Tema 1: Límites y continuidad

Matemáticas II

Cédric M. Campos
Universidad Rey Juan Carlos

Curso 2021/2022, Móstoles

Conjuntos

Definición (DLE)

conjunto (Del lat. coniunctus.)

6. m. Totalidad de los elementos o cosas poseedores de una propiedad común, que los distingue de otros; p. ej., los seres vivos.

- Extensión (enumeración)

$$C = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad A = \{1, \pi, \text{manzana}, \clubsuit\}$$

- Comprensión (propiedad)

$$C = \{x : P(x)\} \qquad E = \{n : n \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N}\ (n = 2k)\}$$

- Abstracción (imagen)

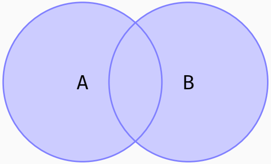
$$C = \{f(x) : P(x)\} \qquad E = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$$

- Unión

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

$$\{4k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{4k + 2 : k \in \mathbb{N}\} = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$$

$A \cup B$

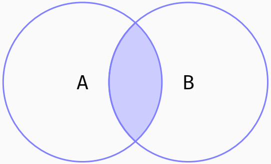


- Intersección

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

$$\{2k : k \in \mathbb{N}\} \cap \{3k : k \in \mathbb{N}\} = \{6k : k \in \mathbb{N}\}$$

$A \cap B$

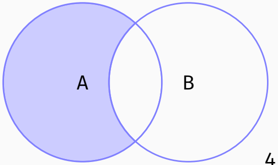


- Diferencia

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\mathbb{N} \setminus \{2k : k \in \mathbb{N}\} = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$$

$A \setminus B$



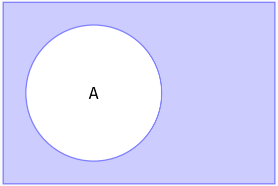
- Complementario

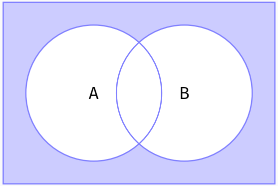
$$\bar{A} = X \setminus A = A^c$$

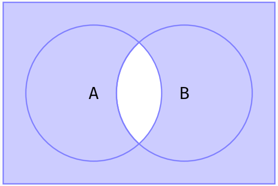
Leyes de Morgan (Versión conjuntista)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$







$\mathbb{R}^n$ como conjunto (producto cartesiano)

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n veces}} = \{\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{n-tupla}} : x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

$\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial

Suma vectorial y producto por un escalar (extensión comp. a comp.)

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Ejemplo

$$3 \cdot (0, 2, -1) + 2 \cdot (2, -3, 1) = (0, 6, -3) + (4, -6, 2) = (4, 0, -1)$$

Definición (Producto escalar)

$$x \cdot y \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \doteq \langle x, y \rangle$$

Definición (Norma euclídea)

$$\|x\| \doteq \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

Teorema

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \alpha$$

Definición (Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$)

$$x \wedge y \doteq \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Teorema

$$x \times y = (\|x\| \|y\| \sin \alpha) \vec{n}$$

Ejemplo

$$x = (2, -3, 1) \qquad y = (0, 2, -1)$$

$$x \cdot y = 0 - 6 - 1 = -7$$

$$\|x\| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\|y\| = \sqrt{0 + 4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\alpha = \operatorname{acos} \frac{-7}{\sqrt{14 \cdot 5}} = 2.562$$

$$x \times y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, 4)$$

$$\|x \times y\| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

$$\alpha = \pi - \operatorname{asin} \sqrt{\frac{21}{14 \cdot 5}} = 2.562$$

Definición (Norma)

$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ es una norma si y sólo si

- $\|x\| \geq 0$ & $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (positiva)
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogénea o proporcional)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)

Definición (p-norma, $p \geq 1$)

$$\|x\|_p \doteq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

- $p = 1$, norma uno

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- $p = 2$, norma euclídea

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

- $p = \infty$, norma infinito

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

$\mathbb{R}^n$ como espacio afín

Conjuntos de puntos con una nueva operación: el vector que los une.

$$(P, Q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \overrightarrow{PQ} \in \mathbb{R}^n$$

1. $P + \overrightarrow{PQ} = Q$ (traslación)
2. $\overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$ (inyectividad)
3. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ (simetría)
4. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (regla de Chasles)
5. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ (regla del paralelogramo)

Ejemplo

$$\underbrace{(0,2,-1)}_{\text{punto}} + \underbrace{(2,-3,1)}_{\text{vector}} = \underbrace{(2,-1,0)}_{\text{punto}} \qquad \underbrace{(0,2,-1)}_{\text{punto}} + \underbrace{2 \cdot (2,-3,1)}_{\text{vector}} = \underbrace{(4,-4,-1)}_{\text{punto}}$$

Definición (Norma)

$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ es una norma si y sólo si

- $\|x\| \geq 0$ & $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (positiva)
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogénea o proporcional)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)

Definición (Distancia)

$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$ es una distancia si y sólo si

- $d(x, y) \geq 0$ & $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (positiva)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular)

Nota: $d(P, Q) \doteq \|\overrightarrow{PQ}\| \rightsquigarrow d_p(P, Q) \doteq \|\overrightarrow{PQ}\|_p$

Definición (Bola de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $\epsilon > 0$)

- Abierta: $B(x_0;\epsilon) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < \epsilon\}$
- Cerrada: $\bar{B}(x_0;\epsilon) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq \epsilon\}$
- Reducida: $B^*(x_0;\epsilon) \doteq B(x_0;\epsilon) \setminus \{x_0\}$ & $\bar{B}^*(x_0;\epsilon) \doteq \bar{B}(x_0;\epsilon) \setminus \{x_0\}$

Definición (Topología)

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto $\overset{\cdot}{\iff} \forall x \in A\ \exists \epsilon > 0 : B(x;\epsilon) \subseteq A$
- $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado $\overset{\cdot}{\iff} A = \mathbb{R}^n \setminus C$ abierto

Teorema

Definición (Lugares topológicos)

- Interior: $\text{int}(A) \doteq \mathring{A} \doteq \{x \in A : \exists \epsilon > 0 : B(x; \epsilon) \subseteq A\}$
- Clausura: $\text{cl}(A) \doteq \bar{A} \doteq \mathbb{R}^n \setminus \left(\text{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)\right)$
- Frontera: $\text{fr}(A) \doteq \partial A \doteq \text{cl}(A) \cap \text{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$

Nota:

- El interior de A es el abierto más grande contenido en A.
- La clausura de A es el cerrado más pequeño conteniendo a A.
- La frontera de A es lo que separa a A de su complementario.

Teorema

$$\text{int}(A) \cap \text{fr}(A) = \emptyset \qquad \& \qquad \text{int}(A) \cup \text{fr}(A) = \text{ad}(A)$$

Definición

- Acumulación: $\operatorname{acc}(A) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0 : B^*(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset\}$
- Aislados: $\operatorname{iso}(A) \doteq \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{acc}(A)$

Nota:

- Los puntos de acumulación de A están «pegados» a otros puntos de A.
- Los puntos aislados de A son aquellos que están «solos».

Teorema

$$\operatorname{acc}(A) \cap \operatorname{iso}(A) = \emptyset \qquad \& \qquad \operatorname{acc}(A) \cup \operatorname{iso}(A) = \operatorname{ad}(A)$$

- Coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} P &= (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n & \quad & x_i \text{ proyección i-ésimo eje} \\ &= O + x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n & & O \text{ origen, } \{\vec{e}_i\} \text{ base} \\ &= O' + y_1\vec{f}_1 + \cdots + y_n\vec{f}_n & & O' \text{ origen, } \{\vec{f}_i\} \text{ base} \end{aligned}$$

- Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$: $r \geq 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]$

polares $\to$ cartesianas	cartesianas $\to$ polares
$x = r\cos\theta$	$r^2 = x^2 + y^2$
$y = r\sin\theta$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$

- Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$: $r \geq 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\bar{z} \in \mathbb{R}$

cilíndricas $\to$ cartesianas	cartesianas $\to$ cilíndricas
$x = r\cos\theta$	$r^2 = x^2 + y^2$
$y = r\sin\theta$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$z = \bar{z}$	$\bar{z} = z$

- Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$: $\rho \geq 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\phi \in [0, \pi]$

esféricas $\to$ cartesianas	cartesianas $\to$ esféricas
$x = \rho\sin\phi\cos\theta$	$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$
$y = \rho\sin\phi\sin\theta$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$z = \rho\cos\phi$	$\tan\phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

Funciones

Definición (Elipse de focos $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$)

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = \text{cte.}\}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $a > b \Rightarrow$ OX eje focal
- $a < b \Rightarrow$ OY eje focal
- $a = b \Rightarrow$ circunferencia

Elipse/Hipérbola/Parábola/Cónica

Límites y continuidad

Definición

Sean $F\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathrm{acc}(D)$, $L \in \mathbb{R}^n$.

$$\exists \lim_{x \to x_0} F(x) \doteq L \quad \overset{\cdot}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \left(0 < d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d(L, F(x)) < \epsilon\right)$$

Nota: F no necesita estar definida en x_0, v.gr. $F(x) = \frac{x}{x}$.

Teorema

$$\exists \lim_{x \to x_0} F(x) \quad \Longrightarrow \quad \exists! L \in \mathbb{R}^n : \lim_{x \to x_0} F(x) = L$$

Teorema

Si $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $L = (L_1, \ldots, L_n)$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f_i(x) = L_i \ \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Nota: En adelante, asumimos en general $n = 1$.

Teorema

Si $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ & $\exists \lim_{x \to x_0} g(x)$, entonces:

- $\exists \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\exists \lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\exists \lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

Ejemplo

$$f(x,y)=\frac{5x^2y}{x^2+3y^2} \quad \rightsquigarrow \quad \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=\frac{5}{4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) \;¿=?\; \underbrace{\frac{\lim_{(x,y)\to(1,1)}(5x^2y)}{\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+3y^2)}}_{\neq 0} \;¿=?\; \ldots \;¿=?\; \underbrace{\frac{5(\lim x)^2(\lim y)}{(\lim x)^2+3(\lim y)^2}}_{\lim=\lim_{(x,y)\to(1,1)}} \;¡=!\; \frac{5}{4}$$

Definición: límites iterados

Sea $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$L_1 \doteq \lim_{x\to x_0} \underbrace{\lim_{y\to y_0} f(x,y)}_{f_1(x)} \qquad\qquad L_2 \doteq \lim_{y\to y_0} \underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x,y)}_{f_2(y)}$$

Teorema

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \& \quad \exists f_i \qquad \Longrightarrow \qquad \exists L_i = L$$

Corolario (contrarrecíproco)

$$\nexists L_1 \vee \nexists L_2 \ \vee \ L_1 \neq L_2 \quad \Longrightarrow \quad \nexists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Ejemplo

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2+y^2-1} = \frac{\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x-y)}{\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+y^2-1)} = 0$$

$$L_1 = \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1}\frac{x-y}{x^2+y^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2} = 0$$

$$L_2 = \lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x-y}{x^2+y^2-1}\right) = \lim_{y\to 1}\frac{1-y}{y^2} = 0$$

Ejemplo

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^3} = ¿?$$

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^2}{x^2+y^3}\right) = \lim_{x\to 0} x = 0 \\ L_2 &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^2}{x^2+y^3}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y} = \infty \end{aligned}\right\} \nexists L$$

Definición: límite direccional

Sean $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y $\phi\colon I \subset \mathbb{R} \to D$ t.q. $\lim_{t\to t_0} \phi(t) = x_0$.

$$L_\phi \doteq \lim_{t\to t_0} (f \circ \phi)(t)$$

Teorema

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \exists L_\phi = L \ \forall \phi$$

Nota 1: Recíproco cierto, pero no práctico.

Nota 2: Los límites iterados son, en general (no siempre), límites direccionales.

Corolario (contrarrecíproco)

$$\nexists L_\phi \ \vee \ L_\phi \neq L_\psi \quad \Longrightarrow \quad \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Ejemplo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+3y^3} = L \qquad \left.\begin{array}{r} L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{2x^2+3y^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \\ L_2 = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{2x^2+3y^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \\ \phi(t) = (t^3, t^2) \rightsquigarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3t^2}{2t^6+3t^6} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{5t} = \infty \\ y^3 = x^2 \rightsquigarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xx^{2/3}}{2x^2+3x^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{5x^{1/3}} = \infty \end{array}\right\} \quad \nexists L$$

Teorema: criterio del sandwich

Ejemplo

Teorema

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \;\&\; g \text{ acotada en } B^*(x_0;\epsilon) \implies \exists \lim_{x\to x_0} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = 0$$

Ejemplo

$$f(x,y) = \frac{5x^2y}{x^2+3y^2} \quad \rightsquigarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 5y = 0 \qquad \& \qquad \frac{x^2}{x^2+3y^2} \leq \frac{x^2+3y^2}{x^2+3y^2} = 1 \quad \forall (x,y)\in B^*((0,0);\epsilon)$$

Teorema: criterio de la función mayorante

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \iff \exists F\colon [0,R[\,\to \mathbb{R} \quad \lim_{r\to 0^+} F(r) = 0 \ \&$$

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - L| \leq F(r) \quad \forall r\, \forall\theta$$

Nota: Puede entenderse como una aproximación radial uniforme.

