# Matema´ticas I Ejercicios resueltos

Grado en Ingenier´ıa Ambiental

Marta Latorre Balado y Javier Mart´ınez Mart´ınez Material docente en abierto de la Universidad Rey Juan Carlos

BURJ Digital https://burjcdigital.urjc.es/

6 de septiembre de 2023

©2023 Marta Latorre Balado y Javier Mart´ınez Mart´ınez Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Atribucio´n-CompartirIgual 4.0 Internacional” de Creative Commons, disponible en

https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es



´Indice

1. [Matrices y sistemas de ecuaciones lineales](#_bookmark0) 5
2. [Espacios vectoriales](#_bookmark2) 7
3. [Aplicaciones lineales](#_bookmark3) 9
4. [Diagonalizacio´n](#_bookmark4) 11
5. [Espacios normados](#_bookmark5) 13
6. [Nu´meros complejos](#_bookmark6) 15
7. [L´ımites y continuidad](#_bookmark7) 17
8. [Derivacio´n de funciones](#_bookmark8) 19
9. [Integracio´n](#_bookmark9) 21

[Soluciones](#_bookmark10) 23

[Soluciones Tema 1](#_bookmark11) 25

[Soluciones Tema 2](#_bookmark12) 31

[Soluciones Tema 3](#_bookmark13) 37

[Soluciones Tema 4](#_bookmark14) 43

[Soluciones Tema 5](#_bookmark17) 49

[Soluciones Tema 6](#_bookmark18) 55

[Soluciones Tema 7](#_bookmark19) 59

[Soluciones Tema 8](#_bookmark20) 63

[Soluciones Tema 9](#_bookmark21) 69

TEMA 1. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1.1. *Comprueba que B* = ( 6 *−*7) *es la inversa de A* = (6 7)*.*

Ejercicio 1.2.

*−*5 6 5 6

*−*2 1 1

1. *Calcula, si existe, la inversa de A* = 0 1 1 *.*

 

0 *−*1 1

1. *Utilizando la informacio´n obtenida en el apartado anterior, halla la solucio´n de*

 *−*

2*x* + *y* + *z* = 2,

*y* + *z* = 1,

 *−y* + *z* = 2.

Ejercicio 1.3. *Utilizando el me´todo de Gauss, determina si el sistema*

****

****

*x y* + *t* + 2*w* = 1, 2*x* 2*y* + *z* + 3*t* + 4*w* = 0,

*z* + *t* + *w* = 3,

*−*

*− −*

*x − y* + *z* + 2*t* + 3*w* = 2,

*tiene una, infinitas o ninguna solucio´n. Halla la solucio´n en caso de que exista.*

Ejercicio 1.4. *Utiliza el me´todo de Gauss-Jordan para hallar la solucio´n de AX* = *B siendo*

*A* = 2 *−*2 0

1 *−*1 3

*x* 4

, *X* = *y*  *y B* = *−*1 .

( )

*z*

 

( )

1 0 2 3

Ejercicio 1.5. *Calcula, utilizando el desarrollo por adjuntos, el determinante de* 0 0 *−*1 3 *.*

*A* =  

1 2 0 1

*¿Es*

*A invertible?*

1 *−*1 1 2

Ejercicio 1.6. *Utiliza el me´todo de Gauss para determinar, en funcio´n del para´metro β ∈* R*, si el sistema*



*x* + *βy* + 2*z* = 1, *x* + 2*y* 3*z* + *βt* = 0, *x* + *βy* + 2*z* + *βt* = *β*,

*− −*

*es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.*

Ejercicio 1.7. *Utiliza el me´todo de Gauss para determinar, en funcio´n del valor de los para´metros α*, *β* R*, si el sistema*

*∈*

*−*



*x αy* + 2*z* = *β*,

2*x* + *y* + *βz* = 0,



2*x* + 4*z* = *β*,

*es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.*

EJERCICIOS TEMA 1 MATEMA´TICAS I

Ejercicio 1.8. *Utiliza el me´todo de Gauss para discutir y resolver el sistema*

*x*2 + 5*x*3 = *−*4,



*x*1 + 4*x*2 + 3*x*3 = *−*2,

 2*x*1 + 7*x*2 + *x*3 = *−*2.

*∗*Ejercicio 1.9. *Sean A y B matrices* 2 2 *con coeficientes reales. Se define el conmutador de A y B como la matriz*

*×*

[*A*, *B*] = *AB − BA*,

*de modo que el producto de dos matrices es conmutativo si y solo si su conmutador es cero.*

1. *Justifica que si la traza de A es cero, entonces A*2 *es un mu´ltiplo de la matriz identidad.*
2. *Prueba que el cuadrado de* [*A*, *B*] *conmuta con cualquier matriz C ∈ M*2*.*

(Pista: ¿cua´l es la traza de [*A*, *B*]?)

1. *Prueba que el conmutador de A y B no puede ser nunca un mu´ltiplo no nulo de la matriz identidad.*

*∗*Ejercicio 1.10. *Sea A ∈ M*2*. Demuestra que siempre se cumple la identidad*

*A*2 *−* tr(*A*)*A* + det(*A*)*I*2 = 0.

*Emplea la identidad anterior para demostrar que si* det(*A*) *̸*= 0*, entonces A es invertible.*

*∗*Ejercicio 1.11. *Determina los valores de a*, *b* R *para que los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sean equivalentes.*

*∈*

*x*1 + 2*x*2 + *x*3 + (*a −* 1)*x*4 = 0,

�

2*x*1 + *x*2 + *bx*3 *− x*4 = 0,

4*x*1 + 5*x*2 *− bx*3 + *x*4 = 0,

*x*1 *−* 4*x*2 + (*b −* 4)*x*3 *−* 5*x*4 = 0.

