x) = (2A - 20Ax + 25Ax^2 + 20Ax - 50Ax^2 + 25Ax^2)e^{-5x} = 2Ae^{-5x}.$$

Identificando obtenemos $2Ae^{-5x} = 14e^{-5x}$, es decir $A = 7$. Por tanto $y_p(x) = 7x^2e^{-5x}$ y la solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x} + 7x^2e^{-5x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

◀

Ejercicio 16. $y'' - 3y' + 2y = 14\sin(2x) - 18\cos(2x)$.

Solución. Primero resolvemos la ecuación lineal homogénea $y'' - 3y' + 2y = 0$. El polinomio característico asociado a esta ecuación es $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, teniendo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ como raíces reales. Usando la conocida receta.ºbtenemos que una base de la ecuación lineal homogénea es $\{e^x, e^{2x}\}$ y su solución general es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pasamos ahora a buscar una solución particular de la ecuación completa. Teniendo en cuenta la simplicidad y forma particular del término libre $b(x) = 14\sin(2x) - 18\cos(2x)$ podemos emplear el método de los coeficientes indeterminados que nos lleva a una carga de cálculo menor. Tenemos que buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x), \qquad A, B \text{ coeficientes a determinar.}$$

Es fácil calcular

$$y_p'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x),\ \ y_p''(x) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x),$$

por tanto agrupando términos similares

$$y_p''(x) - 3y_p'(x) + 2y_p(x) = (-2A + 6B)\sin(2x) + (-2B - 6A)\cos(2x).$$

Identificando la última expresión con el término libre obtenemos el sistema de ecuaciones $6B - 2A = 14$, $6A + 2B = 18$ con soluciones $A = 2$, $B = 3$. Se obtiene $y_p(x) = 2\sin(2x) + 3\cos(2x)$ y la solución general

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2\sin(2x) + 3\cos(2x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

◀

Ejercicio 17. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.

Solución. Primero resolvemos la ecuación lineal homogénea $y'' - 2y' + 2y = 0$. El polinomio característico asociado a esta ecuación es $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$, teniendo raíces complejas conjugadas $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$. Usando la conocida receta.ºbtenemos que una base de la ecuación lineal homogénea es $\{e^x\cos x, e^x\sin x\}$ y su solución general es

$$y(x) = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pasamos ahora a buscar una solución particular de la ecuación completa. Teniendo en cuenta la simplicidad y forma particular del término libre $b(x) = e^x\sin x$ podemos emplear el método de los coeficientes indeterminados que nos lleva a una carga de cálculo menor. Pero estamos en **el caso excepcional donde el término libre $e^x\sin x$ es solución de la ecuación homogénea**. Por tanto no se puede buscar la solución particular de la forma $Ae^x\cos x + Be^x\sin x$ como sería normal y como hemos visto ya en el ejemplo (a) (y en otro ejemplo en los apuntes de clase), se debe multiplicar por

x tantas veces hasta encontrar por primera vez una forma que no sea solución de la ecuación lineal homogénea. Por ello, vamos a buscar la solución particular en la forma

$$y_p(x) = x(Ae^x \cos x + Be^x \sin x) = xe^x(A\cos x + B\sin x), \qquad A, B \text{ coeficientes a determinar.}$$

Calculamos

$$y_p'(x) = (x+1)e^x(A\cos x + B\sin x) + xe^x(-A\sin x + B\cos x),$$

y después

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= (x+2)e^x(A\cos x + B\sin x) + (2x+2)e^x(-A\sin x + B\cos x) - xe^x(A\cos x + B\sin x) \\ &= 2e^x(A\cos x + B\sin x) + 2(x+1)e^x(-A\sin x + B\cos x). \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación y simplificando términos similares obtenemos

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + 2y_p &= [2e^x - 2(x+1)e^x + 2xe^x](A\cos x + B\sin x) + [2(x+1)e^x - 2xe^x](-A\sin x + B\cos x) \\ &= 2e^x(-A\sin x + B\cos x), \end{aligned}$$

observando que el factor de dentro del primer corchete es cero. Tenemos pues que identificar el último resultado obtenido con el término libre de la ecuación $b(x) = e^x \sin x$. Identificando los coeficientes obtenemos $-2A = 1$ y $2B = 0$, es decir $A = -1/2$ y $B = 0$ y por tanto una solución particular de la ecuación es

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}xe^x \cos x$$

y la solución general

$$y(x) = c_1e^x \cos x + c_2e^x \sin x - \frac{1}{2}xe^x \cos x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

◄

Ejercicio 18. $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$.

