Exa´ menes de Matema´ ticas II

Ce´ dric M. Campos, Razvan G. Iagar, Marta Latorre Balado, David Puertas Centeno, Michael Stich, Elio V. Toranzo

A´ rea de Matema´ tica Aplicada, ESCET

27 de marzo de 2023

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS

[urjc.es](https://urjc.es/)

2021-2023 © Ce´ dric M. Campos,

Razvan G. Iagar, Marta Latorre Balado,

David Puertas Centeno, Michael Stich,

Elio V. Toranzo

Algunos derechos reservados

Esta obra se distribuye bajo una licencia Creative Commons Atribucio´ n-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-SA 4.0), disponible en

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

Ing. Electro´ nica Industrial y Automa´ tica Parcial 1 (Ordinaria), 2021/04/14

**Ejercicio 1.** (a) (1 punto) Decidir si existe el siguiente l´ımite o no y en caso afirmativo calcular su

valor:

l´ım 1 − cos(*𝑥 𝑦*) *.*

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0) *𝑥*2 *𝑦*2 + *𝑥*2 *𝑦*4

(b) (1 punto) Hallar de forma razonada los valores del coeficiente *𝑘* en el numerador para que el siguiente l´ımite exista y calcular dicho l´ımite:

l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

*𝑥*4 + 3*𝑥*2 + *𝑘 𝑦*2 *.*

*𝑥*2 + *𝑦*2

**Ejercicio 2.** (a) (1,5 puntos) Hallar todos los puntos cr´ıticos de la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 4*𝑥 𝑦*2 − *𝑥*2 *𝑦*2 − *𝑥 𝑦*3*,*

y analizar aquellos puntos cr´ıticos **que tengan componente** *𝑦* **diferente de 0** para precisar cua´ les son ma´ ximos y m´ınimos locales.

(b) (1,5 puntos) Hallar los ma´ ximos y m´ınimos absolutos de la misma funcio´ n *𝑓 𝑥, 𝑦* definida en el apartado (a) sobre el tria´ ngulo cerrado (con frontera incluida) con ve´ rtices los puntos de coordenadas (0*,* 0), (0*,* 6) y (6*,* 0).

( )

**Ejercicio 3.** (2,5 puntos) Hallar el volumen de la regio´ n so´ lida limitada superiormente por el para- boloide 4*𝑧* = *𝑥*2 + *𝑦*2, inferiormente por el plano *𝑧* = 0 y situada dentro del cilindro *𝑥*2 + *𝑦*2 = 8*𝑥*.

**Ejercicio 4.** (2,5 puntos) Hallar el volumen de la regio´ n so´ lida situada encima de la superficie

−*𝑥*2 − *𝑦*2 + *𝑧*2 = 1

y debajo del plano *𝑧* = 3, en coordenadas positivas *𝑥* ≥ 0, *𝑦* ≥ 0.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Electro´ nica Industrial y Automa´ tica Parcial 2 (Ordinaria), 2021/05/26

**Ejercicio 1.** (a) (1,25 puntos) Se considera el campo vectorial

( ) − −

*𝐹 𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑦𝑧𝑒𝑥 𝑦, 𝑥𝑧𝑒𝑥 𝑦 𝑧, 𝑒𝑥 𝑦 𝑦 .*

∫

Calcular la integral de l´ınea *𝐶 𝐹* · d*𝑠*, donde *𝐶* es cualquier trayectoria entre los puntos *𝑃* =

(1*,* 1*,* 0) y *𝑄* = (2*,* 2*,* 2).

(b) (1,25 puntos) Sea *𝐶*1 la circunferencia de radio 1 centrada en el origen y *𝐶*2 la circunferencia de radio 2 centrada en el origen. Sea *𝐹* = (*𝐹*1*, 𝐹*2) un campo vectorial que cumple la siguiente relacio´ n dentro de la corona comprendida entre las circunferencias *𝐶*1 y *𝐶*2:

*𝜕𝐹*2 − *𝜕𝐹*1 = *𝑥*2 + *𝑦*2*.*

∫ ∫

*𝜕𝑥*

*𝜕 𝑦*

Calcular la integral de l´ınea *𝐶*2 *𝐹* · *𝑑𝑠* usando la informacio´ n anterior y sabiendo adema´ s que

*𝐶*1 *𝐹* · *𝑑𝑠* = 10.

**Ejercicio 2.** (a) (1,25 puntos) Se considera la superficie *𝑆* que es la parte de la semi-esfera superior

*𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 1, *𝑧 >* 0 con la propiedad de que

1 ≤ *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 3

4 4

Establecer una parametrizacio´ n de la superficie *𝑆*.

(b) (1,25 puntos) Usando el apartado (a), calcular la integral de superficie sobre *𝑆* del campo vec- torial

*𝐹* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥, 𝑦, 𝑧*)*.*

**Ejercicio 3.** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

(a) (1,5 puntos) *𝑦*′ = − *𝑥*2 *𝑦*2 .

*𝑥*3 *𝑦*+ *𝑦*+3

(b) (1,5 puntos) *𝑥*2 *𝑦*′ = 3(*𝑥*2 + *𝑦*2) arctan *𝑦* + *𝑥 𝑦*.

*𝑥*

**Ejercicio 4.** (2 puntos) Resolver la siguiente ecuacio´ n diferencial:

*𝑦*′′

+ 4 *𝑦*′

+ 4 *𝑦* =

*𝑒*−2*𝑥* ln *𝑥*

*𝑥 .*

Encontrar despue´ s la solucio´ n (si existe) que adema´ s cumpla las condiciones (de frontera) *𝑦*(1) = 0,

*𝑦*(*𝑒*) = 0.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Electro´ nica Industrial y Automa´ tica Parcial 1 (Extraordinaria), 2021/08/07

**Ejercicio 1.** (a) (1,5 puntos) Decidir si existe el siguiente l´ımite o no y en caso afirmativo calcular

su valor:

( 1

l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

tan(*𝑥*2 + *𝑦*2) arctan

*𝑥*2

*.*

+ *𝑦*2

(b) (1,5 puntos) La misma pregunta que en el apartado (a) para el l´ımite

l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

*𝑥*2 + *𝑦*2 *.*

1 + *𝑥*2 + 2 *𝑦*2 − 1

√︁

**Ejercicio 2.** (a) (2 puntos) Hallar todos los puntos cr´ıticos de la funcio´ n

*𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*2 *𝑦*2 1 *,*

( ) + +

*𝑥*2 *𝑦*2

y precisar cua´ les son ma´ ximos y m´ınimos locales. beginImportante: resolver en detalle el sis- tema de ecuaciones obtenido.

(b) (2 puntos) Hallar los extremos globales (absolutos) de la funcio´ n

*𝑔*(*𝑥, 𝑦*) = 2*𝑥 𝑦* − *𝑥* − *𝑦,*

sobre el dominio acotado (incluyendo su frontera) { *𝑦* ≤ 4*, 𝑦* ≥ *𝑥*2}.

**Ejercicio 3.** (3 puntos) Sea *𝑊* la regio´ n so´ lida comprendida entre el cilindro *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1, el cilindro

*𝑥*2 + *𝑦*2 = 4 y los planos *𝑧* = 0 y *𝑧* = *𝑥* + *𝑦* + 5. Calcular la integral triple

∭*𝑊*

*𝑥 𝑑𝑉.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Electro´ nica Industrial y Automa´ tica Parcial 2 (Extraordinaria), 2021/08/07

**Ejercicio 1.** (a) (2 puntos) Calcular la siguiente integral de l´ınea:

∫*𝐶*

*𝑦𝑒𝑥 𝑑𝑥* + *𝑥𝑒𝑦 𝑑𝑦,*

donde *𝐶* es el contorno del tria´ ngulo de ve´ rtices 1*,* 0 , 0*,* 3 , 0*,* 2 recorrido en el orden indicado por los ve´ rtices.

(− ) ( ) ( )

(b) (2 puntos) Se considera el campo vectorial *𝐹 𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑥 𝑦,* 2*𝑧,* 3 *𝑦* . Se pide calcular la integral de l´ınea ∫

*𝐶*

*𝐹* · *𝑑𝑠,*

( ) ( )

donde *𝐶* es la curva de interseccio´ n entre el cilindro *𝑥*2 + *𝑦*2 = 9 y el plano *𝑥* + *𝑧* = 5.

**Ejercicio 2.** (2 puntos) Calcular la integral de superficie

∬*𝑆* (

*𝐹* · *𝑑𝑆,* donde *𝐹* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥*3 + *𝑦*3*, 𝑦*3 + *𝑧*3*, 𝑧*3 + *𝑥*3

y *𝑆* es esfera de centro (0*,* 0*,* 0) y radio 2.

**Ejercicio 3.** (a) (2 puntos) Resolver la ecuacio´ n diferencial

*𝑦*′ = 2*𝑥 𝑦* − *𝑦* ln *𝑦*

*𝑥* + *𝑦*

(b) (2 puntos) Resolver la ecuacio´ n diferencial lineal de segundo orden

*𝑦*′′ + 9 *𝑦* = 3 cos(3*𝑥*) − 2 sin(3*𝑥*)

y despue´ s encontrar las soluciones que tambie´ n cumplan (al mismo tiempo) las condiciones

3

de frontera

*𝑦*(0) = 0*, 𝑦*

( 2*𝜋* =

2*𝜋 .*

9

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Electro´ nica Industrial y Automa´ tica Parcial 1, 2022/03/21

**Ejercicio 1.** (a) (0,75 puntos) Decidir si existe el l´ımite o no (y en caso afirmativo calcular su valor)

l´ım

*𝑥* − *𝑦* − 1

1. (1 punto) Se considera la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

(*𝑥, 𝑦*)→(2*,*1) √*𝑥* − *𝑦* − 1

2 ln(1+*𝑥*2+ *𝑦*2 )+*𝑥*3 *𝑦*

f *,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)*,*

2 (*𝑥*2 + *𝑦*2 )

1*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

Estudiar la continuidad de la funcio´ n *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) en el punto (0*,* 0).

1. (0,75 puntos) Calcular la derivada parcial *𝜕 𝑓* (0*,* 0), donde *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) es la misma funcio´ n que en

*𝜕𝑥*

el apartado (b).

**Ejercicio 2.** (a) (1,25 puntos) Hallar los ma´ ximos y m´ınimos absolutos de la funcio´ n *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

−*𝑥*2 − 3 *𝑦*2 + 4 *𝑦* + 1 sobre el disco de radio 1 *𝐷* = {(*𝑥, 𝑦*) : *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 1}.

(b) (1,25 puntos) Encontrar todos los puntos de coordenadas (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) en el espacio tales que per- tenezcan a la superficie *𝑥 𝑦𝑧* = 8 y que realicen la distancia m´ınima respecto al origen (0*,* 0*,* 0).

**Ejercicio 3.** (2,5 puntos) Calcular el volumen de la regio´ n so´ lida *𝑊* limitada inferiormente por el paraboloide *𝑧* = *𝑥*2 + *𝑦*2 y superiormente por la esfera *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 6.

**Ejercicio 4.** (2,5 puntos) Calcular la integral triple

∭*𝑊*

# 2*𝑥 𝑑𝑉,*

donde *𝑊* es el so´ lido limitado por el cilindro parabo´ lico *𝑧* = *𝑦*2 y los planos *𝑧* = 4, *𝑥* = 0 y *𝑥* + *𝑧* = 6.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Electro´ nica Industrial y Automa´ tica Parcial 2, 2022/05/16

**Ejercicio 1.** (a) (1,25 puntos) Se considera el campo vectorial

**F**(*𝑥, 𝑦*) = (4*𝑥*3 *𝑦*2 − 2*𝑥 𝑦*3*,* 2*𝑥*4 *𝑦* − 3*𝑥*2 *𝑦*2 + 4 *𝑦*3 *.*

∫

Calcular la integral de l´ınea *𝐶* **F** · d*𝑠*, donde *𝐶* es la curva **c**(*𝑡*) = (*𝑡* + sin(*𝜋𝑡*)*,* 2*𝑡* + cos(*𝜋𝑡*)), con 0 ≤ *𝑡* ≤ 1.

∫

(b) (1,25 puntos) Calcular la integral de l´ınea *𝐶* 2*𝑥 𝑦𝑑𝑥* + (*𝑥*2 + *𝑥*)*𝑑𝑦*, donde *𝐶* es el tria´ ngulo de ve´ rtices (−1*,* 0), (1*,* 0) y (0*,* 1) recorrido en el sentido indicado por el orden de estos ve´ rtices.

**Ejercicio 2.** (a) (1,25 puntos) Calcular la integral de l´ınea del campo vectorial

**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥* + *𝑦*2*, 𝑦* + *𝑧*2*, 𝑧* + *𝑥*2)*,*

sobre la curva *𝐶* que es el contorno del tria´ ngulo de ve´ rtices (1*,* 0*,* 0), (0*,* 1*,* 0) y (0*,* 0*,* 1).

(b) (1,25 puntos) Una superficie *𝑆* admite una parametrizacio´ n *𝑆 𝑢, 𝑣* con 0 *𝑢* 2, 0 *𝑣* 4 y tal que se cumplan las siguientes igualdades:

( ) ≤ ≤ ≤ ≤

*𝜕𝑆*

*𝜕𝑢* (*𝑢, 𝑣*) = (2*,* 0*,* 1)*,*

*𝜕𝑆*

*𝜕𝑣* (*𝑢, 𝑣*) = (4*,* 0*,* 3)*.*

Con esta informacio´ n, calcular el a´ rea de la superficie *𝑆*.

**Ejercicio 3.** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

(a) (1,25 puntos) *𝑑𝑦* = *𝑥*2 +2*𝑥 𝑦*− *𝑦* .

*𝑑𝑥*

*𝑥*2

(b) (1,25 puntos) *𝑥*2 *𝑦*′ = *𝑦*2 + 2*𝑥 𝑦*.

**Ejercicio 4.** (2,5 puntos) Resolver la siguiente ecuacio´ n diferencial

*𝑦*′′ − 3 *𝑦*′ + 2 *𝑦* = *𝑒*2*𝑥* + 4 sin *𝑥.*

Encontrar despue´ s la solucio´ n (si existe) que adema´ s cumpla las condiciones (de frontera) *𝑦*(0) = 0,

*𝑦*(*𝜋*) = 0.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Electro´ nica Industrial y Automa´ tica Parcial 1 (Extraordinaria), 2022/06/27

**Ejercicio 1.** Determinar si los siguientes l´ımites existen y en caso afirmativo calcularlas:

1. (1,25 puntos) l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

1. (1,25 puntos) l´ım

*𝑥*+ *𝑦* .

*𝑥*2 + *𝑦*2 +4−2

√

(*𝑥*−1)2 ln *𝑥* .

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*0) (*𝑥*−1)2 + *𝑦*2

**Ejercicio 2.** (a) (1,25 puntos) Determinar **todos** los puntos cr´ıticos de la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = (4 *𝑦*2 − *𝑥*2)*𝑒*−*𝑥*2 − *𝑦*2

que se hallan en el interior del c´ırculo *𝑥*2 *𝑦*2 = 2, y calcular el valor de *𝑓 𝑥, 𝑦* en cada uno de ellos.

+ ( )

(b) (1,25 puntos) Estudiando la frontera y comparando con los valores obtenidos en el apartado (a), hallar los ma´ ximos y m´ınimos absolutos de la funcio´ n *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) sobre el disco *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 2.

**Ejercicio 3.** (2,5 puntos) Calcular la integral triple

∭*𝑊*

*𝑧𝑒𝑥*2 + *𝑦*2 *𝑑𝑉,*

donde *𝑊* es el so´ lido interior al cilindro *𝑥*2 *𝑦*2 = 4, exterior al cilindro *𝑥*2 *𝑦*2 = 1 y limitado inferiormente y superiormente por los planos *𝑧* = 1 y *𝑧* = 3.

+ +

**Ejercicio 4.** (2,5 puntos) Sea *𝐷* la regio´ n plana que se encuentra en el interior ∬del c´ırculo *𝑥*2+( *𝑦*−1)2 =

1 (de centro (0*,* 1) y radio 1) y en el exterior del c´ırculo *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1. Calcular

*𝐷 𝑥 𝑑𝐴*.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Electro´ nica Industrial y Automa´ tica Parcial 2 (Extraordinaria), 2022/06/27

**Ejercicio 1.** (2,5 puntos) Sea *𝐶* la curva compuesta por un tramo de la para´ bola *𝑦* = *𝑥*2 y un tramo de la para´ bola *𝑦* = 8 − *𝑥*2, unidos por los puntos de corte de las dos para´ bolas. Calcular la integral

∫

de l´ınea

*𝐶*

(*𝑥 𝑦* − *𝑒*2*𝑥*) *𝑑𝑥* + (2*𝑥*2

– 4 *𝑦*2) *𝑑𝑦.*

**Ejercicio 2.** Se considera la superficie *𝑆* formada por la porcio´ n del paraboloide *𝑧* = *𝑥*2 *𝑦*2 1 entre los planos *𝑧* = 0 y *𝑧* = 1. Se pide:

+ −

1. (1,25 puntos) Parametrizar la superficie, especificando los l´ımites de los para´ metros.

∬

1. (1,25 puntos) Calcular la integral de superficie *𝑆 𝑥 𝑑𝑆*, donde *𝑆* es la superficie del apartado (a).

**Ejercicio 3.** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden

(a) (1,25 puntos) *𝑦 𝑑𝑥* + ( *𝑦*3 − ln *𝑥*) *𝑑𝑦* = 0.

*𝑥*

(b) (1,25 puntos) (*𝑥* + *𝑦𝑒𝑦*/*𝑥*) *𝑑𝑥* − *𝑥𝑒𝑦*/*𝑥 𝑑𝑦* = 0.