�

*∗*Ejercicio 1.12. *Demuestra que si A es una matriz* 2 *×* 1 *y B es una matriz* 1 *×* 2*, entonces la matriz AB no es invertible. Generaliza el resultado al caso en que A ∈ Mn×*1 *y B ∈ M*1*×n.*

*∗*Ejercicio 1.13. *Decimos que una matriz cuadrada A es nilpotente si verifica que An* = 0 *para algu´n n ∈* N*. Si A ∈ Mn es nilponente:*

1. *¿Cua´l es el determinante de A?*
2. *Caracteriza todas las matrices A ∈ M*2 *nilpotentes.*
3. *Demuestra que si A ∈ Mn es nilpotente, entonces A* + *In es invertible.*

TEMA 2. Espacios vectoriales

Ejercicio 2.1. *Determina si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales del espacio corres- pondiente.*

1. *S* = *{*(*a*, *b*) *∈* R2 *| a −* 2*b* = 0*} subespacio vectorial de* R2*.*
2. *T* = *{p*(*x* ) *∈* R2[*x* ] *| p*(0) = 2*} subespacio vectorial de* R2[*x* ]*.*

�( )

1. *R* =

*a a*2 2*a*

*a a*3 3*a*

*| a ∈* R

1 *subespacio vectorial de*

*M*2*×*3*.*

1. *U* = *{*(*λ*, 2*λ*, *λ* + 1) *∈* R3 *| λ ∈* R*} subespacio vectorial de* R3*.*
2. *V* = *{A ∈ M*2 *| A* = *At} subespacio vectorial de M*2*.*
3. *W* = *{*(*λ*, *λµ*, *µ*, 0) *∈* R4 *| λ*, *µ ∈* R*} subespacio vectorial de* R4*.*

Ejercicio 2.2. *Sea W* = *{*2*b* + (*a* + *b*)*x* + (*a − b*)*x* 2 *∈* R2[*x* ] *| a*, *b ∈* R*}.*

1. *Comprueba que W es un subespacio vectorial de* R2[*x* ]*.*
2. *Obte´n un sistema generador de W .*
3. *¿p*(*x* ) = 3 + 2*x − x* 2 *es un vector de W ?*

Ejercicio 2.3. *Comprueba que los vectores* (1, *λ* + 1, 3 *− λ*)*,* (1, *λ*, 3) *y* (1, *λ* + 1, 1 *− λ*) *forman una base de*

R3 *para cualquier valor de λ ∈* R*.*

Ejercicio 2.4. *Sea V un espacio vectorial de dimensio´n* 3 *y sean u*, *v* , *w V . Sabiendo que u*, *v* , *w es un conjunto de vectores linealmente independientes, comprueba si los conjuntos*

*∈ { }*

1. *T* = *{u*, *w}*
2. *S* = *{u* + *w* , *u − v* , 2*u* + *w − v* , 3*w}*
3. *W* = *{u* + *v* , *u − v* + *w* , *v* + *w}*

*tambie´n son linealmente independientes.*

Ejercicio 2.5. *Sea V un espacio vectorial y sea B* = *{u*, *v* , *w} una base de V . Determina si los conjuntos*

1. *U* = *{u*, *w}*
2. *W* = *{u*, *v* , *w* , 3*w −* 2*v}*

*son un sistema generador de V .*

Ejercicio 2.6.

1. *Demuestra que el conjunto de vectores B′* = *{*5*x* 2, *x* 2 + 2*x* , *x* 2 + *x* + 7*} forma una base de* R2[*x* ]*.*
2. *Calcula la matriz de cambio de base para pasar de coordenadas con respecto a B′ a coordenadas con respecto a la base esta´ndar de* R2[*x* ]*.*

Ejercicio 2.7. *Sea V un espacio vectorial de dimensio´n* 2 *y sean B* = *b*1, *b*2 *, C* = *c*1, *c*2 *y D* = *d*1, *d*2

*{ } { } { }*

*tres bases de V . Si*

*PC←B* = (*−*1 2) *y PD←C* = ( 1 0) ,

0 1

*−*1 1

*calcula las coordenadas de b*1 *con respecto a las bases B, C y D y las matrices PB←C y PD←B .*

EJERCICIOS TEMA 2 MATEMA´TICAS I

Ejercicio 2.8. *En* R4*, consideramos los vectores*

*v*1 = (1, 1, 1, 2), *v*2 = (2, 2, 2, 3), *v*3 = (1, 1, 0, 1),

*y llamamos V al subespacio generado por ellos.*

1. *¿Cua´l es la dimensio´n de V ?*
2. *Si llamamos W al conjunto de vectores de V cuyas dos primeras coordenadas son iguales a* 0*, ¿es*

*W subespacio vectorial de V ? En caso afirmativo, calcula una base de W .*

Ejercicio 2.9. *En* R3*, dada la base B* = *{e*1, *e*2, *e*3*}, se considera el conjunto*

*B′* = *{e*1 + *e*2, *e*1 *− e*2 *− e*3, *e*3*}*.

1. *Demuestra que B′ es una base de* R3*.*
2. *Escribe la matriz cambio de base de B a B′ y de B′ a B.*
3. *Prueba que el conjunto de todos los vectores que tienen las mismas coordenadas respecto a am- bas bases forman un subespacio vectorial de* R3*.*

*∗*Ejercicio 2.10. *En* R3 *se consideran los vectores*

*v*1 = (2, 1, *−*1), *v*2 = (3, 3, *−*1), *v*3 = (0, 3, 1), *v*4 = (3, 0, *−*2).

*Demuestra que ⟨v*1, *v*2*⟩* = *⟨v*3, *v*4*⟩.*

Ejercicio 2.11. *Sean*

4

*W*1 = *{*(*x* , *y* , *z* , *t*) *∈* R *| x* + *z* = 0, *y − t* = 0*}*,

*W*2 = *⟨*(0, 0, 0, 1), (1, 1, *−*1, 1)*⟩*,

*dos subespacios de* R4*.*

1. *Calcula la dimensio´n de W*1 *∩ W*2 *y de W*1 + *W*2*.*
2. *¿Existe algu´n espacio W*3 *que sea suplementario de W*1 *y tambie´n suplementario de W*2*? Justifica tu respuesta y proporciona un ejemplo en caso afirmativo.*

Ejercicio 2.12. *Sea V un espacio vectorial de dimensio´n finita, y consideremos tres vectores v*1, *v*2, *v*3 *tales que v*1, *v*2 *, v*1, *v*3 *, v*2, *v*3 *son conjuntos linealmente independientes. ¿Implica eso que v*1, *v*2, *v*3 *son linealmente independientes? Razona tu respuesta.*

*{ } { } { } { }*

*∗*Ejercicio 2.13.