Ejemplo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^3+3y^3}{x^2+y^2} = 0$$

$$\left|\frac{x^3+3y^3}{x^2+y^2} - 0\right| \overset{\substack{\text{polares}\\ \downarrow}}{=} \frac{r^3|\cos^3\theta + 3\sin^3\theta|}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \leq r(|\cos^3\theta| + 3|\sin^3\theta|) \leq 4r \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$$

Definición

Sean $F\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$.

$$F \in \mathcal{C}^0(x_0) \quad \overset{\cdot}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

$$\mathcal{C}^0(D) \doteq \{F\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : F \in \mathcal{C}^0(x)\ \forall x \in D\}$$

Teorema

Sean $F\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $G\colon C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $x_0 \in D$, $y_0 \in C : y_0 = F(x_0)$.

$$F \in \mathcal{C}^0(x_0)\ \&\ G \in \mathcal{C}^0(y_0) \quad \Longrightarrow \quad G \circ F \in \mathcal{C}^0(x_0)$$

Teorema

Si $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, entonces

$$F \in \mathcal{C}^0(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad f_i \in \mathcal{C}^0(x_0)\ \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Teorema

Sean $f, g \colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Si $f, g \in \mathcal{C}^0(x_0)$, entonces:

- $\alpha f \in \mathcal{C}^0(x_0)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $f + g \in \mathcal{C}^0(x_0)$
- $f \cdot g \in \mathcal{C}^0(x_0)$
- $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(x_0)$

Ejemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+3y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \rightsquigarrow \qquad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$$

Teorema

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

$$f \in \mathcal{C}^0(D) \ \ \& \ \ D \text{ conexo} \quad \Longrightarrow \quad f(D) \text{ conexo}$$

Nota: Un conj. conexo en dim. 1 es un intervalo. Generaliza el TVI.

Teorema: Weierstraß

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{C}^0(D) \ \ \& \ \ D \text{ compacto} \quad \Longrightarrow \quad \exists \min_{x \in D} f(x) \ \ \& \ \ \exists \max_{x \in D} f(x)$$

Ejemplo

Consideremos $D = [-2,2] \times [-2,2] = \bar{B}_\infty\big((0,0);2\big)$.

$$|f(x,y)| \leq \left|\frac{5x^2y}{x^2+3y^2}\right| \leq 5|y| \leq 10 \quad \Longrightarrow \quad f([-2,2]^2) \subseteq [-10,10]$$

Copyleft 2020-2022, All Lefts Reversed

Temas 2 y 3: Cálculo diferencial

Matemáticas II

Cédric M. Campos
Universidad Rey Juan Carlos

Curso 2021/2022, Móstoles

Diferenciabilidad

Optimización y otras aplicaciones

Diferenciabilidad

Definición: derivada direccional

$F\colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, D abto., $x_0 \in D$, $v \in \mathbb{R}^m$

$$D_vF(x_0) \doteq \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+hv)-F(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned} DF\colon D \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x,v) &\longmapsto D_vF(x) \end{aligned}$$

Nota: Variación de f en la dirección $\frac{v}{\|v\|}$.

- ¡$D_{\alpha v}F(x_0) = \alpha D_vF(x_0)$! $\rightsquigarrow \|v\| = 1$
- ¿$D_{v+w}F(x_0) = D_vF(x_0) + D_wF(x_0)$?

Definición: derivada parcial

$F\colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, D abto., $x_0 \in D$,

$\{e_i\}_{i=1}^m$ base canónica de $\mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) \doteq D_{e_i}F(x_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\colon x \in D \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}^n \quad \text{(col.)}$$

Definición: der. parcial de 2º orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \doteq \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Nota: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f'_x \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial^2_{yx} f = f''_{xy}$

Definición: vector gradiente

$f\colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ($n = 1$), D abto., $x_0 \in D$

$$\nabla f(x_0) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right)$$

$$\nabla f\colon x \in D \longmapsto \nabla f(x) \in \mathbb{R}^m \quad \text{(fila)}$$

Definición: matriz jacobiana y determinante jacobiano

$F\colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, D abto., $x_0 \in D$

$$\mathrm{Jac}(F)(x_0) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x_0) \end{pmatrix}$$

$$n = m \rightsquigarrow |\mathrm{Jac}(F)(x_0)| = \det\big(\mathrm{Jac}(F)(x_0)\big)$$

Definición: matriz hessiana

$f\colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(n = 1)$, D abto., $x_0 \in D$

$$\operatorname{Hess}(f)(x_0) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x_0) \end{pmatrix} = \operatorname{Jac}(\nabla f)(x_0)$$

Nota: Si $f \in \mathcal{C}^2$, entonces $\operatorname{Hess}(f)$ simétrica (ver más adelante).

Definición: diferencial de una función

$F\colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, D abto.

F diferenciable en $x_0 \in D \overset{\cdot}{\iff} \exists L\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal t.q.

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - L(h)}{\|h\|} = 0 \qquad (h \in \mathbb{R}^m)$$

Si $\exists L$, entonces es única y $DF(x_0) \doteq L$.

Teorema

$$\exists DF(x_0) \quad \Longrightarrow \quad DF(x_0)(v) = D_v F(x_0) = \mathrm{Jac}(F)(x_0) \cdot v \ \ \forall v \in \mathbb{R}^m$$

Teorema

Si $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, entonces

$$\exists DF(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists Df_i(x_0) \ \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Teorema

$\exists Df(x_0) \implies$

1. $f \in \mathcal{C}^0(x_0)$
2. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \forall i = 1, \dots, m$
3. $\exists D_v f(x_0)\ \forall v \in \mathbb{R}^m$

Teorema: derivadas cruzadas

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{C}^2(D) \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Nota: ¿Clairaut?, Schwarz, Young

Teorema

$$\exists \delta > 0 : \quad \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ \forall i\ \forall x \in B(x_0; \delta)\ \ \&\ \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^0(x_0) \implies \exists Df(x_0)$$

Definición: función continuamente k-diferenciable

$$k \geq 1 : \quad f \in \mathcal{C}^k(D) \overset{:}{\iff} \exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^{k-1}(D)\ \ \forall i = 1, \dots, m$$

Ejemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} x & y \neq x^2 \\ 0 & y = x^2 \end{cases}$$

$$\exists \nabla f(0,0) = (1,0) \qquad \nexists\, Df(0,0)$$

$$\exists\, D_{(a,b)} f(0,0) = a \qquad f \in \mathcal{C}^0(0,0)$$

Ejemplo

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\exists \nabla g(0,0) = (0,1) \qquad \nexists\, Dg(0,0)$$

$$\exists\, D_{(a,b)} g(0,0) = \frac{b^3}{a^2+b^2} \qquad g \in \mathcal{C}^0(0,0)$$

Teorema: operaciones algebraicas

Si $\exists Df(x_0)$ & $\exists Dg(x_0)$, entonces:

- $\exists D(\alpha f) = \alpha Df \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\exists D(f + g) = Df + Dg$
- $\exists D(f \cdot g) = g \cdot Df + f \cdot Dg$
- $g \neq 0 \Rightarrow \exists D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot Df + f \cdot Dg}{g^2}$

Teorema: regla de la cadena

Sean $F\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $G\colon C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, D, C abtos., $x_0 \in D$, $y_0 \in C : y_0 = F(x_0)$.

Si $\exists DF(x_0)$ & $\exists DG(y_0)$, entonces:

$$\exists D(G \circ F)(x_0) = DG(y_0) \circ DF(x_0)$$

$$\mathrm{Jac}(G \circ F)(x_0) = \mathrm{Jac}(G)(y_0) \cdot \mathrm{Jac}(F)(x_0)$$

Optimización y otras aplicaciones

Teorema (Función inversa)

Sean $F\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, D abto., $x_0 \in D$, $y_0 \doteq F(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{c} F \in \mathcal{C}^1(D) \\ \det(\mathrm{Jac}(F)(x_0)) \neq 0 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} \exists U \in \mathcal{E}_{\text{abto.}}(x_0),\ V \in \mathcal{E}_{\text{abto.}}(y_0) \\ \exists F^{-1}\colon V \subseteq f(D) \longrightarrow U \subseteq D \\ F^{-1} \in \mathcal{C}^1(V) \quad \& \quad DF^{-1} = (DF)^{-1} \end{array}\right.$$

Definición: recta tangente en un punto

Sean $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I abto., $x_0 \in I : \exists f'(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$.

$$r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)\}$$

Definición: plano tangente en un punto

Sean $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abto., $(x_0, y_0) \in D : \exists Df(x_0, y_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$.

$$\pi \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - z_0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)\}$$

Definición: hiperplano tangente en un punto

Sean $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, D abto., $x_0 \in D : \exists Df(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$.

$$H \doteq \{(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : y - y_0 = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)\}$$

Definición: puntos y valores extremos

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

- Extremo global o absoluto:

$$x_0 \in \operatorname*{argmín}_{x\in D} f(x) \quad \overset{\cdot}{\iff} \quad f(x_0) = \min_{x\in D} f(x) \quad \overset{\cdot}{\iff} \quad f(x_0) \le f(x) \;\; \forall x \in D$$

$$x_0 \in \operatorname*{argmáx}_{x\in D} f(x) \quad \overset{\cdot}{\iff} \quad f(x_0) = \max_{x\in D} f(x) \quad \overset{\cdot}{\iff} \quad f(x_0) \ge f(x) \;\; \forall x \in D$$

- Extremo local o relativo: $\quad f(x_0) = \min_{x\in D_\delta} f(x) \qquad f(x_0) = \max_{x\in D_\delta} f(x)$

  donde $D_\delta \doteq B(x_0; \delta) \cap D$, $\delta > 0$.

Definición: punto de silla (o minimáx)

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x_0, y_0) \in D_\delta \;\; : \quad x_0 \in \operatorname*{argmín}_{x\in D_\delta(y_0)} f(x, y_0) \quad \& \quad y_0 \in \operatorname*{argmáx}_{y\in D_\delta(x_0)} f(x_0, y)$$

Definición: punto y valor críticos

Sean $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, D abto., $x_0 \in D : \exists Df(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$.

- Punto crítico: $x_0 \in \text{Crít}(f) \quad \overset{:}{\Longleftrightarrow} \quad Df(x_0) \equiv 0 \quad (\text{i.e. } \nabla f(x_0) = 0)$
- Valor crítico: $y_0 = f(x_0) : x_0 \in \text{Crít}(f)$

Nota: puntos y valores regulares se definen por complementariedad en D y f(D).

Teorema: Weierstraß

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{C}^0(D) \;\;\&\;\; D \text{ compacto} \quad \Longrightarrow \quad \exists \min_{x\in D} f(x) \;\;\&\;\; \exists \max_{x\in D} f(x)$$

Nota: $\exists\, a, b \in D : \quad m = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = M \quad \forall x \in D$

Teorema: condición de extremo necesaria

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ t.q. f tiene extremo local en $x_0 \in D$ abto.

$$\exists Df(x_0) \quad \Longrightarrow \quad x_0 \in \text{Crít}(f)$$

Teorema: clasificación de puntos críticos

Sean $f \in \mathcal{C}^2(D)$, $x_0 \in \text{Crít}(f)$, $H \doteq \text{Hess}(f)(x_0) = \nabla^2 f(x_0)$.

- $H > 0 \implies x_0 \in \text{argmín}_{x \in D} f(x)$
- $H < 0 \implies x_0 \in \text{argmáx}_{x \in D} f(x)$
- $H \lesseqgtr\!\!\!\!/\ 0 \implies x_0$ punto de silla

Nota: $M \geq 0 \mid M \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ criterio inconcluyente

Definición/Teorema: matriz definida

Sea $M \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ simétrica.

nombre	notación	$\forall v \in \mathbb{R}^m$	$\forall \lambda \in \sigma(M)$	$\forall k = 1, \ldots, m$
Definida positiva	$M > 0$	$v \cdot Mv > 0$	$\lambda > 0$	$\lvert M_k \rvert > 0$
Definida negativa	$M < 0$	$v \cdot Mv < 0$	$\lambda < 0$	$(-1)^k \lvert M_k \rvert > 0$
†Semidefinida positiva	$M \geq 0$	$v \cdot Mv \geq 0$	$\lambda \geq 0$	$\lvert M_k \rvert \geq 0^{\ddagger}$
†Semidefinida negativa	$M \leq 0$	$v \cdot Mv \leq 0$	$\lambda \leq 0$	$(-1)^k \lvert M_k \rvert \geq 0^{\ddagger}$
Indefinida	$M \lessgtr\!\!\!\!/\; 0$	$M \not\geq 0$ & $M \not\leq 0$		

† Se da la igualdad.

