

Universidad
Rey Juan Carlos

Escuela Técnica Superior
de Ingeniería Informática

Grado en Educación Primaria y Matemáticas

Curso 2022-2023

Trabajo Fin de Grado

COLOREABILIDAD EN TEORÍA DE GRAFOS

Autor: Lidia Melón Escorza

Tutores: Miguel Romance del Río
David González De La Aleja Gallego

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis padres y mi hermana, así como a mi familia en general el apoyo recibido durante los años de carrera y los recursos invertidos en mi formación. A mi pareja, a mis amigos y amigas y mi compi de piso y amigo, por todo su apoyo y paciencia durante el proceso de estudio. Y a los tutores su tiempo y ayuda en la realización de este trabajo.

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado se centra en la Teoría de Grafos y más en concreto en la coloreabilidad de grafos. El objetivo principal ha sido realizar un estudio bibliográfico del tema en general, utilizando distintas fuentes, para introducirnos en el mundo de los grafos partiendo del famoso problema de los 4 colores. A partir de la teoría explicada en relación con los grafos se presentan las nociones de coloreabilidad mencionadas anteriormente. El contenido del trabajo en cuanto a este aspecto se ha centrado en el estudio de las propiedades matemáticas del número cromático y del polinomio cromático.

En el cuerpo del trabajo se presentan las definiciones de los conceptos más importantes, seguidas de las características de estos, así como de los teoremas y proposiciones que los relacionan, todo ello explicado con figuras, la mayoría de elaboración propia, que ayudarán al entendimiento del texto. A partir del Capítulo 3 comenzamos con los contenidos principales del trabajo, partiendo de resultados de grafos en general, seguida por los Capítulos 4 y 5 que se centran en coloreabilidad.

Palabras clave:

- Grafos,
- Coloreabilidad,
- Número cromático,
- Polinomio cromático.

Índice de contenidos

Índice de figuras	1
1. Introducción, objetivos y metodología	3
1.1. Contexto histórico	3
1.2. Objetivos generales y específicos	6
1.3. Metodología	6
2. Conceptos básicos de Teoría de Grafos	9
2.1. Definiciones y características generales	9
2.1.1. Conceptos generales	9
2.1.2. Algunos tipos de grafos	13
2.2. Teoremas generales de grafos	18
3. Número cromático de un grafo	23
3.1. Propiedades y resultados básicos	26
4. Polinomio cromático	33
4.1. Propiedades de los polinomios cromáticos	35
4.2. Polinomios cromáticos de familias de grafos	37
5. Conclusiones, aplicaciones y trabajos futuros	43
Bibliografía	46

Índice de figuras

1.1. Puentes de Konisberg.	4
1.2. Explicación de cuando es frontera.	4
1.3. Asociación de un grafo al mapa de España y su coloración. Fuente: Imagen obtenida de “Polinomio cromático. Introducción a la coloración robusta.” [1]	5
2.1. Ejemplo de un grafo.	10
2.2. Ejemplo de un grafo con su lazo.	11
2.3. Grafo con arista múltiple.	11
2.4. Grafo regular.	12
2.5. Grafo asociado a los puentes de Königsberg.	12
2.6. Ejemplos grafos conexo y no conexo.	13
2.7. Ejemplos grafos planar y no planar.	14
2.8. Grafo dual.	14
2.9. Grafo bipartito.	15
2.10. Grafo lineal.	15
2.11. Ejemplos grafos completo y no completo.	15
2.12. Grafo ciclo C_5	16
2.13. Grafo árbol.	16
2.14. Grafo G con $n \geq 2$ vértices.	17
2.15. Grafo $G \setminus \{a\}$	17
2.16. Grafos con 1 y 2 vértices.	21
2.17. Grafo con 3 caras.	21
3.1. Ejemplo de un grafo bien coloreado y mal coloreado.	23
3.2. Paso 1 del Algoritmo Greedy.	24
3.3. Paso 2 del Algoritmo Greedy.	25
3.4. Paso 3 del Algoritmo Greedy.	25
3.5. Ejemplo de una coloración distinta.	26
3.6. G y G'	28
3.7. Ejemplo grafo G con $g(v) < 5$	30
3.8. Grafo G con $g(v) = 5$	30
3.9. Circulo C con $P_{1,3}$ a través de v	31

4.1. Ejemplo de una partición.	34
4.2. Contracción y Borrado.	35
4.3. Coloración grafo lineal.	37
4.4. Coloración K_3	38
4.5. Coloración Grafo Árbol.	39
4.6. Coloración Ciclo c_4	40
5.1. Ejemplo de aplicación de un diagrapa PERT en la construcción. Fuente: "Teoría de Grafos" [2]	44

1

Introducción, objetivos y metodología

¿A quién no le han dado un mapa de Europa o del mundo en el colegio y le han pedido pintarlo? Cuando eramos pequeños y estudiábamos Geografía, nos decían que teníamos que colorear el mapa para separar y diferenciar los distintos países, de forma que la idea era no pintar dos regiones juntas con el mismo color y así visualmente era más fácil distinguir un país de otro.

Imaginemos ahora que tenemos un mapamundi y que queremos colorearlo tal que dos países que compartan frontera no tengan el mismo color. ¿Existe alguna manera de saber con cuántos colores bastaría para colorearlo de dicha forma? ¿De cuántas maneras se puede colorear?

Este Trabajo de Fin de Grado trata sobre un tema de las matemáticas que da solución a este tipo de problemas, y otros similares: la Teoría de Grafos, y más en concreto, la Coloreabilidad en Teoría de Grafos.

1.1. Contexto histórico

La Teoría de Grafos tiene su origen en 1736 cuando el matemático Leonhard Euler resolvió el famoso problema de los puentes de Königsberg [3]. Este problema (Figura 1.1) ponía en duda la posibilidad de cruzar los 7 puentes que unían las islas de esta región de Prusia, de manera que solo se pasara una vez por cada uno de ellos.

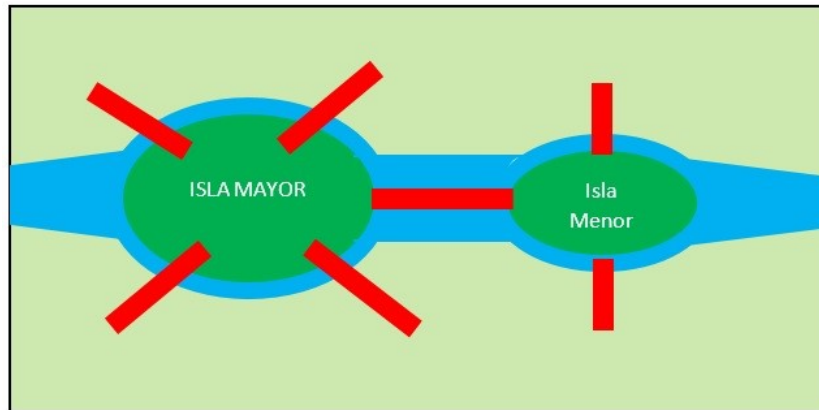


Figura 1.1: Puentes de Konisberg.

En 1852 el abogado y botánico británico Francis Guthrie trabajando con un mapa político, se dió cuenta de que podía colorearlo con 4 colores de manera que dos regiones limítrofes cualesquiera tuvieran colores distintos. De esta forma le planteó a su hermano Frederick la conjetura de los cuatro colores [4]: ¿se podría colorear cualquier mapa únicamente con 4 colores? Frederick se lo planteó a su profesor Augusto de Morgan, quien expandió el planteamiento del problema a sus colegas de forma que el enunciado cruzó el mundo. La conjetura que planteaban tenía algunas restricciones a la hora de definir los mapas a colorear, de forma que los territorios no se considerarían colindantes cuando su frontera fuera un único punto, por lo que para ser colindantes deberían compartir una frontera como se indica en la siguiente Figura 1.2:

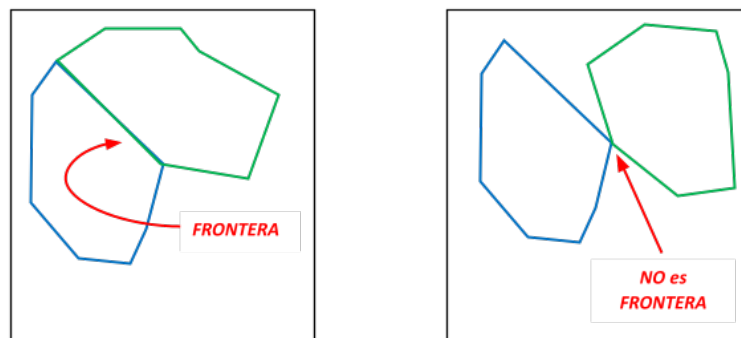


Figura 1.2: Explicación de cuando es frontera.

Tras la muerte de De Morgan en 1871 el problema pareció olvidarse, pero fue en 1878 cuando el matemático británico Arthur Cayley volvió a sacarlo a relucir, publicando el enunciado de la conjetura en un encuentro de la London Mathematical Society [5]. Un año después, tras leer el enunciado, el abogado británico Alfred Kempe se interesó por el problema y publicó en 1879 una demostración [6] en la revista Nature. Poco después, en 1880 publicó una actualización de su

demostración corrigiendo algunas erratas, y esta fue la demostración al teorema aceptada por la comunidad matemática hasta una década después.

En 1890, el matemático Percy John Heawood publicó un mapa en el que no se cumplía la prueba propuesta por Kempe y un año después, este admitió su error. A pesar de encontrar este error, la prueba de Kempe fue clave para Heawood quien la utilizó para demostrar el Teorema de los 5 colores [7].

Pasaron años hasta que, en 1969, Heinrich Heesch sistematiza la prueba del Teorema de los 4 colores gracias a un algoritmo que comentó con su alumno Wolfgang Haken. Para realizar esta prueba se identifica el mapa como un grafo (Figura 1.3) de manera que a cada país o región se le asocia un vértice (dos vértices se unen solo si existe una frontera entre ambos países).

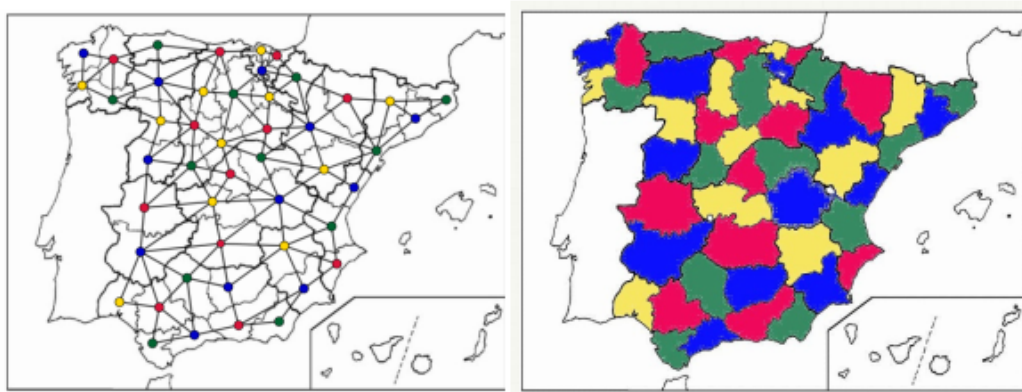


Figura 1.3: Asociación de un grafo al mapa de España y su coloración.