**Ejercicio 4.** (2,5 puntos) Resolver la siguiente ecuacio´ n diferencial de segundo orden

*𝑦*′′ − 4 *𝑦*′ + 4 *𝑦* = 6*𝑒*2*𝑥* + 2 sin *𝑥* − cos *𝑥.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales/Energ´ıa Parcial 1 (Ordinaria), 2021/04/21

**Ejercicio 1.** Sea *𝑓* : ℝ2 → ℝ dada por la siguiente expresio´ n:

 *𝑥*2 sin(*𝑥*) + *𝑦 ,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0);

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =





*𝑥*2 + *𝑦*2

0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

1. (12 puntos) Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de *𝑓* en el punto (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0). En caso de existir, escribe el gradiente de *𝑓* en (0*,* 0), ∇ *𝑓* (0*,* 0) y el valor de la diferencial de *𝑓* en (0*,* 0) aplicada al vector (2*,* −4),d *𝑓* (0*,* 0)(2*,* −4).
2. (16 puntos) Repite el estudio anterior en todo punto (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0), justificando con detalle tu respuesta. En caso de existir, calcula ∇ *𝑓* (0*,* 1) y d *𝑓* (0*,* 1)(2*,* −4) (en cuyo caso no es necesario simplificar ∇ *𝑓* (*𝑥, 𝑦*)).
3. (8 puntos) Sea *𝑔* : ℝ2 → ℝ2 de clase C1 tal que

*𝑔*(0*,* 0) = (0*,* 1) y Jac(*𝑔*)(0*,* 0) = ( 3 2 *.*

−1 0

Calcula, si existen,

∇( *𝑓* ◦ *𝑔*)(0*,* 0) y Jac(*𝑔*−1)(0*,* 1)*.*

**Ejercicio 2.** Dado el polinomio *𝑝*(*𝑥, 𝑦*) = 3*𝑥*2 − *𝑥*3 + *𝑥 𝑦*2 + *𝑦*2 definido sobre todo ℝ2, se pide:

1. (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos cr´ıticos de *𝑝*.
2. (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales, ¿podr´ıas asegurar o descartar que estos sean globales?
3. (12 puntos) Considera ahora el recinto *𝐷* = 1*,* 1 3*,* 3 . Determina, justificando su exis- tencia, los extremos globales de *𝑝* en *𝐷*.

√︁

[− ] × [− ]

**Ejercicio 3.** Se considera el cono de ecuacio´ n *𝑧* = 4 − *𝑥*2 + *𝑦*2.

1. (6 puntos) Siendo *𝑅* el so´ lido encerrado por el cono en el semiespacio superior, estos es,

*𝑅* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : 0 ≤ *𝑧* ≤ 4*,* 0 ≤ *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ (*𝑧* − 4)2 }

describe dicho conjunto en coordenadas cil´ındricas.

1. (10 puntos) Calcula el volumen de dicho so´ lido.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 2 (Ordinaria), 2021/05/19

**Ejercicio 1.** La cardioide es la curva cerrada del plano dada en coordenadas polares, (*𝜌, 𝜃*), por la expresio´ n *𝜌*(*𝜃*) = 1 + cos *𝜃*, con *𝜃* ∈ [0*,* 2*𝜋*].

1. (2 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, ***r*** (*𝑡*) = (*𝑥*(*𝑡*)*, 𝑦*(*𝑡*)) e indica su orien- Considera ahora el campo vectorial ***F*** (*𝑥, 𝑦*) = *𝑒𝑥*/2 ((2 − cos *𝑦*)***i*** + 2 sin *𝑦****j*** .

tacio´ n.

1. (6 puntos) Comprueba que el campo es conservativo y calcula el potencial asociado.

Sea *𝐶* la mitad superior de la cardioide (con la orientacio´ n dada por la paremetrizacio´ n).

1. (6 puntos) Calcula ∫*𝐶* ***F*** · d***r*** sirvie´ ndote del potencial.
2. (6 puntos) Calcula ∫*𝐶* ***F*** · d***r*** sin utilizar el potencial (ayuda: tiene truco).

**Ejercicio 2.** Sea *𝑆* el hemisferio norte de la esfera de radio 2 y centro **0** con orientacio´ n interior, y sea *𝐶* el paralelo ecuatorial con orientacio´ n compatible.

1. (4 puntos) Parametriza ambos objetos, indicando si la orientacio´ n dada por la parametrizacio´ n coincide con la establecida.

Considera ahora el campo vectorial ***F*** (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* + *𝑦*)***i*** + (*𝑧* − *𝑦*)***j*** + (*𝑥* − *𝑧*)***k***.

1. (2 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de ***F***, indicando su cara´ cter conservativo.
2. (14 puntos) Calcula ∫*𝐶* ***F***·d***r*** de dos formas diferentes usando u´ nicamente los objetos indicados.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 2 (Ordinaria), 2021/05/19

**Ejercicio 3.** Estudia la existencia y unicidad de solucio´ n del PVI

f

2 *𝑦* + (1 − *𝑥*)(1 + *𝑥*)2 d*𝑥* − (1 − *𝑥*2) d *𝑦* = 0

*𝑦*(4) = 5

as´ı como su posible determinacio´ n.

1. (4 puntos) Escribe la EDO en forma normal y determina la regio´ n del plano donde existe solu- cio´ n y donde e´ sta es u´ nica (ayuda: simplificar).
2. (12 puntos) Halla la solucio´ n general de la ecuacio´ n aplicando el me´ todo de resolucio´ n de ecuaciones lineales de primer orden.
   1. Escribe la EDO en forma esta´ ndar.
   2. Introduce un factor integrante e identifica la EDO asociada.
   3. Determina una solucio´ n para el factor integrante (ayuda:  2 = *𝑥* 11 − *𝑥*11 ).
   4. Determina la solucio´ n general de la EDO original.

*𝑥*2 −1 − +

1. (4 puntos) Resuelve, si posible, el PVI indicando el mayor intervalo para el cual se tiene unicidad a lo largo de e´ ste.

**Ejercicio 4.** Se quiere determinar la familia biparame´ trica de soluciones de la EDO

1 *𝑦*′′ − 3 *𝑦*′ + 7 *𝑦* = (4 + 3*𝑥*)*𝑒*−2*𝑥* + 5 cos(√5*𝑥*)*𝑒*3*𝑥 .*

2

Sigue para ello el siguiente esquema.

1. (8 puntos) Obte´ n la solucio´ n general de la ecuacio´ n homoge´ nea, esto es, 1 *𝑦*′′ − 3 *𝑦*′ + 7 *𝑦* = 0.

2

1. (6 puntos) Obte´ n una solucio´ n particular de la ecuacio´ n no-homoge´ nea considerando u´ nica- mente el te´ rmino fuente *𝑔*1 (*𝑥*) = (4 + 3*𝑥*)*𝑒*−2*𝑥*.
2. (4 puntos) Repite con *𝑔*2 *𝑥* = 5 cos √5*𝑥 𝑒*3*𝑥*, pero so´ lo indicando la forma de la solucio´ n

( ) ( )

particular.

1. (2 puntos) Determina la solucio´ n general de la EDO original.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 1 (Extraordinaria), 2021/07/05

**Ejercicio 1.** Sea *𝑓* : ℝ2 → ℝ dada por la siguiente expresio´ n:





*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + *𝑦*2

*𝑥 𝑦*2

*,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0);

 0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

a) (12 puntos) Obte´ n una expresio´ n para *𝜕 𝑓* (*𝑥, 𝑦*) para todo (*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2.

 *𝑦*2 ( *𝑦*2 − *𝑥*2)

*𝜕𝑥*

Sol.: *𝜕 𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

*𝜕𝑥*





b) (16 puntos) Estudia la continuidad de *𝜕 𝑓* en (0*,* 0).

(*𝑥*2 + *𝑦*2)2 *,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0);

0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

Sol.: *𝜕𝑥 𝑓* ∉ C0 (0*,* 0)

*𝜕𝑥*

1. (\*\* puntos) ¿Que´ deduces de ello respecto a la diferenciabilidad y continuidad de *𝑓* en 0*,* 0 ? Sol.: No podemos descartar nada.

( )

1. (8 puntos) Sea *𝑔* : ℝ2 → ℝ2 de clase C1 tal que

*𝑔*(4*,* 3) = (2*,* 1) y Jac(*𝑔*)(4*,* 3) = (−2 6 *.*

0 1

Calcula, si existen,

∇( *𝑓* ◦ *𝑔*)(4*,* 3) y Jac(*𝑔*−1)(2*,* 1)*.*

**Ejercicio 2.** Dado el polinomio *𝑝*(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*3 + 2 *𝑦*3 − 6*𝑥 𝑦* definido sobre todo ℝ2, se pide:

1. (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos cr´ıticos de *𝑝*. Sol.: Pto. silla, (0*,* 0); m´ınimo rel., ( 3 4*,* 3 2).

√ √

1. (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales (independientemente de que lo hayas hecho o no), ¿podr´ıas asegurar o descartar que estos sean globales?
2. (12 puntos) Considera ahora el recinto *𝐷* delimitado por el eje de abscisas, la bisectriz *𝑦* = *𝑥* y la vertical *𝑥* = 2. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de *𝑝* en *𝐷*.

√ √

Sol.: M´ınimo abs., ( 3 4*,* 3 2); ma´ ximo abs. (2*,* 0).

**Ejercicio 3.** En los siguientes ca´ lculos integrales, adema´ s de obtener el valor requerido, representa y/o describe el recinto de integracio´ n segu´ n sea conveniente.

a) (12 puntos) ∫ 2√2 ∫ √2 √4 − *𝑥*4 d*𝑥* d *𝑦*

Sol.: 4/3

0 *𝑦*1/3

b) (12 puntos) Calcula el a´ rea encerrada entre la circunferencia de centro 0 y radio *𝑟* = 2 y la cardiode de ecuacio´ n polar *𝑟* = 1 + cos *𝜃*.

Sol.: 5*𝜋*/2

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 2 (Extraordinaria), 2021/07/05

**Ejercicio 1.** Sea *𝐶* el ≪muelle≫ cuya parametrizacio´ n en coordenadas cil´ındricas, (*𝑟, 𝜃, 𝑧*), viene dada por las ecuaciones *𝑟* = 1 y *𝜃* = 5 *𝜋 𝑧*, con |*𝑧*| ≤ 1, uniendo as´ı puntos diagonalmente opuestos del

2

plano *𝑌𝑍*.

1. (5 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, ***r*** *𝑡* = *𝑥 𝑡 , 𝑦 𝑡 , 𝑧 𝑡* , comprueba que une puntos como los mencionados, calcula el vector tangente al pasar por el plano *𝑋𝑌* e indica su orientacio´ n (giro respecto al eje *𝑂𝑍*).

( ) ( ( ) ( ) ( ))

1. (3 puntos) Calcula la longitud de la curva.

Considera ahora el campo vectorial ***F*** (*𝑥, 𝑦*) = *𝑧****i*** + (3 *𝑦*2 − sin( *𝑦* − *𝑧*))***j*** + (*𝑥* + sin( *𝑦* − *𝑧*))***k***.

1. (7 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de ***F***, indicando su cara´ cter conservativo, y calcula su potencial de ser posible.

d) (7 puntos) Calcula ∫*𝐶*∫ ***F*** · d***r*** de la forma ma´ s simple posible (con los resultados obtenidos).

e) (\*\* puntos) Calcula *𝐶* ***F*** · d***r*** de forma alternativa. ∫

√︁ − −

Solucio´ n: ∇ · ***F*** = 6 *𝑦* − cos( *𝑦* − *𝑧*), *𝑓* = *𝑥𝑧* + *𝑦*3 + cos( *𝑦* − *𝑧*),

*𝐶* ***F*** · d***r*** = 2

**Ejercicio 2.** Dado *𝑅*, el tronco de esfera de ecuacio´ n *𝑧* = 25 *𝑥*2 *𝑦*2 limitado por los planos *𝑧* = 0 y *𝑧* = 4, sea *𝑆* su superficie (con orientacio´ n exterior). Dicha superficie puede descomponerse en tapa, *𝑇*, base, *𝐵*, y lateral, *𝐿*.

1. (8 puntos) Parametriza gra´ ficamente *𝐿*, dando el dominio para *𝑥, 𝑦* , calcula el vector per- pendicular a la superficie (no es necesario normalizarlo) e indica si la orientacio´ n dada por la parametrizacio´ n coincide con la establecida.

( )

1. (10 puntos) Calcula ∬*𝐿 𝑧****k*** · d**S** directamente (ayuda: cambio a polares).
2. (10 puntos) Calcula ∬*𝑆 𝑧****k***·d**S** indirectamente (ayuda: cambio a cil´ındricas con 0 ≤ *𝑟* ≤ √25 − *𝑧*2).
3. (\*\* puntos) ¿Que´ se ded∬uce de los resultados anteriores? ¿Era de esperar?

Solucio´ n: 128*𝜋*/3, 236*𝜋*/3,

*𝑇*∪*𝐵 𝑧****k*** · d**S** = 36*𝜋*

**Ejercicio 3.** Estudia la existencia y unicidad de solucio´ n del PVI

f

3 *𝑦𝑥*2 d*𝑥* − (*𝑥*3 + 2 *𝑦*4) d *𝑦* = 0

*𝑦*(3/2) = 3/2

as´ı como su posible determinacio´ n.

1. (6 puntos) Escribe la EDO en forma normal y determina la regio´ n del plano donde existe solu- cio´ n y donde e´ sta es u´ nica.

Solucio´ n: *𝑦*′ = 3 *𝑦𝑥*2

*𝑥*3 +2 *𝑦*4

⇝ *𝑥*3 + 2 *𝑦*4 ≠ 0

1. (18 puntos) Halla la solucio´ n general de la ecuacio´ n aplicando el me´ todo de resolucio´ n de ecuaciones diferenciales exactas.
   1. Determina si la ecuacio´ n es exacta. Solucio´ n: *𝑀𝑦* = 3*𝑥*2 ≠ −3*𝑥*2 = *𝑁𝑥*
   2. En caso contrario:

introduce un factor integrante en la EDO; establece la EDP asociada al factor integrante;

simplif´ıcala y obte´ n una EDO bien definida para el factor integrante; y

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 2 (Extraordinaria), 2021/07/05

determina el factor integrante. Solucio´ n: *𝜇𝑦* = − 2 *𝜇*, *𝜇*( *𝑦*) = 1

*𝑦*

*𝑦*2

* 1. Determina la solucio´ n general de la EDO original.

1. (6 puntos) Resuelve, si posible, el PVI indicando el mayor intervalo para el cual se tiene unicidad

a lo largo de e´ ste. √︃

Solucio´ n: *𝑥*3 = 2 *𝑦*4 + *𝐶 𝑦*, *𝐶* = 0 ⇝ *𝑦* = 4 3 *𝑥*3*, 𝑥 >* 0

3

2

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 1 (Ordinaria), 2022/03/30

**Ejercicio 1.** (16 puntos) En caso de existir, calcula el valor de los siguientes l´ımites.

1− *𝑦* 1+ *𝑦*

1. l´ım

(*𝑥* + *𝑦*)3

1. l´ım

log ( 1+*𝑥* − log ( 1−*𝑥*

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*−1) (*𝑥* − 1)2 + ( *𝑦* + 1)2

Sol.: I. ∃*𝐿* = 0; II. �*𝐿*.

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

*𝑥*2 + *𝑦*2

**Ejercicio 2.** Sea *𝑓* : ℝ2 → ℝ la funcio´ n dada por la siguiente expresio´ n:

 ( ) ( )

*𝑥*3 − *𝑦*4 *, 𝑥, 𝑦* ≠ 0*,* 0 ;



*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*4 + *𝑦*2

 0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

(0*,* 0), esto es, *𝐷*(*𝑎,𝑏*)f*𝑓* (0*,* 0). (Ayuda: no normalizar).

a) (10 puntos) Calcula la derivada direccional de *𝑓* en (0*,* 0) en una direccio´ n gene´ rica (*𝑎, 𝑏*) ≠

Sol.:

*𝐷*(*𝑎,𝑏*) *𝑓* (0*,* 0) =

*𝑎*3/*𝑏*2*, 𝑏* ≠ 0;

�*, 𝑏* = 0*.*

b) (10 puntos) Asevera o refuta la diferenciabilidad de *𝑓* de dos formas diferentes. Sol.: I. �*𝐷*(*𝑎,*0) *𝑓* (0*,* 0); II. *𝐷*(*𝑎,𝑏*) *𝑓* (0*,* 0) no lineal; III. *𝑓* ∉ C0.

**Ejercicio 3.** Sea *𝑔*(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥𝑒𝑦, 𝜋 𝑦* + cos *𝑥*) y *𝑓* : ℝ2 → ℝ tal que ∇ *𝑓* (*𝜋,* −1) = (2*,* −3*𝜋*).

a) (4 puntos) Calcula Jac(*𝑔*)(*𝜋,* 0).

b) (4 puntos) Calcula ∇( *𝑓* ◦ *𝑔*)(*𝜋,* 0).

c) (4 puntos) Calcula Jac(*𝑔*−1)(*𝜋,* −1).

**Ejercicio 4.** Dado el polinomio *𝑝*(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*3 + 3*𝑥*2 *𝑦* − 3 *𝑦*2 definido sobre todo ℝ2, se pide:

1. (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos cr´ıticos de *𝑝*. Sol.: Pto. silla, (−1*,*1 ); no concluyente, (0*,* 0).

2

1. (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales, ¿podr´ıas asegurar o descartar que estos sean globales?
2. (12 puntos) Considera ahora el recinto *𝐷* delimitado por las rectas *𝑥* = 1, *𝑦* = 1 e *𝑦* = 1 *𝑥*. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de *𝑝* en *𝐷*.

−

Sol.: M´ın. global, *𝑝*(0*,* 1) = −3; ma´ x. global, *𝑝*(1*,* 1 ) = 7 .

2

4

**Ejercicio 5.** En las siguientes integrales, adema´ s de obtener el valor requerido, representa y/o des- cribe el recinto de integracio´ n segu´ n sea conveniente.

1. (12 puntos) Calcula ∫ 1 ∫ 1 cos *𝜋 𝑦*3 d *𝑦* d*𝑥*.

√

Sol.: 2

2

0

√*𝑥*

4

3*𝜋*

1. (12 puntos) Calcula el volumen encerrado por los cilindros de ecuaciones *𝑥*2 *𝑦*2 = 4 y *𝑥*2 *𝑦*2 =

+ +

9 y los planos de ecuaciones *𝑧* = 0 y *𝑧* = *𝑥 𝑦* 5. Sol.: 25*𝜋*

− +

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 2 (Ordinaria), 2022/05/26

**Ejercicio 1.** Sea ***F*** el campo vectorial

***F*** (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑦𝑒𝑥*−2*𝑧* ( *𝑦****i*** + 2***j*** − 2 *𝑦****k***) y sea *𝐸* la curva parametrizada por

***r*** (*𝑡*) = 21+*𝑡* ***i*** + (cos *𝜋 𝑡* − 3 sin *𝜋 𝑡*)***j*** + (1 + *𝑡*2)***k***

2 2

con *𝑡* ∈ [0*,* 1].

1. (5 puntos) Comprueba si el campo ***F*** es conservativo.

∫

1. (10 puntos) Calcula *𝐸* ***F*** · d***r***.

Por otro lado, sea *𝐶* la curva formada por los bordes laterales y superior del recta´ ngulo de esquinas diagonalmente opuestas (1*,* 0) y (3*,* 1).

1. (10 puntos) Sin parametrizar *𝐶*, pero asigna´ ndole orientacio´ n, calcula ∫*𝐶 𝑦* d*𝑥* + 1 d *𝑦*.