1. *Sean V*1 *y V*2 *subespacios de un espacio vectorial fijado V , tales que V*1 + *V*2 = *V y V*1 *∩ V*2 = *{*0*}. Demuestra que todo vector v ∈ V puede expresarse de modo u´nico como v* = *v*1 + *v*2*, con v*1 *∈ V*1 *y v*2 *∈ V*2*.*
2. *Si consideramos los subespacios de* R3

*V*1 = *{*(*x* , *y* , *z* ) *∈* R3 *| x* + *y* + *z* = 0*}*, *V*2 = *{*(*λ*, *λ*, *λ*) *∈* R3 *| λ ∈* R*}*,

*aplica el apartado anterior y expresa el vector* (1, 0, 1) *como suma de un vector de V*1 *y un vector de V*2*.*

TEMA 3. Aplicaciones lineales

Ejercicio 3.1. *Justifica si las siguientes aplicaciones son lineales.*

1. *f* : R2 *−→* R3[*x* ] *dada por f* (*a*, *b*) = *a* + *bx* + (*a* + *b* + 1)*x* 2*.*
2. *f* : R3 *−→* R *dada por f* (*x* , *y* , *z* ) = *x −* 2*z.*

( )

 

1. *f* : *M*2 *−→ M*3*×*2 *dada por f*

*a b*

*a b* = *c d .*

 

*c d* 1 1

1. *f* : *M*2 *−→* R2[*x* ] *dada por f* (*a b*) = *a*2*x* 2 + *bx* + *c.*

*c d*

Ejercicio 3.2. *Calcula un sistema generador del nu´cleo de las siguientes aplicaciones lineales.*

1. *f* : R2 *−→ M*2 *dada por f* (*a*, *b*) = (*a* + *b b*)*.*

0 *a*

1. *f* : R2[*x* ] *−→* R *dada por f* (*ax* 2 + *bx* + *c*) = *a* + 2*b − c.*

Ejercicio 3.3. *Obte´n un sistema generador de la imagen de las siguientes aplicaciones lineales.*

1. *f* : R2 *−→ M*2 *dada por f* (*a*, *b*) = (*a* + *b b*)*.*

0 *a*

1. *f* : R2[*x* ] *−→* R *dada por f* (*ax* 2 + *bx* + *c*) = *a* + 2*b − c.*

Ejercicio 3.4. *Considera la aplicacio´n lineal f* : R2 *−→ M*2 *definida por*

*f* (2, 1) = (0 *−*1) , *f* (*−*1, 1) = ( 1 *−*2) .

1 2 *−*1 0

1. *Comprueba que B* = *{*(2, 1), (*−*1, 1)*} es una base de* R2*.*
2. *Sabiendo que Bc* = �(1 0) , (0 1) , (0 0) , (0 0)1 *es una base de M*2*, calcula MB ←B* (*f* )*.*

0 0

0 0

1 0

0 1

*c*

1. *Calcula un sistema generador de* ker(*f* )*.*
2. *Calcula una base de* Im(*f* )*.*
3. *Calcula MBc ←B′* (*f* ) *siendo Bc′* = *{*(1, 0), (0, 1)*}.*

*c*

Ejercicio 3.5. *Determina si las siguientes aplicaciones lineales son inyectivas, sobreyectivas y/o biyec- tivas.*

 

1

1. *f* : R *−→* R2[*x* ] *dada por A* = *MB′←B* (*f* ) = *−*1 *siendo B* = *{*1*} y B′* = *{*1, *x* , *x* 2*}.*

2

1. *f* : R2 *−→* R3 *tal que f* (1, 0) = (0, 1, 2) *y f* (0, 1) = (0, 0, 0)*.*

Ejercicio 3.6. *Sea f* : *V −→ W una aplicacio´n lineal tal que*

*f* (*v*1) = *w*1 + 2*w*2, *f* (*v*2) = *−w*1, *f* (*v*3) = *w*1 + *w*2,

*donde B* = *{v*1, *v*2, *v*3*} y B′* = *{w*1, *w*2*} son bases de V y W respectivamente.*

EJERCICIOS TEMA 3 MATEMA´TICAS I

1. *Calcula MB′←B* (*f* )*.*
2. *Comprueba que C* = *{f* (*v*1), *f* (*v*2)*} es una base de W .*
3. *Halla MC←B* (*f* )*.*

Ejercicio 3.7. *Sea f* : R3 *−→* R3 *la aplicacio´n lineal dada por*

*f* (*x* , *y* , *z* ) = (*x* + *y* , *z* , *x* + *z* ).

1. *Calcula la matriz de la aplicacio´n lineal respecto a la base cano´nica.*
2. *Determina la imagen mediante f del subespacio de ecuacio´n x* + *y* + *z* = 0*.*
3. *Obte´n el conjunto de vectores de* R3 *tales que f* (*v* ) *∈ W , donde W es el subespacio de ecuacio´n*

*x − y* = 0*.*

Ejercicio 3.8. *Sea f* : R2 *→* R2 *una aplicacio´n lineal que cumple:*

*f* (1, 1) = (2, 2) *y* (2, 1) *∈* ker(*f* ).

1. *Calcula la matriz asociada a f respecto a la base cano´nica de* R2*.*
2. *Calcula la matriz asociada a f respecto a la base B′* = *{*(1, 1), (2, 1)*}.*

Ejercicio 3.9. *Sea la aplicacio´n f* : *M*2 *−→* R *la aplicacio´n definida como f* (*A*) = tr(*A*)*.*

1. *Prueba que f es una aplicacio´n lineal.*
2. *Determina la dimensio´n y una base del nu´cleo de f .*

Ejercicio 3.10. *Si consideramos la aplicacio´n lineal f* : R3 R3 *cuya matriz respecto de la base cano´nica es*

*→*

 

4 2 2

*α* 4 4 ,

 

2 1 *β*

*determina la inyectividad y sobreyectividad de f en funcio´n de los posibles valores de α*, *β ∈* R*.*

Ejercicio 3.11. *Sea g* : *M*2 *−→ M*2 *la aplicacio´n lineal definida como g* (*A*) = *AB, donde B es la matriz*

( )

*B* = 1 3 .

2 6

1. *Demuestra que la aplicacio´n g es lineal.*
2. *Calcula la matriz asociada a g respecto a la base cano´nica de M*2*.*
3. *Halla una base y la dimensio´n del nu´cleo.*
4. *Indica la dimensio´n de la imagen.*

TEMA 4. Diagonalizacio´n

Ejercicio 4.1. *Indica si la matriz A es diagonalizable y, si existe, calcula una matriz diagonal D semejante a la dada y la matriz de paso P tal que A* = *PDP−*1*.*

 3 2 0

*−* 

*A* =

1 0 0 .