Fuente: Imagen obtenida de “Polinomio cromático. Introducción a la coloración robusta.”[1]

Haken junto con Appel consiguen completar unos 6 años después la demostración mediante un ordenador [8]. Esta prueba necesitaba unos 50 días aproximadamente y 3 ordenadores de la Universidad de Illinois para su ejecución.

En 1996 un grupo de investigadores del Instituto de Tecnología de Georgia simplificó la prueba y el algoritmo [9], de manera que la verificación solamente necesita unas 3 horas en cualquier ordenador doméstico.

Con esta verificación por ordenador se da por concluida la demostración del Teorema de los Cuatro colores, pero una cuestión filosófica en torno a este problema sigue abierta entre la comunidad matemática... ¿es de verdad una demostración si no puede realizarse a mano por un humano?

1.2. Objetivos generales y específicos

A continuación se explican los objetivos generales y específicos del trabajo, así como la metodología empleada en su desarrollo.

El objetivo más general de este Trabajo de Fin de Grado es introducirnos en el mundo de la Teoría de Grafos, y más específicamente comprender algunos conceptos y nociones de la coloreabilidad en la Teoría de Grafos.

En el Capítulo 2 se abordan los conceptos matemáticos más generales y necesarios para comprender este tema. Se explican más en particular algunos tipos de grafos que existen y que utilizaremos en el desarrollo de la teoría del trabajo, se exponen algunas de las características que afectan a los grafos, se enuncian teoremas y proposiciones, así como sus demostraciones y se muestran figuras y dibujos de grafos para poder representar visualmente algunas de las explicaciones.

El Capítulo 3 comienza con el estudio de la coloreabilidad en grafos y se centra en el número cromático de un grafo, concepto de gran importancia para comentar los Teoremas de los 4, 5 y 6 colores, los cuales hacen referencia al problema de coloración de mapas que se explicaba al inicio del trabajo. También se explican algunas propiedades, con sus respectivas demostraciones, de los números cromáticos.

En el Capítulo 4 se introduce el concepto de polinomios cromáticos, porque como veremos, sí se puede colorear un mapa o un grafo con cierto número de colores, pero ¿de cuántas formas distintas podemos colorearlo con dichos colores? En este capítulo se exponen los resultados necesarios para responder a esta cuestión.

1.3. Metodología

La metodología utilizada en este trabajo es básicamente de revisión bibliográfica. Se ha llevado a cabo una búsqueda de información mediante la cual y a través de su interpretación, se ha llegado a las conclusiones explicadas en el proyecto.

La estructura que se sigue en el desarrollo del marco teórico es la siguiente: primeramente se desarrollarán los conceptos más generales de la Teoría de Grafos (definición de grafo, tipos, características, ejemplos etc.), a continuación se mencionarán algunos de los teoremas y proposiciones más importantes y conocidos relacionados con esta misma teoría (por ejemplo el Teorema de Euler). Estas nociones generales de grafos nos serán útiles para entender la coloreabilidad. Después, entraremos en detalle en coloreabilidad de grafos. Siguiendo la estructura previa, primero definiciones, conceptos y ejemplos y a continuación los teoremas que dan solución al problema planteado.

Algunas de las figuras o dibujos que se mostrarán a lo largo del trabajo son recogidas de la bibliografía y otras de ellas son de elaboración propia.

2

Conceptos básicos de Teoría de Grafos

2.1. Definiciones y características generales

A continuación se explican algunos conceptos generales relacionados con la Teoría de Grafos, que son necesarios para entender el contenido del trabajo y que se vieron en la asignatura “Matemática Discreta” de Primer año del grado en matemáticas. También fijaremos la notación que se utilizará a lo largo del texto. Estos conceptos los encontramos en cualquier texto de Teoría de Grafos (por ejemplo [3], [10], [11]) pero se incluyen en el propio trabajo para que este sea autocontenido.

2.1.1. Conceptos generales

Comenzamos definiendo el gran protagonista del trabajo y de la Teoría de Grafos, tal y como su propio nombre indica:

Definición 2.1.1 (Grafo). Geométricamente podemos definir un **grafo** como un conjunto de puntos (a los que llamamos vértices), y líneas (que llamamos aristas) en el espacio, de forma que algunos de los puntos están unidos entre sí mediante dichas aristas.

Matemáticamente un grafo se puede definir del siguiente modo: sea V un conjunto de vértices, distinto del vacío, y sea E un conjunto de aristas del grafo G , entonces definimos un grafo como un par ordenado $G = (V, E)$. Las aristas

de G son pares no ordenados de elementos del conjunto E , es decir si u y $v \in V$ entonces $\{u, v\} = \{v, u\} \in E$.

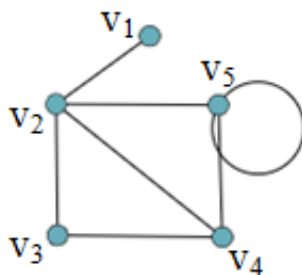


Figura 2.1: Ejemplo de un grafo.

En la Figura 2.1 tenemos un ejemplo de grafo $G = (V, E)$ donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_5, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_5\}\}.$$

Cabe destacar que el conjunto V no tiene por qué ser finito. Sin embargo todos los grafos con los que se trabajará en este Trabajo Fin de Grado serán finitos. Intuitivamente un grafo finito será aquel que tiene un número finito de vértices y aristas, veamos ahora una definición más formal.

Definición 2.1.2. Llamaremos **orden** del grafo G al número de vértices que posee dicho grafo, y llamaremos **tamaño** del grafo al número de sus aristas. Decimos entonces que un **grafo finito** es aquel que tiene tanto orden como tamaño finitos.

Tomando como ejemplo la Figura 2.1, podemos decir que esta es un grafo finito, cuyo orden es 5 y su tamaño 7.

También, como se observa en la misma figura, una o más aristas pueden incidir en un mismo vértice. Es más, una misma arista puede tener su origen y su final en el mismo vértice, es lo que llamamos **lazo**. En la Figura 2.2 la arista en color rojo es un lazo.

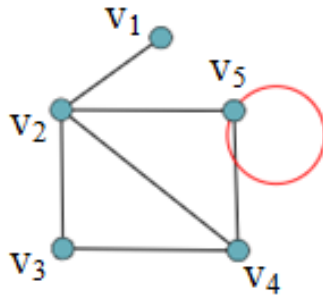


Figura 2.2: Ejemplo de un grafo con su lazo.

También existen otro tipo de aristas llamadas **aristas múltiples**, que son aquellas que unen los mismos vértices.

Sea $G = (V, E)$ un grafo y definimos ψ la aplicación

$$\begin{aligned} \psi: E &\longrightarrow V \times V \\ (a_k) &\longmapsto (v_i, v_j) \end{aligned}$$

que asocia a cada elemento de E un par de vértices de V de manera que la arista $a_k \in E$ une a los vértices v_i y $v_j \in V$. Entonces, cuando la función ψ no es inyectiva, se dice que a_i, \dots, a_k son aristas múltiples. Si un grafo no contiene ni lazos ni aristas múltiples se dice que es un **grafo simple**.

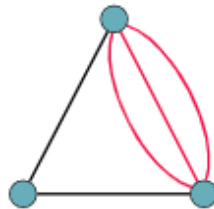


Figura 2.3: Grafo con arista múltiple.

Como se puede observar en las figuras previas, de un vértice pueden salir distintos números de aristas. En matemáticas, este concepto tiene nombre particular: **grado de un vértice**, y lo denotamos como $g(v)$ con $v \in V$. En la Figura 2.2 por ejemplo, las aristas $\{v_2, v_3\}$ y $\{v_3, v_4\}$ inciden en el vértice v_3 , luego $g(v_3) = 2$.

Puede pasar que todos los vértices de un grafo tengan el mismo grado. Cuando esto sucede, estamos ante un **grafo regular**. Además, si $G = (G, E)$ un grafo cuyos vértices tienen grado $g(v) = k \forall v \in V$ entonces es un grafo k -regular.

Si tenemos como ejemplo, la Figura 2.4, estamos ante un grafo 2-regular.

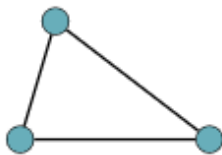


Figura 2.4: Grafo regular.

Recordemos el problema de los puentes de Königsberg (Figura 1.1): ¿podríamos cruzar todos los puentes sin repetir ninguno? Tal y como se dijo en la introducción, este problema puede resolverse usando un grafo: ¿cuándo es posible recorrerlo sin pasar dos veces por la misma arista o el mismo vértice? Vamos a construir el grafo asociado al problema en la Figura 2.5, de forma que habrá tantos vértices como zonas hay en el problema: 1 la isla mayor, 2 la isla menor, 3 la orilla norte, 4 la orilla sur. Y pondremos tantas aristas como puentes haya conectando las zonas.

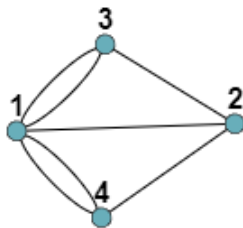


Figura 2.5: Grafo asociado a los puentes de Königsberg.

Ahora bien, para responder a las preguntas anteriormente formuladas de si podemos cruzar todos los puentes sin repetir ninguno, se deben definir primero algunos conceptos.

Definición 2.1.3. Definimos un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ entre los vértices v_i y v_j como una sucesión de aristas que pertenecen a E de la forma $\{v_i, v_{k_1}\}, \{v_{k_1}, v_{k_2}\}, \{v_{k_2}, v_{k_3}\} \dots \{v_{k_n}, v_j\}$. Un camino es **cerrado** si empieza y acaba en el mismo vértice.

Además, afirmamos que existen dos tipos de caminos: eulerianos y hamiltonianos.

Definición 2.1.4. Dado un grafo $G = (V, E)$ decimos que un camino es **euleriano** si dicho camino contiene todas las aristas del grafo, y cada arista solo aparece una vez. Decimos que un camino es **hamiltoniano** cuando dicho camino contiene todos los vértices del grafo y cada vértice aparece solo una vez.

Contestando a las preguntas realizadas en el problema de los puentes de Königsberg, y teniendo en cuenta el grafo asociado a este problema (Figura 2.5), es imposible recorrer todos los puentes sin repetir ninguno, y por tanto no existe ningún camino euleriano. Sin embargo, sí podemos encontrar un camino hamiltoniano como es el siguiente: $\{v_1, v_3\}, \{v_3, v_2\}, \{v_2, v_4\}$.

2.1.2. Algunos tipos de grafos

Después de esta breve introducción de algunas de las definiciones y características de la Teoría de Grafos, se nombran y explican algunos de los tipos de grafos más comunes, los cuales utilizaremos para el desarrollo del marco teórico de la coloreabilidad de grafos. La teoría de esta sección ha sido obtenida a partir de algunos textos de la bibliografía: [10], [12], [13] y [14].

1. **Grafo simple.** Decimos que un grafo G es un grafo simple cuando no posee ni lazos ni aristas múltiples.
2. **Grafo conexo.** Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si dados dos vértices cualesquiera que pertenecen a V existe algún camino que los une. Las componentes conexas de un grafo son subgrafos inducidos por este, donde cualquier par de vértices está unido mediante un camino. En otras palabras, son los conjuntos de vértices alcanzables entre sí.