*𝑥*

Sol.: b) *𝑓* (4*,* −3*,* 2) − *𝑓* (2*,* 1*,* 1) = 8; c) 8/3, con *𝐶* = (1*,* 0) → (1*,* 1) → (3*,* 1) → (3*,* 0).

**Ejercicio 2.** Sea *𝑅* la regio´ n del semiespacio superior encerrada por el paraboloide el´ıptico de ecua- cio´ n *𝑧* = 1 − ( *𝑥*−2 1 )2 − ( *𝑦* )2 y sea *𝑆* = *𝜕𝑅* su frontera.

3

1. (5 puntos) Siendo *𝑆* = *𝑃 𝐵*, donde *𝑃* es la cubierta del paraboloide y *𝐵* la base, parametriza sendos objetos indicando claramente la orientacio´ n inducida.

∬

∪

1. (20 puntos) Calcula *𝑆 𝑦****j*** · d**S** de dos formas diferentes. Sol.: 3*𝜋* con orientacio´ n ≪exterior≫.

**Ejercicio 3.** Dada la siguiente EDO:

*𝑦*′′ − 2 *𝑦*′ + *𝑦* = *𝑒𝑥.*

1. (6 puntos) Clasif´ıcala de manera justificada.
2. (20 puntos) Resue´ lvela detalladamente.

## Solucio´n:

1. Se trata de una ecuacio´ n lineal de coeficientes constantes no homoge´ nea.
2. Para resolverla seguimos el me´ todo de variacio´ n de constantes una vez resuelta la ecuacio´ n lineal homoge´ nea asociada. Para resolver esta, hallamos las raices de la ecuacio´ n caracter´ısti- ca

*𝜆*2 − 2*𝜆* + *𝜆* = (*𝜆* − 1)2 = 0*,*

es decir, la raiz es *𝜆* = 1 con mutiplicidad 2. Por tanto la solucio´ n de la ecuacio´ n lineal ho- moge´ nea asociada es

*𝑦ℎ*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒𝑥* + *𝐶*2*𝑥𝑒𝑥.*

Para resolver la no homoge´ nea, tenemos en cuenta que el conjunto fundamental de *𝑒𝑥* es *𝑒𝑥*, pero como ella y *𝑥𝑒𝑥* esta´ n incluidas en las soluciones de la homoge´ nea, multiplicamos por *𝑥*2 y la solucio´ n particular, y sus derivadas, tendra´ n la forma

*𝑦𝑝*(*𝑥*) = *𝐴𝑥*2*𝑒𝑥*

*𝑦𝑝*′ (*𝑥*) = 2*𝐴𝑥𝑒𝑥* + *𝐴𝑥*2*𝑒𝑥*

*𝑦𝑝*′′ (*𝑥*) = *𝐴𝑥*2*𝑒𝑥* + 4*𝐴𝑥𝑒𝑥* + 2*𝐴𝑒𝑥*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 2 (Ordinaria), 2022/05/26

Sustituimos en la ecuacio´ n original

(*𝐴𝑥*2*𝑒𝑥* + 4*𝐴𝑥𝑒𝑥* + 2*𝐴𝑒𝑥*) − 2(2*𝐴𝑥𝑒𝑥* + *𝐴𝑥*2*𝑒𝑥*) + (*𝐴𝑥*2*𝑒𝑥*) = *𝑒𝑥.*

y despejando *𝐴* = 1/2. Por tanto

*𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒𝑥* + *𝐶*2*𝑥𝑒𝑥* + 1 *𝑥*2*𝑒𝑥*

2

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 2 (Ordinaria), 2022/05/26

**Ejercicio 4.** Responde a las siguientes preguntas marcando solamente una casilla para cada pregun- ta. Cada respuesta correcta suma 6 puntos, cada respuesta erro´ nea resta 3 puntos, no responder no penaliza.

1. Dada la EDO

*𝑦*6) − 9 *𝑦*5) + 16 *𝑦*4) − 18 *𝑦*3) + 29 *𝑦*′′ − 9 *𝑦*′ + 14 *𝑦* = 0 *,*

la solucio´ n general viene dada por

* + *𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒*7*𝑥* + *𝐶*2*𝑒*2*𝑥* + *𝐶*3 cos(*𝑥*) + *𝐶*4 sin(*𝑥*) + *𝐶*5*𝑥* cos(*𝑥*) + *𝐶*6*𝑥* sin(*𝑥*)

□ *𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒*7*𝑥* + *𝐶*2*𝑥𝑒*7*𝑥* + *𝐶*3*𝑒*2*𝑥* + *𝐶*4*𝑥𝑒*2*𝑥* + *𝐶*5 cos(*𝑥*) + *𝐶*6*𝑥* cos(*𝑥*)

□ *𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒*7*𝑥* + *𝐶*2*𝑒*2*𝑥* + *𝐶*3*𝑥𝑒*2*𝑥* + *𝐶*4 cos(*𝑥*) + *𝐶*5*𝑥* cos(*𝑥*)

**Solucio´n:** *No hace falta hallar las ra´ıces del polinomio caracter´ıstico. El nu´ mero de soluciones ha de ser* 6 *(el grado de la EDO) y en las soluciones complejas senos y cosenos siempren van juntos.*

1. La ecuacio´ n

*𝑥*2 *𝑦* − ( 1 *𝑥*3 + 2 *𝑦*3) *𝑦*′ = 0

3

* Es exacta y homoge´ nea.
* Es exacta pero no es homoge´ nea.
  + Ninguna de las dos anteriores.

**Solucio´n:** *Es homoge´nea (grado tres en ambos lados), pero no es exacta ya que las derivadas se diferencian en el signo.*

1. ¿Que´ valor tiene que tener *𝑘* para que la siguiente ecuacio´ n sea exacta?

(3*𝑥 𝑦*2 + 20*𝑥*2 *𝑦*3) d *𝑦* + ( *𝑦*3 + *𝑘𝑥 𝑦*4 − 2*𝑥*) d*𝑥* = 0

□ *𝑘* = 8

* + *𝑘* = 10

□ Ninguna de las dos anteriores.

**Solucio´n:** *Las derivadas dan, con 𝑘* = 10*,* 3 *𝑦*2 40*𝑥 𝑦*3*. Hay que fijarse que 𝑑𝑦 esta´ a la izquierda y 𝑑𝑥 a la derecha.*

+

1. Dada la EDO

(3*𝑥*5 *𝑦*8 − *𝑦*3) d*𝑥* + (5*𝑥*6 *𝑦*7 + *𝑥*3) d *𝑦* = 0 *,*

un factor integrante es

□ *𝑥 𝑦*

* + *𝑥*−3 *𝑦*−3

□ Ninguna de las dos anteriores.

**Solucio´n:** *Derivar y comprobar.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 2 (Ordinaria), 2022/05/26

**Ejercicio 5.** Responde a las siguientes preguntas marcando solamente una casilla para cada pregun- ta. Cada respuesta correcta suma 6 puntos, cada respuesta erro´ nea resta 3 puntos, no responder no penaliza.

1. ¿Que´ valor tiene que tener *𝑘* para que la siguiente ecuacio´ n sea exacta?

(3*𝑥 𝑦*2 + 20*𝑥*2 *𝑦*3) d *𝑦* + ( *𝑦*3 + *𝑘𝑥 𝑦*4 − 2*𝑥*) d*𝑥* = 0

□ *𝑘* = 10

□ *𝑘* = 8

* + Ninguna de las dos anteriores.

1. Dada la EDO

un factor integrante es

□ *𝑥*−3 *𝑦*−3

□ *𝑥 𝑦*

(3*𝑥*5 *𝑦*8 − *𝑦*3) d*𝑥* + (5*𝑥*6 *𝑦*7 + *𝑥*3) d *𝑦* = 0 *,*

* + Ninguna de las dos anteriores.

1. La ecuacio´ n
   * Es exacta y homoge´ nea.

*𝑥*2 *𝑦* − ( 1 *𝑥*3 + 2 *𝑦*3) *𝑦*′ = 0

* + Es exacta pero no es homoge´ nea.

3

* + Ninguna de las dos anteriores.

1. Dada la EDO

*𝑦*6) − 9 *𝑦*5) + 16 *𝑦*4) − 18 *𝑦*3) + 29 *𝑦*′′ − 9 *𝑦*′ + 14 *𝑦* = 0 *,*

la solucio´ n general viene dada por

□ *𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒*7*𝑥* + *𝐶*2*𝑒*2*𝑥* + *𝐶*3*𝑥𝑒*2*𝑥* + *𝐶*4 cos(*𝑥*) + *𝐶*5*𝑥* cos(*𝑥*)

□ *𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒*7*𝑥* + *𝐶*2*𝑥𝑒*7*𝑥* + *𝐶*3*𝑒*2*𝑥* + *𝐶*4*𝑥𝑒*2*𝑥* + *𝐶*5 cos(*𝑥*) + *𝐶*6*𝑥* cos(*𝑥*)

□ *𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒*7*𝑥* + *𝐶*2*𝑒*2*𝑥* + *𝐶*3 cos(*𝑥*) + *𝐶*4 sin(*𝑥*) + *𝐶*5*𝑥* cos(*𝑥*) + *𝐶*6*𝑥* sin(*𝑥*)

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 1 (Extraordinaria), 2022/06/29

**Ejercicio 1.** (16 puntos) En caso de existir, calcula el valor de los siguientes l´ımites.

( ( + )

1. l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*−1)

Sol.: I. �*𝐿*; II. ∃*𝐿* = 0.

1 − |*𝑥 𝑦*|

*𝑥* − | *𝑦*|

1. l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

tan *𝑥 𝑦* arctan 1

*𝑥*2 + *𝑦*2

**Ejercicio 2.** Sea *𝑓* : ℝ2 ℝ la funcio´ n dada por la siguiente expresio´ n:

→

 √︁*𝑥*6 + *𝑦*6 *,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0);

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =





*𝑥*2 + *𝑦*2

0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

* 1. (10 puntos) Obte´ n una expresio´ n para *𝜕 𝑓* . ¿Es continua?

*𝜕𝑥*

* 1. (10 puntos) Sin ma´ s ca´ lculos, asevera o refuta la diferenciabilidad y continuidad de *𝑓* . Sol.: � *𝜕 𝑓* (0*,* 0) ⇒ � D *𝑓* (0*,* 0) ⇒ ¿ *𝑓* ∈ C0 (0*,* 0)?; *𝑓* ∈ C1 ℝ2 \ {(0*,* 0)} .

*𝜕𝑥*

**Ejercicio 3.** Sea *𝑔*(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* log *𝑦,* tan *𝑥* y *𝑓* : ℝ2 → ℝ tal que ∇ *𝑓* (0*,* 0) = (3*,* 1).

*𝑦*

a) (4 puntos) Calcula D*𝑔*(*𝜋,* 1)(*𝑎, 𝑏*) para cualquier vector (*𝑎, 𝑏*) ∈ ℝ2.

b) (4 puntos) Calcula *𝜕*( *𝑓* ◦*𝑔*) (*𝜋,* 1).

*𝜕 𝑦*

c) (4 puntos) Calcula Jac(*𝑔*−1)(0*,* 0). Sol.: a) (*𝜋𝑏, 𝑎* − *𝜋𝑏*); b) 2*𝜋*; c) 1 1 .

(

1

*𝜋*

0

**Ejercicio 4.** Dado el polinomio *𝑝 𝑥, 𝑦* = 4*𝑥*2 *𝑘𝑥 𝑦 𝑦*2 definido sobre todo ℝ2 y donde *𝑘* ℝ es un para´ metro fijado, se pide:

( ) − + ∈

1. (8 puntos) Determina los puntos cr´ıticos de *𝑝* segu´ n los valores de *𝑘*.
2. (8 puntos) Clasifica los puntos cr´ıticos de *𝑝* para *𝑘* = 1*,* 4*,* 6.
3. (12 puntos) Considera la regio´ n *𝐷* delimitada por la elipse de ecuacio´ n 4*𝑥*2 *𝑦*2 = 4. Determina, justificando su existencia, los extremos globales de *𝑝* en *𝐷* cuando *𝑘* = 1.

+

Sol.: a) *𝑘* ≠ ±4*,* crı´t(*𝑝*) = {(0*,* 0)}; *𝑘* = ±4*,* crı´t(*𝑝*) = {(*𝑥,* ±2*𝑥*)}; b) *𝑘* = 1*,* 4,√m ´ınimo(s) local;

*𝑘* = 6, punto de silla; c) m´ınimo global, *𝑝*(0*,* 0) = 0; ma´ ximo global, *𝑝*(±√2/2*,* ∓ 2) = 4.

**Ejercicio 5.** En las siguientes integrales, adema´ s de obtener el valor requerido, representa y/o des- cribe el recinto de integracio´ n segu´ n sea conveniente.

∫ 1 ∫ 1 √2 4

a) (12 puntos) Calcula

0

√3 *𝑦* 6

1 − *𝑥*

d*𝑥* d *𝑦*.

b) (12 puntos) Calcula el volumen encerrado por los cilindros de ecuaciones *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4 y *𝑥*2 + *𝑦*2 =

9 y los planos de ecuaciones *𝑧* = 0 y *𝑧* = *𝑥* − *𝑦* + 5.

Sol.: a) 1; b) 25*𝜋*.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Energ´ıa Parcial 2 (Extraordinaria), 2022/06/29

**Ejercicio 1.** Considera la rosa polar de 4 pe´ talos, esto es, la curva determinada en coordenadas polares, (*𝑟, 𝜃*), por la ecuacio´ n *𝑟* = sin(2*𝜃*) y sea *𝐶* el pe´ talo que dibuja en el primer cuadrante para

*𝜃* ∈ [0*, 𝜋*/2].

1. (4 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, ***r*** (*𝜃*) = (*𝑥*(*𝜃*)*, 𝑦*(*𝜃*)), comprueba si la curva es cerrada e indica la orientacio´ n por medio del vector tangente para *𝜃* = *𝜋*/4.
2. (4 puntos) Comprueba si el campo ***F*** (*𝑥, 𝑦*) = *𝑦****i*** + 9*𝑥****j*** es conservativo.

∫

1. (12 puntos) Calcula el trabajo *𝐶 𝑦* d*𝑥* + 9*𝑥* d *𝑦*.
2. (5 puntos) ¿Concuerdan los resultados obtenidos? Justifica tu respuesta. Sol.: *𝜋*

**Ejercicio 2.** Sea *𝑅* la regio´ n del semiespacio superior encerrada por el paraboloide el´ıptico de ecua- cio´ n *𝑧* = 1 − ( *𝑥*−2 1 )2 − ( *𝑦* )2 y sea *𝑆* = *𝜕𝑅* su frontera.

3

1. (5 puntos) Siendo *𝑆* = *𝑃 𝐵*, donde *𝑃* es la cubierta del paraboloide y *𝐵* la base, parametriza sendos objetos indicando claramente la orientacio´ n inducida.

∪

∬

1. (20 puntos) Calcula *𝑆 𝑦****j*** · d**S** de dos formas diferentes. Sol.: 3*𝜋* con orientacio´ n ≪exterior≫.

**Ejercicio 3.** Dada la ecuacio´ n *𝑦*′′ + 9 *𝑦* = 16 sin 3*𝑥* + 12 cos 3*𝑥*, se pide:

1. (4 puntos) Clasif´ıcala justificadamente.
2. (18 puntos) Resue´ lvela indicando detalladamente los pasos.

**Ejercicio 4.** Dada la ecuacio´ n (*𝑥*2 + 4 *𝑦*2) − *𝑥 𝑦* d*𝑦* = 0, se pide:

d*𝑥*

1. (4 puntos) Clasif´ıcala justificadamente.
2. (18 puntos) Resue´ lvela indicando detalladamente los pasos.
3. (6 puntos) Resuelve el problema de valor inicial para *𝑦*(1) = 1.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales/Energ´ıa Parcial 1 (Ordinaria), 2021/04/21

**Ejercicio 1.** Sea *𝑓* : ℝ2 → ℝ dada por la siguiente expresio´ n:

 *𝑥*2 sin(*𝑥*) + *𝑦 ,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0);

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =





*𝑥*2 + *𝑦*2

0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

1. (12 puntos) Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de *𝑓* en el punto (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0). En caso de existir, escribe el gradiente de *𝑓* en (0*,* 0), ∇ *𝑓* (0*,* 0) y el valor de la diferencial de *𝑓* en (0*,* 0) aplicada al vector (2*,* −4),d *𝑓* (0*,* 0)(2*,* −4).
2. (16 puntos) Repite el estudio anterior en todo punto (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0), justificando con detalle tu respuesta. En caso de existir, calcula ∇ *𝑓* (0*,* 1) y d *𝑓* (0*,* 1)(2*,* −4) (en cuyo caso no es necesario simplificar ∇ *𝑓* (*𝑥, 𝑦*)).
3. (8 puntos) Sea *𝑔* : ℝ2 → ℝ2 de clase C1 tal que

*𝑔*(0*,* 0) = (0*,* 1) y Jac(*𝑔*)(0*,* 0) = ( 3 2 *.*

−1 0

Calcula, si existen,

∇( *𝑓* ◦ *𝑔*)(0*,* 0) y Jac(*𝑔*−1)(0*,* 1)*.*

**Ejercicio 2.** Dado el polinomio *𝑝*(*𝑥, 𝑦*) = 3*𝑥*2 − *𝑥*3 + *𝑥 𝑦*2 + *𝑦*2 definido sobre todo ℝ2, se pide:

1. (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos cr´ıticos de *𝑝*.
2. (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales, ¿podr´ıas asegurar o descartar que estos sean globales?
3. (12 puntos) Considera ahora el recinto *𝐷* = 1*,* 1 3*,* 3 . Determina, justificando su exis- tencia, los extremos globales de *𝑝* en *𝐷*.

√︁

[− ] × [− ]

**Ejercicio 3.** Se considera el cono de ecuacio´ n *𝑧* = 4 − *𝑥*2 + *𝑦*2.

1. (6 puntos) Siendo *𝑅* el so´ lido encerrado por el cono en el semiespacio superior, estos es,

*𝑅* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : 0 ≤ *𝑧* ≤ 4*,* 0 ≤ *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ (*𝑧* − 4)2 }

describe dicho conjunto en coordenadas cil´ındricas.

1. (10 puntos) Calcula el volumen de dicho so´ lido.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 2 (Ordinaria), 2021/05/21

**Ejercicio 1.** Sea *𝑅* la regio´ n del plano encerrada por la para´ bola *𝑦* = 2 3*𝑥* 2*𝑥*2 en el primer cuadrante y sea *𝐶* la curva que delimita a *𝑅* (con orientacio´ n positiva).