M_k = k-menor principal

Condición necesaria, pero no suficiente.‡

Nota: $M < 0 \overset{:}{\iff} -M > 0$ & $M \leq 0 \overset{:}{\iff} -M \geq 0$

Teorema (Taylor en una variable)

Sean $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I abto., $a \in I$

$$f \in \mathcal{C}^k(a) \quad\implies\quad f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + O(|x-a|^{k+1})$$

$\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ $|\alpha| = \sum \alpha_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ $\alpha! = \prod \alpha_i! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!$ $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}$

Copyleft 2020-2022, All Lefts Reversed

Tema 4: Integración múltiple

Matemáticas II

Cédric M. Campos
Universidad Rey Juan Carlos

Curso 2021/2022, Móstoles

Integrales simples

Integrales dobles

Integrales triples

Propiedades

Cambio de variables

Aplicaciones

Integrales simples

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada.

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$

$\delta \doteq \max_i \{x_i - x_{i-1}\} > 0$

$$m_i \doteq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \rightsquigarrow A_{def} \doteq \sum_i m_i \Delta x_i$$

$$M_i \doteq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \rightsquigarrow A_{exc} \doteq \sum_i M_i \Delta x_i$$

$$A_{def} \leq A_{exc}$$

Definición: Integral de Riemann

$$\lim_{\delta \to 0^+} A_{def} = \lim_{\delta \to 0^+} A_{exc} \qquad \Longrightarrow \qquad \doteq \int_a^b f(x)dx$$

Nota: Si $f \in \mathcal{C}^0$ excepto en conj. de medida nula y acotada, entonces es integrable.

Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad \& \qquad \frac{dF}{dx} = f \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos

1. Integral definida: $\int_2^4 3x^2 - x - 5dx = 40$
2. Integral impropia: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

Integrales dobles

Sea $f\colon R = [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ acotada.

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b$

$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_s = d$

$\delta = \max_{i,j}\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}\} > 0$

$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

$$m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x) \rightsquigarrow V_{def} = \sum_{i,j} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$$

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x) \rightsquigarrow V_{exc} = \sum_{i,j} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$$

$$V_{def} \leq V_{exc}$$

Definición: Integral de Riemann

$$\lim_{\delta\to 0^+} V_{def} = \lim_{\delta\to 0^+} V_{exc} \qquad \Longrightarrow \qquad =: \iint_R f(x,y)d(x,y)$$

Nota: Si $f \in \mathcal{C}^0$ excepto en conj. de medida nula y acotada, entonces es integrable.

Notación: $dA = d(x,y)$.

Teorema de Fubini

Sea $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable.

$$R = [a,b] \times [c,d] \quad \Longrightarrow \quad \iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ejemplos

3. $f\colon [0,2] \times [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^2$.
4. $f\colon [0,\pi] \times [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \pi \sin(x + \pi y)$.

Dada $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con D cerrado y acotado, sea g su extensión por 0 a $\mathbb{R}^2$.

$$g(x,y) \doteq \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Definición

$$\iint_D f(x,y)dA \doteq \iint_R g(x,y)dA \ : \ R = [a,b] \times [c,d] \supseteq D$$

Nota: La definición es independiente de R.

Definición: recintos simples

- Verticalmente simple

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}, \; g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0([a,b])$$

- Horizontalmente simple

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}, \; h_1, h_2 \in \mathcal{C}^0([c,d])$$

Ejemplos

5. Recinto encerrado entre las rectas $y = 2 - x$, $y = 0$, $x = 1$.
6. Recinto encerrado entre las funciones $y = x^2$, $y = 4$.
7. Recinto encerrado por la cardioide de ecuación polar $r = 2(1 - \cos\theta)$.

Teorema de Fubini para conjuntos vertical y horizontalmente simples

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable.

- Si D es verticalmente simple, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- Si D es horizontalmente simple, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ejemplos

8. $\int_D (x+y)dA$, siendo D el recinto del primer cuadrante limitado por $x^2+y^2=1$.
9. $\int_D (x^2+y)dA$, siendo D el recinto limitado por $y=-3, y=2$, $x=0$, $x=y^2$.
10. $\int_D x^2 y dA$, siendo D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(6,4)$, $(2,4)$.

Integrales triples

Teorema de Fubini para cubos y conjuntos simples

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrable.

- Si $D = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$.

$$\iiint_D f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

- Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$.

$$\iiint_D f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

Nota: Existen 6 versiones de cada caso (en general n!).

Notación: $dV = d(x, y, z)$.

Ejemplos

11. $\iiint_D (xy - z^2)dV$, siendo D el recinto del primer octante limitado por el plano $2x + 3y + 6z = 12$.
12. $\iiint_D xy/\sqrt{z}dV$, siendo D el recinto del primer octante limitado por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Propiedades

Propiedades

Sean $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrables.

1. Linealidad $\int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_D f + \beta \int_D g$
2. Monotonía $f \leq g \;\Rightarrow\; \int_D f \leq \int_D g$
3. Desigualdad tri. $\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|$
4. Medida $\lambda(D) \doteq \int_D 1$
 $f \geq 0 \;\Rightarrow\; \lambda_D(f) \doteq \int_D f$
5. Aditividad $D = D_1 \cup D_2 \;\&\; \lambda(D_1 \cap D_2) = 0$
 $\Rightarrow\; \int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$
6. Valor medio $f \in \mathcal{C}^0$, D comp. & conexo
 $\Rightarrow\; \exists x_0 \in D : \int_D f = f(x_0)\lambda(D)$

Ejemplos

13. $\displaystyle\int_D f(x,y)dA$, siendo $D = [0,1] \times [0,2]$ y $f = \begin{cases} x^2, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ -x^2, & (x,y) \in [0,1] \times [1,2] \end{cases}$

14. $\displaystyle\int_D f(x,y)dA$, siendo $D = [0,2] \times [0,2]$ y $f = \begin{cases} 1, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ x+y, & (x,y) \notin [0,1] \times [0,1] \end{cases}$

Cambio de variables

Definición: difeomorfismo

$T\colon D' \subseteq \mathbb{R}^n \to D \subseteq \mathbb{R}^n$

- T biyectiva
  $\rightsquigarrow \exists T^{-1} : D \to D'$
- $T \in \mathcal{C}^1(D')$
- $T^{-1} \in \mathcal{C}^1(D)$

Teorema

Supongamos $T\colon D' \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

- T inyectiva
- $T \in \mathcal{C}^1(D')$
- $\det(\mathrm{Jac}(T)) \neq 0$

Entonces T es un difeomorfismo.

Teorema del cambio de variables

Si T es un difeomorfismo con $D = T(D')$, entonces

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{D'} (f \circ T)(u)\,\left|\det(\mathrm{Jac}(T)(u))\right|\,du$$

Ejemplo

15. $\displaystyle\int_D x\,dA$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$.
16. $\displaystyle\int_D \frac{x-y}{(x+y)^2} dA$, siendo D el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
17. $\displaystyle\int_D \log(x^2 + y^2) dA$, siendo D el recinto del primer cuadrante comprendido entre las circunferencias de radio a y b con $0 < a < b$.
18. $\displaystyle\int_D z\,dV$, siendo D el recinto del primer octante comprendido en la esfera de radio $R > 0$.
19. $\displaystyle\int_D xy - z^2 dV$, siendo D el recinto del semiespacio superior comprendido entre el cilindro de eje OZ y radio $R > 0$ y altura $h > 0$

Aplicaciones

Definición: masa total y centro de masa

Sea $\delta\colon R \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ una función de densidad, con $n = 2, 3$.

- La **masa total** de R viene dada por $m = \displaystyle\int_R \delta$.
- El **centro de masa** de R viene dado por

$$\frac{1}{m}(M_{\hat{x}}, M_{\hat{y}}) \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{m}(M_{\hat{x}}, M_{\hat{y}}, M_{\hat{z}})$$

donde $M_{\hat{w}} = \displaystyle\int_R w \cdot \delta$ con $w = x, y, z$.

Ejemplo: $\delta(x, y) = x + y$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$m = \int_D (x + y)dA = \frac{2}{3}, \quad M_{\hat{x}} = \int_D (x^2 + xy)dA = \frac{2+\pi}{16} = M_{\hat{y}}$$

$$\therefore\ (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{6+3\pi}{32}, \frac{6+3\pi}{32}\right) \approx (0.5, 0.5)$$

Copyleft 2020-2022, All Lefts Reversed

Esta presentación fue escrita por Cédric M. Campos durante la pandemia de coronavirus (COVID-19) para el curso de "Matemáticas II" impartido a estudiantes de grado de diferentes carreras en la Universidad Rey Juan Carlos.

Temas 5 y 6: Cálculo Vectorial

Matemáticas II

Cédric M. Campos
Universidad Rey Juan Carlos

Curso 2021/2022, Móstoles

Tabla de Contenidos

Curvas y Superficies

Ecuaciones regulares

Recordatorio: dada $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, la preimagen de $c \in \mathbb{R}^n$ es

$$f^{-1}(c) = \{p \in \mathbb{R}^m : \underbrace{f(p) = c}_{\text{n ecuaciones}} \}.$$

Teorema del valor regular

Si $f \in \mathcal{C}^1$ y $\operatorname{rang}\big(\operatorname{Jac}(f)\big) = n$ en todo $M = f^{-1}(c)$, entonces M es una variedad diferenciable de dimensión $m - n$.

Nota: c se llama valor regular de f.

Teorema del valor regular ($m = 2, n = 1$)

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ y $\nabla f \neq 0$ en todo $C = f^{-1}(c)$ entonces

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

es una curva regular en el plano.

Ejemplo (Circunferencia)

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ pero } (0, 0) \notin S^1$$

Superficies en el espacio

Teorema del valor regular ($m = 3, n = 1$)

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ y $\nabla f \neq 0$ en todo $S = f^{-1}(c)$ entonces

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

es una superficie regular en el espacio.

Ejemplo (Esfera)

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z = 0 \text{ pero } (0, 0, 0) \notin S^2$$

Teorema del valor regular ($m = 3, n = 2$)

Si $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ y $\nabla f_1 \neq \lambda \nabla f_2$ ($\lambda \neq 0$) en todo $C = f^{-1}(c_1, c_2)$ entonces

$$C = f^{-1}(c_1, c_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) = c_1 \ \& \ f_2(x, y, z) = c_2\}$$

es una curva regular en el espacio

Ejemplo (Circunferencia en plano inclinado)

$$\bar{S}^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \& \ x + y + z = 0\}$$

$$f = (f_1, f_2) : \ f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \ f_2(x, y, z) = x + y + z$$

$$\mathrm{Jac}(f) = (\nabla f_1, \nabla f_2) : \ \nabla f_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z), \ \nabla f_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

$$(2x, 2y, 2z) = 2\lambda(1, 1, 1) \Leftrightarrow x = y = z = \lambda \text{ pero } (\lambda, \lambda, \lambda) \notin \bar{S}^1$$

Parametrizaciones

Definición: Variedad diferenciable

Se dice que $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión $m \leq n$ si cada punto de M puede ser cubierto por una parametrización.

Definición: Parametrización

Se dice que $\Phi \colon U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sii:

1. $\Phi(U) \subseteq M$
2. Φ es inyectiva
3. U es abierto
4. $\Phi \in \mathcal{C}^1$
5. $\operatorname{rang}\big(\operatorname{Jac}(\Phi)\big) = m$

Nota: también llamadas «cartas» o «coordenadas».