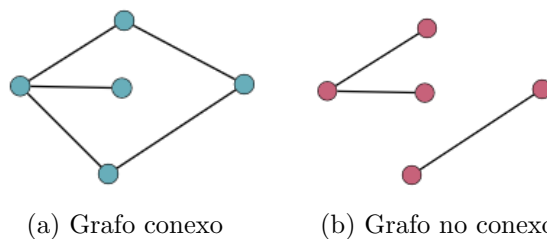


Figura 2.6: Ejemplos grafos conexo y no conexo.

3. **Grafo planar.** Un grafo planar es aquel que se puede dibujar en el plano sin que ninguna de sus aristas se crucen. Este grafo divide al plano en diferentes regiones llamadas caras. Cabe destacar que la parte “exterior” del grafo, la cual no posee frontera con el plano, también es considerada como una cara.

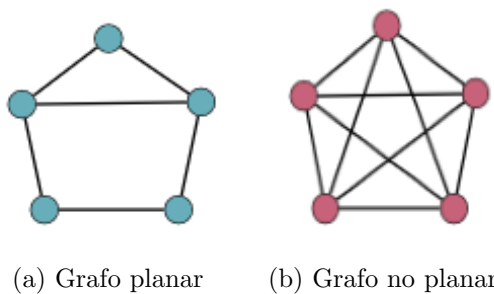


Figura 2.7: Ejemplos grafos planar y no planar.

4. **Grafo dual.** Un grafo dual se forma mediante un grafo previo planar de la siguiente manera. Dado $G = (V, E)$ un grafo planar, entonces un grafo dual es otro grafo $G' = (V', E')$ de forma que existe un nuevo vértice perteneciente a V' por cada cara que perteneciera al grafo G , y estos vértices del nuevo grafo G' están unidos mediante aristas, las cuales existirán siempre y cuando las caras previas correspondientes a los nuevos vértices v'_1 y $v'_2 \in V'$ a los que unen, tuvieran una frontera en común en el grafo G .

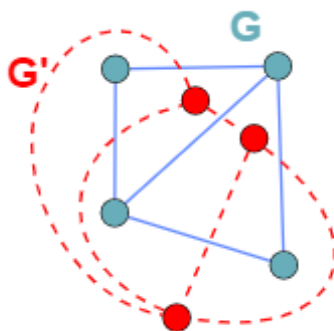


Figura 2.8: Grafo dual.

Tal y como se muestra en la Figura 2.8, a partir de un grafo planar G , se ha obtenido otro G' tal y como se ha explicado.

5. **Grafo bipartito.** Se dice que un grafo $G = (V, E)$ es bipartito cuando el conjunto V admite una partición en dos conjuntos disjuntos (es decir, que no tienen elementos comunes) V_1 y V_2 de manera que toda arista que pertenezca a E posee un extremo en el conjunto V_1 y el otro extremo en el conjunto V_2 .

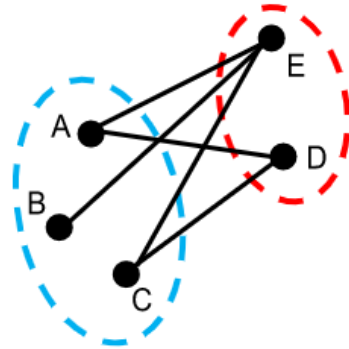


Figura 2.9: Grafo bipartito.

6. **Grafo lineal** (L_n). Es un grafo formado por n vértices v_1, \dots, v_n y $n - 1$ aristas a_1, \dots, a_n de tal manera que la arista $a_i = (v_i, v_{i+1})$. Todos los vértices tienen grado 2 excepto el primero y el último que tienen grado 1.

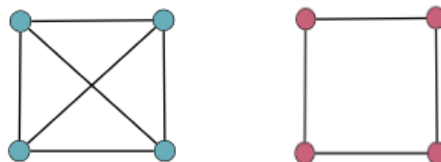


Figura 2.10: Grafo lineal.

7. **Grafo completo** (K_n). Es un grafo simple de manera que cada par de vértices del grafo están conectados mediante una arista. El número de aristas que poseen este tipo de grafos $G = (V, E)$ es

$$E = \binom{n}{2} = \frac{n \times (n - 1)}{2}.$$

Este número es el mayor número de aristas que puede tener un grafo simple, de ahí su nombre de **grafo completo**.



(a) Grafo completo K_4 . (b) Grafo no completo.

Figura 2.11: Ejemplos grafos completo y no completo.

8. **Grafo Ciclo** (C_n). Un ciclo es un camino cerrado, simple y no trivial. Poseen n vértices y n aristas. Cabe destacar que es un grafo regular ya que todos los vértices tienen grado 2.

Por tanto, se observa que si $G = (V, E)$ es un C_n entonces $\psi(a_i) = (v_i, v_{i+1})$ con $i < n$ y $\psi(a_n) = (v_n, v_1)$ con $i = n$, siendo ψ la aplicación definida previamente en la sección 2.1.1.

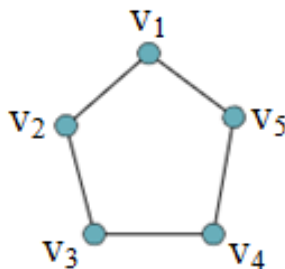


Figura 2.12: Grafo ciclo C_5 .

9. **Árbol** (T_n). Se dice que un grafo es un árbol cuando es un grafo conexo y sin ciclos, es decir, que para cada 2 vértices cualesquiera hay un único camino que los une.

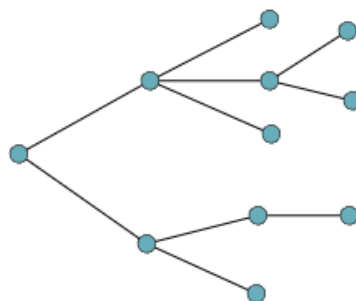


Figura 2.13: Grafo árbol.

Ahora, veamos una propiedad importante sobre los grafos árboles:

Proposición 2.1.1. Sea $G = (V, E)$ un árbol con n vértices y m aristas, entonces $n = m + 1$.

Demostración. Hagamos la demostración por inducción sobre el número de vértices n :

Veamos primero que ocurre si el grafo solamente tiene un vértice, es decir $n = 1$. Como sabemos que G es un árbol sabemos que no tiene ciclos, y como

solamente tiene un vértice, entonces no tendrá ninguna arista, de modo que

$$m = 0 \Rightarrow n = m + 1 = 0 + 1 = 1. \quad (2.1)$$

Ahora supongamos que la proposición es cierta para los árboles con menos de n vértices (hipótesis de inducción).

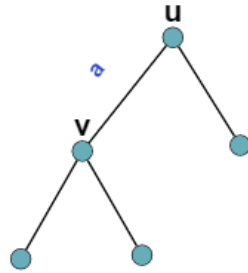


Figura 2.14: Grafo G con $n \geq 2$ vértices.

Sea G un árbol con $n \geq 2$ y sea $a \in E$ la arista con extremos u y v tal y como se muestra en la Figura 2.14. Como G es conexo, sabemos que solo hay un camino que une los vértices u con v . Ahora, si quitamos la arista a que es la que los une, $G \setminus \{a\}$ no es conexo y su número de componentes conexas es 2 como se observa en la Figura 2.15.

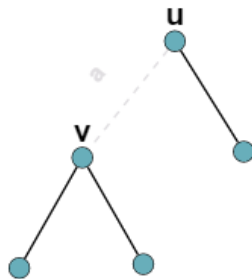


Figura 2.15: Grafo $G \setminus \{a\}$.

Llamemos G_1 y G_2 a dichas componentes, las cuales son subgrafos de G , son conexas, y no poseen ciclos, entonces por definición, como son conexas y sin ciclos, son árboles, con lo que por hipótesis de inducción, sabemos que se cumple que

$$n(G_i) = m(G_i) + 1 \quad \forall i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} m(G) &= m(G \setminus \{a\}) + 1 = m(G_1) + m(G_2) + 1 \\ &= m(G_1) + 1 + m(G_2) + 1 - 1 \\ &= n(G_1) + n(G_2) - 1 = n(G) - 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $m(G) = n(G) - 1$ y en consecuencia $n(G) = m(G) + 1$. \square

2.2. Teoremas generales de grafos

Después de introducir las características básicas sobre algunos tipos de grafos con los que trabajaremos durante el desarrollo del texto, se exponen algunos de los teoremas más conocidos e importantes sobre Teoría de Grafos los cuales nos serán útiles para entender algunas de las nociones de coloreabilidad que se explican más adelante. Estos conceptos son fáciles de encontrar en numerosas publicaciones y textos científicos que podemos encontrar en la bibliografía, como son [2], [10], [14].

El siguiente teorema que vamos a ver, relaciona el número de vértices, el número de aristas y el número de caras entre sí mediante la conocida fórmula de Euler.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Euler). Sea G un grafo plano y conexo con C número de caras, A número de aristas y V número de vértices, entonces

$$V - A + C = 2. \quad (2.3)$$

Demostración. Primero, supongamos que G no tiene aristas, es decir $A = 0$. Como G es conexo, tiene un único vértice y por tanto tiene una sola cara (la exterior). Por ello sustituyendo en la fórmula, obtenemos que

$$V - A + C = 1 - 0 + 1 = 2. \quad (2.4)$$

Continuamos con la demostración viendo qué ocurre cuando el grafo sí tiene aristas. Lo vemos por inducción sobre el número de aristas de G .

Suponemos entonces el resultado cierto para un grafo con n vértices (hipótesis de inducción). Veamos qué ocurre cuando tiene $n+1$ vértices. Tenemos dos casos:

Opción 1: Si G no tiene ciclos. Entonces por definición, G es un árbol, por lo tanto posee una sola cara ($C = 1$). Además, por la Proposición 2.1.1, sabemos que si V es el número de vértices y A es el número de aristas de G , entonces

$$V = A + 1. \quad (2.5)$$

Por lo tanto:

$$V - A + C = A + 1 - A + 1 = 2. \quad (2.6)$$

Obteniendo así la fórmula de Euler.

Opción 2: Si G tiene un ciclo. Consideramos el grafo G con $n + 1$ vértices y la arista $a \in A$ aquella que forma el ciclo.

Ahora llamemos H al grafo resultante de quitar la arista a al grafo G , es decir $H = G \setminus \{a\}$. Sabemos que es conexo y con n aristas, luego, por hipótesis de inducción se cumple la fórmula de Euler. Por tanto tenemos que:

$$V_H - A_H + C_H = 2. \quad (2.7)$$

Es sencillo ver que el número de caras de G es $C_G = C_H + 1$, puesto que al añadir la arista a que era la que formaba el lazo, aparece una nueva cara. Además, tenemos una arista más, es decir, $A_G = A_H + 1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V_G - A_G + C_G &= V_H - (A_H + 1) + (C_H + 1) \\ &= V_H - A_H + C_H - 1 + 1 \\ &= V_H - A_H + C_H. \end{aligned}$$

Sabemos por la ecuación (2.7) que $V_H - A_H + C_H = 2$ y por tanto se cumple también la fórmula de Euler.

□

A partir de la fórmula que se presenta en el siguiente teorema, se puede acotar el número de aristas de un grafo en relación con su número de vértices, de manera que se garantiza una condición necesaria para que un grafo simple sea plano.

Teorema 2.2.2. Si G es un grafo planar y simple con al menos 3 vértices, entonces

$$A \leq 3V - 6, \quad (2.8)$$

donde A es el número de aristas y V el número de vértices.