1 0 2

Ejercicio 4.2. *Sea f* : R2 *−→* R2 *una aplicacio´n lineal tal que f* (*x* , *y* ) = (3*x − y* , 2*x* )*. Indica si f es diagona- lizable y, en caso de que exista, da una base B de* R2 *tal que MB←B* (*f* ) *es diagonal.*

Ejercicio 4.3. *Sea f* : R3 *−→* R3 *dada por f* (*x* , *y* , *z* ) = (*−*3*x* + *z* , 2*y* , *−ax* )*. Calcula el valor del para´metro*

*a ∈* R *para que f tenga tres vales propios reales (no necesariamente distintos).*

Ejercicio 4.4. *Sea la matriz*

 

1 *β β* 0

 

1 2 1 0

*A* =   .

*−*

0 0 1 0

 

*β* 1 0 *−*2

1. *Sabiendo que λ* = 3 *es un valor propio de A, calcula el valor del para´metro β ∈* R*. Con valor de β obtenido en el apartado anterior:*
2. *Da tres vectores propios distintos asociados al valor propio λ* = 3*.*
3. *Calcula todos los valores propios de A. ¿Es A diagonalizable?*
4. *Comprueba si v* = (4, *−*2, 0, 1) *es un vector propio de A e indica el valor propio asociado.*

2 *−*2 *−*2

 

Ejercicio 4.5. *Sea la matriz A* = *−*1 1 1 *. Calcula los autovalores y autovectores de A. ¿Es A*

*diagonalizable?*

1 *−*1 *−*1

Ejercicio 4.6. *Prueba que toda matriz sime´trica* 2 *×* 2 *es diagonalizable.*

Ejercicio 4.7. *Se consideran las matrices*

0 2 1  2 1 0 

*A* = 2 3 2 , *B* = *−*1 2 0  .

1 2 0

1. *Calcula los autovalores de A y de B.*

0 0 *−*1

1. *Determina si A y B son diagonalizables sobre* R*. En caso afirmativo, calcula una forma diagonal D*

*y una matriz de paso P y expresa la relacio´n entre ellas y la matriz original.*

Ejercicio 4.8. *Construye una matriz M ∈ M*2 *tal que v*1 = (2, 3) *sea autovector con autovalor* 2 *y v*2 = (1, 2)

*sea autovector con autovalor −*1*.*

Ejercicio 4.9. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*

1. *Si A es una matriz tal que An* = 0*, entonces su u´nico autovalor posible es λ* = 0*.*

EJERCICIOS TEMA 4 MATEMA´TICAS I

1. *Si λ es autovalor de una matriz A invertible, entonces λ−*1 *es autovalor de su matriz inversa A−*1*.*
2. *Si λ es un autovalor de A, entonces λ es tambie´n autovalor de At, la matriz traspuesta de A.*
3. *Los autovectores asociados a dos autovalores distintos son siempre linealmente independientes.*

TEMA 5. Espacios normados

Ejercicio 5.1. *Sea la aplicacio´n bilineal ·* : R3 *×* R3 *−→* R3 *dada por*

(*a*, *b*, *c*) *·* (*x* , *y* , *z* ) = 2*ax −* 2*ay −* 2*bx* + *βby* + *az* + *cx* + 6*cz* .

1. *Determina el valor del para´metro β para que · sea un producto escalar. Si β* = 3*, v* = (1, 1, *−*1) *y W* = *{*(*x* , *y* , *z* ) *∈* R3 *| x* + *y − z* = 0*}:*
2. *Comprueba si v⊥W .*

Ejercicio 5.2. *Considera, en* R3*, los vectores v* = (2, 0, 1) *y w* = (2, 0, 0) *y el producto escalar cuya matriz de Gram con respecto a la base B* = *{*(1, 1, 1), (1, *−*1, 0), (0, 0, 1)*} es*

 

7 0 5

*GB* = 0 9 1 .

 

5 1 4

1. *Calcula ∥v∥.*
2. *Calcula la distancia entre v y w.*

Ejercicio 5.3. *Sea ·* : R2[*x* ] *×* R2[*x* ] *−→* R2[*x* ] *el producto escalar en* R2[*x* ] *dado por*

(*a*1*x* 2 + *b*1*x* + *c*1) *·* (*a*2*x* 2 + *b*2*x* + *c*2) = *a*1*a*2 + *b*1*b*2 + *b*1*c*2 + *b*2*c*1 + 2*c*1*c*2,

*y sean los vectores p*(*x* ) = *x* + *x* 2*, q*(*x* ) = 1 + *x y r* (*x* ) = *−x* 2*.*

1. *Calcula p*(*x* ) *· q*(*x* )*.*
2. *¿Es r* (*x* ) *unitario?*
3. *Calcula la matriz de Gram del producto escalar con respecto a la base B* = *{p*(*x* ), *q*(*x* ), *r* (*x* )*}.*

Ejercicio 5.4. *Calcula una base ortonormal a los siguientes subespacios con el producto escalar indica- do.*

1. *T* = *⟨*(1, 2, 0, *−*1), (2, 1, 1, 0)*⟩ con el producto escalar esta´ndar de* R4*.*
2. *W es el subespacio de* R3 *cuya base es B* = *{x* 2 *−* 1, *x* 2 + 2*x* + 3*} con el producto escalar*

*·* : R2[*x* ] *×* R2[*x* ] *−→* R *tal que* (*a*1*x* 2 + *b*1*x* + *c*1) *·* (*a*2*x* 2 + *b*2 + *c*2) = 3*a*1*a*2 + 2*b*1*b*2 + *c*1*c*2.

1. *S* = �(*a b*) *| a − b* + *c −* 2*d* = 0, *b − c* + *d* = 0, *c* + *d* = 01 *con el producto escalar*

*c d*

*·* : *M*2 *× M*2 *−→* R *dado por* (*a b*) *·* (*e f* ) = *ae* + *bf* + *cg* + *dh*.