+ −

1. (2 puntos) Describe la regio´ n *𝑅* como conjunto simple e indica sus propiedades topolo´ gicas (abierto, cerrado, acotado, etc.).
2. (4 puntos) Parametriza la curva indicando si la orientacio´ n dada por la parametrizacio´ n coin- cide con la establecida.
3. (14 puntos) Calcula ∫*𝐶* d*𝑥* − *𝑥* d *𝑦* de dos formas diferentes.

**Ejercicio 2.** Dado *𝑅* el tronco de paraboloide de ecuacio´ n *𝑧* = 4 *𝑥*2 *𝑦*2 limitado por los planos

– −

*𝑧* = 0 y *𝑧* = 3, sea *𝑆* su superficie (con orientacio´ n exterior). Dicha superficie puede descomponerse en tapa, *𝑇*, base, *𝐵*, y lateral, *𝐿*.

1. (4 puntos) Parametriza gra´ ficamente *𝐿*, dando el dominio para *𝑥, 𝑦* , calcula el vector per- pendicular a la superficie (no es necesario normalizarlo) e indica si la orientacio´ n dada por la parametrizacio´ n coincide con la establecida (ayuda: dominio anular).

∬

( )

1. (7 puntos) Calcula *𝐿 𝑦𝑧****j*** · d**S** directamente (ayuda: cambio a polares).

∬

1. (7 puntos) Calcula *𝑆 𝑦𝑧****j*** · d**S** indirectamente (ayuda: cambio a cil´ındricas con 0 ≤ *𝑟* ≤ √4 − *𝑧*).
2. (2 puntos) ¿Que´ se deduce de los resultados anteriores? ¿Era de esperar?

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 2 (Ordinaria), 2021/05/21

**Ejercicio 3.** Estudia la existencia y unicidad de solucio´ n del PVI

f

2*𝑥*(1 − 4 *𝑦*) d*𝑥* + (4 − *𝑥*2) d *𝑦* = 0

*𝑦*(0) = 1

as´ı como su posible determinacio´ n.

1. (4 puntos) Escribe la EDO en forma normal y determina la regio´ n del plano donde existe solu- cio´ n y donde e´ sta es u´ nica.
2. (12 puntos) Halla la solucio´ n general de la ecuacio´ n aplicando el me´ todo de resolucio´ n de ecuaciones diferenciales exactas.
   1. Determina si la ecuacio´ n es exacta.
   2. En caso contrario:

introduce un factor integrante en la EDO; establece la EDP asociada al factor integrante;

simplif´ıcala y obte´ n una EDO bien definida para el factor integrante; y determina el factor integrante (ayuda: algo al cubo).

* 1. Determina la solucio´ n general de la EDO original.

1. (4 puntos) Resuelve, si posible, el PVI indicando el mayor intervalo para el cual se tiene unicidad a lo largo de e´ ste.

**Ejercicio 4.** Se quiere determinar la familia biparame´ trica de soluciones de la EDO

2 *𝑦*′′ − 5 *𝑦*′ − 3 *𝑦* = 5 sin *𝑥* + (5 − 7*𝑥*)*𝑒*3*𝑥 .*

Sigue para ello el siguiente esquema.

1. (8 puntos) Obte´ n la solucio´ n general de la ecuacio´ n homoge´ nea, esto es, 2 *𝑦*′′ − 5 *𝑦*′ − 3 *𝑦* = 0.
2. (6 puntos) Obte´ n una solucio´ n particular de la ecuacio´ n no-homoge´ nea considerando u´ nica- mente el te´ rmino fuente *𝑔*1 (*𝑥*) = 5 sin *𝑥*.
3. (4 puntos) Repite con *𝑔*2 (*𝑥*) = (5−7*𝑥*)*𝑒*3*𝑥*, pero so´ lo indicando la forma de la solucio´ n particular.
4. (2 puntos) Determina la solucio´ n general de la EDO original.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 1 (Extraordinaria), 2021/06/28

## Ejercicio 1.

1. (16 puntos) Determina la existencia de los siguientes l´ımites, en cuyo caso calcula su valor.
   1. l´ım

*𝑥*4 − *𝑦*2

* 1. l´ım

*𝑥*(*𝑥* − *𝑦*) *𝑦*

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0) *𝑥*2 + *𝑦*4

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

*𝑥*2 + *𝑦*2

1. (8 puntos) Sea *𝑓* : ℝ2 → ℝ la funcio´ n dada por la siguiente expresio´ n:

 *𝑥*(*𝑥* − *𝑦*) *𝑦 ,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0);

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =





*𝑥*2 + *𝑦*2

0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

Calcula (por def.) la derivada direccional de *𝑓* en 0*,* 0 en la direccio´ n 2*,* 1 , *𝐷*(2*,*1) *𝑓* 0*,* 0 . No es necesario normalizar el vector.

( ) ( ) ( )

1. (8 puntos) Repite el apartado anterior para una direccio´ n gene´ rica (*𝑎, 𝑏*). ¿Es *𝑓* diferenciable?

**Ejercicio 2.** Sea *𝑝* el polinomio *𝑝*(*𝑥, 𝑦*) = 1 (*𝑥*4 + *𝑦*4 + *𝑥*2) − ( 1 *𝑥* + 8) *𝑦*2 definido sobre todo ℝ2.

4

2

1. (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos cr´ıticos de *𝑝*. (Ayuda: en la se-

gunda ecuacio´ n, saca factor comu´ √n y no despejes *𝑥*).

Sol.: Pto. silla, (0*,* 0); m´ınimo, (2*,* ± 2).

1. (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales (independientemente de que lo hayas hecho o no), ¿podr´ıas asegurar o descartar que estos sean globales?
2. (8 puntos) Considera ahora el recinto triangular *𝑇* delimitado por las bisectrices del semiplano superior, *𝑦* = |*𝑥*|, y la horizontal *𝑦* = 1. Justifica, sin determinarlos, la existencia de extremos

globales de *𝑝* en *𝑇* adema´ s de su lo√calizacio´ n en la frontera o el interior.

Sol.: teorema de Weierstraß; (2*,* ±3 2) ∉ int(*𝑇*), por tanto, en la frontera.

1. (\*\* puntos) Sabiendo que existe un punto cr´ıtico de *𝑝* restringido a la frontera de *𝑇*, (*𝑥*0*, 𝑦*0), tal que *𝑝*(*𝑥*0*, 𝑦*0) ≈ 1/8 − 8, identifica los extremos globales de *𝑝* en *𝑇*. (Ayuda: no es necesario determinar (*𝑥*0*, 𝑦*0)).

Sol.: M´ınimo, (*𝑥*0*,* 1) con |*𝑥*0| *<* 1; ma´ ximo (0*,* 0).

**Ejercicio 3.** En las siguientes integrales, adema´ s de obtener el valor requerido, representa y/o des- cribe el recinto de integracio´ n segu´ n sea conveniente.

a) (12 puntos) Calcula ∫ 3 ∫ 6 exp(*𝑥*2/12) d*𝑥* d *𝑦*.

Sol.: 3(*𝑒*3 − 1)

0 2 *𝑦*

b) (12 puntos) Calcula el volumen encerrado bajo la funcio´ n *𝑓 𝑥, 𝑦* = | *𝑦* | (*𝑥*2 + *𝑦*2 ) y sobre la regio´ n del plano delimitada por la espiral de ecuacio´ n polar *𝑟* = *𝜃*, con *𝜃* 0, en su primer medio giro alrededor del origen.

≥

( ) /

Sol.: *𝜋*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 2 (Extraordinaria), 2021/06/28

**Ejercicio 1.** Sea *𝐶* la curva sobre la esfera de radio 1 y centro en el origen dada en coordenadas esfe´ ricas, (*𝜌, 𝜃, 𝜙*), por las ecuaciones *𝜃* = 2*𝜙*, con *𝜙* ∈ [0*, 𝜋*], y *𝜌* = 1.

1. (6 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, ***r*** *𝑡* = *𝑥 𝑡 , 𝑦 𝑡 , 𝑧 𝑡* , comprueba que une los polos de la esfera, calcula el vector tangente al pasar por el ecuador e indica su orientacio´ n (giro respecto al eje *𝑂𝑍*).

( ) ( ( ) ( ) ( ))

1. (\*\* puntos) Obte´ n una expresio´ n simplificada para la longitud de la curva dejando la integral indicada.

Considera ahora el campo vectorial ***F*** (*𝑥, 𝑦*) = ( *𝑦* + *𝑧𝑒𝑥𝑧*)***i*** + (1 + *𝑥*)***j*** + (2 + *𝑥𝑒𝑥𝑧*)***k***.

1. (8 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de ***F***, indicando su cara´ cter conservativo, y calcula su potencial de ser posible.

Solucio´ n: ∇ · ***F*** = (*𝑥*2 + *𝑧*2)*𝑒𝑥𝑧*, *𝑓* = (1 + *𝑥*) *𝑦* + 2*𝑧* + *𝑒𝑥𝑧*

∫

d) (8 puntos) Calcula *𝐶*∫ ***F*** · d***r*** de la forma ma´ s simple posible (con los resultados obtenidos).

e) (\*\* puntos) Calcula Solucio´ n: −4

*𝐶* ***F*** · d***r*** de forma alternativa.

**Ejercicio 2.** Sea *𝑆* el balde formado por un cilindro, *𝐿*, de radio 2, eje *𝑂𝑍*, entre *𝑧* = 0 y *𝑧* = 4, y una base plana, *𝐵*, cerrando la parte inferior. Sea *𝐶* el borde, curva, superior de *𝑆*. Se establece para *𝑆* una orientacio´ n ≪exterior≫ y para *𝐶* una orientacio´ n compatible con la de *𝑆*.

a) (8 puntos) Parametriza ambos objetos, *𝑆* = *𝐿 𝐵* y *𝐶*, indicando si la orientacio´ n dada por la parametrizacio´ n coincide con la establecida.

∪

Considera ahora el campo∫ vectorial ***F*** (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* − *𝑦*)***i*** + (*𝑧* + *𝑦*)***j*** + (*𝑥* − *𝑧*)***k***.

b) (20 puntos) Calcula Solucio´ n: 4*𝜋*

*𝐶* ***F***·d***r*** de dos formas diferentes usando u´ nicamente los objetos indicados.

**Ejercicio 3.** Estudia la existencia y unicidad de solucio´ n del PVI

f

4 *𝑦* + (1 + *𝑥*)(1 − *𝑥*)3 d*𝑥* + (1 − *𝑥*2) d *𝑦* = 0

*𝑦*(0) = 1

as´ı como su posible determinacio´ n.

1. (6 puntos) Escribe la EDO en forma normal y determina la regio´ n del plano donde existe solu- cio´ n y donde e´ sta es u´ nica (ayuda: simplificar).

Solucio´ n: *𝑦*′ = − 4 *𝑦* 2 − (1 − *𝑥*)2 ⇝ *𝑥* ≠ ±1

1−*𝑥*

1. (18 puntos) Halla la solucio´ n general de la ecuacio´ n aplicando el me´ todo de resolucio´ n de ecuaciones lineales de primer orden.
   1. Escribe la EDO en forma esta´ ndar.

Solucio´ n: *𝑦*′ + 1 4 2 *𝑦* = −(1 − *𝑥*)2

−*𝑥*

* 1. Introduce un factor integrante e identifica la EDO asociada.

Solucio´ n: *𝜇*′ = 1 4 2 *𝜇*

−*𝑥*

iii) Determina una so lucio ´n para el factor integrante (ayuda: *𝑥*2 −1 = *𝑥*−1 − *𝑥*+1 ).

2 1 1

2

iv) Determina la solucio´ n gen(eral de la ED O original.

Solucio´ n: *𝜇*(*𝑥*) =

*𝑥*+1

*𝑥*−1

Solucio´ n: *𝑦*(*𝑥*) = (*𝑥* − 1)2

*𝐶*

(*𝑥*+1)

2 − 1+3*𝑥*

1. (6 puntos) Resuelve, si posible, el PVI indicando el mayor intervalo para el cual se tiene unicidad

4

(*𝑥*+1)

2 − 1 − *𝑥*

a lo largo de e´ ste.

Solucio´ n: *𝐶* = 4/3*,* |*𝑥*| *<* 1 ⇝ *𝑦* = (*𝑥*−1)

2 (

3

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 1 (Ordinaria), 2022/03/30

**Ejercicio 1.** (16 puntos) En caso de existir, calcula el valor de los siguientes l´ımites.

1. l´ım

*𝑥*4 + *𝑦*4

1. l´ım

tan(*𝑥* + *𝑦*) arctan ( 1

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0) *𝑥*2 *𝑦*2 + (*𝑥* − *𝑦*)2

Sol.: I. �*𝐿*; II. ∃*𝐿* = 0.

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

*𝑥*2 + *𝑦*2

**Ejercicio 2.** Sea *𝑓* : ℝ2 → ℝ la funcio´ n dada por la siguiente expresio´ n:

 ( ) ( )

*𝑥*3 − *𝑦*4 *, 𝑥, 𝑦* ≠ 0*,* 0 ;



*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*4 + *𝑦*2

 0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

(0*,* 0), esto es, *𝐷*(*𝑎,𝑏*)f*𝑓* (0*,* 0). (Ayuda: no normalizar).

a) (10 puntos) Calcula la derivada direccional de *𝑓* en (0*,* 0) en una direccio´ n gene´ rica (*𝑎, 𝑏*) ≠

Sol.:

*𝐷*(*𝑎,𝑏*) *𝑓* (0*,* 0) =

*𝑎*3/*𝑏*2*, 𝑏* ≠ 0;

�*, 𝑏* = 0*.*

b) (10 puntos) Asevera o refuta la diferenciabilidad de *𝑓* de dos formas diferentes. Sol.: I. �*𝐷*(*𝑎,*0) *𝑓* (0*,* 0); II. *𝐷*(*𝑎,𝑏*) *𝑓* (0*,* 0) no lineal; III. *𝑓* ∉ C0.

**Ejercicio 3.** Sea *𝑔*(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥𝑒𝑦, 𝜋 𝑦* + cos *𝑥*) y *𝑓* : ℝ2 → ℝ tal que ∇ *𝑓* (*𝜋,* −1) = (2*,* −3*𝜋*).

a) (4 puntos) Calcula Jac(*𝑔*)(*𝜋,* 0).

b) (4 puntos) Calcula ∇( *𝑓* ◦ *𝑔*)(*𝜋,* 0).

c) (4 puntos) Calcula Jac(*𝑔*−1)(*𝜋,* −1).

**Ejercicio 4.** Dado el polinomio *𝑝*(*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*3 − 2*𝑥*2 *𝑦* + 4 *𝑦*2 definido sobre todo ℝ2, se pide:

1. (12 puntos) Determina y clasifica, si posible, todos los puntos cr´ıticos de *𝑝*. Sol.: Pto. silla, (3*,*9 ); no concluyente, (0*,* 0).

4

1. (4 puntos) Suponiendo que hayas encontrado extremos locales, ¿podr´ıas asegurar o descartar que estos sean globales?
2. (12 puntos) Considera ahora el recinto *𝐷* delimitado por las rectas *𝑥* = 0, *𝑦* = 0 e *𝑦* = 1 − 1 *𝑥*.

2

Determina, justificando su existencia, los extremos globales de *𝑝* en *𝐷*. Sol.: M´ın. global, *𝑝*(0*,* 0) = 0; ma´ x. global, *𝑝*(2*,* 0) = 8.

**Ejercicio 5.** En las siguientes integrales, adema´ s de obtener el valor requerido, representa y/o des- cribe el recinto de integracio´ n segu´ n sea conveniente.

1. (12 puntos) Calcula ∫ 1 ∫ 1 cos *𝜋 𝑦*3 d *𝑦* d*𝑥*.

√

Sol.: 2

2

0

√*𝑥*

4

3*𝜋*

1. (12 puntos) Calcula el volumen encerrado por los cilindros de ecuaciones *𝑥*2 *𝑦*2 = 4 y *𝑥*2 *𝑦*2 =

+ +

9 y los planos de ecuaciones *𝑧* = 0 y *𝑧* = *𝑥 𝑦* 5. Sol.: 25*𝜋*

− +

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 2 (Ordinaria), 2022/05/24

**Ejercicio 1.** Considera la rosa polar de 3 pe´ talos, esto es, la curva determinada en coordenadas polares, (*𝑟, 𝜃*), por la ecuacio´ n *𝑟* = cos(3*𝜃*) y sea *𝐶* el pe´ talo que dibuja en el semiplano derecho para *𝜃* ∈ [−*𝜋*/6*, 𝜋*/6].

1. (4 puntos) Expresa la curva en coordenadas cartesianas, ***r*** *𝜃* = *𝑥 𝜃 , 𝑦 𝜃* , comprueba si la curva es cerrada e indica la orientacio´ n por medio del vector tangente para *𝜃* = 0.

( ) ( ( ) ( ))

1. (4 puntos) Comprueba si el campo ***F*** (*𝑥, 𝑦*) = *𝑦****i*** − *𝑥****j*** es conservativo.

∫

1. (12 puntos) Calcula el trabajo *𝐶 𝑦* d*𝑥* − *𝑥* d *𝑦*.
2. (5 puntos) ¿Concuerdan los resultados obtenidos? Justifica tu respuesta. Sol.: − *𝜋*/6

**Ejercicio 2.** Considera el campo vectorial ***F*** (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑧****i*** + *𝑦****j***.

1. (3 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de ***F***, indicando su cara´ cter conservativo. Sol.: No conservativo.

√︁

Sea *𝑆* la superficie dada por el cono ≪invertido≫ de ecuacio´ n *𝑧* = 1 − *𝑥*2 + *𝑦*2 con *𝑦, 𝑧* ≥ 0 y orien- tacio´ n ≪exterior/superior≫.

1. (6 puntos) Parametriza *𝑆* gra´ ficamente, determina su dominio, calcula el vector perpendicular a la superficie (no es necesario normalizarlo) y util´ızalo para indicar si la orientacio´ n dada por la parametrizacio´ n coincide con la establecida.
2. (4 puntos) Parametriza la curva *𝐶* = *𝜕𝑆* indicando si la orientacio´ n dada por la parametrizacio´ n es compatible con la de la superficie.

∬

1. (12 puntos) Calcula *𝑆* ***j*** · d**S** de dos formas diferentes. Sol.: 1 con orientacio´ n ≪exterior≫.

**Ejercicio 3.** Dada la siguiente EDO:

*𝑦*′*𝑒𝑥*2 = *𝑥 𝑦*2*.*

1. (5 puntos) Clasif´ıcala de manera justificada.
2. (16 puntos) Resue´ lvela detalladamente considerando todas las posibles soluciones.
3. (5 puntos) Resuelve el problema de valor inicial para *𝑦*(0) = 1.