Demostración. Sea V el número de vértices de un grafo G , que supongamos que es un grafo planar maximal (aquel que posee todas las aristas posibles), cada cara entonces, está delimitada por tres o más aristas. Ahora, podríamos decir que cada cara tiene al menos 3 aristas y cada arista pertenece a 2 caras, entonces

$$3C \leq 2A. \quad (2.9)$$

Ahora, aplicando el Teorema de Euler y multiplicando por 3, tenemos que

$$V - A + C = 2 \Rightarrow 3V - 3A + 3C = 6.$$

Utilizando ahora la ecuación (2.9) y sustituyendo en la expresión anterior

tenemos

$$3V - 3A + 2A \geq 6 \Rightarrow 3V - A \geq 6 \Rightarrow A \leq 3V - 6.$$

Si el grafo no fuera maximal, entonces añadimos las aristas necesarias para completar los triángulos posibles y conseguir las condiciones que se exponen al principio de la demostración. \square

Otro teorema relevante en la Teoría de Grafos lleva el nombre de la metáfora que se explica a continuación. Imaginemos que entramos en una fiesta, lo primero que haríamos es saludar a las personas que se encuentran en ella estrechándoles la mano. Con un poco de imaginación podríamos representar con un grafo esta acción. Siendo cada persona un vértice y representando las aristas cuando dos personas se saludaran y “juntaran” sus manos, podríamos decir que con dos brazos de dos personas que se saludan se crea una arista que uniría los vértices que representan a cada persona. He aquí el nombre del siguiente teorema.

Teorema 2.2.3 (Apretón de Manos). Sea un grafo $G = (V, E)$ y sea $g(v)$ el grado del vértice $v \in V$ entonces

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2 \times A, \tag{2.10}$$

donde A es el número de aristas.

Demostración. Supongamos un grafo G con A número de aristas y con $g(v)$ el grado de los vértices. Como cada arista une 2 vértices, contaremos cada arista dos veces, una por cada vértice que “toca”. Entonces, la suma de los grados es el doble del número de aristas, con lo que obtenemos la expresión que buscábamos (2.10). \square

El siguiente resultado nos asegura que un grafo planar tiene al menos un vértice con 5 o menos aristas que salen de él. Este teorema nos será útil para demostrar un teorema del siguiente capítulo.

Teorema 2.2.4. Un grafo planar tiene al menos un vértice de grado 5 o menos.

Demostración. Sean V el número de vértices, A el de aristas y C las caras del grafo G . Por reducción al absurdo, supongamos que no se cumple el teorema y que todos los vértices son de grado 6 o más.

Primero, sabemos que cada arista conecta 2 vértices. Ahora, vamos a decir que la mitad de una arista pertenece a un vértice y la otra mitad al otro. Entonces, podemos decir que cada vértice posee la mitad de cada arista que sale de él. Como en nuestra suposición, cada vértice posee al menos 6 aristas, entonces cada

vértice posee $\frac{6}{2} = 3$ aristas. En otras palabras, el número de aristas es al menos 3 veces el número de vértices, luego obtenemos que

$$A \geq 3V \Rightarrow V \leq \frac{A}{3}. \quad (2.11)$$

Centrándonos ahora en las aristas que “separan” caras: sabemos que para delimitar una cara son necesarias al menos 3 aristas, puesto que con 1 o 2 se formarían lazos o aristas múltiples, tal y como se muestra en la Figura 2.16. Algo que no se puede dar porque estamos suponiendo un grafo planar.

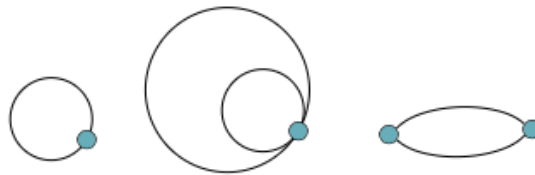


Figura 2.16: Grafos con 1 y 2 vértices.

Ahora, si nos fijamos en una arista que delimite dos caras, vamos a “asociar” la mitad de la arista con una cara y la otra mitad con la otra cara. Teniendo como ejemplo la Figura 2.17, la arista $\{v_1, v_3\}$, contará la mitad para la cara A y la mitad para la cara B .

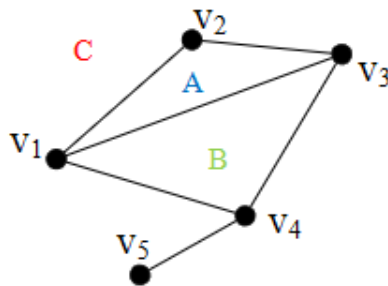


Figura 2.17: Grafo con 3 caras.

Habrán otras aristas que no separen caras, como la arista $\{v_4, v_5\}$ de la figura del mismo ejemplo, en este caso la contamos una sola vez para la cara exterior C .

De esta manera, cada cara posee 3 o más aristas que la tocan y “contamos” la mitad de cada una, luego tenemos $\frac{3}{2}$ aristas por cada cara y por tanto

$$A \geq \frac{3}{2}C \Rightarrow C \leq \frac{2A}{3}. \quad (2.12)$$

Ahora, por la fórmula de Euler sabemos que $V - A + C = 2$ y usando las ecuaciones

(2.11) y (2.12) en esta fórmula tenemos que

$$V - A + C \leq \frac{A}{3} - A + \frac{2A}{3} = A - A = 0. \quad (2.13)$$

Por tanto,

$$V - A + C \leq 0. \quad (2.14)$$

Pero sabemos que $V - A + C = 2$ como hemos visto en (2.3). Hemos llegado a una contradicción. Por lo que nuestra suposición es falsa y es imposible que un grafo planar tenga todos sus vértices de grado 6 o más. Y por tanto, al menos existe un vértice cuyo grado es 5 o menos.

□

3

Número cromático de un grafo

Siguiendo en línea con el problema principal del Trabajo Fin de Grado, si quisiéramos colorear un mapa de forma que dos regiones con frontera común tuvieran colores distintos, ¿cómo sabríamos con cuántos colores bastaría? Es más, si tenemos un grafo cualquiera, ¿podemos saber cuántos colores como mínimo hacen falta para colorearlo? A continuación se explican algunas nociones básicas sobre coloreabilidad en Teoría de Grafos que nos servirán para responder a estas cuestiones y muchas otras. La información explicada en este capítulo se ha obtenido de distintas fuentes bibliográficas sobre coloreabilidad, entre otras: [10], [11], [12] y [14].

Definición 3.0.1. Dado un grafo $G = (V, E)$ una **coloración** es una asociación de colores con los vértices de este, de manera que dos vértices que son adyacentes no puedan tener el mismo color. En ese caso decimos que el grafo es coloreable.

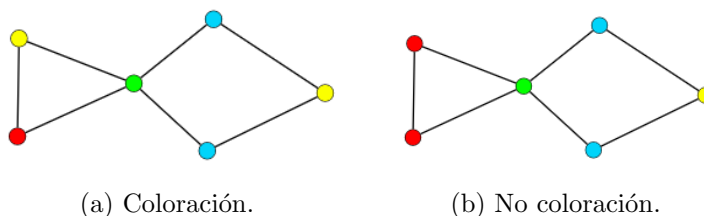


Figura 3.1: Ejemplo de un grafo bien coloreado y mal coloreado.

Por ejemplo, en la Figura 3.1b, el grafo no está coloreado tal y como hemos

2º Pasamos al siguiente vértice (B). Escogemos el color con índice más bajo:
 - Si ninguno de los vértices adyacentes ha sido coloreado con dicho color, lo coloreamos y pasamos al siguiente vértice.
 - Si este color ya ha sido usado para alguno de sus vértices adyacentes, elegimos el color con el siguiente índice, realizamos esta elección de colores sucesivamente hasta que encontremos el índice más bajo cuyo color no se haya usado aún en ninguno de los vértices adyacentes. En este ejemplo el color 2.

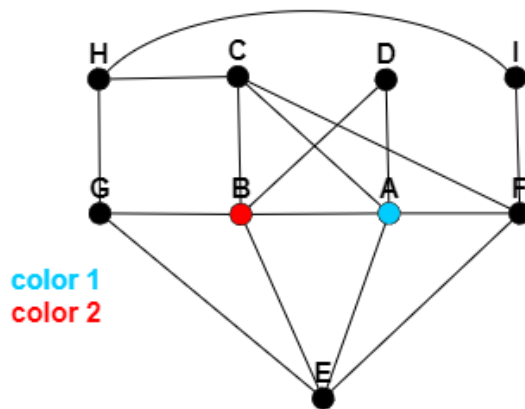


Figura 3.3: Paso 2 del Algoritmo Greedy.

3º. Repetimos este paso previo hasta que todos los vértices hayan sido coloreados.

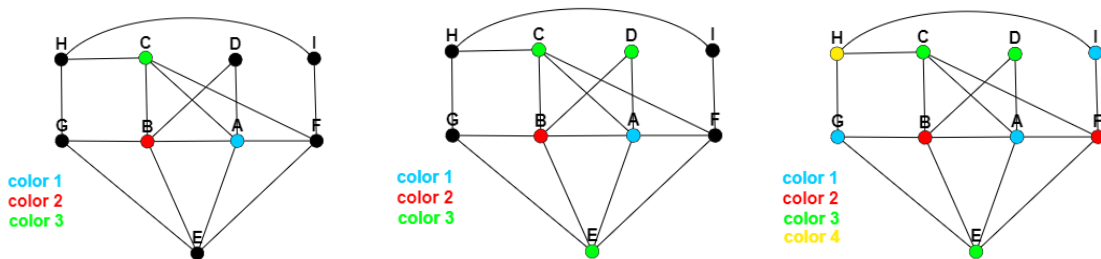


Figura 3.4: Paso 3 del Algoritmo Greedy.

Cabe destacar que el número de colores a utilizar varía según establezcamos el orden de los vértices a colorear. Por ejemplo, en la Figura 3.5 tenemos un ejemplo de otra coloración distinta a pesar de ser el mismo grafo del ejemplo anterior. En este caso hemos necesitado 5 colores, uno más que en la coloración previa. Esta coloración es distinta, porque si nos fijamos en la figura, se ha comenzado a colorear por un vértice distinto.

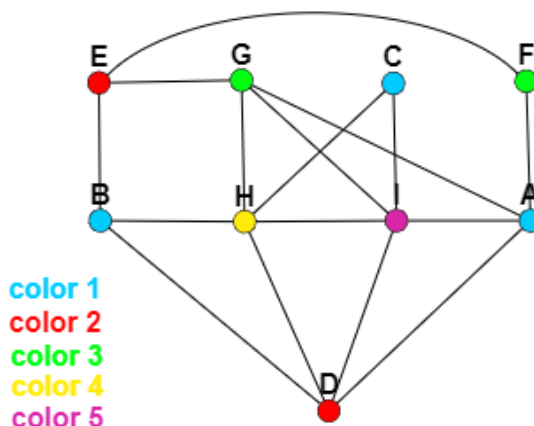


Figura 3.5: Ejemplo de una coloración distinta.

Una vez explicada una manera de colorear un grafo dado, y visto que no solo existe una única coloración para un mismo grafo, y que de hecho, dependiendo de las coloraciones, se utilizan más o menos colores, introducimos un concepto que va ligado a esta idea: el número cromático.