Solución. Primero resolvemos la ecuación lineal homogénea $y'' - 2y' + 5y = 0$. El polinomio característico asociado a esta ecuación es $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$, teniendo raíces complejas conjugadas $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$. Usando la conocida receta.ºbtenemos que una base de la ecuación lineal homogénea es $\{e^x\cos(2x), e^x\sin(2x)\}$ y su solución general es

$$y(x) = c_1e^x\cos(2x) + c_2e^x\sin(2x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pasamos ahora a buscar una solución particular de la ecuación completa. Teniendo en cuenta la simplicidad y forma particular del término libre $b(x) = 25x^2 + 12$ (polinomio de segundo grado) podemos emplear el método de los coeficientes indeterminados buscando la solución particular también como un polinomio de segundo grado

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C, \qquad A, B, C \text{ coeficientes a determinar.}$$

Tenemos

$$y_p'(x) = 2Ax + B, \; y_p''(x) = 2A$$

y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$y_p'' - 2y_p' + 5y_p = 2A - 4Ax - 2B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5Ax^2 + (5B - 4A)x + 5C - 2B + 2A = 25x^2 + 12.$$

Identificando coeficiente con coeficiente obtenemos $5A = 25$, es decir $A = 5$, luego $5B - 4A = 0$ y como $A = 5$ obtenemos $B = 4$. Y por fin $5C - 2B + 2A = 12$ y conociendo $A = 5$ y $B = 4$ obtenemos $C = 2$. Por tanto una solución particular es $y_p(x) = 5x^2 + 4x + 2$ y la solución general es

$$y(x) = c_1e^x\cos(2x) + c_2e^x\sin(2x) + 5x^2 + 4x + 2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

◄

Ejercicio 19. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x$.

Solución. Primero resolvemos la ecuación lineal homogénea $y'' + 2y' + y = 0$. El polinomio característico asociado a esta ecuación es $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, teniendo $\lambda = -1$ como raíz real doble. Usando la conocida receta.ºbtenemos que una base de la ecuación lineal homogénea es $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ y su solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pasamos ahora a buscar una solución particular de la ecuación completa. Esta vez la forma del término libre no permite usar algún procedimiento de coeficientes indeterminados y tenemos que trabajar con el método general de la variación de las constantes. Por tanto, buscamos la solución particular de la forma

$$y_p(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)xe^{-x}, \qquad c_1(x), c_2(x) \text{ funciones a determinar,}$$

y por la teoría obtenemos que las derivadas de las dos funciones $c_1(x)$, $c_2(x)$ resuelven el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)xe^{-x} = 0, \\ -c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)(1-x)e^{-x} = e^{-x} \log x, \end{cases}$$

que se puede simplificar dividiendo con e^{-x} para obtener

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x = 0, \\ -c_1'(x) + c_2'(x)(1-x) = \log x, \end{cases}$$

Este sistema se resuelve fácilmente, por ejemplo sumando las ecuaciones para obtener directamente $c_2'(x)$:

$$c_2'(x)x + c_2'(x)(1-x) = \log x \Rightarrow c_2'(x) = \log x \Rightarrow c_2(x) = x \log x - x,$$

y después

$$c_1'(x) = -xc_2'(x) = -x \log x \Rightarrow c_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 \log x + \frac{1}{4}x^2.$$

Finalmente, obtenemos la solución particular

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 \log x + \frac{1}{4}x^2\right) e^{-x} + (x \log x - x)xe^{-x}$$

y la solución general se obtiene sumando $c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ a la solución particular $y_p(x)$ obtenida. ◂

Ejercicio 20. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

Solución. Ya hemos visto en un apartado anterior que la solución general de la ecuación lineal homogénea $y'' - 3y' + 2y = 0$ era

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pasamos ahora a buscar una solución particular de la ecuación completa. Esta vez la forma del término libre no permite usar algún procedimiento de coeficientes indeterminados y tenemos que trabajar con el método general de la variación de las constantes. Por tanto, buscamos la solución particular de la forma

$$y_p(x) = c_1(x)e^{x} + c_2(x)e^{2x}, \qquad c_1(x), c_2(x) \text{ funciones a determinar,}$$

y por la teoría obtenemos que las derivadas de las dos funciones $c_1(x)$, $c_2(x)$ resuelven el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{x} + c_2'(x)e^{2x} = 0, \\ c_1'(x)e^{x} + 2c_2'(x)e^{2x} = \frac{1}{1+e^{-x}}, \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones del sistema obtenemos

$$c_2'(x)e^{2x} = \frac{1}{1+e^{-x}} \Rightarrow c_2'(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{e^x(1+e^x)} \Rightarrow c_2(x) = \log(1+e^{-x}) - e^{-x}$$

y por la primera ecuación del sistema, simplificando con e^x, se tiene

$$c_1'(x) = -c_2'(x)e^x = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow c_1(x) = x - \log(1+e^x).$$