Definición: Curva ($m = 1, n = 2, 3$)

Se dice que $\mathbf{r}\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de una curva C sii:

1. $\mathbf{r}\big([a, b]\big) = C$
2. $\mathbf{r}$ es inyectiva
3. $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^0\big([a, b]\big)$
4. $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1\big(]a, b[\big)$
5. $\mathbf{r}' \neq 0$

Ejemplo (Circunferencia)

$$\begin{aligned} S^1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = ||.||^{-1}(1) \\ &= \{(x, \pm\sqrt{1 - x^2}) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\} = \mathrm{Graf}(\pm\sqrt{1 - .^2}) \\ &= \big\{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi\big\} = \mathrm{tr}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Notación

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

Ejemplo (Circunferencia en plano inclinado)

$$\bar{S}^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \;\&\; x+y-z=0\} = f^{-1}(1,0)$$
$$= \{(x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(x+y)^2 = 1\}$$
$$= \{(x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3 : x^2+xy+y^2 = \tfrac{1}{2}\}$$
$$= \left\{(x, y(x), x+y(x)) \in \mathbb{R}^3 : y(x) = \left(-x \pm \sqrt{2-3x^2}\right)/2,\ |x| \leq \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right\}$$
$$= \operatorname{Graf}\left((x, x+y(x))\right)$$
$$= \{(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta, 2\cos\theta)/\sqrt{6} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = \operatorname{tr}(\mathbf{r})$$

Notación

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

Definición: Superficie ($m = 2, n = 3$)

Se dice que $\mathbf{r}\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de una superficie S sii:

1. $\mathbf{r}(U) \subseteq S$
2. $\mathbf{r}$ es inyectiva
3. U es abierto
4. $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1$
5. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$

Notación

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$$

Ejemplo (Esfera)

$$\begin{aligned} S^2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = ||.||^{-1}(1) \\ &= \{(x,y,\pm\sqrt{1-x^2-y^2}) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x,y \leq 1\} = \mathrm{Graf}(\pm\sqrt{1-x^2-y^2}) \\ &= \{(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi\} = \mathrm{tr}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Ejemplos

Curvas en el plano

- Grafos: $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} = \mathrm{graf}(y(t))$
- Curvas polares: $\mathbf{r}(t) = \rho(t)\cos t\,\mathbf{i} + \rho(t)\sin t\,\mathbf{j}$
- Curvas polinomiales, lazo: $\mathbf{r}(t) = t(t^2 - 1)\,\mathbf{i} + (t^2 - 1)\,\mathbf{j}$

Curvas en el espacio

- Grafos: $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} = \mathrm{graf}((y, z)(t))$
- Curvas esféricas: $\mathbf{r}(t) = \rho(t)\sin\phi(t)\cos t\,\mathbf{i} + \rho(t)\sin\phi(t)\sin t\,\mathbf{j} + \rho(t)\cos\phi(t)\,\mathbf{k}$
- Curvas algebraicas, lemniscata de Gerono: $\mathbf{r}(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathbf{i} + \frac{2t(t^2-1)}{(t^2+1)}\,\mathbf{j} + \frac{t}{t^2+1}\,\mathbf{k}$

Superficies

- Grafos: $\mathbf{r}(u, v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} = \mathrm{graf}(z(u, v))$
- Sups. esféricas: $\mathbf{r}(u, v) = \rho(u, v)\cos u \sin v\,\mathbf{i} + \rho(u, v)\sin u \sin v\,\mathbf{j} + \rho(u, v)\cos v\,\mathbf{k}$
- Sups. de revolución: $\mathbf{r}(u, v) = \rho(v)\cos u\,\mathbf{i} + \rho(v)\sin u\,\mathbf{j} + h(v)\,\mathbf{k}$

Curva en el plano

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\,\mathbf{i} + t(t^2 - 1)\,\mathbf{j}$$

plotCurvePlane.m

```
x = @(t) t.^2-1;                % x coord. function
y = @(t) t.*(t.^2-1);           % y coord. function
ts = linspace(-2,2,65);         % parameter values
xs = x(ts);                     % x values
ys = y(ts);                     % y values
plot(xs,ys,'linewidth',2)       % plot of r = xi + yj
```

Curva en el espacio

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathbf{i} + \frac{2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\,\mathbf{j} + \frac{t}{t^2+1}\,\mathbf{k}$$

plotCurveSpace.m

```
x = @(t) (t.^2-1)./(t.^2+1);           % x coord. function
y = @(t) 2*t.*(t.^2-1)./(t.^2+1).^2;   % y coord. function
z = @(t) t./(t.^2+1);                  % z coord. function
ts = linspace(-1,1,513);               % parameter values
ts = ts./(ts.^2-1.001);                % hack to cover [-inf,+inf]
xs = x(ts);                            % x values
ys = y(ts);                            % y values
zs = z(ts);                            % z values
plot3(xs,ys,zs,'linewidth',2)          % plot of r = xi + yj + zk
```

Superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u \sin v\,\mathbf{i} + \sin u \sin v\,\mathbf{j} + \cos v\,\mathbf{k}$$

plotSurface.m

```
x = @(u,v) cos(u).*sin(v); % x coord. function
y = @(u,v) sin(u).*sin(v); % y coord. function
z = @(u,v) cos(v);         % z coord. function
us = pi*linspace(0,1,33);  % u values
vs = us/2;                 % v values
[uu,vv] = meshgrid(us,vs); % mesh [uu(i,j),vv(i,j)] == [xs(i),ys(j)]
xs = x(uu,vv);             % x values
ys = y(uu,vv);             % y values
zs = z(uu,vv);             % z values
mesh(xs,ys,zs,'linewidth',2) % plot of r = xi +yj + zk
```

Integrales de Línea y de Superficie I

Definición: Integral de línea de un campo escalar

- Sea C una curva regular a trozos.
- Sea $\mathbf{r}$ una parametrización de C tal que $\mathbf{r}([a,b]) = C$.

$$\int_C f\,ds = \int_a^b (f \circ \mathbf{r})\|\mathbf{r}'\|\,dt$$

Ejemplo (Integral sobre semicircunferencia a derechas)

$$S^1 \cap \{x \geq 0\} = \operatorname{tr}(\mathbf{r}) : \ \mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}, \ t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \quad \rightsquigarrow \quad \|\mathbf{r}'\| \equiv 1$$

$$\int_{S^1 \cap \{x \geq 0\}} x \exp y\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \exp(\sin t) \cdot 1\,dt = \exp(\sin t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\sinh 1$$

Ejemplo (Integral sobre semicircunferencia a derechas)

$$S^1 \cap \{x \geq 0\} = \mathrm{tr}(\mathbf{r}) : \; \mathbf{r}(t) = \sin(\pi t)\,\mathbf{i} + \cos(\pi t)\,\mathbf{j}, \; t \in [0,1]$$

$$\mathbf{r}'(t) = \pi\cos(\pi t)\,\mathbf{i} - \pi\sin(\pi t)\,\mathbf{j} \quad \rightsquigarrow \quad ||\mathbf{r}'|| \equiv \pi$$

$$\int_{S^1\cap\{x\geq 0\}} x \exp y \, ds = \int_0^1 \sin(\pi t)\exp(\cos(\pi t)) \cdot \pi \, dt = -\exp(\cos(\pi t))|_0^1 = 2\sinh 1$$

Nota: una integral de línea es de un campo escalar no depende de la parametrización (ni siquiera de la orientación).

Ejemplo (Parábola de $(0,0)$ a $(4,2)$, recta de $(4,2)$ a $(4,-2)$)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j},\ \ t \in [0,2] \\ \mathbf{r}_2(t) &= 4\,\mathbf{i} + (2-2t)\,\mathbf{j},\ \ t \in [0,2] \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & t \in [0,2] \\ \mathbf{r}_2(t-2), & t \in [2,4] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{tr}(\mathbf{r})} \frac{y^2}{1+4x}\,ds &= \int_0^2 \frac{t^2}{1+4t^2}\sqrt{4t^2+1}\,dt + \int_0^2 \frac{(2-2t)^2}{1+4\cdot 4}\cdot 2\,dt \\ &= \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt + \int_0^2 \frac{2(2-2t)^2}{17}\,dt \end{aligned}$$

$$2t = \sinh u \to \quad = \left[\frac{1}{16}\left(2t\sqrt{1+4t^2} - \log(2t+\sqrt{1+4t^2})\right) - \frac{(2-2t)^3}{17\cdot 3}\right]\Bigg|_0^2$$

Nota: a nivel práctico, no es necesaria una parametrización global.

Longitud de una curva

$$\mathrm{Longitud}(C) = \int_C ds = \int_a^b ||\mathbf{r}'||\, dt$$

Longitud de una circunferencia

$$S^1 = \mathrm{tr}(\mathbf{r}):\ \mathbf{r}(t) = \rho\cos t\,\mathbf{i} + \rho\sin t\,\mathbf{j},\ t \in [0, 2\pi] \quad \rightsquigarrow \quad ||\mathbf{r}'|| \equiv \rho$$

$$\mathrm{Longitud}(S^1) = \int_0^{2\pi} \rho\, dt = 2\pi\rho$$

Longitud dada por una función

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j},\ t \in [a, b] \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{r}'(t) = 1\,\mathbf{i} + f'(t)\,\mathbf{j}$$

$$\mathrm{Longitud}\,(\mathrm{Grafo}(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + [f']^2}\, dt$$

Integrales de Superficie de un Campo Escalar

Definición: Integral de superficie de un campo escalar

- Sea S una superficie regular a trozos.
- Sea $\mathbf{r}$ una parametrización de S tal que $\mathbf{r}(U) = S$.

$$\iint_S f\,dS = \iint_U (f \circ \mathbf{r}) ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| d(u,v)$$

Ejemplo (Integral sobre la esfera de radio unidad)

$$S^2 = \operatorname{tr}(\mathbf{r}) : \; \mathbf{r}(u,v) = \cos u \sin v\,\mathbf{i} + \sin u \sin v\,\mathbf{j} + \cos v\,\mathbf{k}, \; (u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -\sin v\,\mathbf{r} \quad \rightsquigarrow \quad ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| = |\sin v|$$

$$\iint_{S^2} |z|\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |\cos v \sin v|\,dv\,du = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos v \sin v\,dv\,du = 2\pi \sin^2 v\Big|_0^{\pi/2}$$

Ejemplo (Integral sobre mitad de paraboloide y tapa lateral)

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}_1(u,v) &= u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + (4-u^2-v^2)\,\mathbf{k}\\ \mathbf{r}_2(u,v) &= u\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}\end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \begin{cases}\mathbf{r}_{1u}\times\mathbf{r}_{1v} = 2u\,\mathbf{i} + 2v\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\\ \mathbf{r}_{2u}\times\mathbf{r}_{2v} = -\,\mathbf{j}\end{cases}$$

$$U_1 = D\big((0,0);2\big),\ U_2 = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : -2\le u\le 2,\ 0\le v\le 4-u^2\}$$

$$\iint_{\mathrm{tr}(\mathbf{r}_1)\cup\mathrm{tr}(\mathbf{r}_2)} \frac{z}{1+4x^2+4y^2}\,dS =$$

$$= \iint_{U_1} \frac{4-u^2-v^2}{1+4u^2+4v^2}\sqrt{1+4u^2+4v^2}\,d(u,v) + \iint_{U_2} \frac{v}{1+4u^2}\,d(u,v)$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^2 \frac{4-r^2}{\sqrt{1+4r^2}}\,r\,dr\,d\theta + \int_{-2}^{2}\int_0^{4-u^2} \frac{v}{1+4u^2}\,dv\,du$$

$$= \pi\int_0^2 (4-r^2)\frac{r}{\sqrt{1+4r^2}}\,dr + \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{(4-u^2)^2}{1+4u^2}\,du$$

Nota: a nivel práctico, no es necesaria una parametrización global.

Nota: los cambios de coordenadas corresponden a cambios de parametrización.

Integrales de Superficie de un Campo Escalar

Área de una superficie

$$\text{Área}(S) = \iint_S dS = \iint_U ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||\, d(u,v)$$

Área de una esfera

$$S^2 = \text{tr}(\mathbf{r}) : \mathbf{r}(u,v) = \rho \cos u \sin v\, \mathbf{i} + \rho \sin u \sin v\, \mathbf{j} + \rho \cos v\, \mathbf{k},\ \ (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$$

$$\text{Área}(S^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^2 \sin v\, dv\, du = 4\pi\rho^2$$

Área dada por una función

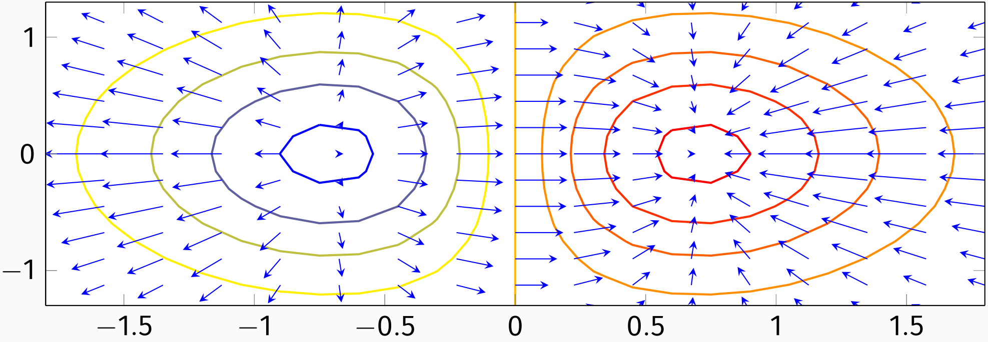
$$\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + f(u,v)\,\mathbf{k},\ \ (u,v) \in U \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = f_u\,\mathbf{i} + f_v\,\mathbf{j} + 1\,\mathbf{k}$$

$$\text{Área}\,(\text{Grafo}(f)) = \iint_U \sqrt{1 + [\,f_u]^2 + [\,f_v]^2}\, d(u,v)$$

Campos Vectoriales

Definición: Campo vectorial

$$\mathbf{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\underbrace{x}_{\text{punto}} \longmapsto \underbrace{\mathbf{F}(x)}_{\text{vector}}$$



Ejemplos

- Velocidad de un fluido.
- Campos gravitatorio y eléctrico (leyes de gravitación universal y Coulomb).