Definición 3.0.3 (Número cromático). El número cromático de un grafo dado G es el número mínimo necesario para que este sea coloreable. Es decir es el número k de manera que G sea k -coloreable. Lo denotamos como $\chi(G)$.

3.1. Propiedades y resultados básicos

En esta sección se explican distintas propiedades, teoremas o proposiciones (con sus correspondientes demostraciones) en torno al número cromático.

Es obvio que si un grafo G tiene número cromático $\chi(G) = 1$ entonces dicho grafo es un grafo nulo¹, porque si tiene al menos una arista, son necesarios al menos 2 colores, uno para cada vértice. Cabe destacar que los grafos que tienen número cromático $\chi(G) = 2$ vienen determinados por la siguiente proposición:

Proposición 3.1.1. Un grafo G tiene número cromático $\chi(G) = 2$ si y solo si tiene aristas y es un grafo bipartito.

Demostración. Comenzamos la demostración viendo que si el número cromático de un grafo es 2, entonces tendrá aristas y será bipartito. Sea por lo tanto $G = (V, E)$ un grafo cuyo número cromático $\chi(G) = 2$ y sea c una coloración de G con dos colores: 1 y 2. Es obvio que G tiene al menos una arista. Sean V_1 y V_2

¹Un grafo con n vértices pero ninguna arista se llama grafo nulo (N_n) [15].

los conjuntos formados por todos los vértices de G coloreados en c por los colores 1 y 2 respectivamente. Entonces V_1 y V_2 son particiones disjuntas de V . Además como es una 2-coloración, los extremos de cada arista son de distinto color, luego un vértice de un extremo estará en V_1 y el otro vértice del extremo opuesto de la arista estará en V_2 . Entonces, por definición, $G = (V, E)$ es un grafo bipartito.

Por último veamos que si tenemos un grafo $G = (V, E)$ bipartito con aristas, entonces su número cromático será 2. Enronces, siendo V su conjunto de vértices, es obvio que no se puede colorear con un solo color. Sean V_1 y V_2 dos particiones de V , asignamos el color 1 a V_1 y el color 2 a V_2 . Como no hay aristas que unan vértices de V_1 con vértices de V_1 ni vértices de V_2 con vértices de V_2 , tenemos una 2-coloración, entonces $\chi(G) = 2$. \square

Está claro que el número cromático depende en gran parte del número de aristas incidentes en cada vértice. El siguiente teorema nos ofrece una cota en base a esta observación.

Teorema 3.1.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea K su grado máximo, entonces

$$\chi(G) \leq K + 1. \quad (3.1)$$

Demostración. Veamos primero que el número cromático de dicho grafo es menor que $K + 1$ y después que puede ser exactamente $K + 1$.

Sabemos que en el conjunto de vértices V , cada uno de ellos tiene como mucho K vértices adyacentes. Por el Algoritmo Greedy, visto antes, en la coloración, no se utilizan más de $K + 1$ colores: si llamamos v al vértice cuyo grado es K y asignamos un color distinto a cada vértice adyacente a v ya hemos usado entonces K colores, pero faltaría asignar un color diferente a los ya coloreados a dicho vértice v , por tanto hemos usado como mucho $K + 1$ colores, y por tanto obtenemos que

$$\chi(G) < K + 1.$$

Ahora, veamos que $\chi(G)$ también puede ser exactamente $K + 1$.

Sea $n =$ número de vértices. Existen dos casos:

Caso 1: Si $n = 1$. Entonces $K = 0$ y por lo tanto se colorea con un único color, con lo que obtenemos

$$\chi(G) = 1 = K + 1$$

y el resultado es cierto.

Caso 2: Si $n > 1$. Por inducción sobre el número de vértices, supongamos el resultado cierto para n vértices (hipótesis de inducción), veamos que ocurre para $n + 1$.

Sea G un grafo con $n + 1$ vértices y v un vértice de G , y sea el grafo G' el grafo resultante de eliminar v de G , es decir $G' = G/\{v\}$. Y tiene, por lo tanto, n vértices.

Sabemos que todo vértice de G' tiene grado menor o igual que cualquier vértice de G . Por lo tanto $K(G') \leq K(G)$.

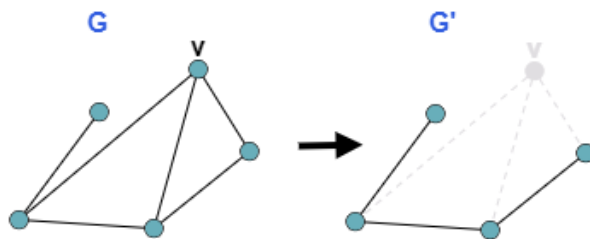


Figura 3.6: G y G' .

Ahora, por hipótesis de inducción, sabemos que existe una coloración (que llamaremos C_1) de G' con $K + 1$ colores como mucho, es decir, que $\chi(G') \leq K + 1$.

A partir de esta coloración C_1 podemos obtener otra C_2 para el grafo G añadiendo otro color distinto al vértice v . Como el grado de v es $g(v) \leq K$, tiene como mucho K vértices adyacentes, luego C_1 tiene como mucho K colores que no podemos usar para colorear v . Basta con asignar a v un color que no sea ninguno de los de C_1 con lo que obtendríamos $K + 1$ colores para el grafo G con $n + 1$ vértices. \square

El trabajo ha comenzado con una pregunta relacionada con la coloración de mapas. Y aunque se ha llegado a la conclusión de que con 4 colores bastan, antes de alcanzar demostración de dicho teorema, distintos autores intentaron formular la demostración sin éxito hasta años más tarde. Aún así, gracias a los errores que tuvieron por el camino se pudieron demostrar los teoremas de los 6 y de los 5 colores, los cuales se explican y demuestran a continuación.

Teorema 3.1.2 (Teorema de los Seis Colores). Cualquier mapa cuyas regiones sean continuas y adyacentes puede ser coloreado con 6 o menos colores.

Demostración. En primer lugar, veamos un ejemplo concreto. Supongamos que tenemos un grafo G con 6 vértices. Es obvio que dicho grafo es 6-coloreable, puesto que como mucho podremos usar 6 colores distintos para colorearlo (un color para cada vértice).

Ahora supongamos otro grafo con 7 vértices. Sabemos por el Teorema 2.2.4 que existe un vértice v cuyo grado es $g(v) \leq 5$. Imaginemos que suprimimos temporalmente el vértice v así como las aristas adyacentes a este, obtenemos

entonces un grafo con 6 vértices, que sabemos que es 6-coloreable. Añadimos ahora el vértice y las aristas previamente retiradas, e intentamos colorear el vértice v . Como sabemos que su grado es como mucho 5, sabemos también que como mucho tendrá 5 colores en los vértices adyacentes y que no podemos utilizar para colorear dicho vértice, pero en este caso, tenemos aún un color restante (de los 6 posibles y que ya hemos utilizado en el grafo 6-coloreable), bastaría entonces adjudicar dicho color al vértice v obteniendo así una 6-coloración para el grafo con 7 vértices.

Veámoslo ahora de una forma más general por inducción sobre el número de vértices n . Supongamos un grafo G con n vértices que es 6-coloreable (hipótesis de inducción). Veamos si también lo es un grafo G' con $n + 1$ vértices siguiendo el razonamiento anterior.

En efecto, por el Teorema 2.2.4 sabemos que existe un vértice $v \in V'$ en el grafo G' tal que $g(v) \leq 5$. Eliminemos dicho vértice así como sus aristas adyacentes. Sabemos por hipótesis de inducción que el grafo resultante es 6-coloreable, puesto que tiene n vértices.

Añadimos nuevamente el vértice y las aristas eliminadas, y solamente faltaría colorear el vértice v , y al igual que anteriormente, como tendrá como máximo 5 vértices adyacentes y por lo tanto como máximo 5 colores en dichos vértices, nos queda aún el 6º color sin utilizar, el cual le asignamos al vértice v consiguiendo una 6-coloración en el grafo con $n + 1$ vértices, probando así el teorema.

□

Teorema 3.1.3 (Teorema de los Cinco Colores). Cualquier mapa con regiones continuas adyacentes puede ser coloreado usando no más de 5 colores. Además todo grafo plano es 5-coloreable.

Demostración. Veámoslo por inducción sobre el número de vértices n .

Primeramente, es obvio que si G tiene como máximo 5 vértices, es decir $n \leq 5$, entonces es 5-coloreable. Supongamos ahora un grafo plano con $n - 1$ vértices que es 5-coloreable (hipótesis de inducción). Entonces, ¿lo será también uno con n vértices?

Sea G un grafo planar de n vértices con $n \geq 6$.

Sabemos por el Teorema 2.2.4 que existe un vértice $v \in G$ con $g(v) \leq 5$. Sea entonces H el grafo resultante de quitar dicho vértice v al grafo G , es decir $H = G \setminus \{v\}$. Por hipótesis de inducción H es 5-coloreable.

Ahora solo falta asignar un color de entre los 5 ya utilizados a v para comprobar que G también sea 5-coloreable. Sea c una coloración de H con 5 colores. Veamos que ocurre con el vértice v . Como su grado es $g(v) \leq 5$ existen dos casos:

Caso 1: El grado es estrictamente menor que 5 en la coloración c . En este

caso se usan a lo sumo 4 colores para pintar los vértices vecinos de v en H . Para colorear G entonces, valdría con asignarle un nuevo color al vértice v , obteniendo así una 5-coloración en G .

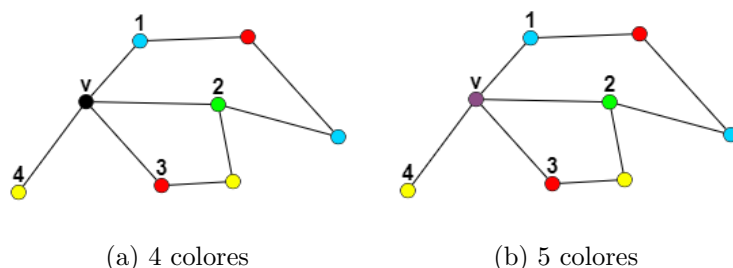


Figura 3.7: Ejemplo grafo G con $g(v) < 5$.

Caso 2: El grado de v es exactamente cinco. Veámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que G no admite 5-coloración. Sean v_1, \dots, v_5 los vértices adyacentes a v ordenados en el sentido de las agujas del reloj de tal forma que el color de v_i es $i \forall i = 1, \dots, 5$ en la coloración c .

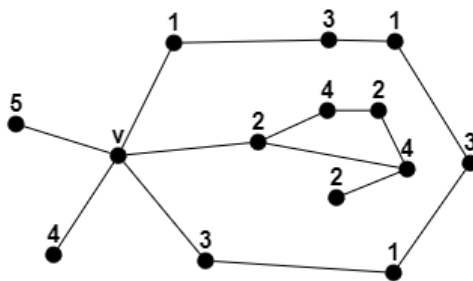


Figura 3.8: Grafo G con $g(v) = 5$.

Estos vértices tienen colores distintos, porque si los 5 vértices se colorearan con solo 4 colores, podríamos dar una 5-coloración tal y como se ha explicado en el caso 1.

Llamamos ahora H_{ij}^c el subgrafo de H formado por los vértices coloreados con el color i y color j en la coloración c . Supongamos colores concretos, por ejemplo $i = 1, j = 3$.

Ahora sea P_{ij} un camino del subgrafo H_{ij}^c desde v_i hacia v_j . Consideramos el círculo completo C con $P_{1,3}$ a través de v . Este círculo separa v_2 de v_4 tal y como se observa en la Figura 3.9.