*c d*

*g h*

Ejercicio 5.5. *Sea un espacio eucl´ıdeo y sea una base de tal que es unitario,*

*V*  *B* = *{b*1, *b*2, *b*3*} V b*1

*b*1 *· b*2 = 0*, b*2 *· b*2 = 1*, ∥b*3*∥* = *√*2*,* (*b*1 *− b*3) *· b*2 = 0 *y* (*b*1 *− b*3)*⊥b*1*.*

1. *Calcula la matriz de Gram con respecto a la base B.*
2. *Calcula* d(*b*1, *b*3) *y el a´ngulo que forman b*3 *− b*1 *y b*2*.*
3. *Calcula una base B′* = *{v*1, *v*2, *v*3*} ortonormal.*
4. *Calcula la matriz de Gram con respecto a la nueva base B′.*

EJERCICIOS TEMA 5 MATEMA´TICAS I

1 1 0

 

*−*

Ejercicio 5.6. *Considera el producto escalar con matriz de Gram GB* = 1 2 1 *, siendo la base*

*−* 

0 1 3

*B* = *{*(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)*}.*

1. *Obte´n GB si Bc denota a la base cano´nica de* R3*.*

*c*

1. *Halla, utilizando GB , el producto escalar* (1, 1, 1) *·* (0, 1, 0)*.*
2. *Calcula el producto escalar* (1, 1, 1) *·* (0, 1, 0) *utilizando ahora GBc .*
3. *¿Son coherentes los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c)?*

Ejercicio 5.7. *En* R3*, se considera el producto escalar dado por*

*⟨*(*x*1, *x*2, *x*3), (*y*1, *y*2, *y*3)*⟩* = 3*x*1*y*1 + *x*1*y*2 + *x*1*y*3 + *x*2*y*1 + 3*x*2*y*2 + *x*3*y*1 + 3*x*3*y*3.

1. *Halla la matriz de Gram del producto escalar anterior.*
2. *Calcula el mo´dulo del vector v* = (1, 0, 1) *respecto al producto escalar dado.*
3. *Determina unas ecuaciones impl´ıcitas del subespacio ortogonal al vector anterior.*

Ejercicio 5.8. *En* R2[*x* ] *se considera el producto escalar dado por*

*p*(*x* ) *· q*(*x* ) = *p*(0)*q*(0) + *p*(1)*q*(1) + *p*(2)*q*(2).

1. *Calcula la matriz de Gram para la base cano´nica de* R2[*x* ]*.*
2. *Calcula la distancia entre los polinomios x y x* 2*.*
3. *Calcula la norma de los polinomios* 1 + *x y* 1 *− x.*

Ejercicio 5.9. *Se considera, en* R4 *con el producto escalar habitual, el subespacio definido por las ecua- ciones impl´ıcitas*

*x* + *y* + *z* = 0, *y − z* + 2*t* = 0.

1. *Calcula la dimensio´n y una base de W .*
2. *Emplea el me´todo de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal a partir de la base hallada en el apartado anterior.*
3. *Calcula la proyeccio´n del vector v* = (1, 0, 0, 0) *sobre W .*

Ejercicio 5.10. *Demuestra que en un espacio eucl´ıdeo V se cumple la ley del paralelogramo*

2

2

*para todo u*, *v ∈ V .*

*∥u* + *v∥*

+ *∥u − v∥*

= 2*∥u∥*2

+ 2*∥v∥*2

Ejercicio 5.11. *Demuestra que si dos vectores u*, *v de un espacio eucl´ıdeo verifican que*

2

*entonces son ortogonales.*

*∥u∥*

+ *∥v∥*2

= *∥u* + *v∥*2,

Ejercicio 5.12. *En* R4 *con el producto escalar habitual y dado v* = (1, 2, 3, 1)*, encuentra el vector de W*

*ma´s cercano a v si W es el subespacio de ecuaciones*

*x* + *y* = 0, *x − y* + *z* = 0.

*∗*Ejercicio 5.13. *Si U y V son subespacios de un espacio eucl´ıdeo, demuestra que*

(*U* + *V* )*⊥* = *U⊥ ∩ V ⊥*.

TEMA 6. Nu´meros complejos

Ejercicio 6.1. *Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma bino´mica.*

1. (*ι*˙ + 3)(2*ι*˙ *−* 1)

1 *− ι*˙

1. (1 + *ι*˙)2 + 2*ι*˙

3 + *ι*˙

1. 2*e* 3

*π ι*˙

1. 4

4 *π*

2 *−π*

2

*−* (*ι*˙ + 2)

Ejercicio 6.2. *Expresa en forma polar los siguientes nu´meros complejos.*

1. *e*1+*ι*˙
2. 2 *π* 3*π*1 *−π*

5 2

1. *ι*˙7

Ejercicio 6.3. *Encuentra todos los nu´meros complejos z ∈* C *tales que z* 4 = *eπι*˙*.*

Ejercicio 6.4. *Representa los siguientes conjuntos en el plano complejo.*

1. *A* = *{z ∈* C *| |z − ι*˙*|* = 2*}*
2. *B* = *{z ∈* C *| |z| ≤* 1 *y R*e(*z* ) *≥* 0*}*
3. *C* = *{z ∈* C *|* 1 *< |z| <* 2*}*
4. *D* = *{z ∈* C *| −*2 *≤ I*m(*z* ) *≤* 2*}*
5. *E* = *{z ∈* C *| z* 3 = *−*8*}*

Ejercicio 6.5. *Encuentra todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones.*

1. *z* 3 + 1 = *ι*˙
2. (*z* + 1)4 = 16

Ejercicio 6.6. *Determina todos los nu´meros complejos que satisfacen la ecuacio´n |z* + 1*|* = *|z − ι*˙*|.*

Ejercicio 6.7. *Expresa los siguientes nu´meros complejos en forma bino´mica y en forma polar.*

1. 1 100

( )

*−ι*˙

1. (1 *− ι*˙)50
2. (2 + 2*ι*˙)20

(2 *−* 2*ι*˙)40

Ejercicio 6.8. *Resuelve la ecuacio´n x* 6 *−* 2*x* 3 + 2 = 0 *con x ∈* C*.*

EJERCICIOS TEMA 6 MATEMA´TICAS I

Ejercicio 6.9. *Sea z ∈* C *tal que*

*Calcula la forma polar y bino´mica de z* 2 + *ι*˙*.*

*z*

*z −* 2

= 1 *− ι*˙.