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \qquad \mathbf{F}_{12} = \kappa\frac{q_1q_2}{r^2}\mathbf{u} = q_2\mathbf{F}_1$$

- Campos tangentes y normales.

$$\mathbf{r}', \ \mathbf{r}_u, \ \mathbf{r}_v \qquad \mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}'}{||\mathbf{r}'||} \qquad \mathbf{n} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{t}'}{||\mathbf{t}'||} \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||}$$

Ejemplo: Campo gradiente

$$f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \rightsquigarrow \qquad \operatorname{grad} f = \nabla f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Campos conservativos

Definición

Dado $\mathbf{F}$ c.v., si $\exists f$ t.q. $\mathbf{F} = \nabla f$, entonces $\mathbf{F}$ conservativo y f potencial.

Teorema

$$\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\,\mathbf{i} + N(x,y)\,\mathbf{j} \text{ conservativo} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ejemplo

$$\mathbf{F}(x,y) = 2x \sin y\,\mathbf{i} + x^2 \cos y\,\mathbf{j} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x\cos y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\rightsquigarrow \quad f(x,y) = x^2 \sin y$$

Divergencia

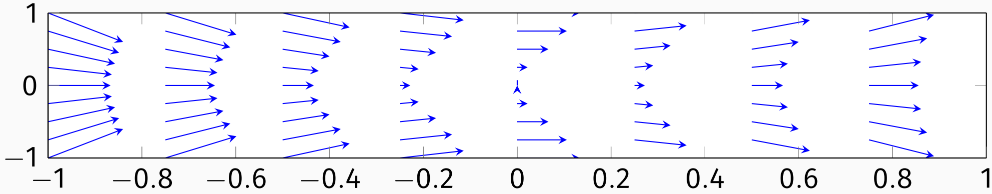
Definición

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (M, N, P) = M_x + N_y + P_z$$

Mide el flujo de entrada/salida infinitesimal a través de un punto.

Ejemplo

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 2x = 4x$$



Rotacional (Curl)

Definición

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ M & N & P \end{vmatrix} = (P_y - N_z)\,\mathbf{i} + (M_z - P_x)\,\mathbf{j} + (N_x - M_y)\,\mathbf{k}$$

Mide la dirección media de giro infinitesimal alrededor de un punto.

Ejemplo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k} \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2z & xz & y^2 \end{vmatrix} = (2y - x)\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

Teorema

Integrales de Línea y de Superficie II

Integral de línea de un campo vectorial

Definición

- Sea C una curva regular a trozos.
- Sea $\mathbf{r}$ una parametrización de C tal que $\mathbf{r}([a,b]) = C$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot \mathbf{t}\,ds = \int_a^b (\mathbf{F}\circ\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}'dt$$

Ejemplo (Integral sobre circunferencia en primer cuadrante, or. positiva)

$$C = S^1 \cap \{x, y \geq 0\} = \operatorname{tr}(\mathbf{r}) : \ \mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j},\ t \in [0, \pi/2]$$

$$\begin{aligned}\int_C [(x^2+y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}]\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} (\mathbf{i} + 2\cos t\sin t\,\mathbf{j})\cdot(-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\sin t + 2\sin t\cos^2 t)dt = -1/3\end{aligned}$$

Ejemplo (Integral sobre circunferencia en primer cuadrante, or. negativa)

$$C = S^1 \cap \{x, y \geq 0\} = \mathrm{tr}(\mathbf{r}) : \ \mathbf{r}(t) = \sin t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j}, \ t \in [0, \pi/2]$$

$$\begin{aligned}\int_C [(x^2 + y^2)\, \mathbf{i} + 2xy\, \mathbf{j}] \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} (\mathbf{i} + 2 \sin t \cos t\, \mathbf{j}) \cdot (\cos t\, \mathbf{i} - \sin t\, \mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos t - 2 \cos t \sin^2 t) dt = 1/3\end{aligned}$$

Nota: una integral de línea depende de la orientación, **no** de la parametrización.

Orientación

- Curvas abiertas (plano y espacio): indicada por puntos inicio/fin.
- Curvas cerradas (plano): se prefiere positiva o antihoraria (región a la izquierda de la curva).

Forma diferencial

- $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}\,,\;\; d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Mdx + Ndy$$

- $\mathbf{F}(x, y, z) = N(x, y, z)\,\mathbf{i} + M(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}\,,\;\; d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Mdx + Ndy + Pdz$$

Ejemplo

$$\int_C [(x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}] \cdot d\mathbf{r} = \int_C [(x^2 + y^2)dx + 2xydy]$$

Integral de superficie de un campo vectorial

Definición

- Sea S una superficie regular a trozos.
- Sea $\mathbf{r}$ una parametrización de S tal que $\mathbf{r}(U) = S$.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_U \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, d(u,v)$$

Ejemplo (Integral sobre la esfera de radio unidad en primer octante, or. int.)

$$S = \operatorname{tr}(\mathbf{r}) : \ \mathbf{r}(u,v) = \cos u \sin v \, \mathbf{i} + \sin u \sin v \, \mathbf{j} + \cos v \, \mathbf{k}, \ (u,v) \in [0, \pi/2]^2$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -\sin v \, \mathbf{r}$$

$$\iint_S \overbrace{\mathbf{r}}^{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_U \mathbf{r} \cdot (-\sin v \, \mathbf{r}) \, d(u,v) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} -\sin v \, dv \, du = -\frac{\pi}{2}$$

Ejemplo (Integral sobre la esfera de radio unidad en primer octante, or. ext.)

$$S = \mathrm{tr}(\mathbf{r}) : \ \mathbf{r}(u,v) = \cos u \cos v\, \mathbf{i} + \sin u \cos v\, \mathbf{j} + \sin v\, \mathbf{k}, \ (u,v) \in [0, \pi/2]^2$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \cos v\, \mathbf{r}$$

$$\iint_S \overbrace{\mathbf{r}}^{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_U \mathbf{r} \cdot \cos v\, \mathbf{r}\, d(u,v) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos v\, dv\, du = \frac{\pi}{2}$$

Nota: una integral de superficie depende de la orientación, **no** de la param.

Orientación (de superficies orientables)

- Superficies cerradas: interior/exterior.
- Superficies abiertas: equivale a orientar curvas cerradas (regla del pulgar).

Teoremas Fundamentales

Teorema Fundamental de Integrales de Línea

Teorema

- C curva regular uniendo p_0 con p_1.
- $\mathbf{F}$ c.v. conservativo con potencial f.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, ds = f(p_1) - f(p_0)$$

Ejemplo

- C espiral cónica de eje OY uniendo $(1, 1, 0)$ con $(0, 4, 4)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\,\mathbf{j} + 2yz\,\mathbf{k} \overset{\nabla\times\mathbf{F}=0}{\rightsquigarrow} f(x, y, z) = y(x^2 + z^2)$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, ds = 4 \cdot (0^2 + 4^2) - 1 \cdot (1^2 + 0^2) = 63$$

Nota: $\mathbf{r}(t) = t\sin(\frac{\pi}{2}t)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t\cos(\frac{\pi}{2}t)\,\mathbf{k}$, $t \in [1, 4]$, parametrización irrelevante.

Consecuencias

Teorema

$\mathbf{F}\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua con D abierto conexo.

Son equivalentes:

1. $\mathbf{F}$ conservativo.
2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ independiente de la curva C en D.
3. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva cerrada C en D.

Demostración

- $1 \Rightarrow 2$: Teorema fundamental.
- $1 \Leftarrow 2$: $f(p_1) = \int_{C_{01}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ potencial, C_{01} une p_0 con p_1.
- $2 \Leftrightarrow 3$: C_{ij} une p_i con p_j, $C = C_{01} + C_{10}$ cerrada.

Teorema

- C curva cerrada regular a trozos orientada positivamente.
- R abierto simplemente conexo con $\partial R = C$.

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R (N_x - M_y) dA$$

Ejemplo

R región encerrada por $y = 4x$ e $y = x^3$.

$\rightsquigarrow \quad C = \partial R = C_1 + C_2$: $\quad C_1$ cúbica de $(0,0)$ a $(2,8)$ y C_2 recta de $(2,8)$ a $(0,0)$

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_R (3x^2 + 3y^2 - 3y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^3}^{4x} 3x^2 dy dx$$

$$= \ldots = 16$$

Teorema de la Divergencia

Teorema

- S superficie cerrada regular a trozos con orientación exterior.
- R abierto simplemente conexo con $\partial R = S$.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

Ejemplo

R región encerrada por $4x + 2y + z = 4$ en primer octante.
$\rightsquigarrow S = \partial R$ planos coordenados y $4x + 2y + z = 4$ (4 triángulos de borde común).

$$\int_S (x^2\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_R 2x dV = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{4-4x-2y} 2x dz dy dx$$
$$= \dots = \frac{2}{3}$$

Teorema de Stokes

Teorema

- C curva cerrada regular a trozos.
- S superficie regular a trozos.
- $C = \partial S$, orientación compatible.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$

Ejemplo

S región del plano $4x + 2y + z = 4$ encerrada en primer octante.

$\rightsquigarrow C = \partial S$ intersección de $4x + 2y + z = 4$ con los planos coordenados.

$$\begin{aligned} \int_C (z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r} &= \iint_S (\,\mathbf{i} + \,\mathbf{j} + \,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{N} dS \\ &= \iint_{z^{-1}(S)} (\,\mathbf{i} + \,\mathbf{j} + \,\mathbf{k}) \cdot (4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + \,\mathbf{k}) dA \\ &= 7 \cdot \text{Área}(z^{-1}(S)) = 7 \end{aligned}$$

Copyleft 2020-2022, All Lefts Reversed

Esta presentación fue escrita por Cédric M. Campos durante la pandemia de coronavirus (COVID-19) para el curso de “Matemáticas II” impartido a estudiantes de grado de diferentes carreras en la Universidad Rey Juan Carlos.

Tema 7: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Matemáticas II

Cédric M. Campos
Universidad Rey Juan Carlos

Curso 2020/2021, Móstoles

Tabla de Contenidos

Ecuaciones diferenciales

Definición

Una ED es una relación entre una función, sus derivadas y la var. indep.

Ejemplo

$$y' = \frac{y}{1+x^2} \qquad (x'')^2 - xx' = 1 \qquad u_{xx} + u_{yy} = u_t$$

Clasificación.

- Dimensión var. indep.: ordinarias vs. en derivadas parciales.
- Dimensión var. dep.: simple vs sistema.
- Orden de las derivadas: primer vs segundo vs superior.
- Forma: implícita vs normal (explícita) vs diferencial.
- Presencia var. indep: autónoma vs no-autónoma.

Soluciones

Definición

Una solución a una ED es una función que satisface la relación dada por la ED.

Ejemplo

- $u_x + u_y + 2(x+y)u = 0$: $\quad u = \exp(-x^2 - y^2) \rightsquigarrow u_x = -2x\exp(-x^2-y^2)$
- $x' = -2ty,\ y' = 2tx$: $\quad (x, y) = (\cos t^2, \sin t^2) \rightsquigarrow x' = -2t\sin t^2$
- $y' = 2y/t$: $\quad y = t^2\,, \quad y = 3t^2\,, \quad y = kt^2$
- $x' = \sqrt{1-x^2}$: $\quad x = \pm 1\,, \quad x = \sin t \rightsquigarrow \sqrt{1-x^2} = |\cos t| \neq \cos t = x'$

- **Considerar:** dominio de la ecuación.
- **Estudiar:** existencia y unicidad.

EDO de primer orden

Definición: EDO de primer orden

forma	ecuación	función
normal	$y' = f(x,y)$	$f\colon D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
implícita	$F(x,y,y') = 0$	$F\colon \bar{D} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
diferencial	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	$M,N\colon \hat{D} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Ejemplo

- Normal: $y' = \sqrt{x^2 - y^2}$ $\quad f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2},\ D = \mathbb{R}^2 \cap \{|x| \geq |y|\}$
- Implícita: $(y')^2 = x^2 - y^2$ $\quad F(x,y,y') = x^2 - y^2 - (y')^2,\ \bar{D} = \mathbb{R}^3$

- Normal $\rightsquigarrow$ Implícita, $F(x,y,y') = y' - f(x,y)$.
- Implícita $\rightsquigarrow$ Normal, elegir una versión de la implícita.
  - Depende de la inyectividad de la transformación de y'.
- Diferencial $\rightsquigarrow$ Normal, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, $x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$
- Ecuación=Relación entre vars.
  - Diferencial=Interpretación de las vars.