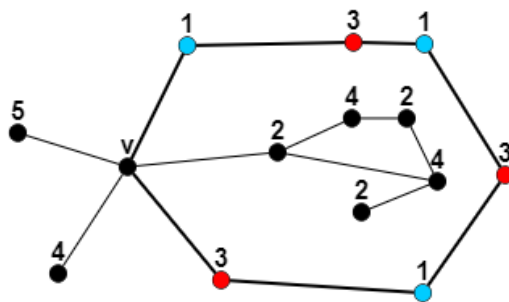


Figura 3.9: Circulo C con $P_{1,3}$ a través de v .

Pero por el Teorema de la curva de Jordan ², el camino $P_{2,4}$ debe cruzar el círculo C . Ahora, como el grafo G es planar, los caminos deben pasar solo por vértices compartidos (puesto que si se cruzaran aristas ya no sería planar). Los vértices de $P_{1,3}$ solo tienen colores 1 y 3, y los vértices de $P_{2,4}$ solo tienen colores 2 y 4. Luego los caminos $P_{1,3}$ y $P_{2,4}$ no tienen colores (ni vértices) en común, los caminos no se pueden cruzar, luego hemos llegado a una contradicción y por tanto G es 5-coloreable.

□

Teorema 3.1.4 (Teorema de los Cuatro colores). Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas (grafo planar), este puede ser coloreado con 4 colores.

La demostración de este teorema, tal y como se ha explicado al inicio del texto, hasta ahora solamente ha sido probada mediante un ordenador, por ello no se expone en este trabajo, pero puede consultarse en [17].

²Teorema de la curva de Jordan: Sea C una curva cerrada y simple en el plano euclídeo, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ no es conexo y consta exactamente de dos componentes conexas que tienen a C como frontera común [16].

4

Polinomio cromático

No solo es interesante saber cuantos colores son suficientes para conseguir una coloración adecuada, también lo es saber de cuántas maneras es posible realizar dicha coloración, en este capítulo se habla sobre conceptos relacionados con esta idea. La teoría descrita a continuación ha sido obtenida de distintas fuentes bibliográficas como: [10], [1], [18] y [19].

El concepto principal del capítulo se denomina polinomio cromático, el cuál indicará la cantidad de maneras de colorear un grafo.

Definición 4.0.1. Si $G = (V, E)$ es un grafo simple, el **polinomio cromático** $P_G(k)$ es una función que para cada $0 \leq k \leq n$ cumple que $P_G(k)$ es el número de k -coloraciones de G .

Proposición 4.0.1. El polinomio cromático definido es un polinomio en k de grado n .

Demostración. Sean k y $r \in \mathbb{Z}^+$ con $k \geq r$. Supongamos que tenemos k colores disponibles para pintar el grafo $G = (V, E)$ y tenemos una partición de los V vértices en r conjuntos (los distintos colores que utilizaremos para colorear), llamaremos $P_r(G)$ al número de estas posibles particiones de los vértices en r clases.

Ahora si tenemos k colores disponibles para colorear G entonces hay $k_{(r)} = k \times (k - 1) \dots \times (k - r + 1)$ formas de elegir el color que asignamos a cada una de las r clases.

Pongamos un ejemplo para entenderlo mejor: En la Figura 4.1 observamos un grafo G , y disponemos de una paleta de 6 colores representada con cuadrados. En este caso se ha hecho una partición con $r = 3$ colores escogidos entre los 6 disponibles. Para la clase r_1 tenemos disponibles los 6 colores, es decir k colores (hemos escogido el rojo), continuamos con la clase r_2 donde disponemos de 5 colores puesto ya no podemos contar con el rojo, es decir, $k - 1$ colores. Por último, para la clase r_3 al igual que antes, no podemos disponer ni del rojo ni del verde, luego solamente nos quedan 4 colores, que corresponden a $k - 2$. De esta forma para una partición de $r = 3$ tenemos $k_{(r)} = k \times (k - 1) \times (k - 2) = (k - 1) \times \dots \times (k - r + 1)$ formas de asignar color.

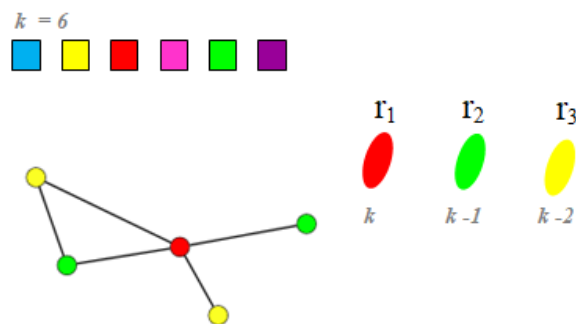


Figura 4.1: Ejemplo de una partición.

Como G tiene n vértices, existirá una partición V en exactamente n conjuntos independientes, es decir, $r = n$ (un conjunto por cada vértice) y no existirá ninguna partición con más de n conjuntos, luego su grado máximo será n .

Ahora, como cada coloración de $k_{(r)}$ es diferente, y además cada una de ellas puede describirse en términos de sus clases de color, el número de maneras de colorear G con k colores es:

$P_G(k) = \sum_{r=1}^n k \times (k - 1) \dots \times (k - r + 1) \times P_r(G)$ que es claramente un polinomio en k de grado n . \square

Para la construcción de algunos polinomios cromáticos necesitaremos dos operaciones utilizadas en Teoría de Grafos. Una de ellas es el **borrado de una arista** de un grafo dado: sea grafo $G = (V, E)$ y sea una arista $a \in E$, denotamos como $G \setminus a$ al grafo resultante al eliminar la arista a de G .

Otra de las operaciones es la **contracción de la arista**, en este caso denotaremos G/a al grafo que resulta al eliminar la arista a e identificar sus antiguos extremos como uno solo tal y como se indica en la siguiente figura.

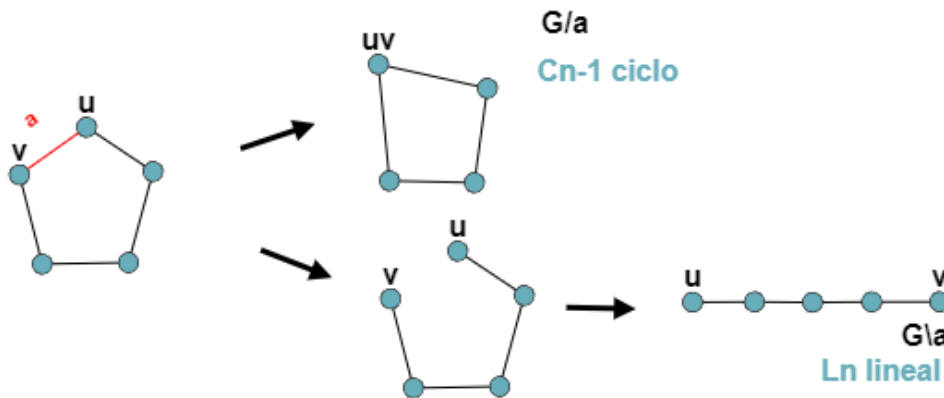


Figura 4.2: Contracción y Borrado.

Una vez explicadas estas operaciones podemos redactar el siguiente teorema que nos da una fórmula relacionada con el polinomio cromático.

Teorema 4.0.1 (Borrado-Contracción). Sea $G = (V, E)$ un grafo, y sea $a \in E$ una arista de este. Sea $G \setminus a$ el grafo resultante al eliminar la arista a de G y G/a el grafo que resulta al contraer la arista a de la manera previamente mencionada.

De esta manera y con k colores disponibles, el polinomio cromático de G es

$$P_G(k) = P_{G \setminus a}(k) - P_{G/a}(k). \quad (4.1)$$

Demostración. Si tenemos una k -coloración en G , entonces tenemos una coloración en $G \setminus a$. Y si es k -coloración en $G \setminus a$, entonces es coloración en G si y solo si u y v tienen colores distintos.

De esta forma, podemos contar las coloraciones de G quitando a las coloraciones de $G \setminus a$ aquellas que tienen u y v del mismo color. Estas coloraciones son exactamente las k -coloraciones de G/a al contraer u y v en un mismo vértice, por lo tanto $P_G(k) = P_{G \setminus a}(k) - P_{G/a}(k)$. \square

4.1. Propiedades de los polinomios cromáticos

A continuación se explican algunas de las propiedades principales del polinomio cromático.

Sabemos que las coloraciones de un grafo que tiene diferentes componentes conexas, se realizan de manera independiente puesto que no hay aristas que unan distintas componentes conexas. Si conocemos el polinomio cromático de cada

componente conexa de un grafo, podremos saber el polinomio cromático del grafo tal y como se explica en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, ..., $G_r = (V_r, E_r)$ sus componentes conexas y k los colores disponibles entonces:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_r \Rightarrow P_G(k) = \prod_{i=1}^r P_{G_i}(k). \quad (4.2)$$

Demostración. Por definición, no existe ninguna arista que una las diferentes componentes conexas, luego cada coloración es independiente del resto, de forma que se obtiene el resultado. \square

Veamos otra proposición que nos permitirá calcular el polinomio cromático de grafos con algunas características específicas.

Proposición 4.1.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $H_1 = (V_1, E_1)$, $H_2 = (V_2, E_2)$ subgrafos tales que sus vértices $V_1 \cup V_2 = V$ y que $V_1 \cap V_2 = \{v\}$ con $v \in V$. Si además sus aristas cumplen que $E_1 \cup E_2 = E$, y siendo k los colores disponibles para la coloración entonces:

$$P_G(k) = \frac{P_{H_1}(k) \times P_{H_2}(k)}{k}. \quad (4.3)$$

Demostración. Dada una coloración propia de H_1 , tenemos que asignar colores a los vértices de H_2 que no esten en V_1 . Como sabemos que $V_1 \cap V_2 = \{v\}$, tendremos que colorear todos los vértices de H_2 excepto dicho vértice v . Dejando fijo el color de v , eliminamos todas las variantes de asignación sobre este vértice. Obtenemos que el número de coloraciones posibles sobre H_2 para cada coloración en H_1 es $\frac{P_{H_2}(k)}{k}$, entonces:

$$P_G(k) = P_{H_1}(k) \times \frac{P_{H_2}(k)}{k} = \frac{P_{H_1}(k) \times P_{H_2}(k)}{k}. \quad (4.4)$$

\square

A continuación, se presenta otro resultado que nos va a permitir calcular el polinomio cromático de un grafo dividiéndolo en dos subgrafos cuya intersección sea un grafo completo.

Proposición 4.1.3. Sean $G = (V, E)$ un grafo y sean $H_1 = (V_1, E_1)$, $H_2 = (V_2, E_2)$ subgrafos tales que sus vértices $V_1 \cup V_2 = V$ y que la intersección de los subgrafos es un grafo completo de orden m , es decir, $H_1 \cap H_2 = K_m$, entonces

$$P_G(k) = \frac{P_{H_1}(k) \times P_{H_2}(k)}{P_{K_m}(k)}. \quad (4.5)$$

Demostración. Para cada coloración de H_1 , nos faltan colorear los vértices de H_2 que no hayamos coloreado ya. Como $H_1 \cap H_2 = K_m$ tenemos m vértices coloreados. Eliminando las posibilidades que existen sobre estos vértices, tenemos que para cada coloración de H_1 hay $\frac{P_{H_2}(k)}{k(k-1)\dots(k-(m-1))}$ maneras de colorear H_2 , entonces

$$P_G(k) = P_{H_1}(k) \times \frac{P_{H_2}(k)}{k(k-1)\dots(k-(m-1))} = \frac{P_{H_1}(k) \times P_{H_2}(k)}{k(k-1)\dots(k-(m-1))}.$$

□

4.2. Polinomios cromáticos de familias de grafos

A continuación se exponen los polinomios cromáticos para algunos de los grafos más comunes y los cuales se han explicado en la Sección 2.1.2 para n vértices y k colores disponibles.