## Solucio´n:

1. Se trata de una ecuacio´ n de variables separables, ya que se puede expresar como

con *𝑔*( *𝑦*) = *𝑦*2 y *ℎ*(*𝑥*) = *𝑥*

*𝑒𝑥*2

*𝑦*′ = *𝑥*

*𝑒𝑥*2

*𝑦*2 = *ℎ*(*𝑥*)*𝑔*( *𝑦*)*,*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 2 (Ordinaria), 2022/05/24

1. Para resolverla integraremos en ambas partes

∫ 1 *𝑑𝑦* = ∫ *𝑥*

d*𝑥,*

es decir

*𝑦*2

*𝑒𝑥*2

– 1 = − 1 *𝑒*−*𝑥*2 + *𝐶*∗

esto es

*𝑦* 2

2

*𝑦*(*𝑥*) = *𝑒*−*𝑥*2 + *𝐶*

Por otra parte tenemos la solucio´ n *𝑦* = 0.

1. Simplemete sustituimos

por lo que

*𝑦* 0 = 2 *𝐶* = 1

1 + *𝐶*

( ) ⇒

*𝑦 𝑥* = 2

( )

*𝑒*−*𝑥*2 + 1

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 2 (Ordinaria), 2022/05/24

**Ejercicio 4.** Responde a las siguientes preguntas marcando solamente una casilla para cada pregun- ta. Cada respuesta correcta suma 6 puntos, cada respuesta erro´ nea resta 3 puntos, no responder no penaliza.

1. Dada la EDO

*𝑦*5) − 5 *𝑦*4) + 7 *𝑦*3) − 11 *𝑦*′′ + 12 *𝑦*′ + 36 *𝑦* = 0 *,*

la solucio´ n general viene dada por

* + *𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒*3*𝑥* + *𝐶*2*𝑥𝑒*3*𝑥* + *𝐶*3 cos(2*𝑥*) + *𝐶*4 sin(2*𝑥*) + *𝐶*5*𝑒*−*𝑥*

□ *𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒*3*𝑥* + *𝐶*2*𝑥𝑒*3*𝑥* + *𝐶*3*𝑥*2*𝑒*3*𝑥* + *𝐶*4 cos(2*𝑥*) + *𝐶*5*𝑥𝑒*−*𝑥*

□ *𝑦*(*𝑥*) = *𝐶*1*𝑒*3*𝑥* + *𝐶*2*𝑥𝑒*3*𝑥* + *𝐶*3 cos(2*𝑥*) + *𝐶*4 sin(2*𝑥*) + *𝐶*5*𝑥𝑒*−*𝑥*

**Solucio´n:** *No hace falta hallar las ra´ıces del polinomio caracter´ıstico. El nu´ mero de soluciones ha de ser* 5 *(el grado de la EDO) y en las soluciones complejas senos y cosenos siempren van juntos.*

1. La ecuacio´ n

*𝑥*2 *𝑦* − ( 1 *𝑥*3 + 2 *𝑦*3) *𝑦*′ = 0

3

* Es exacta y homoge´ nea.
* Es exacta pero no es homoge´ nea.
  + Ninguna de las dos anteriores.

**Solucio´n:** *Es homoge´nea (grado tres en ambos lados), pero no es exacta ya que las derivadas se diferencian en el signo.*

1. ¿Que´ valor tiene que tener *𝑘* para que la siguiente ecuacio´ n sea exacta?

(3*𝑥 𝑦*2 + 16*𝑥*2 *𝑦*3) d *𝑦* + ( *𝑦*3 + *𝑘𝑥 𝑦*4 − 2*𝑥*) d*𝑥* = 0

* + *𝑘* = 8

□ *𝑘* = 10

□ Ninguna de las dos anteriores.

**Solucio´n:** *Las derivadas dan, con 𝑘* = 8*,* 3 *𝑦*2 32*𝑥 𝑦*3*. Hay que fijarse que 𝑑𝑦 esta´ a la izquierda y*

+

*𝑑𝑥 a la derecha.*

1. Dada la EDO

(3*𝑥*5 *𝑦*9 − *𝑦*4) d*𝑥* + (5*𝑥*6 *𝑦*8 + *𝑥*3 *𝑦*) d *𝑦* = 0 *,*

un factor integrante es

* + *𝑥*−3 *𝑦*−4

□ *𝑥*

□ Ninguna de las dos anteriores.

**Solucio´n:** *Derivar y comprobar.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 1 (Extraordinaria), 2022/07/04

**Ejercicio 1.** (16 puntos) En caso de existir, calcula el valor de los siguientes l´ımites.

1. l´ım

(*𝑥* + *𝑦*)3

1. l´ım

2 − |*𝑥*| − | *𝑦*|

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*−1) (*𝑥* − 1)2 + ( *𝑦* + 1)2

Sol.: I. ∃*𝐿* = 0; II. �*𝐿*.

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*−1)

*𝑥*2 + *𝑦*3

**Ejercicio 2.** Sea *𝑓* : ℝ2 → ℝ la funcio´ n dada por la siguiente expresio´ n:

 ( ) ( )

*𝑥*4 + *𝑦*4 *, 𝑥, 𝑦* ≠ 0*,* 0 ;



*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + *𝑦*2

 0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

1. (10 puntos) Obte´ n una expresio´ n para *𝜕 𝑓* . ¿Es continua?

*𝜕𝑥*

1. (10 puntos) Sin ma´ s ca´ lculos, asevera o refuta la diferenciabilidad y continuidad de *𝑓* . Sol.: *𝑓* ∈ C1 (ℝ2)

**Ejercicio 3.** Sea *𝑔*(*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* tan *𝑦,* log *𝑥* y *𝑓* : ℝ2 → ℝ tal que ∇ *𝑓* (0*,* 0) = (3*, 𝜋*2).

*𝑦*

a) (4 puntos) Calcula D*𝑔*(*𝜋, 𝜋*)(*𝑎, 𝑏*) para cualquier vector (*𝑎, 𝑏*) ∈ ℝ2.

b) (4 puntos) Calcula *𝜕*( *𝑓* ◦*𝑔*) (*𝜋, 𝜋*).

*𝜕 𝑦*

c) (4 puntos) Calcula Jac(*𝑔*−1)(0*,* 0).

(

Sol.: a) (*𝜋𝑏,* (*𝑎* − *𝑏*)/*𝜋*); b) 2*𝜋*; c) 1 1 *𝜋*2 .

*𝜋*

1 0

**Ejercicio 4.** Dada la funcio´ n *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥 𝑦𝑒𝑥*+ *𝑦* definido sobre todo ℝ2, se pide:

1. (16 puntos) Determina y clasifica todos los puntos cr´ıticos de *𝑓* .
2. (12 puntos) Considera la regio´ n *𝑇* encerrada por *𝑦* = 2 *𝑥* y la recta *𝑦* = 2. Determina, justifi- cando su existencia, los extremos globales de *𝑓* en *𝑇*.

| |

Sol.: a) (0*,* 0), punto de silla; (−1*,* −1), ma´ ximo local; b) m´ınimo global, *𝑓* (−1*,* 2) = −2*𝑒*; ma´ xi- mo global, *𝑓* (1*,* 2) = 2*𝑒*3.

**Ejercicio 5.** En las siguientes integrales, adema´ s de obtener el valor requerido, representa y/o des- cribe el recinto de integracio´ n segu´ n sea conveniente.

∫

∫

1. (12 puntos) Calcula 1

−1

1

|*𝑥* |

4√︁3 1 + *𝑦*2 d *𝑦* d*𝑥*.

1. (12 puntos) Calcula el volumen encerrado por los cilindros de ecuaciones *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4 y *𝑥*2 + *𝑦*2 =

9 y los planos de ecuaciones *𝑧* = 0 y *𝑧* = *𝑥* − *𝑦* + 5.

Sol.: a) 3(2√2 − 1); b) 25*𝜋*.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Materiales Parcial 2 (Extraordinaria), 2022/07/04

**Ejercicio 1.** Sea ***F*** el campo vectorial

***F*** (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑦𝑒𝑥*−2*𝑧* ( *𝑦****i*** + 2***j*** − 2 *𝑦****k***) y sea *𝐸* la curva parametrizada por

***r*** (*𝑡*) = 21+*𝑡* ***i*** + (cos *𝜋 𝑡* − 3 sin *𝜋 𝑡*)***j*** + (1 + *𝑡*2)***k***

2 2

con *𝑡* ∈ [0*,* 1].

1. (4 puntos) Comprueba si el campo ***F*** es conservativo.

∫

1. (8 puntos) Calcula *𝐸* ***F*** · d***r***.

Por otro lado, sea *𝐶* la curva formada por los bordes laterales y superior del recta´ ngulo de esquinas diagonalmente opuestas (1*,* 0) y (3*,* 1).

1. (10 puntos) Sin parametrizar *𝐶*, pero asigna´ ndole orientacio´ n, calcula ∫*𝐶 𝑦* d*𝑥* + 1 d *𝑦*.

*𝑥*

Sol.: b) *𝑓* (4*,* −3*,* 2) − *𝑓* (2*,* 1*,* 1) = 8; c) 8/3, con *𝐶* = (1*,* 0) → (1*,* 1) → (3*,* 1) → (3*,* 0).

**Ejercicio 2.** Considera el campo vectorial ***F*** (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑧****i*** + *𝑦****j***.

1. (3 puntos) Calcula la divergencia y el rotacional de ***F***, indicando su cara´ cter conservativo.

√︁

Sea *𝑆* la superficie dada por el cono ≪invertido≫ de ecuacio´ n *𝑧* = 1 − *𝑥*2 + *𝑦*2 con *𝑦, 𝑧* ≥ 0 y orien- tacio´ n ≪exterior/superior≫.

1. (6 puntos) Parametriza *𝑆* gra´ ficamente, determina su dominio, calcula el vector perpendicular a la superficie (no es necesario normalizarlo) y util´ızalo para indicar si la orientacio´ n dada por la parametrizacio´ n coincide con la establecida.
2. (4 puntos) Parametriza la curva *𝐶* = *𝜕𝑆* indicando si la orientacio´ n dada por la parametrizacio´ n es compatible con la de la superficie.

∬

1. (15 puntos) Calcula *𝑆* ***j*** · d**S** de dos formas diferentes. Sol.: a) No conservativo; d) 1 con orientacio´ n ≪exterior≫.

**Ejercicio 3.** Dada la ecuacio´ n

se pide:

*𝑦* (4) + 2 *𝑦*′′ + *𝑦* = *𝑒𝑥 ,*

1. (4 ptos) Clasif´ıcala justificadamente.
2. (18 ptos) Resue´ lvela indicando detalladamente los pasos.

**Ejercicio 4.** Dada la ecuacio´ n

se pide:

(5*𝑥* + 4 *𝑦*) d*𝑥* + (4*𝑥* − 8 *𝑦*3) d *𝑦* = 0 *,*

1. (4 ptos) Clasif´ıcala justificadamente.
2. (18 ptos) Resue´ lvela indicando detalladamente los pasos.
3. (6 ptos) Resuelve el problema de valor inicial para *𝑦*(0) = −1.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 1 (Ordinaria), 2021/03/26

**Ejercicio 1.** Estudia la existencia o inexistencia del siguiente l´ımite. Calcula su valor en caso de que sea posible.

l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

5(*𝑥*3 + *𝑦*2) + 3( *𝑦*3 + *𝑥*2)

3*𝑥*2 + 5 *𝑦*2

## (3 puntos)

**Ejercicio 2.** Sea *𝑓* : ℝ2 ℝ dada por *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*3 *𝑦 𝑥 𝑦*2, y sean *𝑥* = *𝑥 𝑠, 𝑡 , 𝑦* = *𝑦 𝑠, 𝑡* funciones tales que

→ ( ) + ( ) ( )

*𝑥*(7*,* 8) = 1*, 𝑦*(7*,* 8) = −1*,* ∇➔ *𝑥*(7*,* 8) = (2*,* −2)*,* ∇➔ *𝑦*(7*,* 8) = (0*,* 3)

Consideremos la funcio´ n compuesta *𝑔*(*𝑠, 𝑡*) = *𝑓* (*𝑥*(*𝑠, 𝑡*)*, 𝑦*(*𝑠, 𝑡*)).

1. Sea C la curva de nivel de *𝑔*(*𝑠, 𝑡*) que pasa por el punto (*𝑠, 𝑡*) = (7*,* 8). Obte´ n un vector unitario y perpendicular a C*.* **(1.5 puntos)**
2. Obte´ n un vector cualquiera *𝑢*➔ ≠ 0➔ que satisfaga *𝐷𝑢*➔ *𝑔*(7*,* 8) = 0 **(1 punto)**
3. Sea *ℎ*(*𝑠, 𝑡*) = *𝑠* · *𝑔*(*𝑠, 𝑡*)*,* y sea S la superficie dada por *𝑤* = *ℎ*(*𝑠, 𝑡*)*.* Obte´ n la expresio´ n del plano tangente a S en el punto (*𝑠, 𝑡*) = (7*,* 8)*.* **(1.5 puntos)**

**Ejercicio 3.** Sea *𝑎 >* 0 y sea *𝐴* = (*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑎𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 1 *.* Sea *𝑓* : *𝐴* −→ ℝ una funcio´ n dada por

{ I

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑒𝑥*2 *𝑦*2 *.*

1. Calcula el valor de *𝑎* para que *𝑓* alcance un extremo absoluto en cierto punto *𝑟*➔1 = (*𝑥*1*, 𝑦*1)*,* con

*𝑥*1 = 3*, 𝑦*1 *>* 0. **(1.5 puntos)**

1. Identifica todos los ma´ ximos y m´ınimos absolutos de la funcio´ n *𝑓* bajo las hipo´ tesis del apar- tado anterior. **(1.5**

## puntos)

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 2 (Ordinaria), 2021/05/14

**Ejercicio 1.** Sea C una curva parametrizada por *𝛾*➔(*𝑡*) = (*𝑡*2 cos *𝑡, 𝑡*2 sin *𝑡*)*, 𝑡* ∈ [0*,* 2*𝜋*]

1. Calcula la longitud de C **(OBLIGATORIO: 2 puntos)**

∫√ ➔( ) ( )

1. Sea *𝑓 𝑥, 𝑦* =  1 *.* Calcula *𝑓 𝑟 𝑑𝑠* **(OPCIONAL: 2 puntos)**

16−*𝑥*2 − *𝑦*2 C

∫

3. Sea *𝐹*➔(*𝑟*➔) = (*𝑒𝑥* + *𝑦, 𝑒𝑦* + *𝑥*) *.* Calcula C *𝐹*➔(*𝑟*➔) *𝑑𝑟*➔

## (OBLIGATORIO: 2 puntos)

**Ejercicio 2.** Sea S la superficie dada por S = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 I*𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*6*, 𝑧* ∈ [0*,* 1]

1. Obte´ n el a´ rea de **(OPCIONAL: 2 puntos)**

S

2. Considera ahora la superficie cerrada S = S ∪ S*𝐵,* donde S*𝐵* = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧* ) ∈ ℝ3 I*𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 1*, 𝑧* = 1 *.*

Sea el ca∬mpo vectorial dado por *𝐹*➔(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) =

Calcula

S

*𝐹*➔(*𝑟*➔) *𝑁*ˆ *𝑑𝑆* **(OBLIGATORIO: 2 puntos)**

*𝑥*3*𝑧* + *𝑦*2*, 𝑦*3*𝑧* + *𝑥*2*, 𝑒𝑥*+ *𝑦 .*

## Ejercicio 3. (OPCIONAL)

1. Consideremos la ecuacio´ n diferencial *𝑦*′ = *𝑥*−4*𝑦* .

*𝑥*

* 1. Realiza un esbozo del campo de pendientes. **(0.5 puntos)**
  2. Dada la condicio´ n inicial *𝑦 𝑥*0 = *𝑦*0, ¿para que´ valores de *𝑥*0*, 𝑦*0 podemos asegurar que existe una solucio´ n y que adema´ s es u´ nica? **(0.5 puntos)**

( )

1. Consideremos la ecuacio´ n diferencial *𝑦*′ = *𝑦*3 *𝑥*+5*𝑥*

*.* Encuentra la solucio´ n general y las solu-

ciones constantes si las hubiera.

## punto)

*𝑦*2 (*𝑥*2 +1) **(1**

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organzacio´ n Industrial Parcial 1 (Extraordinaria), 2021/06/02

## Ejercicio 1 (Obligatorio).

Estudia la existencia o inexsitencia de los siguientes l´ımites. **(1 punto/apartado)**

1. l´ım

(*𝑥* − 1)3

1. l´ım

*𝑥*2 *𝑦*2

1. l´ım

*𝑥*2 *𝑦*3

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*0) (*𝑥* − 1)3 + 2 *𝑦*3

**Ejercicio 2.** Sea *𝑓* : ℝ2 −→ ℝ dada por

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0) *𝑥*4 + *𝑦*4

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0) *𝑥*8 + *𝑦*4

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 2*𝑥*3 + *𝑦*3 − *𝑥 𝑦*2 − *𝑥.*

3

Identifica todos los puntos cr´ıticos de *𝑓* y clasif´ıcalos en ma´ ximos, m´ınimos relativos y puntos de silla. **(3.5 puntos)**

**Ejercicio 3.** Sea *𝑓* : ℝ2 −→ ℝ una funcio´ n cuya direccio´ n de ma´ ximo crecimiento en el punto (8*,* 6) es la del vector (1*,* 2). Adema´ s, el valor ma´ ximo que alcanza la derivada direccional es 5. Sean ahora dos funciones *𝑥*(*𝑠, 𝑡, 𝑢*)*, 𝑦*(*𝑠, 𝑡, 𝑢*) dadas por

*𝑥*(*𝑠, 𝑡, 𝑢*) = *𝑠* + *𝑡*2 + *𝑢, 𝑦*(*𝑠, 𝑡, 𝑢*) = *𝑠*2 + *𝑡* + *𝑢,*

y sea *𝑔* la funcio´ n compuesta *𝑔*(*𝑠, 𝑡, 𝑢*) = *𝑓* (*𝑥*(*𝑠, 𝑡, 𝑢*)*, 𝑦*(*𝑠, 𝑡, 𝑢*)). Calcula la derivada direccional de *𝑔*

en el punto (1*,* 2*,* 3) y en la direccio´ n del vector (1*,* 1*,* −1) **(3.5 puntos)**

**Ejercicio 4.** Sean *𝑄*1*, 𝑄*2 las regiones del espacio dadas por

*𝑄*1 = {*𝑟*➔ ∈ ℝ3 I*𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ *𝑧*2*, 𝑧* ∈ [0*,* 1] *, 𝑄*2 = {*𝑟*➔ ∈ ℝ3 I*𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ (1 − *𝑧*)2*, 𝑧* ∈ [0*,* 1] *.*

1. Calcula ∭*𝑄*1 *𝑥 𝑑𝑉* **(1.5 puntos)**

2

2. Calcula el volumen de *𝑄*1 ∩ *𝑄*2*.* **(2 puntos)**

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organzacio´ n Industrial Parcial 2 (Extraordinaria), 2021/06/02

**Ejercicio 1** (**Obligatorio**)**.** Considera el campo vectorial dado por

*𝐹*➔(*𝑟*➔) = (*𝑧 𝑒𝑥𝑧* + *𝑦, 𝑧 𝑒𝑦𝑧* + *𝑥, 𝑥 𝑒𝑧𝑥* + *𝑦 𝑒𝑦𝑧* *.*

∫ ( ) ( ) ( )

Calcula *𝐶 𝐹*➔ *𝑟*➔ *𝑑𝑟*➔ donde *𝐶* es una curva que comienza en 5*,* 1*,* 0 *,* y que termina en 2*,* 2*,* 1 *.*

## (3 puntos)

**Ejercicio 2.** Sea S∬= {*𝑟*➔ ∈ ℝ3 I*𝑧* = 1 − *𝑥*2 − *𝑦*2*, 𝑧* ≥ 0 , y sea *𝐹*➔ el campo vectorial dado por *𝐹*➔(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) =

(*𝑥, 𝑦, 𝑧*). Calcula

S *𝐹*➔(*𝑟*➔) *𝑁*ˆ *𝑑𝑆* **(3.5 puntos)**

**Ejercicio 3.** Sea S = {*𝑟*➔ ∈ ℝ3 I*𝑧* = *𝑥*4 + *𝑦, 𝑦* ≤ *𝑥*2 ≤ 1*, 𝑥, 𝑦* ≥ 0 .

4

1. Obte´ n un vector normal a S en un punto arbitrario *𝑟*➔ ∈ ℝ3 **(0.5 puntos)**

∬

1. Calcula S *𝑓* (*𝑟*➔) *𝑑𝑆,* donde *𝑓* es una funcio´ n escalar dada por **(3 puntos)**

*𝑥*5 *𝑦*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑧* − *𝑦 .*

**Ejercicio 4.** Encuentra la solucio´ n general de la siguiente ecuacio´ n diferencial, as´ı como la solucio´ n particular que pasa por el punto (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*,* e indica el dominio de dicha solucio´ n particular.