*ι*˙ + 1

Ejercicio 6.10. *Demuestra que si p*(*x* ) *es un polinomio de grado n* N *con coeficientes reales y z C es ra´ız de p*(*x* )*, entonces z tambie´n es ra´ız de p*(*x* )*.*

*∈ ∈*

TEMA 7. L´ımites y continuidad

Ejercicio 7.1. *Halla el valor de los siguientes l´ımites.*

1. l´ım

*x→a*+

1. l´ım

*x→a*+

*√x − √a si a* 0 (*x − a*)2

*√x − a x − a*

*≥*

*x − a*

1. l´ım

*x→a*+

*√x − a*

1. l´ım

*x→*+*∞*

*x* 2 + *a − ax* *si a ≥* 0

Ejercicio 7.2. *Calcula el l´ımite de las siguientes funciones en el origen.*

1. *f* (*x* ) = *x* sin( *π* )

*x*

21*/x* + 5*−*1*/x*

*g* (*x* ) = 31*/x* + 4*−*1*/x*

1. *h*(*x* ) = (3*x* 2 + 1)1*/x*2

Ejercicio 7.3. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones.*

1. *f* (*x* ) = *√*1 *− x* 2

*√*1 *− x* 2 *si x ∈* [*−*1, 1]

*(b) g* (*x* ) = �

0 *si x ̸∈* [*−*1, 1]

*√*1 *− x* 2 *si x ∈* [*−*1, 1]

*(c) h*(*x* ) = �

*x −* 1 *si x ̸∈* [*−*1, 1]

Ejercicio 7.4. *Sabiendo que h* : R *−→* R *es una funcio´n continua tal que h*(0) = *β, determina el valor de los para´metros α, β ∈* R *para que la funcio´n f* : R *−→* R *dada por*

*αx*



*|x −* 2*|* + 4

*si x ≤* 2,

*f* (*x* ) =  (*x −* 2) sin ( *πx* ) *si* 2 *< x ≤* 10,

****

*sea continua en x* = 2 *y en x* = 10*.*

****

*x −* 2

*h*(*x −* 10) *−* 10

10*x* + 10

*si x >* 10,

Ejercicio 7.5. *Demuestra que la ecuacio´n* sin *x* = 2*x −* 3 *tiene, al menos, una solucio´n real.*

Ejercicio 7.6. *Sea la funcio´n f* : R *−→* R *dada por*

 *√x* 2 + 4 *si x ∈* (*−∞*, 0],

1. *Calcula f* (0) *y f* (2)*.*

*f* (*x* ) =



*x* + 6

*x* 2 *−* 4*x* + 3

*si x ∈* (0, +*∞*).

1. *Comprueba si existe x ∈* R *tal que f* (*x* ) = 0*.*

EJERCICIOS TEMA 7 MATEMA´TICAS I

1. *Explica si los resultados anteriores contradicen, o no, el Teorema de Bolzano.*

Ejercicio 7.7. *Sea f* : [0, 1] R *una funcio´n continua con* 0 *f* (*x* ) 1*. Demuestra que la ecuacio´n*

*−→ ≤ ≤*

*f* (*x* ) = *x tiene, al menos, una solucio´n.*

Ejercicio 7.8. *Demuestra que la ecuacio´n*

*tiene al menos dos soluciones reales.*

*x* 2 = cos *x − x* sin *x*

Ejercicio 7.9. *Demuestra que la ecuacio´n x* 6 = 1 + 6*x tiene exactamente dos soluciones reales.*

*∗*Ejercicio 7.10. *Calcula los siguientes l´ımites.*

1. l´ım ( 1 *−*  1 )

*x→*1 ln *x x −* 1

1. l´ım (1 + *x* sin *x* )2*/x*2

*x→*0

*x − a*

*(c)* l´ım *√*3 *x − a*

*x→a*

*√x − a*

*(d)* l´ım

*x→a*

3 *x − √*3 *a*

Ejercicio 7.11. *Determina el valor del para´metro a ∈* R *para que la funcio´n*

1

*f* (*x* ) = *x* 2 *−* 2*ax* + 5*a*

*sea continua en todo* R*.*

*∗*Ejercicio 7.12. *Determina el valor de c ∈* R *para que la funcio´n*

*f* (*x* ) = � *̸*

*x* cot *x si x* = 0,

*c si x* = 0,

*sea continua en x* = 0*.*

Ejercicio 7.13. *Determina si existe algu´n valor c ∈* R *para el que la funcio´n*

****

*x*

*x* 2

4 + sin2 1

*si x <* 0,

*f* (*x* ) =

*c si x* = 0,

*es continua en x* = 0*.*

31*/x* + 21*/x*

 41*/x*

****

*si x >* 0,

TEMA 8. Derivacio´n de funciones

Ejercicio 8.1. *Utiliza la Regla de L’Hoˆpital para resolver el siguiente l´ımite.*

*e−*1*/x*

l´ım

*x→*0+ *x*

Ejercicio 8.2. *Determina el valor de los para´metros a*, *b ∈* R *para que la ecuacio´n de la recta tangente a la gra´fica de f* (*x* ) = *ax* 2 + *bx* + 2 *en el punto* (2, 0) *sea y − x* + 2 = 0*.*

Ejercicio 8.3. *Demuestra que la funcio´n f* (*x* ) = *xex*2 *−*1 + *λx tiene una u´nica ra´ız real en el intervalo* [ *α*, *α*]

*−*

*para cualquier valor α*, *λ >* 0*.*

Ejercicio 8.4. *Sea f* (*x* ) = 3 (1 + *x* )2*.*

1. *Calcula f* (*−*4) *y f* (2)*.*
2. *Comprueba que la ecuacio´n f ′*(*x* ) = 0 *no tiene solucio´n si x ∈* (*−*4, 2)*.*
3. *¿Contradicen los resultados anteriores el Teorema de Rolle?*

Ejercicio 8.5. *Utiliza un polinomio de Taylor de orden* 2 *para obtener un valor aproximado de e*0,1 sin(0,2)

*y acota el error cometido en dicha aproximacio´n.*

Ejercicio 8.6. *Haz un esbozo de la gra´fica de*

*ex*

*f* (*x* ) = *√x* (*x −* 2)

*calculando previamente el dominio, los puntos de corte con los ejes, as´ıntotas verticales y horizontales, monoton´ıa y extremos relativos.*

Ejercicio 8.7. *Aproxima el nu´mero √*3 *e*2 *con un error menor que* 10*−*2*.*

Ejercicio 8.8. *Calcula el polinomio de Taylor P*(*x* ) *de segundo orden alrededor del punto x* = *π de la*

4

*funcio´n f* (*x* ) = sec *x.*

Ejercicio 8.9. *Dada f* (*x* ) = *x*

log *x*

*noton´ıa y extremos relativos.*

Ejercicio 8.10. *Dada la funcio´n*

*, realiza un esbozo de su gra´fica analizando su dominio, as´ıntotas, mo-*

*f* (*x* ) = *|*1 *− |x||* ,

*determina su dominio, puntos de corte con los ejes, analiza su continuidad y derivabilidad y estudia su monoton´ıa y extremos relativos.*