Finalmente tenemos

$$y_p(x) = xe^x - e^x \log(1+e^x) + e^{2x}\log(1+e^{-x}) - e^x$$

y la solución general

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + xe^x - e^x\log(1+e^x) + e^{2x}\log(1+e^{-x}) - e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

◀

7.8. Ecuaciones de tipo Euler

Ejercicio 21. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$

Solución. Es una ecuación de tipo Euler con coeficientes (en las notaciones de la teoría) $a_1 = 2$, $a_0 = -2$. Con el cambio de variable $x = e^t$ obtenemos (siguiendo los cálculos generales efectuados en la teoría) la ecuación lineal homogénea para la función $y(t)$

$$y'' + y' - 2y = 0,$$

cuyo polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$ con raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Es decir, una base de las soluciones de esta ecuación es $\{e^t, e^{-2t}\}$ y la solución general es

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Volviendo a la variable $x = e^t$ obtenemos la solución general de la ecuación de Euler dada

$$y(x) = c_1x + c_2\frac{1}{x^2}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

◀

Ejercicio 22. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2\log x$, con condiciones iniciales $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Solución. Es una ecuación de tipo Euler con coeficientes (en las notaciones de la teoría) $a_1 = -3$, $a_0 = 3$. Con el cambio de variable $x = e^t$ obtenemos (siguiendo los cálculos generales efectuados en la teoría) la ecuación lineal con coeficientes constantes para la función $y(t)$

$$y'' - 4y' + 3y = 2t,$$

que podemos resolver por el procedimiento visto en el apartado G. La ecuación lineal homogénea $y'' - 4y' + 3y = 0$ tiene polinomio característico $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ con raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, por tanto la solución general de la ecuación lineal homogénea es

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{3t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pasando ahora a buscar una solución particular de la ecuación completa, observamos que el término libre $b(t) = 2t$ permite usar el método de los coeficientes indeterminados (al ser un polinomio de primer grado), por tanto podemos buscar la solución particular en la misma forma de polinomio de primer grado

$$y_p(t) = A + Bt, \qquad A, B \text{ coeficientes a determinar.}$$

Como $y_p'' = 0$, $y_p' = B$ obtenemos $-4B + 3A + 3Bt = 2t$, es decir $B = 2/3$ y $A = 8/9$. Obtenemos la solución general de la ecuación completa para $y(t)$

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{2}{3}t + \frac{8}{9}$$

y volviendo a la variable $x = e^t$ tenemos

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^3 + \frac{2}{3}\log x + \frac{8}{9}.$$

Finalmente podemos pasar a las condiciones iniciales para hallar los coeficientes c_1 y c_2. Tenemos $y(1) = 1$, es decir $c_1 + c_2 + 8/9 = 1$ o bien $c_1 + c_2 = 1/9$. Después también usamos la condición inicial para la derivada $y'(1) = 0$, y observando que

$$y'(x) = c_1 + 3c_2 x^2 + \frac{2}{3x}$$

se obtiene $c_1 + 3c_2 + 2/3 = 0$ o bien $c_1 + 3c_2 = -2/3$. Restando las dos ecuaciones para c_1 y c_2 obtenemos $2c_2 = -7/9$, es decir $c_2 = -7/18$ y $c_1 = 1/9 + 7/18 = 1/2$. La solución final es

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{18}x^3 + \frac{2}{3}\log x + \frac{8}{9}.$$

◀

8. Cálculo numérico

8.1. Interpolación numérica

Ejercicio 1 (Interpolación de Vandermonde y Lagrange)**.** Se quiere interpolar a una función “desconocida” $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la que se sabe pasa por los puntos de control $\{(-1,-1),\ (1,1),\ (4,64)\}$.

a) Determina el polinomio de orden 2 (o menor) que interpola a dicha función considerando la base monómica de polinomios, esto es, determina los coeficientes del polinomio $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ tales que $p_2(-1) = -1$, $p_2(1) = 1$ y $p_2(4) = 64$.

b) Calcula y representa gráficamente la base de polinomios de Lagrange con soporte $\{-1, 1, 4\}$. Determina ahora p_2 utilizando dicha base.

c) Se sabe ahora que la función original es realmente el monomio $f(x) = x^3$. ¿Qué error real se produce al interpolar la función en $x = 3$? ¿Cuál es el error máximo producido?

d) Se añade a los datos anteriores el punto $(2, 8)$. Repite los apartados a) y b) para determinar p_3. De igual forma, repítelos para obtener p_4 añadiendo $(3, 27)$. ¿Qué conclusiones sacas de los resultados obtenidos?