1. **Grafo lineal:** $P_{L_n}(k) = k \times (k-1)^{(n-1)}$

Sea el grafo lineal $L_n = (V, E)$ con $V = v_1, v_2, \dots, v_n$.

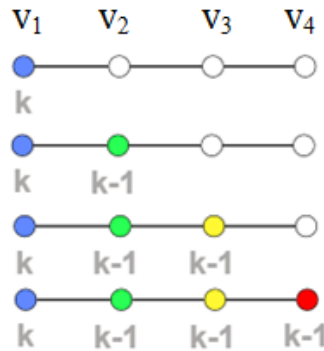


Figura 4.3: Coloración grafo lineal.

Empezamos a colorear por v_1 y tenemos k colores disponibles para dicho vértice. Seguimos con el vértice adyacente v_2 , y tenemos disponibles todos los colores menos el que se haya usado en el vértice anterior, luego hay disponibles $k-1$ colores. Continuamos con v_3 , que no puede tener el mismo color que v_2 pero sí que v_1 , por lo tanto tenemos disponibles $k-1$ colores. Así continuamos sucesivamente hasta llegar a v_n . Entonces todos los vértices excepto por el que comenzamos ($n-1$ vértices) se pueden colorear con $k-1$ colores, y el primero con k colores. $\Rightarrow k \times (k-1)^{(n-1)}$.

2. **Grafo completo:** $P_{K_n}(k) = k \times (k-1) \times \dots \times (k-n+1) = \binom{n}{k} n!$

Primero veamos un ejemplo concreto para $n = 3 \Rightarrow K_3$. Tenemos k colores disponibles.

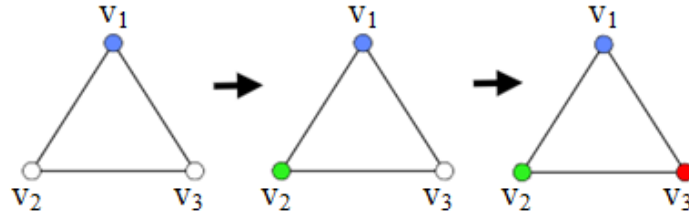


Figura 4.4: Coloración K_3 .

Si comenzamos coloreando el vértice v_1 disponemos de k colores. Seguimos coloreando v_2 y disponemos de $k - 1$ colores puesto que v_1 y v_2 son adyacentes. Finalizamos con v_3 , para el que solamente disponemos de $k - 2$ colores, puesto que por adyacencia no puede ser ni del color del vértice v_1 , ni del color de v_2 . Luego obtenemos que $P_{K_3}(k) = k \times (k - 1) \times (k - 2)$.

Notemos que si $k = 1$ ó $k = 2$, entonces $P_{K_3}(k) = 0 \Rightarrow k \geq n$.

Ahora veamos la expresión general por inducción sobre n :

Supongamos que la expresión es cierta para $n - 1$ vértices (hipótesis de inducción), entonces tenemos que

$$P_{K_{n-1}}(k) = k \times (k - 1) \times \dots \times (k - (n - 1) - 1).$$

Definimos $K_n = K_{n-1} + v$ con $v \notin V(K_{n-1})$. Por hipótesis de inducción si ya tenemos coloreado K_{n-1} solamente faltaría colorear el vértice v , al que se le pueden asignar $k - (n - 1)$ colores. Luego a las posibles coloraciones de K_{n-1} , que ya las sabemos por nuestra hipótesis ($P_{K_{n-1}}$), solo hay que añadirle las posibles coloraciones del vértice añadido v , que hemos dicho que son $k - (n - 1)$. Luego

$$\begin{aligned} P_{K_n}(k) &= P_{K_{n-1}} \times k - (n - 1) \\ &= k \times (k - 1) \times \dots \times (k - (n - 1) - 1) \times k - (n - 1). \end{aligned}$$

Notemos que también podemos expresar las posibilidades de coloración como $\binom{n}{k}n!$, que son las diferentes formas de elegir n colores (para los n vértices) entre los k colores totales disponibles, y multiplicado por $n!$ que

son las distintas maneras de asignar los k colores a los n vértices.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} n! &= \frac{k!}{n!(k-n)!} n! = \frac{k!}{(k-n)!} = \frac{k(k-1)\cdots 1}{(k-n)(k-(n-1))\cdots 1} \\ &= \frac{k(k-1)\cdots 1}{(k-n)(k-n+1)\cdots 1} = k(k-1)\cdots(k-n+1). \end{aligned}$$

3. **Árboles:** T con n vértices. $P_{T_n}(k) = k \times (k-1)^n$.

Veámoslo por Inducción sobre el número de vértices n . Supongamos que es cierto para $n-1$ vértices (hipótesis de inducción), luego

$$P_{T_{n-1}}(k) = k(k-1)^{(n-1)-1} = k(k-1)^{n-2}.$$

Definimos $T_{n-1} = T_n \setminus \{v\}$ donde $v \in V(T_n)$ es un vértice hoja, el cual se puede colorear con $k-1$ colores como hemos visto en el razonamiento anterior del polinomio cromático del grafo lineal.

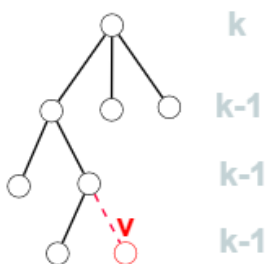


Figura 4.5: Coloración Grafo Árbol.

Por hipótesis de inducción ya tenemos las distintas coloraciones de T_{n-1} , luego solo nos hace falta añadir las distintas coloraciones del vértice v para obtener las de T_n , lo que resulta:

$$P_{T_n} = k(k-1)^{n-2} \times (k-1) = k(k-1)^{n-2+1} = k(k-1)^{n-1}.$$

4. **Grafo ciclo:** $P_{C_n} = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

Veamos primero que ocurre con un ciclo de 4 vértices C_4 : si tenemos k colores disponibles, comenzamos a colorear v_1 para el cual tenemos los k colores aún disponibles. Seguimos coloreando, ahora el v_2 para el cual tenemos $(k-1)$ colores disponibles puesto que es adyacente a v_1 y no puede ser del mismo color. Continuamos ahora con v_3 , pero tenemos dos opciones como se muestra en la siguiente figura:

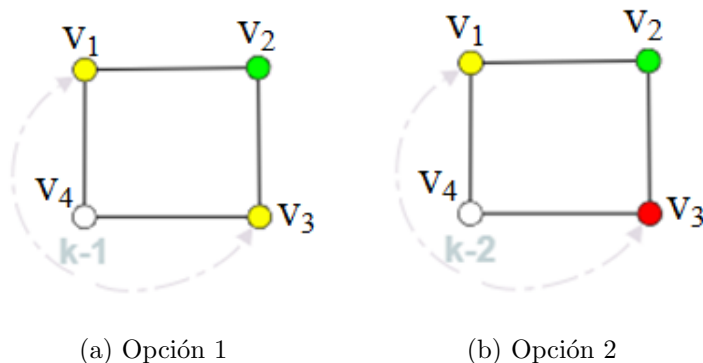


Figura 4.6: Coloración Ciclo c_4 .

1. v_3 es del mismo color que v_1 : en este caso, por adyacencia, nos quedan disponibles $k - 1$ colores para v_4 puesto que el único color que no se puede usar es el color usado para v_1 y v_3 , por tanto $k(k - 1)^2$.

2. v_3 es de distinto color que v_1 : v_3 no es del mismo color que v_1 y no puede ser del mismo color que v_2 por adyacencia, luego tenemos $k - 2$ colores para v_3 . Para v_4 no podemos utilizar ni el color de v_1 ni el de v_3 , luego tenemos $k - 2$ posibilidades, por tanto $k(k - 1)(k - 2)^2$.

Como se puede observar en el razonamiento anterior y por el principio de adyacencia, tenemos que $P_{C_4} = k(k - 1)^2 + k(k - 1)(k - 2)^2$. Pero ¿para el resto de C_n ? En este caso no podemos obtener una expresión general para el polinomio cromático como hemos hecho en los razonamientos anteriores analizando las posibilidades de color para cada vértice.

Lo haremos utilizando el teorema de Borrado-contracción (Teorema 4.0.1) y por inducción sobre el número de vértices n :

Supongamos que es cierto para $n - 1$ (hipótesis de inducción), tenemos

$$P_{C_{n-1}}(k) = (k - 1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k - 1).$$

¿Será cierto entonces para n vértices?

Sea $a \in E(C_n)$ y por el Teorema 4.0.1 tenemos que

$$P_{C_n}(k) = P_{C_{n \setminus a}}(k) - P_{C_{n/a}}(k) = P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k).$$

Aplicando ahora nuestra hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k) &= k(k - 1)^n - (k - 1) - (k - 1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(k - 1) \\ &= k(k - 1)^n - (k - 1)^{n-1} + (-1)^n(k - 1) \\ &= (k - 1)^{n-1}(k - 1) + (-1)^n(k - 1) = \\ &= (k - 1)^n(-1)^n(k - 1). \end{aligned}$$

Obteniendo de esta forma una expresión general para calcular el polinomio cromático.

5

Conclusiones, aplicaciones y trabajos futuros

A lo largo de los capítulos anteriores hemos podido introducirnos en el mundo de la Teoría de Grafos conociendo algunas nociones básicas sobre estos. Una vez comprendido estos conceptos y propiedades podríamos preguntarnos para qué sirven estos conocimientos matemáticos.

Aunque parezca difícil de creer, la Teoría de Grafos está más presente en diferentes ámbitos de nuestra vida de lo que creemos. Actualmente la Teoría de Grafos permite resolver diversos problemas en diferentes áreas de la ciencia y la tecnología. A continuación vamos a describir algunas aplicaciones prácticas en las que aparece la Teoría de Grafos y así acercar a la realidad la teoría descrita en el trabajo.

Si pensamos en grafos en general podemos hablar de muchas aplicaciones en la vida real: Existe un famoso problema llamado “El problema del cartero Chino” que surge por el matemático chino Meigu Guan en 1962 [20]. El problema es simple: consiste en averiguar la ruta ideal de un cartero para realizar bien su trabajo, dicha ruta será aquella que implique no repetir ninguna calle, y si esto es imposible, buscar la manera de repetir el menor número de calles posibles. ¿Nos recuerda a algún concepto visto previamente? Podría recordarnos al problema de los puentes de Königsberg en efecto. Este problema tan concreto podría extrapolarse a empresas de reparto y distribución de productos y minimización de recorridos y tiempos empleados en estas, entre otros.