Ejercicio 8.11. *Calcula los puntos de la para´bola y* = *x* 2 *que se hallan a distancia m´ınima del punto* (0, 2)*.*

EJERCICIOS TEMA 8 MATEMA´TICAS I

TEMA 9. Integracio´n

Ejercicio 9.1. *Utiliza la te´cnica de integracio´n por partes para hallar* r arcsin *x dx.*

Ejercicio 9.2. *Utiliza un cambio de variable para calcular*

r *x* 2

*√x −* 2 *dx.*

Ejercicio 9.3. *Resuelve la siguiente integral c´ıclica:* r *e*2*x* sin *x dx.*

Ejercicio 9.4. *Resuelve las siguientes integrales definidas.*

1

*(a)* r

1 *− x* 2 *dx*

0

r

�

*(b)* 2

0

*f* (*x* ) *dx*

*con*

*f* (*x* ) =

2*x −* 3 *si x <* 1 3*x* 2 *−* 4*x si x ≥* 1

Ejercicio 9.5. *Calcula* r 3*x* 5 *−* 4*x* 3 + 4*x* 2 *−* 9*x* + 4 *.*

*x* 4 *−* 2*x* 3 + 2*x* 2 *−* 2*x* + 1 *dx*

Ejercicio 9.6. *Calcula*  *−*4 *dx.*

r

*x* 3 + 2*x* 2 + 3*x* + 6

Ejercicio 9.7. *Calcula una primitiva de* r *e√x dx.*

Ejercicio 9.8. *Resuelve la integral trigonome´trica*  1 *dx.*

r

cos *x*

Ejercicio 9.9. *Calcula la integral definida*

1

1 + *√x dx.*

0

r 1

Ejercicio 9.10. *Calcula la integral*

2 2

*√*4 *− x* 2 *dx.*

r

*x*

0

EJERCICIOS TEMA 9 MATEMA´TICAS I

# Soluciones

Solucio´n 1.1. Como *AB* = *I*2 y *BA* = *I*2, deducimos que *B* es la inversa de *A*.

Solucio´n 1.2. (a)

2

(*A | I*3) =

0 1 1

0 *−*1 1

0

0

0

1

*F*

∼

3 *→F*3 +*F*2

0 1

0 0

∼

*F*1 *→F*1 *−* 1 *F*3

*F*2 *→F*2 *−* 1 *F*3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  *−*2 1 1 1   *−*2 1 0 1 | | | | 0  1  0  *−*1  1  2 | 0   *−*1  |  *−*2 1   *−*2 | 1  1  2  0  1 | 1  0  0  0  0 | 0 0   1 0  1 1  1 *−*1  0 1  2 |
| 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | *F*1 *→F*1 *−F*2 | | 0 | 2 | 0 1 |

2

∼  0 1 0 0

2

1  ∼  0

*−*

2

2

0



2  *F* ∼ *F*

*−*

*→*

*−*1

1

1 0 1

 1 0 0 *−*1 1 0 

1 2 1

*F*3 *→* 1 *F*3

2

2 2

∼

 *−*1  *−*1

0

 

 

0 1 0

0 0 1

1

2

1

2

2

1

2

=

*I*3 *| A*

.

0

1. Si *A* =

*−*2 1 1

0 *−*1 1

 0 1 1, *X* =

*x*

*y*  y *B* =

*z*

2

1, resolvemos el sistema *AX* = *B* multiplicando la

1  

2

ecuacio´n matricial por *A−*1:

1    

*X* = *A−*1*B* =

*−*1 1 0 2

0 1 *−*1 1 =

2

0 1 1

2

*−*1

*−*1 .

2

3

Solucio´n 1.3. Hacemos operaciones elementales sobre la matriz ampliada del sistema:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | *−*1 | 0 | 1 | 2 | *−*1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 0 0 1 1 1  0 0 1 1 1 | | | | | 3  3 |

 1 *−*1 0 1 2

*|*  *−*

*−*1   

(*A B*) = 2 2 1 3 4 0

 *F* 2*F*

 *F F*



0 0 1 1 1 3



1 *−*1 1 2 3 2

∼

2 *→F*2 *−* 1

*F*4 *→F*4 *−F*1

∼

3 *→F*3 *−* 2

*F*4 *→F*4 *−F*2

 1 *−*

∼

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 0 | 1 | 2 |  | *−*1 | 0 | 1 | 2 | *−*1 |
| 0 0 1 | | 1 | 0 | 2 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 |
|  | 0 0 0 1 | | | 4 *→F*4 *−* 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 0 0 | | 0 | 1 | 1 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Como rg(*A | B*) = rg(*A*) | = 3 *̸*= | 5 = nº | inco´gn | | itas, el sistema es co | mpatible | | | indeter | |

*−*1 

 1 

∼  0

infinitas soluciones:

1  *F*

*F*  0

 .

minado, es decir, tiene

**** *x − y* + *t* + 2*w* = *−*1

*x* = *α β* 3,

*y* = *α*,

**** *− −*

*AX* = *B* ∼ 

****



Solucio´n 1.4.

*z* + *t* = 2

*w* = 1

0 = 0

*⇒*  *z* = 2 *− β*

**** *w* = 1,

*t* = *β*,

con *α*, *β ∈* R.

(*A | B*) = ( 2 *−*2 0

4 ) ∼

( 1 *−*1 3

*−*1 ) ∼

( 1 *−*1 3

*−*1 ) ∼

1 *−*1 3

∼ (

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | *−*1 | 3 | *−*1 |
| 0 | 0 | 1 | *−*1 |

*−*1 *F*1 *↔F*2

) ∼

2 *−*2 0 4

(

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | *−*1 0 | 2 |
| 0 | 0 1 | *−*1 |

*F*2 *→F*2 *−*2*F*1

) .

0 0 *−*6 6

*F*2 *→ −*1 *F*2

*F*1 *→F*1 *−*3*F*2

6

Una vez hemos obtenido la matriz escalonada reducida equivalente a (*A | B*), resolvemos el sistema:

� *⇒*



Solucio´n 1.5.

*AX* = *B* ∼

*x − y* = 2

*z* = *−*1

*x* = 2 + *α*,

*y* = *α*,

 *z* = *−*1,

con *α ∈* R.