Ejercicio 2 (Interpolación de Lagrange y Newton)**.** Dada la siguiente tabla de datos

x	0	$1/2$	1	$3/2$	2	3
y	$-1/4$	$1-\sqrt{2}/8$	0	$\sqrt{2}/4-1$	1	4

se pide:

a) Usando los nodos $0, 3/2, 3$, determina p_2 en su forma de Lagrange y en su forma de Newton. Represéntalo gráficamente.

b) Utilizando todos los nodos excepto $x = 1$, determina p_4. Considera los nodos ordenados y haz todos los cálculos necesarios.

c) Añade ahora $x = 1$ a la lista de nodos y determina p_5 con el mínimo de cálculos necesarios.

d) Sabiendo que la función interpolada es $f(x) = \sin \pi x + (x-1)2^{x-2}$, obtén una expresión para la cota de error para p_2.

Ejercicio 3 (Fenómeno de Runge)**.** Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, sea $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[-1, 1]$, es decir, $x_0 = -1$, $x_n = 1$ y $x_{k-1} < x_k$ con $k = 1, \ldots, n$.

a) Calcula y representa p_4 y p_8 con particiones uniformes, $x_k = -1 + 2\frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$. ¿Qué deduces de las gráficas? ¿Concuerda con los resultados teóricos?

b) Repite el ejercicio con nodos de Chebychev: $x_k = \cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{n+1}\right)$, $k = 0, \ldots, n$. ¿Qué deducción sacas ahora?

8.2. Derivación numérica

Ejercicio 4 (Interpolación de Newton y derivación)**.** Considera la función $f(x) = .6e^x + \cot(.9x + .2)$.

a) Determina los polinomios interpoladores p_2 y p_4 de f en el intervalo $[0, 3]$ con sendas particiones uniformes.

b) Calcula las derivadas de primer y segundo orden de f, p_2 y p_4.

c) Calcula el error que se produce en los nodos al aproximar las derivadas de f con los polinomios interpoladores.

d) ¿Qué conclusiones sacas?

Ejercicio 5 (Primeras derivadas: aproximación y orden de)**.** Para la función anterior, se quiere aproximar el valor de la derivada de f en 0.5, esto es, $f'(0.5)$.

a) En el papel, utiliza diferencias progresivas y centrales para determinar $f'(0.5)$ con paso $h = 0.5, 0.25, 0.125$. Calcula en cada caso el error y verifica que en uno el error se divide por dos y en el otro, por cuatro.

b) Comprueba si uno de los valores que acabas de calcular coincide con alguno de los calculados en el ejercicio anterior. En caso afirmativa, determina la razón.

c) En Octave, repite el literal anterior, hasta $h = 2^{-6}$, de forma "manual" y utilizando una función (prueba a implementarla tú mismo).

d) Utiliza otra fórmula de orden 2 y comprueba numéricamente su orden. Entre las fórmulas utilizadas, ¿cuál es de uso preferible y por qué?

Ejercicio 6 (Segundas derivadas: aproximación y orden de)**.** Para la función inicial, se quiere aproximar el valor de la segunda derivada de f en 0.5, esto es, $f''(0.5)$.

a) Repite los dos primeros literales del ejercicio anterior con las fórmulas correspondientes.

b) ¿A qué polinomio interpolador están asociadas estas fórmulas y cómo? ¿No entra en conflicto con lo visto en el ejercicio 1?

c) Utiliza una expresión general de p_3 para obtener una fórmula progresiva para la segunda derivada y determina numéricamente su orden.

8.3. Integración numérica

Ejercicio 7 (Integración simple)**.** Dadas las siguientes integrales definidas,

- $\displaystyle\int_1^2 4x^3 \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^2 \frac{4}{4+x^2} \mathrm{d}x$

se pide:

a) Calcula el valor exacto de cada una de dichas integrales.

b) Calcula el valor aproximado utilizando las siguientes reglas simples: rectangular a izquierda y derecha, punto medio, trapecio y Simpson.

c) En cada caso, obtén el error exacto y una cota del error. ¿Concuerdan?

d) ¿Es algún método exacto en algún caso? Si sí, ¿por qué?

Ejercicio 8 (Integración compuesta)**.**

a) Repite el ejercicio anterior con las reglas compuestas de punto medio, trapecio y Simpson. Considera un número de subintervalos $N = 2, 4, 8, 16$.

b) ¿Qué se observa y deduce de los errores cometidos?