*𝑦*′ − *𝑒*− *𝑦𝑥*2 = *𝑥*2

## (3.5 puntos)

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 1 (Ordinaria), 2021/03/17

**Ejercicio 1.** Sea la funcio´ n *𝑓* en dos variables dada por

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

*𝑥*2 + *𝑦*2

*𝑏,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)





 *𝑎*(√− |*𝑥* |−| *𝑦* | ) *,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)

1. Hallar la relacio´ n que deben satisfacer *𝑎* y *𝑏* para que existan *𝑓𝑥* (0*,* 0) y *𝑓𝑦* (0*,* 0). ¿Cua´ l es el valor de *𝑓𝑥* (0*,* 0) y *𝑓𝑦* (0*,* 0)?
2. Determinar si *𝑓* es diferenciable en (0*,* 0).

**Ejercicio 2.** Sea la funcio´ n

√︁

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 5 + −9 − *𝑥*2 − 6*𝑥* − *𝑦*2 − 2 *𝑦*

1. Determinar el dominio de *𝑓* . ¿Es cerrado y acotado o abierto?
2. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el apartado anterior, clasificar los puntos cr´ıticos de *𝑓* o hallar sus valores ma´ ximo y m´ınimo absolutos que alcanza en su dominio.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 2 (Ordinaria), 2021/05/19

## Ejercicio 1. Teorema Fundamental del Ca´lculo Integral:

1. Sean el campo vectorial

**F** = (

*𝑥 𝑦*

*𝑒𝑥*

*𝑥 𝑦*

*𝑒𝑦*

(*𝑥, 𝑦*)

*𝑦𝑒*

+ (1 + *𝑒*2*𝑥* ) *, 𝑥𝑒*

+ (1 + *𝑒𝑦* )2

y la curva *𝐶* cuya ecuacio´ n vectorial viene dada por

**r**(*𝑡*) = (1 + *𝑡*2*,* 1 + *𝑡*)*,* 0 ≤ *𝑡* ≤ 1 Calcular la circulacio´ n de **F** a lo largo de *𝐶*.

1. Calcular ∫

3*𝑥*2 *𝑑𝑥*

*𝑧*

−

3 *𝑦*2 *𝑑𝑦*

*𝑧*

−

*𝑥*3 + *𝑦*3 *𝑑𝑧*

*𝑧*2

+

*𝐶* (

*,* − 2

siendo *𝐶* la curva de ecuacio´ n vectorial **r**(*𝑡*) =

## Ejercicio 2. Teorema de Green:

1. Evaluar la integral de l´ınea del campo vectorial

*𝑡*

1+*𝑡*4

2*𝑡*

1+*𝑡*

*,* 1+*𝑡*2

(1+*𝑡*4 )2

, 0 ≤ *𝑡* ≤ 1

**F**(*𝑥, 𝑦*) = ( *𝑥*3 + *𝑦*3 *, 𝑦*3 − *𝑥*3

3

3

siendo *𝐶* la trayectoria definida como {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 : 4 ≤ *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 9*, 𝑥* ≥ 0*, 𝑦* ≥ 0}

1. Calcular el a´ rea de la regio´ n acotada por la curva *𝐶* de ecuacio´ n

4*𝑥*2 + 9 *𝑦*2 = 1*, 𝑥* ≥ 0

## Ejercicio 3. Teorema de Stokes:

1. Calcular el rotacional del campo vectorial **F** dado por

**F**(*𝑥, 𝑦*) = ( *𝑦*2*,* 3 − *𝑦𝑥, 𝑧*2

2

1. Calcular el flujo de ∇ × **F** a trave´ s de la superficie *𝑆* definida como {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : *𝑧*2 =

*𝑥*2 + *𝑦*2*,* −2 ≤ *𝑧* ≤ 0}

## Ejercicio 4. Teorema de la divergencia:

1. Calcular la divergencia del campo vectorial **F** dado por

**F**(*𝑥, 𝑦*) = (2*𝑥*3 *𝑦,* −3*𝑥*2 *𝑦*2*,* 2*𝑧*

1. Calcular el flujo de **F** a trave´ s del so´ lido acotado por la superficie *𝑆* de ecuacio´ n *𝑧* = *𝑥*2 *𝑦*2 4y el plano *𝑥 𝑦*

+ −

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Ambiental/Organizacio´ n Industrial Final (Ordinaria), 2021/05/20

**Ejercicio 1** (1 punto)**.** Calculad la derivada direccional de *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧* en el punto (0*,* 1*, 𝜋*/2)

en la direccio´ n dada por la curva *𝑟* (*𝑡*) = (cos((*𝜋*/2)*𝑡*)*,* sin((*𝜋*/2)*𝑡*)*,* (*𝜋*/2)*𝑡*)*.*

**Ejercicio 2** (2 puntos)**.** Hallad los o´ ptimos globales de *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥* 4 2 *𝑦*2 en la regio´ n del primer cuadrante delimitada por las curvas *𝑦* = *𝑥*3 e *𝑦* = 4*𝑥.*

( ) ( − ) +

**Ejercicio 3** (2 puntos)**.** Hallad los o´ ptimos locales de *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*2 *𝑘𝑥 𝑦 𝑦*2 6*𝑥* 2*,* donde *𝑘* es una constante.

( ) + + − +

**Ejercicio 4** (1 punto)**.** Calculad **∳**

*𝐶*

donde *𝐶* es la elipse 9*𝑥*2 + 4 *𝑦*2 = 36*.*

**Ejercicio 5** (1 punto)**.** Calculad

(3*𝑥*2 + *𝑦*)*𝑑𝑥* + (2*𝑥* + *𝑦*3)*𝑑𝑦,*

∫*𝐶* ( + 6 + (ln( ) − 2)

*𝑦 𝑥 𝑑𝑥 𝑥 𝑑𝑦,*

*𝑥*

donde *𝐶* es el trozo de la para´ bola *𝑥* = *𝑦*2 que va de (1*,* 1) a (*𝑒*2*, 𝑒*)*.*

**Ejercicio 6** (1 punto)**.** Dado el so´ lido *𝑇* limitado superiormente por el cono *𝑧*2 = *𝑥*2+ *𝑦*2*,* inferiormente por el plano *𝑧* = 0*,* y en sus lados por el cilindro *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4*𝑥,* hallad el volumen de *𝑇.*

**Ejercicio 7** (1 punto)**.** Calculad el flujo saliente de *𝑣 𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑥*2*, 𝑦*2*, 𝑧*2 a trave´ s del so´ lido *𝑇* limitado superiormente por el plano *𝑧* = 4*,* inferiormente por el plano *𝑥 𝑦,* y a sus lados por el cilindro *𝑥*2 *𝑦*2 = 4*.*

+

( ) ( )

**Ejercicio 8** (1 punto)**.** Calculad ∬

Ω

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*)*𝑑𝑥𝑑𝑦,*

donde *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 3*𝑥 𝑦*2 − *𝑦,* y Ω es la regio´ n acotada del plano delimitada por las rectas *𝑥* = −1*, 𝑥* = 1*,* y las curvas *𝑦* = |*𝑥*|*, 𝑦* = −|*𝑥*|*.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Ambiental/Organizacio´ n Industrial Final (Extraordinaria), 2021/06/24

**Ejercicio 1** (1 punto)**.** Calculad la derivada direccional de *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑥*2 + 2*𝑥 𝑦𝑧* − *𝑦𝑧*2 en el punto

(1*,* 1*,* 2) en una direccio´ n paralela a la recta

3 *𝑦* + *𝑧* = 5*, 𝑥* − 2 *𝑦* = −3*.*

**Ejercicio 2** (2 puntos)**.** Hallad los o´ ptimos globales de *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥* − 2)2 + ( *𝑦* − 1)2 + (*𝑧* − 2)2 en la esfera *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 1*.*

**Ejercicio 3** (2 puntos)**.** Hallad los o´ ptimos locales de *𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*2 *𝑘𝑥 𝑦* 4 *𝑦*2 3 *𝑦* 1*,* donde *𝑘* es una constante.

( ) + + − +

**Ejercicio 4** (1 punto)**.** Sea *𝑎 >* 0 una constante. Calculad

**∳**

(*𝑥* + *𝑦*)*𝑑𝑥* + ( *𝑦*2 − *𝑥*)*𝑑𝑦,*

*𝐶*

donde *𝐶* es la curva cerrada que parte de (−*𝑎,* 0)*,* va hasta (*𝑎,* 0) a lo largo del exercisee *𝑥,* y vuelve a (−*𝑎,* 0) por la parte superior de la circunferencia *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑎*2*.*

**Ejercicio 5** (1 punto)**.** Calculad

∫*𝐶* (

*𝑒*2 *𝑦* − 2*𝑥 𝑦 𝑑𝑥* + (2*𝑥𝑒*2 *𝑦* − *𝑥*2 + 1)*𝑑𝑦,*

donde *𝐶* es la curva dada por *𝑟* (*𝑡*) = (*𝑡𝑒𝑡,* 1 + *𝑡*)*, 𝑡* ∈ [0*,* 1]*.*

**Ejercicio 6** (1 punto)**.** Calculad ∭

*𝑒𝑔* (*𝑥, 𝑦,𝑧*) *𝑑𝑥𝑑𝑦𝑑𝑧,*

*𝑇*

√︁

donde *𝑔*(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2)3/2*,* y *𝑇* es el so´ lido limitado inferiormente por *𝑧* =

superiormente por la esfera *𝑥*2 + *𝑦*2 + *𝑧*2 = 1*.*

*𝑥*2 + *𝑦*2 y

**Ejercicio 7** (1 punto)**.** Calculad el flujo saliente de *𝑣*(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥 𝑦, 𝑥𝑧, 𝑦𝑧*) a trave´ s del so´ lido *𝑇* del primer octante limitado inferiormente por el plano *𝑥 𝑦* y superiormente por el plano *𝑥* + *𝑦* + *𝑧* = 1*.*

**Ejercicio 8** (1 punto)**.** Calculad el volumen del so´ lido *𝑇* limitado superiormente por *𝑧* = 1 + *𝑥 𝑦,* e inferiormente por el tria´ ngulo de ve´ rtices (1*,* 1*,* 0)*,* (4*,* 1*,* 0)*,* y (3*,* 2*,* 0)*.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 1 (Extraordinaria), 2021/07/2

**Ejercicio 1.** Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de la fun- cio´ n en varias variables dada por

f

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

sin(*𝑥*2 *𝑦*2 )

*𝑥*2 + *𝑦*2 +(*𝑥*− *𝑦*)2

*,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)

*(Ayuda:* sin(*𝑥*) *𝑥*→∼0

0*,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)

*𝑥 y* 0 ≤ (cos *𝜃* − sin *𝜃*)2 ≤ 2*)*

**Ejercicio 2.** Sea *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑧*3

sec( 2*𝑥* −*𝑥 𝑦*)

. Se pide:

1. Calcular ∇ *𝑓* (*𝑠, 𝑡*) teniendo en cuenta que *𝑥* = log(*𝑠𝑡*), *𝑦* = *𝑠*2 + *𝑡*2 y *𝑧* = *𝑡*3.

2. Determinar la ecuacio´ n del plano tangente a la gra´ fica de *𝑓* en el punto (*𝑡, 𝑠*) = (1*,* 1).

**Ejercicio 3.** La derivada direccional de una funcio´ n diferenciable *𝐷***uˆ** *𝑓* (*𝑥*0*, 𝑦*0*, 𝑧*0) toma los valores

−1, 2, −1 en la direccio´ n de los vectores (0*,* −1*,* 1), (0*,* 1*,* 0) y (−1*,* 1*,* 0). Hallar el valor del gradiente de *𝑓* en el punto (*𝑥*0*, 𝑦*0*, 𝑧*0).

**Ejercicio 4.** Hallar y clasificar los puntos cr´ıticos de la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*3 + *𝑦*2 − 6*𝑥 𝑦* + 6*𝑥* + 3 *𝑦* − 2

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 2 (Extraordinaria), 2021/07/02

**Ejercicio 1.** Sea la curva con parametrizacio´ n

Calcular la integral curvil´ınea

*𝜋*

*𝜎*(*𝑡*) = (cos(*𝑡*)*,* sin(*𝑡*)*, 𝑡*) *,* 0 ≤ *𝑡* ≤ 3

∫*𝐶*

*𝜋 𝑦𝑧* cos(*𝜋𝑥*) *𝑑𝑥* + *𝑧* sin(*𝜋𝑥*) *𝑑𝑦* + *𝑦* sin(*𝜋𝑥*) *𝑑𝑧*

haciendo uso del Teorema Fundamental del Ca´ lculo Integral en varias variables.

**Ejercicio 2.** Haciendo uso del Teorema de Green, evaluar la integral curvil´ınea

∫ − 1 *𝑦*2*𝑥 𝑑𝑥* + *𝑦𝑥 𝑑𝑦*

2

C

donde C es el contorno de la regio´ n comprendida entre la circunferencia *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1 y la elipse

*𝑥*2 + 1 *𝑦*2 = 1 sobre el semieje *𝑦* positivo.

4

**Ejercicio 3.** En cada aitemado se pide lo siguiente:

1. Calcular el rotacional del campo vectorial

**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑧*2 − 1*, 𝑧* − *𝑥 𝑦*3*, 𝑥* + *𝑦*

1. Aplicar el Teorema de Stokes para evaluar el flujo del rotacional de **F**, siendo *𝑆* la porcio´ n de superficie *𝑥* = 7 4*𝑧*2 4 *𝑦*2 acotada por el plano *𝑥* = 3 con la orientacio´ n en la direccio´ n negativa del eje *𝑥*

– −

**Ejercicio 4.** En cada aitemado se pide:

1. Calcular la divergencia del campo vectorial

**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = ( *𝑦𝑥*2*,* −*𝑥 𝑦*2 − *𝑦𝑧*3*, 𝑧𝑥*3 + 1 *𝑧*4

4

1. Calcular el flujo de **F** a trave´ s del so´ lido acotado por la porcio´ n esfera de radio 4 centrada en el origen con *𝑦, 𝑧* ≥ 0

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 1 (Ordinaria), 2022/03/18

**Ejercicio 1.** Sea la funcio´ n *𝑓* en dos variables dada por

f *𝑥*2 + *𝑦*2 *𝑎* cos ( 1 *,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)

con *𝑎, 𝑘* ∈ ℝ.

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

*𝑥*2 + *𝑦*2

*𝑘,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)

1. Hallar el valor de *𝑘* y el rango de valores de *𝑎* para que *𝑓* sea continua en (0*,* 0).
2. Determinar el rango de valores de *𝑎* para que exista la derivada direccional de *𝑓* a lo largo de cualquier direccio´ n, **u** = (*𝑢𝑥, 𝑢𝑦*).
3. Escoger el primer valor entero positivo de *𝑎* en el aitemado (b) y estudiar la diferenciabilidad de *𝑓* en (0*,* 0).

**Ejercicio 2.** Sea la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*(*𝑥*2 − 4) *𝑦*2 + *𝑥*(4 − *𝑥*2)

1. Calcular los puntos cr´ıticos de *𝑓* .
2. Clasificar los puntos obtenidos en el aitemado anterior.

**Ejercicio 3.** Sea Ω la regio´ n del plano situada en el primer cuadrante y acotada por las curvas *𝑥*2

+

*𝑦*2 = 6 y *𝑥 𝑦* = 1.

1. Dibujar la regio´ n Ω y obtene√r los puntos de interseccio´ n de ambas curvas.

(Ayuda: el polinomio *𝑥*2 2 primer cuadrante)

+

2*𝑥* + 1 contiene dos puntos de interseccio´ n que no esta´ n en el

1. Calcular la integral doble ∬Ω *𝑥 𝑑𝑥𝑑𝑦*

**Ejercicio 4.** Calcular el volumen del so´ lido acotado superiormente por el plano *𝑧* = − *𝑦* +2 3, inferior-

mente por el plano *𝑧* = *𝑦* − 3 y lateralmente por el plano *𝑦* = 0 as´ı como los cilindros *𝑥*

*𝑥*2 + *𝑦*2 = 4.

+ *𝑦*2 = 1 y

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 2 (Ordinaria), 2021/03/17

**Ejercicio 1.** Sea el campo vectorial, **F**, dado por

**F**(*𝑥, 𝑦*) = 6*𝑥*2 *𝑦*3 + 3*𝑥*4 *𝑦* + 3 *𝑦*5 **i** + 3*𝑥*5 + 3*𝑥 𝑦*4 + 6 *𝑦*2*𝑥*3 **j**

Se pide:

*𝑥*4 + 2*𝑥*2 *𝑦*2 + *𝑦*4

*𝑦*4 + 2 *𝑦*2*𝑥*2 + *𝑥*4

1. Calcular la circulacio´ n de **F** a lo largo de la curva

*𝐶*1 = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 : *𝑥*2 + *𝑦*2 − 6*𝑥* + 8 = 0}.