En la mayor parte de aplicaciones reales, los grafos no solo son líneas y nodos,

normalmente estas poseen valores asociados a costes, distancias etc. de manera que el problema se vuelve un poco más completo y ya no solo buscamos la manera más rápida de realizar un recorrido sino también se busca minimizar costes, tiempo o kilometraje. Pensemos en unas vacaciones organizadas por nosotros mismos, hay veces que nos interesará realizar desplazamientos en el menor tiempo posible y otras buscar el mínimo coste, aunque sean más largos los tiempos de viaje.

Este último ejemplo forma parte de muchas aplicaciones relacionadas con la planificación y la optimización llevadas a cabo mediante grafos y que muchas empresas y países ponen en práctica. Una aplicación que surge a partir de la Segunda Guerra Mundial y motivada por los estadounidenses tanto a nivel civil, como militar, son las técnicas de planificación basadas en el camino crítico “CPM” por sus siglas en inglés (Critical Path Method) y en el método PERT (Program Evaluation and Review Technique) [21]. Ambas son técnicas de gestión, planificación y programación de proyectos complejos basados en redes que muestran la secuencia y el flujo de las distintas actividades y eventos conectándolos entre sí.

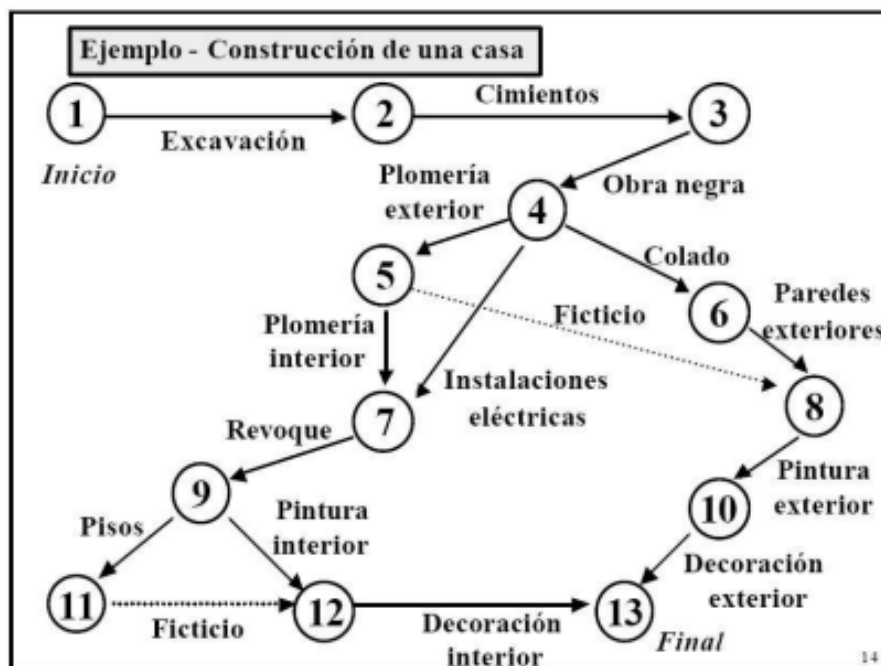


Figura 5.1: Ejemplo de aplicación de un diagrama PERT en la construcción.

Fuente: “Teoría de Grafos” [2]

Hoy en día las redes sociales tienen un papel fundamental en el flujo de información y conocimiento ([22]). No hablamos de las redes sociales como Twitter o Instagram, que también, sino en conexiones entre sujetos o instituciones conectadas entre sí. La Teoría de Grafos tiene un papel fundamental en el análisis de las estructuras y el cálculo de las interacciones e intercambio de información entre los miembros de las redes sociales.

Un tema a la orden del día y que a todos nos sonará es el COVID19, la Teoría de Grafos también puede aplicarse en el campo de la epidemiología, en este caso los nodos se denominan huéspedes y las aristas contactos ([23]). Usando las herramientas de esta teoría se pueden identificar y estudiar cercanía de huéspedes, portadores etc. para poder modelar la expansión del contagio y de esta forma poder implementar políticas de control.

Si nos centramos en la coloreabilidad, multitud de aplicaciones en el campo de las matemáticas o en muchos otros pueden ser beneficiosos.

Una aplicación muy práctica podría ser en el diseño y gestión de horarios, ya sea en un centro educativo o a la hora de planificar una conferencia ([24]). Este problema se puede modelizar utilizando grafos donde los vértices podrían ser, por ejemplo, las distintas charlas que se darán durante la conferencia, y las aristas representarían la asistencia de las personas a las distintas charlas, de manera que el objetivo es encontrar una coloración de dichos vértices con el menor número de colores posible, donde cada color representa una hora disponible.

Otra aplicación puede ser a la hora de llevar una metodología basada en la gamificación en la didáctica de las matemáticas. Un ejemplo de ello puede ser con el famoso juego Sudoku: si asociamos un vértice a cada casilla y asociamos dichos vértices mediante aristas siempre y cuando estén en la misma fila, columna o región, obtenemos un grafo a partir de la cuadrícula del Sudoku clásico. La coloración del grafo entrará en juego a la hora de colocar los números, de forma que asignamos un color a cada cifra distinta. Esta es una de tantas formas de introducir las matemáticas como algo divertido, lúdico y entretenido tal y como se plantea en el artículo “Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos: una experiencia.” ([25]).

Una vertiente interesante planteada como nueva línea de investigación podría ser el estudio de la relación entre la coloreabilidad de grafos y los sistemas de ecuaciones polinómicas ([26]). De esta forma podría explorarse si hay distintas formas de expresar el problema de coloreado utilizando sistemas de ecuaciones. Esta idea está muy relacionada con las bases de Gröbner, ya que una de las aplicaciones de esta teoría es la coloración de grafos.

Existe una rama de la informática y las matemáticas que estudia la dificultad de los problemas que se pueden resolver mediante computación. Esta complejidad se mide en función de ciertos recursos como el tiempo, memoria etc. Según la complejidad del problema, este se clasifica en P, NP, NP-completo o NP-difícil ([27]). El problema de la coloración de grafos es un problema de la clase de complejidad NP-completo porque aunque si se puede verificar si una coloración es válida o no en un tiempo polinómico, no se conoce un algoritmo polinómico para encontrar una coloración óptima. Por ello sigue siendo un desafío el desarrollo de una solución para crear algoritmos eficaces y eficientes para resolver esta cuestión ([28]).

En este Trabajo de Fin de Grado se ha estudiado el problema de la coloreabilidad en Teoría de Grafos, se ha revisado algunos conceptos básicos de la teoría de grafos, así como algunos resultados clásicos y actuales sobre la coloración de estos. Con este trabajo se ha ofrecido una visión general del problema de la coloreabilidad para de esta forma intentar despertar el interés por este fascinante y amplio mundo de los grafos.

Como hemos visto con algunos ejemplos, la aplicación de esta teoría es muy amplia, la continuidad en el estudio e investigación es esencial para la mejora y ampliación de las aplicaciones en diferentes situaciones cotidianas. Una posible extensión del trabajo podría ser la implementación de código en algún lenguaje de programación para resolver ciertas cuestiones planteadas como por ejemplo el problema de la gestión de horarios mediante coloración de grafos. Hemos hablado de coloración de grafos, pero centrándonos únicamente en colorear los vértices, otra posible ampliación a partir de la teoría comentada podría ser el profundizar en el coloreado de aristas.

Bibliografía

- [1] J. E. Vargas Magán, “Polinomio cromático. introducción a la coloración robusta,” (*Trabajo Fin de Máster*) *Universidad de Sevilla*, 2020.
- [2] M. F. Alvarez Nuñez, “Teoría de grafos,” *Universidad del Bío-Bío, Chile*, 2013.
- [3] A. Menéndez Velázquez *et al.*, “Una breve introducción a la teoría de grafos,” *Suma*, 1998.
- [4] M. M. Stadler, “Mapas, colores y números,” 2006.
- [5] T. Crilly, “Arthur cayley frs and the four-colour map problem,” *Notes and Records of the Royal Society*, vol. 59, no. 3, pp. 285–304, 2005.
- [6] A. B. Kempe, “On the geographical problem of the four colours,” *American journal of mathematics*, vol. 2, no. 3, pp. 193–200, 1879.
- [7] P. J. Heawood, “Map-Colour Theorem,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2-51, no. 1, pp. 161–175, 01 1949. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1112/plms/s2-51.3.161>
- [8] K. Appel, W. Haken, and J. Koch, “Every planar map is four colorable. part ii: Reducibility,” *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 21, no. 3, pp. 491–567, 1977.
- [9] V. Voloshin, “Graph coloring: History, results and open problems,” *Alabama Journal of Mathematics, Spring/Fall*, 2009.
- [10] M. R. Murga Díaz *et al.*, “Coloración en grafos,” 2013.
- [11] D. B. West *et al.*, *Introduction to graph theory*. Prentice hall Upper Saddle River, 2001, vol. 2.
- [12] P. Formanowicz and K. Tanaś, “A survey of graph coloring-its types, methods and applications,” *Foundations of Computing and Decision Sciences*, vol. 37, no. 3, pp. 223–238, 2012.
- [13] J. D. Chaves Sanguino *et al.*, “Metateoremas sobre grafos: el teorema de courcelle,” 2020.
- [14] “Graph theory, part2,” *Princeton University*.
- [15] G. Combariza, “Una introducción a la teoría de grafos,” *Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá*, 2003.
- [16] F. G. Arenas and M. L. Puertas, “El teorema de la curva de Jordan,” *Divulgaciones Matemáticas*, vol. 6, no. 1, pp. 43–60, 1998.
- [17] K. Appel and W. Haken, “Every planar map is four colorable,” *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 82, no. 5, pp. 711–712, 1976.
- [18] C. A. García Trillos *et al.*, “Propiedades de coloración en grafos de Kneser,” *Uniandes*, 2004.

-
- [19] R. C. Read, “An introduction to chromatic polynomials,” *Journal of combinatorial theory*, vol. 4, no. 1, pp. 52–71, 1968.
- [20] K. Mei-Ko, “Graphic programming using odd or even points,” *Chinese Math*, vol. 1, pp. 237–277, 1962.
- [21] S. P. Fernández, “PERT y CPM: Programación y control de proyectos,” *Cuadernos de estudios empresariales*, no. 5, pp. 271–292, 1995.
- [22] N. M. Díaz, “Redes sociales y gestión de la información: un enfoque desde la teoría de grafos,” *Ciencias de la Información*, vol. 43, no. 1, pp. 29–37, 2012.
- [23] C. N. Bouza, S. M. Allende, and N. E. Ponce, “El muestreo de grafos en la modelación de epidemias: El COVID 19,” *Desarrollo de nuevos modelos y métodos matemáticos para la toma de decisiones Tomo*, p. 9.
- [24] M. A. Al-Betar and A. T. Khader, “A harmony search algorithm for university course timetabling,” *Annals of Operations Research*, vol. 194, p. 3–31, 2012.
- [25] J. Martín Morales, J. M. Muñoz Escolano, A. M. Oller Marcén *et al.*, “Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos: una experiencia,” *Contextos educativos: revista de educación*, 2009.
- [26] D. Mondurrey Ortín, J. I. Cogolludo Agustín, and J. Martín Morales, “Bases de Groebner y aplicaciones en teoría de grafos,” *Universidad de Zaragoza*, 2019.
- [27] G. H. Peñalver, “Complejidad y grafos.”
- [28] R. Pérez Gómez *et al.*, “Una propuesta algorítmica para aproximar el coloreo de grafos,” B.S. thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