Definición: solución de una EDO de primer orden

$$g\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ g \in \mathcal{C}^1,\ I \text{ intervalo}$$

forma	ecuación	realización
normal	$y' = f(x, y)$	$g'(x) = f(x, g(x))\ \forall x \in I$
implícita	$F(x, y, y')=0$	$F(x, g(x), g'(x)) = 0\ \forall x \in I$

Ejemplo

forma	EDO	solución	comprobación
normal	$y' = 2\sqrt{y}$	$g(x) = x^2$	$g'(x) = 2x = 2\lvert x\rvert = f(x, g(x)),\ x \geq 0$
implícita	$(y')^2 = 4y$	$g(x) = x^2$	$F(x, g(x)) = (2x)^2 - 4x^2 = 0,\ x \in \mathbb{R}$

Notación: conjunto de soluciones

$\mathrm{sol}(f)$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{sol}(F)$

Problema de Cauchy o de valores iniciales

Definición

$$\textbf{resolver } y' = f(x,y), \qquad (x,y) \in D$$

$$\textbf{sujeto a } y(x_0) = y_0, \quad (x_0,y_0) \in D$$

$$\mathrm{sol}(f, \underbrace{(x_0,y_0)}_{\text{condición inicial}})$$

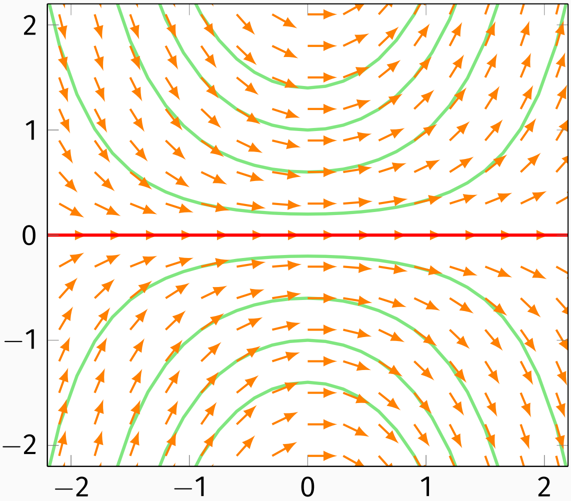
Ejemplo

$$\textbf{resolver } y' = xy, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\textbf{sujeto a } y(0) = 0$$

- $y = e^{x^2/2} \in \mathrm{sol}(f) \setminus \mathrm{sol}(f,(0,0))$
- $y = 0 \in \mathrm{sol}(f,(0,0)) \subseteq \mathrm{sol}(f)$

$$y' = \frac{f(x,y)}{1} = \tan\alpha \quad \rightsquigarrow \quad 1\,\mathbf{i} + f(x,y)\,\mathbf{j}$$



Problema de Cauchy o de valores iniciales

Definición

$$\textbf{resolver } y' = f(x,y), \qquad (x,y) \in D$$

$$\textbf{sujeto a } y(x_0) = y_0, \quad (x_0,y_0) \in D$$

$$\mathrm{sol}(f, \underbrace{(x_0,y_0)}_{\text{condición inicial}})$$

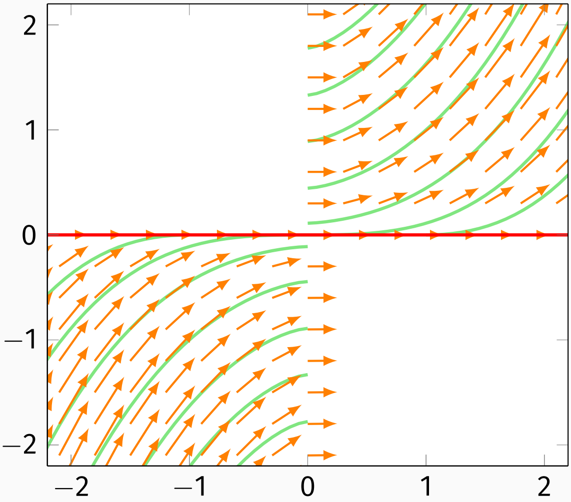
Ejemplo

$$\textbf{resolver } y' = \sqrt{xy}, \ xy \geq 0$$

$$\textbf{sujeto a } y(0) = 0$$

- $y = (x^{3/2}+1)^2/9 \notin \mathrm{sol}(f,(0,0))$
- $y = x^3/9 \in \mathrm{sol}(f,(0,0))$
- $y = 0 \in \mathrm{sol}(f,(0,0))$

$$y' = \frac{f(x,y)}{1} = \tan\alpha \quad \rightsquigarrow \quad 1\,\mathbf{i} + f(x,y)\,\mathbf{j}$$



Notación: conjunto de soluciones

ec. normal: $y' = f(x, y) \rightsquigarrow \text{sol}(f)$ ec. implícita $F(x, y, y') = 0 \rightsquigarrow \text{sol}(F)$

Definición: solución general, familia uniparamétrica de soluciones

- Explícita: $y = g(x, k),\ x \in I_k \subseteq \mathbb{R}$ (intervalo), $k \in K$ (parámetro)
- Implícita: $G(x, y, k) = 0,\ (x, y) \in D_k \subseteq \mathbb{R}^2$ (región), $k \in K$ (parámetro)

Ejemplo

- $y' = xy \rightsquigarrow y = ke^{x^2/2},\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$
- $y' = \sqrt{1 - y^2} \rightsquigarrow y = \sin(x - k),\ x \in \left]k - \pi/2, k + \pi/2\right[,\ k \in \mathbb{R}$
- $yy' + x = 0 \rightsquigarrow x^2 + y^2 = k^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ k > 0$

Definición: otras soluciones

- Solución singular: no param.
- Envolvente: limita sols.
- Separatriz: separa clases.

Ejemplo

- $y' = \sqrt{1 - y^2} \rightsquigarrow y = \pm 1$
- $y' = xy \rightsquigarrow y = 0\ (k = 0)$

Teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf

$$f\colon D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$D \text{ abierto},\ f \in \mathcal{C}^0,\ f(x,\cdot) \in \mathcal{C}^1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{sol}(f,(x_0,y_0)) = \{g\}$$

$$\exists! g : I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$$

$$\Downarrow$$

$$g'(x) = f(x, g(x))\ \forall x \in I$$

$$g(x_0) = y_0$$

Nota: hipótesis original de Picard-Lindelöf es $f(x,\cdot)$ localmente Lipschitz.

Ejemplo

$$y' = \sqrt{y} \ \rightsquigarrow\ f(x,y) = \sqrt{y},\ (x,y) \in \mathbb{R} \times \,]0,+\infty[$$

- $\mathrm{sol}(f) = \underbrace{\Big\{ \overbrace{\left(g(x) = \tfrac{1}{4}(x-k)^2,\ x \geq k\right)}^{\text{sol. particular}} : \overbrace{k \in \mathbb{R}}^{\text{param.}} \Big\}}_{\text{sol. general}} \cup \underbrace{\Big\{ \big(\overbrace{g(x) = 0}^{\text{fun.}}, \overbrace{x \in \mathbb{R}}^{\text{int.}}\big) \Big\}}_{\text{sol. singular}}$
- $\mathrm{sol}(f,(2,1)) = \left\{\left(\tfrac{1}{4}x^2, x \geq 0\right)\right\}$
- $\mathrm{sol}(f,(1,1)) = \left\{\left(\tfrac{1}{4}(x+1)^2, x \geq -1\right)\right\}$
- $\mathrm{sol}(f,(0,0)) = \left\{\left(\tfrac{1}{4}x^2, x \geq 0\right)\right\} \cup \left\{(0,\mathbb{R})\right\}$

Ecuaciones en variables separadas

Definición

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \qquad\qquad p(x)dx + q(y)dy = 0$$

Método

1. Reescribir $\quad \dfrac{1}{h(y)}\dfrac{dy}{dx} = g(x)$
   - Suponer $h(y) \neq 0$
   - $h(y^*) = 0 \rightsquigarrow y^*$ sol. sing. const.
2. Integrar $\quad \displaystyle\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$
3. Despejar

Ejemplo: $\quad y' = 2xy$

1. Reescribir $\quad \dfrac{1}{y}y' = 2x$
   - $y = 0$ sol. sing. const.
2. Integrar $\quad \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$

   $\rightsquigarrow \quad \log|y| = x^2 + k_0, \quad k_0 \in \mathbb{R}$
3. Despejar

$$|y| = k_1 \exp x^2, \quad k_1 > 0$$

$$y = k_2 \exp x^2, \quad k_2 \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones lineales

Definición

$$y' + a(x)y = g(x)$$

Método: factor integrante

1. Multiplicar e identificar.
$$y'u + yu' = y'u + ayu = gu$$
$$\rightsquigarrow \quad u' = au$$
2. Resolver factor integrante.
   - Solución no trivial.
3. Integrar producto.
$$yu = \int gudx$$

Ejemplo: $y' = x(2y+1)$

1. Multiplicar e identificar.
$$(yu)' = y'u - 2xyu = xu$$
$$\rightsquigarrow \quad u' = -2xu$$
2. Resolver. $u = k_0 \exp x^2 \ (k_0 = 1)$
3. Integrar producto
$$y \exp x^2 = \int x \exp x^2 dx$$
$$= \tfrac{1}{2} \exp x^2 + k_1, \ k_1 \in \mathbb{R}$$
$$y = \tfrac{1}{2} + k_1 \exp -x^2, \ k_1 \in \mathbb{R}$$

Nota: fórmula general para PVI.

Definición

$$M dx + N dy = 0 \ : \ M_y = N_x$$

Teorema

$$(M, N) = (f_x, f_y) \Leftrightarrow M_y = N_x$$

Método

1. Comprobar.
2. Integrar.
   $$f(x,y) = \int M dx + g(y)$$
3. Derivar e igualar.
   $$N = f_y = \frac{d}{dy}\left[\int M dx\right] + g'(y)$$
   $\rightsquigarrow$ EDO en g
4. Resolver. $\rightsquigarrow f(x,y) = k$

Ejemplo: $\quad y dx + x dy = 0$

1. Comprobar.
   $$M_y = 1 = N_x$$
2. Integrar.
   $$f(x,y) = \int y dx = xy + g(y)$$
3. Derivar e igualar.
   $$x = f_y = x + g'(y)$$
   $$\rightsquigarrow \ g'(y) = 0$$
4. Resolver.
   $$g(y) = 0 \ \ \& \ \ f = xy = k, \ k \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones diferenciales exactas

Definición

$$Mdx + Ndy = 0 \; : \; M_y = N_x$$

Teorema

$$(M, N) = (f_x, f_y) \Leftrightarrow M_y = N_x$$

Método

1. Comprobar y corregir (si $\neq$).
   1.1. Multiplicar. 1.2. Exigir.
   1.3. Simplificar. 1.4. Resolver.
2. Integrar.
   $$f(x, y) = \int Mdx + g(y)$$
3. Derivar e igualar.
   $$N = f_y = \frac{d}{dy}[\int Mdx] + g'(y)$$
   $\rightsquigarrow$ EDO en g
4. Resolver. $\rightsquigarrow f(x, y) = k$

1. Corregir: factor integrante

1.1. Multiplicar.

$$Mudx + Nudy = 0 \; : \; u = u(x, y)$$

1.2. Exigir.

$$M_y u + M u_y = N_x u + N u_x$$

1.3. Simplificar.

$$u = u(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{M_y - N_x}{N} u$$

$$u = u(y) \Rightarrow u'(y) = \frac{N_x - M_y}{M} u$$

1.4. Resolver.

Ecuaciones diferenciales exactas

Definición

$$Mdx + Ndy = 0 \ : \ M_y = N_x$$

Teorema

$$(M, N) = (f_x, f_y) \Leftrightarrow M_y = N_x$$

Método

1. Comprobar y corregir (si $\neq$).
   1.1. Multiplicar. 1.2. Exigir.
   1.3. Simplificar. 1.4. Resolver.
2. Integrar.
   $$f(x, y) = \int Mdx + g(y)$$
3. Derivar e igualar.
   $$N = f_y = \frac{d}{dy}[\int Mdx] + g'(y)$$
   $\rightsquigarrow$ EDO en g
4. Resolver. $\rightsquigarrow f(x, y) = k$

Ejemplo: $ydx + dy = 0$

1. Comprobar y corregir.
   $$ye^x dx + e^x dy = 0$$
2. Integrar.
   $$f = \int e^x dy = e^x y + h(x)$$
3. Derivar e igualar.
   $$ye^x = f_x = e^x y + h'(x)$$
   $$\rightsquigarrow h'(x) = 0$$
4. Resolver.
   $h(x) = 0 \ \ \& \ \ f = e^x y = k, \ k \in \mathbb{R}$

Ecuaciones homogéneas

Definición

$f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homogénea de grado $\alpha > 0$ sii

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots, x_n) \ \forall t > 0$$

Ecuaciones homogéneas

Definición

$$y' = f(x, y)$$

f homo. de grado 0

Definición

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

M, N homo. de mismo grado

Método

1. Comprobar.
2. Transformar.

$$u = y/x \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} y = xu \\ y' = u + xu' \end{array}$$

$$u + xu' = f(x1, xu)$$

3. Resolver. (vars. seps.)
4. Deshacer cambio.

Ejemplo: $(x + y)dx - xdy = 0$

1. Comprobar.

$$(tx + ty) = tx \;\; \& \;\; (tx) = t(x)$$

2. Transformar.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x} \rightsquigarrow u + xu' = 1$$

3. Resolver.

$$u = \log k_1|x|, \;\; k_1 > 0$$

4. Deshacer cambio.

$$y = x \log k_1|x|, \;\; k_1 > 0$$

EDO de orden superior

Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Definición: versión homogénea

$$L[y] = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Método: descomp. espectral (diag.)