1. Calcular la circulacio´ n del campo vectorial **F** a lo largo de la curva

*𝐶*2 = {(*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 : *𝑥*2 + 2 *𝑦*2 − 6*𝑥* + 5 = 0} considerando la curva *𝐶* = *𝐶*1 ∪ *𝐶*2.

**Ejercicio 2.** Sea la superficie *𝑆* = *𝑆*1 ∪ *𝑆*2 con

*𝑆*1 = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : *𝑥*2 + *𝑦*2 = 1*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 1}

*𝑆*2 = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : *𝑥*2 + *𝑦*2 + (*𝑧* − 1)2 = 1*, 𝑧* ≥ 1} y el campo vectorial, **F**, dado por

**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥* + *𝑧* + 1*, 𝑥 𝑦* + *𝑦*2*, 𝑥*2 + *𝑦*2)

Se pide:

1. Calcular el flujo de **F** a trave´ s de *𝑆*.
2. Calcular el flujo de **F** a trave´ s de la superficie cerrada

*𝑆𝑐* = *𝑆* ∪ {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 1*, 𝑧* = 0}.

**Ejercicio 3.** Sea el campo vectorial, **F**, dado por

**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = *𝑦𝑧* **i** + (*𝑥*2 + *𝑦*)**j** + (*𝑥* + *𝑧*2)**k**

Se pide:

1. Calcular el flujo del campo vectorial ∇ × **F** a trave´ s de la superficie

*𝑆*1 = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*2*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 2}.

1. Calcular el flujo de **F** a trave´ s de la superficie

*𝑆*2 = {(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 : *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 4*, 𝑧* = 2} considerando la superficie cerrada *𝑆𝑐* = *𝑆*1 ∪ *𝑆*2.

**Ejercicio 4.** Escoger **una** EDO de primer orden, **otra** de segundo orden y obtener la solucio´ n general de cada una de ellas:

1. (3*𝑥*2 − *𝑦*2)*𝑑𝑦* − 2*𝑥 𝑦𝑑𝑥* = 0

2. (*𝑥*2 + *𝑦*2)*𝑑𝑥* − *𝑥 𝑦𝑑𝑦* = 0

3. *𝑥 𝑦*2 *𝑦*′ + *𝑦*3 = *𝑥* cos(*𝑥*)

4. *𝑦*′′ − 2 *𝑦*′ + 2 *𝑦* = *𝑒*−*𝑥* sin(2*𝑥*)

5. *𝑦*′′ + 4 *𝑦* = tan(2*𝑥*)

6. *𝑦*′′ − 2 *𝑦*′ − 3 *𝑦* = 64*𝑥𝑒*−*𝑥*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 1 (Ordinaria), 2022/07/05

**Ejercicio 1.** Sea la funcio´ n *𝑓* en dos variables dada por

 *𝑥*3 *,* (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 1)

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =  + − +

con *𝑘* ∈ ℝ.

*𝑥*2 *𝑦*2 2 *𝑦* 1

1 − *𝑒*−*𝑘,* (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 1)

1. Hallar el valor de *𝑘* para que *𝑓* sea continua en (0*,* 1).
2. Calcular la derivada direccional de *𝑓* en el punto (0*,* 1) a lo largo de cualquier direccio´ n, **u** =

(*𝑢𝑥, 𝑢𝑦*). ¿Existen *𝑓𝑥* (0*,* 1) y *𝑓𝑦* (0*,* 1)? En caso afirmativo, ¿cua´ l es su valor?

100 Estudiar la diferenciabilidad de *𝑓* en (0*,* 1).

**Ejercicio 2.** Sea la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + *𝑦*2 + 4*𝑥* − 4 *𝑦* − 1

y la regio´ n del plano, *𝑅*, cerrada y acotada dada por la semicircunferencia de ecuacio´ n

*𝑥*2 + ( *𝑦* − 1)2 = 4 y las rectas *𝑦* + *𝑥* = −1 e *𝑦* − *𝑥* = −1.

Se pide:

1. Calcular los puntos cr´ıticos de *𝑓* en el interior y en el borde de *𝑅* (si los hubiera).
2. Calcular los valores ma´ ximo y m´ınimo absolutos de *𝑓* sobre *𝑅*.

**Ejercicio 3.** Sea Ω la regio´ n del plano situada en el primer cuadrante y acotada por las curvas *𝑒𝑥*−1 −

*𝑦* = 0, *𝑦* − *𝑒*−*𝑥* = 2 y el eje *𝑦*.

1. Esbozar la regio´ n Ω y obtener los puntos de interseccio´ n entre las curvas que la delimitan.
2. Calcular la integral doble ∬Ω *𝑒 𝑑𝐴*

*𝑥*

**Ejercicio 4.** Sea el so´ lido, *𝑇*, acotado por los cilindros *𝑧*2 + ( *𝑦* − 2)2 = 4, *𝑧*2 + ( *𝑦* − 2)2 = 1 y los planos

= 3 y = 4.

*𝑥 𝑥*

−

Se pide:

1. Describir el so´ lido *𝑇* en coordenadas cil´ındricas y esbozar su gra´ fica.
2. Calcular el volumen de *𝑇*.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Organizacio´ n Industrial Parcial 2 (Ordinaria), 2022/07/05

**Ejercicio 1.** Sea el campo vectorial, **F**, dado por

**F**(*𝑥, 𝑦*) = 2*𝑥𝑒*−(*𝑥*2 + *𝑦*2 ) **i** + 2 *𝑦𝑒*−(*𝑥*2 + *𝑦*2 ) **j**

Se pide:

125 Determinar si **F** es o no conservativo. En caso afirmativo, calcular su funcio´ n potencial, *𝑓* .

125 Calcular la circulacio´ n del campo vectorial **F** a lo largo de la curva *𝐶*

compuesta por el segmento de recta de (1*,* −1) a (1*,* 1), la mitad superior de una circunferencia de radio 1 y centro (0*,* 1) y el segmento de recta de (−1*,* 1) a (−1*,* −1).

**Ejercicio 2.** Sea la superficie *𝑆* resultante de la interseccio´ n del cilindro *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4 con el plano

*𝑧* − *𝑥* − *𝑦* − 2 = 0, y el campo vectorial, **F**, dado por

**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥* − *𝑧* + 1*, 𝑦* + *𝑧* − 2*, 𝑥* + 2 *𝑦* + 3)

Se pide:

125 Calcular el flujo de ∇ × **F** a trave´ s de *𝑆* de forma directa.

125 Calcular el flujo de ∇ × **F** a trave´ s de *𝑆* haciendo uso del teorema adecuado.

**Ejercicio 3.** Sea el campo vectorial, **F**, dado por

**F**(*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = ( *𝑦𝑧* + *𝑥*3 **i** − (*𝑥*2*𝑧* − *𝑦*3 **j** + (*𝑥*2 *𝑦*4 + *𝑧*3 **k**

3 3 3

Se pide:

1. Calcular el flujo de **F** a trave´ s del so´ lido tetrae´ drico situado en el primer octante y acotado superiormente por el plano *𝑧* − *𝑥* − *𝑦* = 1
2. Calcular el flujo de **F** a trave´ s de la porcio´ n de bola situada en el tercer octante de radio 3 y centrada en el origen.

**Ejercicio 4.** Obtener la solucio´ n general de cada una de las EDOs:

1. (2*𝑥*2 + *𝑦*2)*𝑑𝑦* + *𝑥 𝑦 𝑑𝑥* = 0

3

2. *𝑥 𝑦 𝑦*′ − *𝑦*2 = *𝑥*4 sin(*𝑥*)

1. *𝑦*′′ + 3 *𝑦*′ + 2 *𝑦* = *𝑒*2*𝑥* cos(*𝑥*) *(me´todo de los coeficientes indeterminados)*
2. *𝑦*′′ + 9 *𝑦* = *𝑒*−*𝑥 (me´todo de variacio´ n de las constantes)*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Qu´ımica y dobles grados Parcial 1 (Ordinaria), 2021/03/25

**Ejercicio 1.** *(1 punto)* Calcula, si existe, el siguiente l´ımite:

l´ım

(*𝑥* − 1)2 *.*

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*0) (*𝑥* − 1)2 + *𝑦*2

**Ejercicio 2.** *(1 punto)* Estudia la continuidad de la siguiente funcio´ n en (0*,* 0):

 *𝑥 𝑦*  4

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =





√︁*𝑥*2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)*,*

1 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

**Ejercicio 3.** *(2 puntos)* Estudia la diferenciabilidad de la siguiente funcio´ n en (0*,* 0):

 √︁ *𝑥*3 *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)*,*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =



0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*.*

*𝑥*2 + *𝑦*2

**Ejercicio 4.** *(total: 2,5 puntos)* Sea

*𝑓* : *𝑅* = [−4*,* 4] × [−4*,* 4] → ℝ con *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*4 + *𝑦*4 − 2*𝑥*2 − *𝑦*2*.*

1. *(2 puntos)* Encuentra y clasifica todos los puntos cr´ıticos de *𝑓* .
2. *(0,5 puntos)* Justifica si el ma´ ximo relativo encontrado en (a) tambie´ n es el ma´ ximo absoluto de *𝑓* en *𝑅* o no.

**Ejercicio 5.** *(total: 3,5 puntos)* Sea Ω la regio´ n del plano *𝑋𝑌* limitada por

*𝑥*2

(*𝑥*) = y *𝑔*

*𝑥*2

(*𝑥*) = 2 −

1 4 2 4

(los puntos en las curvas pertenecen a Ω). Sea

*𝑓* : Ω → ℝ con *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = |*𝑥*|*𝑒*2 *𝑦.*

1. *(1,5 puntos)* Calcula el a´ rea de Ω mediante una integral doble.
2. *(2 puntos)* Calcula el volumen entre la gra´ fica de *𝑓 𝑥, 𝑦* y el plano *𝑋𝑌* mediante una integral doble o triple.

( )

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Qu´ımica y doble grados Parcial 2 (Ordinaria), 2021/05/21

**Ejercicio 1.** *(1 punto)* Sea *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*3 *𝑦* y la curva dada por *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4 y recorrida desde (0*,* 2) hasta

(−2*,* 0). Calcular la integral de *𝑓* a lo largo de esta curva.

**Ejercicio 2.** *(2 puntos)* Calcular el trabajo realizado por un cuerpo en el campo de fuerza *𝐹* (*𝑥, 𝑦*) =

(*𝑥* sin( *𝑦*)*, 𝑦*) que se mueve a lo largo de la para´ bola *𝑦* = *𝑥*2 desde (−1*,* 1) hasta (2*,* 4).

**Ejercicio 3.** *(2 puntos)* Evaluar la integral de superficie aplicando el teorema de la divergencia de Gauss para *𝐹* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (cos( *𝑦*)*,* sin(*𝑥*)*,* sin(*𝑧*)), siendo *𝑆* la superficie que encierra la regio´ n especi- ficada por *𝑥*2 + *𝑦*2 ≤ 4, |*𝑧*| ≤ 2.

**Ejercicio 4.** *(total: 3 puntos)*

1. *(2 puntos)* Hallar la solucio´ n general de la ecuacio´ n diferencial

d *𝑦 𝑦*2 sin *𝑥* = 0*.* d*𝑥*

+ ( )

1. *(0,5 puntos)* Comprobar la solucio´ n encontrada en (a).
2. *(0,5 puntos)* Resolver el problema de valor inicial

d *𝑦* + *𝑦*2 sin(*𝑥*) = 0*, 𝑦*(0) = 3*.*

d*𝑥*

**Ejercicio 5.** *(2 puntos)* Hallar la solucio´ n particular del problema de valor inicial

*𝑦*′′′ − 3 *𝑦*′ + 2 *𝑦* = 0*, 𝑦*(0) = 0*, 𝑦*′(0) = 0*, 𝑦*′′(0) = −9*.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Qu´ımica y doble grados Parcial 1 (Extraordinaria), 2021/06/16

**Ejercicio 1.** *(total: 4 puntos)* Dada la funcio´ n

3*𝑥*2 *𝑦*2



*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*2 + *𝑦*2



0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0)*,*

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0)*,*

se pide:

1. *(1 punto)* Estudiar la continuidad de *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) en (0*,* 0).
2. *(1 punto)* Calcular el gradiente de *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) en todo punto (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0).
3. *(1 punto)* Calcular las derivadas parciales en (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0).
4. *(1 punto)* Justificar si *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) es diferenciable en (0*,* 0) o no. En caso afirmativo, calcular el plano tangente en (0*,* 0).

**Ejercicio 2.** *(1 punto)* Hallar y clasificar los puntos cr´ıticos de la funcio´ n dada por *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥* + *𝑦* −

*𝑥*2 − *𝑦*2 − *𝑥 𝑦*.

**Ejercicio 3.** *(2,5 puntos)* Calcular la integral

∬

*𝐼* = *𝑥*2 *𝑦* d(*𝑥, 𝑦*) *,*

*𝐷*

siendo *𝐷* la regio´ n del segundo cuadrante encerrada entre *𝑦* = −*𝑥* e *𝑦* = *𝑥*2.

**Ejercicio 4.** *(2,5 puntos)* Calcular mediante una integral triple el volumen de la regio´ n Ω limitada por

las superficies

*𝑥*2

+ *𝑦*2

= 2*, 𝑧* =

√︁*𝑥*2 + *𝑦*2*, 𝑧* = 0*.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Qu´ımica y doble grados Parcial 2 (Extraordinaria), 2021/06/16

**Ejercicio 1.** *(2,5 puntos)* Utilizando una integral de l´ınea, calcular la longitud de la curva *𝜎* que va del punto 1*,* 0 al punto 0*,* 1 por l´ınea recta y luego de 0*,* 1 a 1*,* 0 por el arco de una circunferencia

( ) ( ) ( ) ( )

de radio 1.

**Ejercicio 2.** *(3 puntos)* Evaluar la integral de superficie ∫∫Φ ( ), siendo el trozo de la superficie

# *𝑥 𝑑 𝑢, 𝑣* Φ

esfe´ rica de radio 2 del primer octante. Identidad u´ til: 2 sin2 (*𝑥*) = 1 − cos(2*𝑥*).

**Ejercicio 3.** *(3 puntos)* Hallar mediante el me´ todo “variacio´ n de constante” la solucio´ n general de la

ecuacio´ n diferencial d *𝑦*

**Ejercicio 4.** *(total: 1,5 puntos)*

d*𝑥*

+ 3 *𝑦* = *𝑥* + *𝑒*−2*𝑥.*

1. *(0,5 puntos)* Hallar la solucio´ n general de la ecuacio´ n diferencial

*𝑦*′′ − 4 *𝑦*′ + 4 *𝑦* = 0*.*

1. *(1 punto)* Hallar la solucio´ n particular del problema de valor inicial

*𝑦*′′ − 4 *𝑦*′ + 4 *𝑦* = 0*, 𝑦*(1) = 1*, 𝑦*′(1) = 3*.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Tecnolog´ıas Industriales Parcial 1 (Ordinaria), 2021/03/17

**Ejercicio 1.** *(2 puntos)* Calcula, si existen, los siguientes l´ımites.

1. l´ım

2*𝑥*5 + *𝑥 𝑦*2

1. l´ım

(*𝑥* − 1)2

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

*𝑥*2 + *𝑦*2

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*0) (*𝑥* − 1)2 + *𝑦*2

**Ejercicio 2.** Sea la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥*2 *𝑦*(*𝑥* − *𝑦*)

*𝑥*4 + *𝑦*4

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

1. *(1.5 puntos)* Estudia la continuidad de la funcio´ n en ℝ2.
2. *(1 punto)* Calcula las derivadas parciales de *𝑓* en el (0*,* 0).
3. *(0.5 puntos)* Estudia la diferenciablidad de *𝑓* en el (0*,* 0).

**Ejercicio 3.** *(2 puntos)* Calcula y clasifica todos los puntos cr´ıticos de la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*3 + *𝑦*3 − 3*𝑥 𝑦 .*

**Ejercicio 4.** *(2 puntos)* Calcula la integral de

f 2 si *𝑦* ≤ *𝑥*2 *,*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) =

en el recta´ ngulo *𝑅* = [0*,* 3] × [0*,* 1].

4*𝑥 𝑦* si *𝑦 > 𝑥*2 *,*

**Ejercicio 5.** *(1 punto)* Utiliza una integral triple para calcular el volumen de un cilindro de altura 5 y radio de la base 2.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Tecnolog´ıas Industriales Parcial 2 (Ordinaria), 2021/06/02

**Ejercicio 1. (a)** *(1 punto)* Parametriza, con la orientacio´ n adecuada, la siguiente curva *𝛼* con punto inicial (1*,* 0).

*𝑦*

1

*𝑥*2 + *𝑦*2 = 1

*𝑦* = 1 − *𝑥*

1

*𝑥*

1. *(1 punto)* Calcula la longitud de la curva *𝛼* utilizando una integral de l´ınea.
2. *(1.5 puntos)* Comprueba si el campo

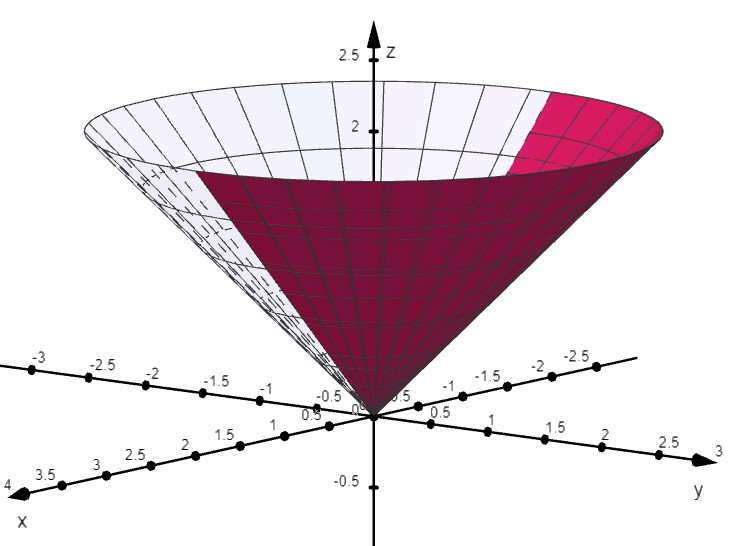
*𝐹* (*𝑥, 𝑦*) = (6*𝑥 𝑦* + *𝑦* − 1*,* 3*𝑥*2 + *𝑥* + 2) es conservativo y calcula, si existe, una funcio´ n potencial.

1. *(0.5 puntos)* Calcula ∫*𝛼* .