1. Factorizar pol. característico.
$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$
$$= (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)$$
2. Conjunto fund. de soluciones.
   - $\lambda_0 \neq \lambda_1 \rightsquigarrow \{e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}\}$
   - $\lambda_0 = \lambda_1 \rightsquigarrow \{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}\}$
   - $\lambda_0 = \alpha \pm i\beta \rightsquigarrow \{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$
3. Solución biparamétrica.

Teorema

$$\mathrm{sol}(f) = \mathrm{kern}(L) = \langle \text{conj. fund.} \rangle$$

Ejemplo: $y'' - 3y' + 2y = 0$

1. Polinomio característico.
$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
2. Conjunto fundamental.
$$\{e^x, e^{2x}\}$$
3. Solución.
$$y = c_0 e^x + c_1 x e^{2x}$$

Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Definición: versión homogénea

$$L[y] = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Teorema

$$\mathrm{sol}(f) = \mathrm{kern}(L) = \langle \text{conj. fund.} \rangle$$

Método: descomp. espectral (diag.)

1. Factorizar pol. característico.
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \\ &= (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \end{aligned}$$
2. Conjunto fund. de soluciones.
   - $\lambda_0 \neq \lambda_1 \rightsquigarrow \{e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}\}$
   - $\lambda_0 = \lambda_1 \rightsquigarrow \{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}\}$
   - $\lambda_0 = \alpha \pm i\beta \rightsquigarrow \{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$
3. Solución biparamétrica.

Ejemplo: $y'' + 4y' + 4y = 0$

1. Polinomio característico.
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + 4\lambda + 4 \\ &= (\lambda - (-2))^2 \end{aligned}$$
2. Conjunto fundamental.
$$\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$$
3. Solución.
$$y = c_0 e^{-2x} + c_1 x e^{-2x}$$

Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Definición: versión homogénea

$$L[y] = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Método: descomp. espectral (diag.)

1. Factorizar pol. característico.
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \\ &= (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \end{aligned}$$
2. Conjunto fund. de soluciones.
   - $\lambda_0 \neq \lambda_1 \rightsquigarrow \{e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}\}$
   - $\lambda_0 = \lambda_1 \rightsquigarrow \{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}\}$
   - $\lambda_0 = \alpha \pm i\beta \rightsquigarrow \{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$
3. Solución biparamétrica.

Teorema

$$\mathrm{sol}(f) = \mathrm{kern}(L) = \langle \text{conj. fund.} \rangle$$

Ejemplo: $y'' - 2y' + 5y = 0$

1. Polinomio característico.
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 5 \\ &= (\lambda - 1)^2 + 2^2 \end{aligned}$$
2. Conjunto fundamental.
$$\{e^x \cos 2x, e^x \sin 2x\}$$
3. Solución.
$$y = c_0 e^x \cos 2x + c_1 e^x \sin 2x$$

Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Definición: versión no-homogénea

$$L[y] = y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

Método: coeficientes indeterminados

1. Suposición.
   - Caso R: $g(x) = P^{(k)}(x)e^{\lambda x}$
     $$\Rightarrow y_{\text{part.}} = Q^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$
   - Caso I: $g(x) = P^{(k)}(x)e^{\alpha x}\text{trig}(\beta x)$
     $$\Rightarrow y_{\text{part.}} = Q_1^{(k)}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_2^{(k)}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$
   - λ o $\alpha + i\beta$ son raíz
     $$\Rightarrow Q \to x^m Q \quad (m = \text{multiplicidad})$$
2. Determinar Q.
   - $y_{\text{part.}}$ satisface la EDO.

Teorema

$$y_{\text{no-homo.}} = y_{\text{homo.}} + y_{\text{part.}}$$

Ejemplo: $y'' - 2y' + 5y = 2(x-2)e^x$

1. Suposición.
   - $\lambda = 1$ raíz (val. prop.)? no
     $$\rightsquigarrow y_p = (a+bx)e^x$$
2. Determinar Q.
   - $y_p' = (a+b+bx)e^x$
     $y_p'' = (a+2b+bx)e^x$
   - $4(a+bx)e^x = 2(x-2)e^x$
     $\rightsquigarrow a = -1,\ b = \frac{1}{2}$
3. $y = [c_0\cos 2x + c_1 \sin 2x + (\frac{1}{2}x - 1)]e^x$

Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Definición: ver. no-homo. superpuesta

$$L[y] = g_1(x) + g_2(x)$$

Método: principio de superposición

1. Resolver homogénea.
   - $y_{\text{homo.}}$
2. Resolver no-homogénea parcial.
   - $y_{\text{part.},j}$, $j = 1, 2$
3. Resolver no-homogénea.
   - $y_{\text{no-homo.}} = y_{\text{homo.}} + y_{\text{part.},1} + y_{\text{part.},2}$

Nota: (todo) válido para orden n.

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \sum_{j=1}^{m} g_j(x)$$

Teorema

$$y_{\text{part.}} = y_{\text{part.},1} + y_{\text{part.},2}$$

Ejemplo: $y'' - y = 3x - 2\sin x$

1. Resolver homogénea.
   - $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \rightsquigarrow y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$
2. Resolver no-homogénea parcial.
   - $y_{p,1} = a + bx \rightsquigarrow y_{p,1} = -3x$
   - $y_{p,2} = a\cos x + b\sin x \rightsquigarrow y_{p,2} = \sin x$
3. Resolver homogénea.
   - $y_{nh} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 3x + \sin x$

Copyleft 2020-2022, All Lefts Reversed

Cálculo Numérico con Octave

Laboratorio de Matemáticas II

Cédric M. Campos
Universidad Rey Juan Carlos

Cursos 2019-2021, Móstoles

Tabla de Contenidos

Interpolación Numérica

Polinomios de Lagrange (Definición)

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\} \quad \rightsquigarrow \quad \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$$

Definición: polinomios de Lagrange

$$L_i^n(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \underbrace{\ldots}_{\cancel{\frac{x - x_i}{x_i - x_i}}} \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

Ejemplo

$$\{0.1, 0.2, 0.5, 0.9\} \quad \rightsquigarrow \quad L_2^3(x) = \frac{x - 0.1}{0.5 - 0.1} \cdot \frac{x - 0.2}{0.5 - 0.2} \cdot \frac{x - 0.9}{0.5 - 0.9}$$

Polinomios de Lagrange (Propiedades)

$$L_i^n(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Ejemplo

$L_2^3(0.1) = 0$ $\quad$ $L_2^3(0.2) = 0$ $\quad$ $L_2^3(0.5) = 1$ $\quad$ $L_2^3(0.9) = 0$

Teorema

$\{L_i^n(x) : i = 0, 1, \ldots, n\}$ base de polinomios de grado $\leq n$.

Ejemplo

$$\exists! c_i : 3 - 2x - x^2 + 2x^3 = c_0 L_0^3(x) + c_1 L_1^3(x) + c_2 L_2^3(x) + c_3 L_3^3(x)$$

Polinomio Interpolador (Forma de Lagrange)

$$\underbrace{\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}}_{\text{nodos}} \quad \xrightarrow{f} \quad \underbrace{\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}}_{\text{datos}}$$

Definición: polinomio interpolador (forma de Lagrange)

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i^n(x) = f_0 L_0^n(x) + f_1 L_1^n(x) + \cdots + f_n L_n^n(x)$$

Propiedad

$$p_n(x_i) = f(x_i) \qquad \& \qquad p_n(x) \approx f(x) \quad \text{(¡cuidado!)}$$

Teorema: error y cota (demostración con forma de Newton)

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi(x) \quad \rightsquigarrow \quad |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\Pi(x)|$$

Polinomio Interpolador (Forma de Newton)

Definición: Diferencias divididas

$$f[x_i] = f_i \qquad\qquad f[x_i, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

Ejemplo

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \qquad\qquad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

Teorema: Polinomio interpolador (forma de Newton)

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \\ &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \end{aligned}$$

newtonCoeff.m

```
function p = newtonCoeff(x,y)
  n = length(x);
  p = y;
  for i = 2:n
    p(i:n) = (p(i:n)-p(i-1:n-1)) ./ (x(i:n)-x(1:n-i+1));
  endfor
endfunction
```

newtonPoly.m

```
function p = newtonPoly(x0,x,f)
  n = length(x);
  F = newtonCoeff(x,f);
  p = F(n);
  for i = n-1:-1:1
    p = F(i)+p.*(x0-x(i));
  endfor
endfunction
```

script1.m

```
f = @(x) (x-1).*log(1+x.^2)./sqrt(1+(x-1).^2);
xi =  -.5:.5:1.5;
fi = f(xi);
xs = linspace(-1,2,387);
fs = f(xs);
figure
axis([xs(1),xs(end),min(fs),max(fs)])
hold on
plot(xs,fs,'b-', 'linewidth',2)
plot(xi,fi,'ro','linewidth',2)
for i=2:length(xi)
   pause
   ps = newtonPoly(xs,xi(1:i),fi(1:i));
   plot(xs,ps,'g-','linewidth',2);
endfor
plot(xs,fs,'b-','linewidth',2)
plot(xi,fi,'ro','linewidth',2)
hold off
```

Derivación Numérica

$$\forall x \in [x_0, x_n]\ p_n(x) \approx f(x) \quad \rightsquigarrow \quad p_n'(x) \approx f'(x),\ p_n''(x) \approx f''(x),\ p_n'''(x) \approx f'''(x),\ \ldots$$

$$\{x_0, x_1\} \rightsquigarrow p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \Rightarrow p_1'(x) = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Conjetura

$$\forall x \in [x_0, x_1]\ f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \underbrace{E_{\text{der.}}(x)}_{\text{pequeño}}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ f'(x_1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} \end{aligned}\right. \quad \leftrightsquigarrow \quad h = x_1 - x_0$$

Diferencias Progresiva y Regresiva a 2 Nodos

Diferencia progresiva

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Taylor:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)h$$

Error progresivo

$$E_{der.}(x_0) = -\frac{1}{2}f''(\xi)h$$

Diferencia regresiva

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}$$

Taylor:

$$f(x_0) = f(x_1) + f'(x_1)(-h) + \frac{1}{2}f''(\xi)(-h)^2$$

Error regresivo

$$E_{der.}(x_1) = \frac{1}{2}f''(\xi)h$$

Diferencia Central a 2 Nodos

$$x_\alpha = \underbrace{(1-\alpha)x_0 + \alpha x_1}_{\text{comb. lin. conv.}} = \begin{cases} x_0 + \alpha h \\ x_1 + (\alpha - 1)h \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha \in [0,1] \mapsto x_\alpha \in [x_0, x_1]$$

$$f(x_0) = f(x_\alpha) + f'(x_\alpha)(-\alpha h) \qquad + \tfrac{1}{2} f''(x_\alpha)(-\alpha h)^2 \qquad + \tfrac{1}{6} f'''(\xi)(-\alpha h)^3$$

$$f(x_1) = f(x_\alpha) + f'(x_\alpha)\big((1-\alpha)h\big) + \tfrac{1}{2} f''(x_\alpha)\big((1-\alpha)h\big)^2 + \tfrac{1}{6} f'''(\xi)\big((1-\alpha)h\big)^3$$

$$E_{\text{der.}}(x_\alpha) = f'(x_\alpha) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \tfrac{1}{2}(\underbrace{2\alpha - 1}_{¿=0?})f''(x_\alpha)h - \tfrac{1}{6}\big((1-\alpha)^3 + \alpha^3\big)\big)f'''(\xi)h^2$$

Diferencia y error centrales

$$x_{1/2} = \frac{x_0 + x_1}{2} \;\Rightarrow\; f'(x_{1/2}) \approx \frac{f(x_{1/2} + \frac{h}{2}) - f(x_{1/2} - \frac{h}{2})}{h} \;\&\; E_{\text{der.}}(x_{1/2}) = -\tfrac{1}{24} f'''(\xi)h^2$$

d1f.m

```
function d1f = d1f(f,x,h,method)
  switch method
    case 'pro2'
      d1f = (f(x+h)-f(x))/h;
    case 'reg2'
      d1f = (f(x)-f(x-h))/h;
    case 'cen2'
      d1f = (f(x+h/2)-f(x-h/2))/h;
    case 'pro3'
      d1f = (-3*f(x)+4*f(x+h)-f(x+2*h))/2/h;
    case 'reg3'
      d1f = (f(x-2*h)-4*f(x-h)+3*f(x))/2/h;
    case 'cen3'
      d1f = (f(x+h)-f(x-h))/2/h;
    otherwise
      error("method=[\'pro\'|\'reg\'|\'cen\'][2|3]")
  endswitch
end
```

script2.m

```
f = @(x) exp(x); % function
x0 = 0;          % point
d1fx0 = exp(x0); % derivative at point
h = [0.8,0.4,0.2,0.1,0.05]; % increments
errs = zeros(3,length(h));  % errors
for i=1:length(h)
  errs(1,i) = d1fx0 - d1f(f,x0,h(i),'pro2');
  errs(2,i) = d1fx0 - d1f(f,x0,h(i),'reg2');
  errs(3,i) = d1fx0 - d1f(f,x0,h(i),'cen2');
endfor
fprintf('  h  | progresive | regresive |   central\n')
fprintf('-----------------------------------------\n')
fprintf('%.2f |  %.6f |  %.6f | %.6f\n',[h;errs])
```

Diferencias a 3 Nodos

$$\{x_0, x_1, x_2\} \rightsquigarrow p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$\Rightarrow p_2'(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - x_0 - x_1)$$

Dif. progresiva ($x = x_0$)

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$
$$E_{der.}(x_0) = \tfrac{1}{3} f'''(\xi) h^2$$

Dif. central ($x = x_1$)

$$f'(x_1) \approx \frac{f_2 - f_0}{2h}$$
$$E_{der.}(x_1) = -\tfrac{1}{6} f'''(\xi) h^2$$

Dif. regresiva ($x = x_2$)

$$f'(x_2) \approx \frac{f_0 - 4f_1 + 3f_2}{2h}$$
$$E_{der.}(x_2) = \tfrac{1}{3} f'''(\xi) h^2$$

$$x^* = x_1 \pm {}^{h}/_{\sqrt{3}} \Rightarrow f'(x^*) \approx \frac{f_2 - f_1}{2h} \pm \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{\sqrt{3}h} \;\&\; E_{der.}(x^*) = \pm \tfrac{\sqrt{3}}{54} f^{iv}(\xi) h^3$$

En general: dado $x \in [x_0, x_n]$ (v.gr. $x \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$), $f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum c_i f_i$ tq $\sum c_i = 0$.

Diferencias Segundas a 3 Nodos

$$\{x_0, x_1, x_2\} \rightsquigarrow p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$\Rightarrow \; p_2''(x) = 2f[x_0, x_1, x_2]$$

Diferencia Segunda

$$\forall x \in [x_0, x_2],\; f''(x) \approx \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2}$$

Err. progresivo ($x = x_0$)

$$E_{der.}(x_0) = -\tfrac{1}{2} f'''(\xi) h$$

Err. central ($x = x_1$)

$$E_{der.}(x_1) = -\tfrac{1}{24} f^{iv}(\xi) h^2$$

Err. regresivo ($x = x_2$)

$$E_{der.}(x_2) = \tfrac{1}{2} f'''(\xi) h$$

d2f.m

```
function d2f = d2f(f,x,h,method)
  switch method
    case 'pro'
      d2f = (f(x)-2*f(x+h)+f(x+2*h))/h^2;
    case 'reg'
      d2f = (f(x-2*h)-2*f(x-h)+f(x))/h^2;
    case 'cen'
      d2f = (f(x-h)-2*f(x)+f(x+h))/h^2;
    case 'pro2'
      d2f = (2*f(x)-5*f(x+h)+4*f(x+2*h)-f(x+3*h))/h^2;
    otherwise
      error("method=[\'pro\'|\'reg\'|\'cen\']")
  endswitch
end
```

script3.m

```
f = @(x) exp(x); % function
x0 = 0;          % point
d2fx0 = exp(x0); % derivative at point
h = [0.8,0.4,0.2,0.1,0.05]; % increments
errs = zeros(3,length(h));  % errors
for i=1:length(h)
  errs(1,i) = d2fx0 - d2f(f,x0,h(i),'pro');
  errs(2,i) = d2fx0 - d2f(f,x0,h(i),'reg');
  errs(3,i) = d2fx0 - d2f(f,x0,h(i),'cen');
endfor
fprintf('  h  | progresive | regresive |   central\n')
fprintf('-----------------------------------------\n')
fprintf('%.2f |  %.6f |  %.6f | %.6f\n',[h;errs])
```

Integración Numérica

Reglas simples

$$f(x) \overset{\{x_0,\dots,x_n\}}{\overset{\downarrow}{\approx}} p_n(x) \quad \rightsquigarrow \quad f^{(m)}(x^*) \approx p_n^{(m)}(x^*) \overset{x^*\in\{x_0,\dots,x_n\}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{h^m}\sum_{k=0}^{n} c_k f_k \qquad : \sum_{k=0}^{n} c_k = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k L_k^n(x)dx$$

$$= (b-a)\sum_{k=0}^{n} c_k f_k \qquad : \sum_{k=0}^{n} c_k = 1$$

$$= \frac{b-a}{D}\sum_{k=0}^{n} d_k f_k \qquad : \sum_{k=0}^{n} d_k = D$$

Error:

$$E_{der.} = E_{der.}(f, x, h)$$

$$E_{int.} = E_{int.}(f, b-a)$$

Reglas rectangulares simples

$$x_0 \in [a,b] \quad \rightsquigarrow \quad p_0(x) = f_0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx f_0 \cdot (b-a)$$

Soporte	$x_0 = a$	$x_0 = b$	$x_0 = \frac{a+b}{2}$
Regla	$f(a)(b-a)$	$f(b)(b-a)$	$f(\frac{a+b}{2})(b-a)$
Error	$\frac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2$	$-\frac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2$	$-\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$

Error a izquierda

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(a+(b-a)) - F(a)\\ &= F'(a)(b-a) + \tfrac{1}{2}F''(\xi)(b-a)^2\\ &= f(a)(b-a) + \tfrac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2\end{aligned}$$

Error a derecha

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(b-(b-a))$$

Error en centro

$$\int_a^b f(x)dx = F(c+\tfrac{b-a}{2}) - F(c-\tfrac{b-a}{2})$$

Errores

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

Función	1	$2x$	$3x^2$	$2-6x+6x^2$	
				$b=1$	$b=1/2$
Izqda.	0.0	1.0	1.0	1.0	-0.5
Dcha.	0.0	-1.0	-2.0	-1.0	0.25
Pto. medio	0.0	0.0	0.25	0.5	0.0625
Trapecio	0.0	0.0	-0.5	-1.0	-0.125

Reglas simples

$$[a,b] \overset{\{x_0,\ldots,x_n\}}{\overset{\downarrow}{\rightsquigarrow}} \quad (b-a)c_k = \int_a^b L_k^n(x)dx \quad \overset{\{f_0,\ldots,f_n\}}{\overset{\downarrow}{\rightsquigarrow}} \quad \int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} c_k f_k + \underbrace{E_{\text{int.}}}_{\substack{\text{¿pequeño?} \\ \downarrow \\ ¿\{x_0,\ldots,x_n\}?}}$$

- Reglas de Newton-Cotes: $h = x_k - x_{k-1}$
    - Cerradas: $x_0 = a,\ x_n = b,\ h = \dfrac{b-a}{n}$
    - Abiertas: $x_0 = a+h,\ x_n = b-h,\ h = \dfrac{b-a}{n+2}$
- Reglas de cuadratura gaussiana: $\{x_0,\ldots,x_n\}$ “óptimos”

En todo caso: $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{x_k + x_{n-k}}{2}$

Regla de Newton-Cotes (cerrada)

$$x_0 = a, \ldots, x_k = a + kh, \ldots, x_n = b \qquad h = \tfrac{b-a}{n} \quad \rightsquigarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{D}\sum_{k=0}^{n} d_k f_k$$

# ptos.	pesos	masa	error	nombre
$n+1$	d_k	D	$E_{\text{int.}}$	
2	$1, 1$	2	$-\frac{1}{12}f^{(2)}(\xi)h^3$	Trapecio
3	$1, 4, 1$	6	$-\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)h^5$	Simpson
4	$1, 3, 3, 1$	8	$-\frac{3}{80}f^{(4)}(\xi)h^5$	3/8 de Simpson
5	$7, 32, 12, 33, 7$	90	$-\frac{8}{945}f^{(6)}(\xi)h^7$	Boole
$2m\,(-1)$			$\propto f^{(2m)}(\xi)h^{2m+1}$	

Regla de Newton-Cotes (abierta)

$$x_0 = a + h, x_k = x_0 + kh, x_n = b - h \qquad \rightsquigarrow \qquad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{D} \sum_{k=0}^{n} d_k f_k$$

$$h = \frac{b-a}{n+2}$$

# ptos. $n+1$	pesos d_k	masa D	error $E_{int.}$	nombre
1	1	1	$\frac{1}{3} f^{(2)}(\xi)h^3$	Rect. o pto. medio
2	$1, 1$	2	$\frac{3}{4} f^{(2)}(\xi)h^3$	Trapecio
3	$2, -1, 2$	3	$\frac{14}{45} f^{(4)}(\xi)h^5$	Milne
4	$11, 1, 1, 11$	24	$\frac{95}{144} f^{(4)}(\xi)h^5$	
$2m\ (-1)$			$\propto f^{(2m)}(\xi)h^{2m+1}$	

Regla de cuadratura gaussiana

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \lambda_k h \qquad \rightsquigarrow \qquad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{D} \sum_{k=0}^{n} d_k f_k$$
$$h = \frac{b-a}{2}, \; D = 2$$

# ptos. $n+1$	puntos λ_k	pesos d_k	error $E_{int.}$
1	0	2	$\frac{1}{24} f^{(2)}(\xi)(b-a)^3$
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{1}{4320} f^{(4)}(\xi)(b-a)^5$
3	$0, \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}, \frac{5}{9}$	$\frac{1}{126000} f^{(6)}(\xi)(b-a)^7$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{5}{6}}}$	$\frac{18\mp\sqrt{30}}{36}$	
N			$\propto f^{(2N)}(\xi)(b-a)^{2N+1}$

Reglas compuestas

Desventajas de las reglas simples.

- Determinación de reglas: ¿x_k? ¡¿c_k?!
- Poco control sobre el error: $K f^{(m)}(\xi)(b-a)^{m+1}$ ¡$b-a$ fijo! ¿K?
- Efecto Runge: $E \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Regla compuesta

1. Partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.
2. Aditividad de la integral, $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$.
3. Regla simple por sumando (iguales/diferentes).
4. Error global igual a la suma de errores locales (en gral., menor en 1 orden).

Nota: desventajas $\rightsquigarrow$ ventajas.

$$h = \frac{b-a}{N} \qquad x_k = a + kh \qquad x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + (k + \tfrac{1}{2})h$$

Regla del punto medio compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

Regla del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + h \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)$$

Regla del Simpson compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{k=0}^{N-1} \big(f(x_k) + 2f(x_{k+\frac{1}{2}})\big) + \frac{h}{6}\big(f(b) - f(a)\big)$$

$$
\begin{aligned}
|E| &= \left|\sum_{k=1}^{N} E_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \pm K f^{(p)}(\xi_k) h^{q+1}\right| = \pm K h^{q+1}\left|\sum_{k=1}^{N} f^{(p)}(\xi_k)\right| && \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \\
&\leq K h^{q+1} \sum_{k=1}^{N} \left| f^{(p)}(\xi_k)\right| \leq K h^{q+1} \sum_{k=1}^{N} M_p = K h^{q+1} N M_p && M_p = \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(p)}(\xi)| \\
&= K h^q (b-a) M_p
\end{aligned}
$$

Cotas de error global

regla	pto. medio	trapecio	Simpson
familia	abierta	cerrada	cerrada
error	$\frac{b-a}{24} M_2 h^2$	$\frac{b-a}{12} M_2 h^2$	$\frac{b-a}{2880} M_4 h^4$

Discusión: pto. medio / trapecio (abierta/cerrada) vs. simple / compuesta

intOpenTrapezoid.m

```
function I = intOpenTrapezoid(f,a,b,N)
  x = linspace(a,b,N+1);
  H = (b-a)/N;
  h = H/3;
  I = 0;
  for k = 1:N
    I += f(x(k)+h) + f(x(k+1)-h);
  endfor
  I *= H/2;
endfunction
```

script4.m

```
f = @(x) exp(x); % function
a = 0; b = 1;    % interval
I = e-1;         % definite integral
N = 2.^(1:5);    % subintervals
errs = zeros(1,length(N));  % errors
for i=1:length(N)
  errs(i) = I-intOpenTrapezoid(f,a,b,N(i));
endfor
fprintf('  N | Trapezoid\n')
fprintf('----------------\n')
fprintf(' %2d |  %.6f \n',[N;errs])
```

Copyleft 2020-2022, All Lefts Reversed