*𝐹*

**Ejercicio 2. (a)** *(0.5 puntos)* Parametriza la siguiente superficie Φ.

{ (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*2*, 𝑦* ≥ 0*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 2 }

Trozo del cono con

* + ve´ rtice en el origen de coordenadas,
  + altura 2, .
  + ecuacio´ n de la base *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4,
  + *𝑦* ≥ 0.

**(b)** *(1.5 puntos)* Calcula ∫∫Φ siendo ( ) ( 1).

*𝐹 𝐹 𝑥, 𝑦, 𝑧* = *𝑥, 𝑦,*

**Ejercicio 3. (a)** *(2 puntos)* Hallar la solucio´ n general de la ecuacio´ n diferencial

*𝑑𝑦* 3 *𝑦* = *𝑥 𝑒*−2*𝑥*

+ +

*𝑑𝑥*

mediante el me´ todo “variacio´ n de constante”.

1. *(0.5 puntos)* Hallar la solucio´ n general de la ecuacio´ n diferencial

*𝑦*′′ − 4 *𝑦*′ + 4 *𝑦* = 0*.*

1. *(0.5 puntos)* Hallar la solucio´ n particular del problema de valor inicial dado por

 *𝑦*′′ − 4 *𝑦*′ + 4 *𝑦* = 0*,*

 *𝑦*(1) = 1*,*

 *𝑦*′(1) = 3*,*

utilizando el resultado de (b).

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Tecnolog´ıas Industriales Parcial 2 (Ordinaria), 2021/06/02

**Ejercicio 4.** *(1 punto)* Utilizando el me´ todo de diferencias divididas de Newton, dar el polinomio interpolador *𝑃* (*𝑥*) para los datos de la tabla abajo y el valor de *𝑃* (14*.*1) redondeado a 4 decimales.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *𝑥* | 0 | 2 | 15 | 25 | 30 |
| *𝑦* | 0 | 0*.*3817 | 0*.*1215 | −0*.*7468 | −0*.*2070 |

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Tecnolog´ıas Industriales Parcial 1 (Extraordinaria), 2021/06/17

**Ejercicio 1.** (*3 puntos*) Calcula, si existen, los siguientes l´ımites.

log( *𝑥* ) + log( *𝑦*)

*𝑥*3 − 2*𝑥 𝑦*3

1. l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(2*,*1)

2

*𝑥* + *𝑦* − 3

1. l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

*𝑥*2 + *𝑦*2

**Ejercicio 2.** (*2.5 puntos*) Sea la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥 𝑦*2 − *𝑥*2 *𝑦*

*𝑥*2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

1. Calcula, si existen, las derivadas parciales de *𝑓* en el punto (0*,* 0).
2. Estudia la diferenciabilidad de *𝑓* en el punto (0*,* 0).

**Ejercicio 3.** (*1.5 puntos*) Sea la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = (*𝑥* + *𝑦*)*𝑒*3 *𝑦 .*

1. Calcula la derivada direccional de *𝑓* en el punto (−1*,* 0) en la direccio´ n *𝜃* = *𝜋* .

2

1. Calcula la ecuacio´ n del plano tangente a la superficie generada por *𝑓* en el punto (−1*,* 0).

∫∫

**Ejercicio 4.** *(3 puntos)* Calcula

*𝑅*

*𝑥 𝑦 𝑑 𝑥, 𝑦*

*𝑥*2 + *𝑦*2

( )

siendo *𝑅* el recinto del primer cuadrante limitado por

*𝑥*2 + *𝑦*2 = 1 y *𝑥*2 + *𝑦*2 = 4 *.*

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Tecnolog´ıas Industriales Parcial 2 (Extraordinaria), 2021/06/17

**Ejercicio 1. (a)** *(0.5 puntos)* Parametriza, con la orientacio´ n adecuada, la siguiente curva *𝛼* con punto inicial (0*,* 1).

*𝑦*

2 = 1

|  |  |
| --- | --- |
| 1  *𝑦* = | *𝑥*2 + *𝑦*  1 − *𝑥* |
|  | 1 |

*𝑥*

**(b)** *(1 punto)* Calcula ∫*𝛼* siendo ( ) 2 + 1.

*𝑓 𝑓 𝑥, 𝑦* = *𝑥*

**Ejercicio 2.** *(3 puntos)* Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

1. Si *𝐹* : ℝ2 −→ ℝ2 es un campo conservativo y

*𝛼* (*𝑡*) = (cos(*𝑡*)*,* sin(*𝑡*)) con *𝑡* ∈

*𝜋 ,* 3*𝜋 ,*

entonces ∫*𝛼*

*𝐹* =

∫

*𝛽*

*𝐹* .

2 2

*𝛽*(*𝑡*) = (0*, 𝑡*) con *𝑡* ∈ [−1*,* 1] *,*

1. Sea *𝐹* : ℝ2 −→ ℝ2 un campo vectorial con

*𝜕𝐹*1 (*𝑥, 𝑦*) = 2 − *𝑥*2 y *𝜕𝐹*2 (*𝑥, 𝑦*) = 5 − *𝑥*2 *.*

*𝜕 𝑦*

*𝜕𝑥*

Si *𝛼* una curva ce∫rrada simple de ℝ2 orientada positivamente que encierra un recinto *𝑅* de

a´ rea 3, entonces

*𝛼*

*𝐹* = 3

**Ejercicio 3. (a)** *(0.5 puntos)* Parametriza la superficie lateral de un cilindro vertical de ecuacio´ n

*𝑥*2 + *𝑦*2 = 2 entre los planos *𝑧* = −2 y *𝑧* = 1.

**(b)** *(1 punto)* Utiliza una integral de superficie para calcular el a´ rea de la superficie del apartado anterior.

**Ejercicio 4. (a)** *(1,5 puntos)* Hallar la solucio´ n general de la ecuacio´ n diferencial

*𝑑𝑦 𝑦*2 sin *𝑥* = 0*.*

+ ( )

*𝑑𝑥*

1. *(0.5 puntos)* Comprobar la solucio´ n encontrada en (a).
2. *(0.5 puntos)* Resolver el problema de valor inicial

 *𝑑𝑦* + *𝑦*2 sin(*𝑥*) = 0*,*

 *𝑦*(0) = 3*.*

*𝑑𝑥*

**Ejercicio 5. (a)** *(1 punto)* Utilizando el me´ todo de Lagrange y para los datos de la tabla abajo, dar el polinomio interpolador *𝑃* (*𝑥*) de forma expandida y con un u´ nico te´ rmino por grado del polinomio. Los coeficientes de *𝑃* (*𝑥*) deben estar redondeados a 6 decimales.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *𝑥* | 0 | 2 | 15 | 25 |
| *𝑦* | 0 | 0*.*3817 | 0*.*1215 | −0*.*7468 |

**(b)** *(0,5 puntos)* Dar el valor de *𝑃* (20) redondeado a 4 decimales.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Tecnolog´ıas Industriales Parcial 1 (Ordinaria), 2022/03/10

**Ejercicio 1.** *(2 puntos)* Calcula, si existen, los siguientes l´ımites.

1. l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

2*𝑥*2 ( *𝑦* − 1) − *𝑦*2

2*𝑥*2 + *𝑦*2

1. l´ım

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

*𝑥* sin( *𝑦*) − *𝑦*

|*𝑥*| + | *𝑦*|

**Ejercicio 2.** Sea la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥*(*𝑥*2 − *𝑦*2)

*𝑥*2 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

**(a)** *(1 punto)* Calcula todas las derivadas direccionales de *𝑓* en (0*,* 0).

**(b)** *(1 punto)* Calcula *𝜕*

*𝜕𝑥*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) en todo (*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2.

**(b)** *(0.5 puntos)* Estudia la diferenciablidad de *𝑓* en (0*,* 0).

**Ejercicio 3.** Sea la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*4 + *𝑦*4 − (*𝑥* − *𝑦*)2 *.*

1. *(1 punto)* Calcula todos los puntos cr´ıticos.
2. *(0.5 puntos)* Clasifica el punto cr´ıtico (1*,* −1).
3. *(0.5 puntos)* Justifica que (0*,* 0) es punto de silla.

**Ejercicio 4.** Sea *𝑅* el recinto del primer cuadrante limitado por *𝑥* = 0, *𝑦* = 1, *𝑦* = 2 e *𝑦* = *𝑥*2.

1. *(0.5 puntos)* Escribe el conjunto *𝑅* como horizontal o verticalmente simple.
2. *(1 punto)* Calcula ∫∫*𝑅* ( ).

2

*𝑥𝑒*− *𝑥 𝑑 𝑥, 𝑦*

*𝑦*

**Ejercicio 5.** *(1.5 puntos)* Sea Ω el recinto del primer cuadante limitado por las circunferencias cen- tradas en (0*,* 0) y de radios 1 y 2. Calcula el a´ rea de Ω utilizando una integral doble.

**Ejercicio 6.** *(0.5 puntos)* Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

**(a)** *𝑥* = 5 es punto de acumulacio´ n de *𝑇* = [−2*,* 3) ∪ { 5 }.

**(b)** El conjunto *𝑊* = { (*𝑥, 𝑦*) ∈ ℝ2 *𝑥*2 ≤ *𝑦 <* 3 } esta´ acotado.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Tecnolog´ıas Industriales Parcial 2 (Ordinaria), 2022/05/21

**Ejercicio 1.** *(1.5 puntos)* Calcula ∫*𝛼* siendo ( ) (2 − 2 + 1) y

# *𝐹 𝐹 𝑥, 𝑦* = *𝑥 𝑦 , 𝑥*2

*𝛼* (*𝑡*) = (log(*𝑡*2 + 1)*,* 6*𝑡* (*𝑡* − 1) con *𝑡* ∈ [0*,* 1] *.*

*𝑡*2 + 7

**Ejercicio 2.** *(1.5 puntos)* Calcula, de dos formas distintas, ∫*𝛼* siendo ( ) (− − 1) y

*𝐹 𝐹 𝑥, 𝑦* = *𝑦, 𝑥*

*𝑦*

*𝑥*

*𝛼*

1

2

**Ejercicio 3.** Sea la superficie

*𝑇* = { (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = 2*, 𝑥* ≤ 0*,* −2 ≤ *𝑧* ≤ 3 } *.*

1. *(0.5 puntos)* Parametriza *𝑇*.
2. *(1 punto)* Calcula el a´ rea de *𝑇* con integrales.

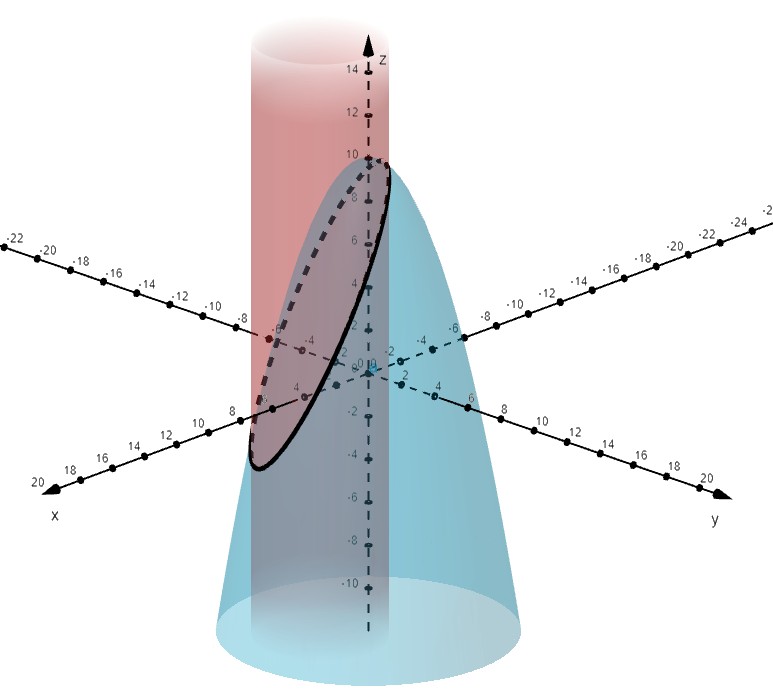
2

tacio´ n positiva) obtenida al intersecar el paraboloide el´ıptico *𝑧* = 10 − 1

*𝑥*2 + *𝑦*2) y el cilindro vertical

**Ejercicio 4.** *(1.5 puntos)* Calcula la integral del campo *𝐹* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (*𝑥, 𝑧,* 2 *𝑦*) sobre la curva (con orien-

cuya base es una circunferencia centrada en (2*,* −1) y de radio 3.



2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Tecnolog´ıas Industriales Parcial 1 (Extraordinaria), 2022/06/28

**Ejercicio 1.** *(2 puntos)* Calcula, si existen, los siguientes l´ımites.

1. l´ım *𝑦*
2. l´ım

*𝑥 𝑦* log(*𝑥*2 + *𝑦*2)

(*𝑥, 𝑦*)→(1*,*0) *𝑥* − 1

**Ejercicio 2.** Sea la funcio´ n

(*𝑥, 𝑦*)→(0*,*0)

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

*𝑥*3 *𝑦*

*𝑥*4 + *𝑦*2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

con *𝜕*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 

3*𝑥*2 *𝑦*3 − *𝑥*6 *𝑦*

(*𝑥*4 + *𝑦*2)2

si (*𝑥, 𝑦*) ≠ (0*,* 0) *,*

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *,*

*𝜕𝑥*

 0 si (*𝑥, 𝑦*) = (0*,* 0) *.*

1. *(1 punto)* Estudia la continuidad de *𝜕*

*𝜕𝑥*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) en (0*,* 0).

1. *(0.75 puntos)* Justifica si *𝑓* es diferenciable en (0*,* 0).
2. *(0.75 puntos)* Justifica si *𝑓* es diferenciable en (1*,* 1).

**Ejercicio 3.** Sea la funcio´ n

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = *𝑥*4 + *𝑦*4 − (*𝑥* − *𝑦*)2 *.*

1. *(1 punto)* Calcula todos los puntos cr´ıticos.
2. *(0.5 puntos)* Clasifica el punto cr´ıtico (−1*,* 1).
3. *(0.5 puntos)* Justifica que (0*,* 0) es punto de silla.

**Ejercicio 4.** *(1.5 puntos)* Calcula

2 *𝑦* si *𝑦* ≥ *𝑥𝑒*

∫∫*𝑅*

*𝑓* (*𝑥, 𝑦*) *𝑑*(*𝑥, 𝑦*) siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦*) = 3 si *𝑦 < 𝑒𝑥*

y *𝑅* = [−1*,* 0] × [0*,* 1]*.*

**Ejercicio 5.** *(1.5 puntos)* Calcula el volumen del cuerpo limitado inferiormente por el paraboloide el´ıptico *𝑧* = *𝑥*2 + *𝑦*2 y superiormente por el plano *𝑧* = 4.

**Ejercicio 6.** *(0.5 puntos)* Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

1. *𝑥* = −7 es un punto de la frontera de *𝐴* = (−∞*,* 6 ].
2. *𝑥* = 5 es punto interior de *𝐵* = [−2*,* 3) ∪ { 5 }.

2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)

Ing. Tecnolog´ıas Industriales Parcial 2 (Extraordinaria), 2022/06/28

**Ejercicio 1.** *(3 puntos)* Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

1. Sea *𝑓* : ℝ2∫−→ ℝ un campo escalar cualquiera. Si *𝛼* es una curva simple cerrada de ℝ2,

entonces

*𝛼*

*𝑓* = 0.

1. Si *𝐹* : ℝ2 −→ ℝ2 es un campo conservativo y

*𝛽*1 (*𝑡*) = (cos *𝑡,* sin *𝑡*) con *𝑡* ∈

*𝜋 ,* 3*𝜋 ,*

entonces ∫*𝛽*

1

*𝐹* =

∫

*𝛽*2

*𝐹* .

2 2

*𝛽*2 (*𝑡*) = (0*, 𝑡*) con *𝑡* ∈ [−1*,* 1] *,*

**(c)** Sea *𝐺* : ℝ2 −→ ℝ2 un campo vectorial dado por *𝐺*(*𝑥, 𝑦*) = (2 *𝑦* − 3*𝑥*2 *𝑦,* 5*𝑥* − *𝑥*3 + 4 *𝑦*). Si *𝛾* es una curva∫cerrada simple de ℝ2 orientada positivamente que encierra un recinto *𝑅* de a´ rea 3,

entonces

*𝛾*

*𝐺* = 3.

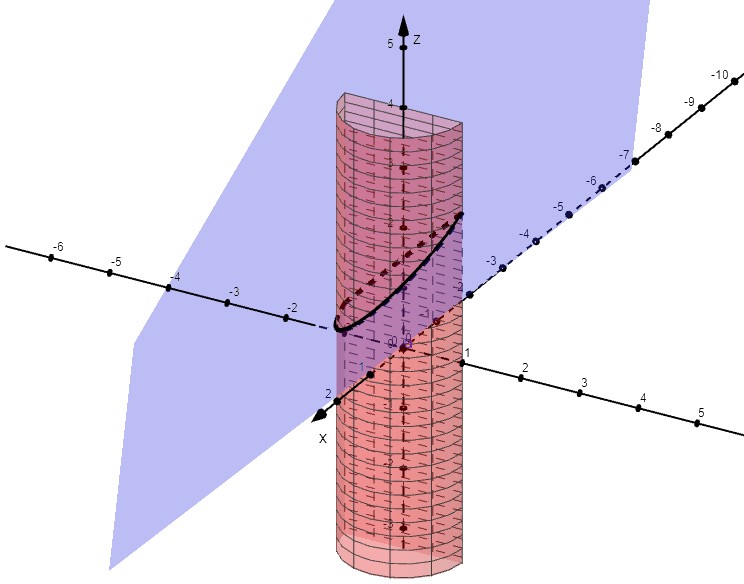
**Ejercicio 2. (a)** *(0.5 puntos)* Parametriza la siguiente superficie Φ:

**(b)** *(1 punto)* Calcula ∫∫Φ

*𝑓* siendo *𝑓* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = 2*𝑧*.

{ (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) ∈ ℝ3 *𝑥*2 + *𝑦*2 = *𝑧*2*, 𝑦* ≤ 0*,* 0 ≤ *𝑧* ≤ 2 } *.*

**Ejercicio 3.** *(1.5 puntos)* Calcula la integral del campo *𝐹* (*𝑥, 𝑦, 𝑧*) = (2*𝑧, 𝑦, 𝑥*) sobre la curva cerrada (con orientacio´ n positiva) obtenida al intersecar el plano *𝑥* − 2 *𝑦* + 2*𝑧* = 3 con el semicilindro vertical cuya base es el trozo de circunferencia centrada en el origen y de radio 1 con *𝑥* ≥ 0.



2021-2023 © Campos, Iagar, Latorre, Puertas, Stich, Toranzo Obra bajo licencia [CC BY-SA 4.0 cba](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es)