1 3

0

3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 |
| 0 | *−*1 |
| 2 | 0 |
| 1 | *−*1 | 1 |

1 2 3

1 2 3

det   = 2(*−*1)3+2 det 0 *−*1 3 *−* 1(*−*1)4+2 det 0 *−*1 3 =





1 1 Adj. *C*2

2

1 1 2

1 0 1

Adj. *C*1

= *−*2 1(*−*1)1+1 det (*−*1 3) + 1(*−*1)3+1 det ( 2 3) +

1 2

*−*1 3

*−* 1(*−*1)1+1 det (*−*1 3) + 1(*−*1)3+1 det ( 2 3) =

0 1 *−*1 3

= *−*21(*−*2 *−* 3) + (6 + 3)l *−* 1(*−*1 *−* 0) + (6 + 3)l = *−*16.

Como det(*A*) *̸*= 0, la matriz *A* es invertible.

Solucio´n 1.6. Realizamos operaciones elementales por filas en la matriz ampliada del sistema:





(*A | B*) =

1 *β* 2 0

1 2 3 *β*

*− −*

1 *β* 2 *β*

1 

∼

*F*2 *→F*2 +*F*1

1 *β* 2 0

0 2 + *β* 1 *β*

*−*

0 0 0 *β*

1

1

*β −* 1

 .

*F*3 *→F*3 *−F*1

– Si *β* = 2 y *β* = 0: la matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 3 = 4 = nº inco´gnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

*̸ − ̸ | ̸*

0

*β*



 *−*

1 2 2 0 1

– Si *β* = *−*2: (*A | B*) ∼  0 0 *−*1 *−*2

1 .



0 0 0 *−*2 *−*3

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 3 = 4 = nº inco´gnitas, el sistema es compa- tible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

*| ̸*





1 0 2 0 1

– Si *β* = 0: (*A B*) ∼ 0 2 1 0 1 .

*|* 



0 0 0 0 *−*1

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = 3 = 2 = rg(*A*), el sistema es incompatible, es decir, no tiene solucio´n.

*| ̸*

Solucio´n 1.7.

 *−*



*−*

(*A | B*) =

1. *α* 2
2. 1 *β*

2 1 4

*β* 

∼

*F*2 *→F*2 *−*2*F*1

1 *α* 2

0 1 + 2*α β* 4

*−*

0 1 + 2*α* 0

*β*

*−*2*β*

*−β*

 .

– Si *α ̸*= *−*1 : (*A | B*) ∼

2

*F*3 *→F*3 *−*2*F*1

1 *−α* 2 *β*



0

*β*

 0 1 + 2*α β −* 4 *−*2*β*

*F*3 *→F*3 *−F*2

0 0 4 *− β*

*β*

.

▶ Si *β* = 4: la matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 3 = nº inco´gnitas, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una u´nica solucio´n.

*̸ |*

 1 *−α* 2 4 

▶ Si *β* = 4: (*A B*) ∼ 0 1 + 2*α* 0

*|* 

0 0 0

*−*8 .

4

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = 3 = 2 = rg(*A*), el sistema es incompatible, es decir, no tiene solucio´n.

*| ̸*

 1 1 2 *β* 

2

– Si *α* = *−*1 : (*A | B*) ∼  0 0 *β −* 4 *−*2*β*  .

2

0 0 0 *−β*

▶ Si *β* = 4 y *β* = 0: la matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 3 = nº inco´gnitas, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una u´nica solucio´n.

*̸ ̸ |*

 1 1 2 4   1 1 2 4 

2

2

▶ Si *β* = 4: (*A | B*) ∼  0 0 0 *−*8  *F* ∼ 2*F*  0 0 0 *−*8  .

0 0 0

*−*4

3 *→F*3 *−*

2

0 0 0

0

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = 2 = 1 = rg(*A*), el sistema es incompatible, es decir, no tiene solucio´n.

*| ̸*

 1 1 2 0 

2

▶ Si *β* = 0: (*A B*) ∼ 0 0 4 0 .

*|*  *−*



0 0 0 0

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 2 = 3 = nº inco´gnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

*| ̸*

Solucio´n 1.8.

 0 1 5 *−*4 

 1 4 3 *−*2 

 1 4 3 *−*2 

(*A | B*) =  1 4 3

*−*2  *F* ∼

 0 1 5 *−*4  *F*

∼ 2*F*  0 1 5 *−*4  *F* ∼

2 7 1

*−*

 1 4 3

2

*−*2 



1 *↔F*2

2 7 1 *−*2

3 *→F*3 *−* 1

0 *−*1 *−*5 2

3 *→F*3 +*F*2

∼ 0 1 5



0 0 0

*−*4 .

*−*2

A partir de la forma escalonada se deduce que rg(*A*) = 2 y rg(*A B*) = 3, luego el sistema es incompatible y no tiene solucio´n.

*|*

Solucio´n 1.9.

( ) *∈*

1. Si la traza de *A* es cero, podemos escribir *A* = *a b* donde *a*, *b*, *c* R y calculamos

*c −a*

2 (*a b* ) (*a b* )

*A*

= *A · A* =

=

= (*a*

+ *bc*)

= (*a*

+ *bc*)*I*2.

*c −a*

*c −a*

(*a*2 + *bc* 0 ) 2

0 *a*2 + *bc*

(1 0) 2

0 1

1. Siguiendo la pista dada, calculamos en primer lugar tr[*A*, *B*] = tr(*AB − BA*) = tr(*AB*) *−* tr(*BA*): Si *A* = (*a*11 *a*12) y *B* = (*b*11 *b*12) se tiene que

( ) 11 11 12 21 21 12 22 22

*a*21 *a*22

*b*21 *b*22

y tambie´n

tr(*AB*) = tr *a*11*b*11 + *a*12*b*21 *a*11*b*12 + *a*12*b*22 = *a b* + *a b* + *a b* + *a b* ,

*a*21*b*11 + *a*22*b*21 *a*21*b*12 + *a*22*b*22

tr(*BA*) = tr *b*11*a*11 + *b*12*a*21 *b*11*a*12 + *b*12*a*22 = *b a* + *b a* + *b a* + *b a* .

( ) 11 11 12 21 21 12 22 22

*b*21*a*11 + *b*22*a*21 *b*21*a*12 + *b*22*a*22

Se sigue de ello que tr[*A*, *B*] = 0.

Por el apartado (a), puesto que tr[*A*, *B*] = 0, el cuadrado de [*A*, *B*] es un mu´ltiplo de la identidad, es decir, [*A*, *B*]2 = *αI*2 para algu´n *α ∈* R. Vamos ahora a comprobar que el conmutador de una matriz *C ∈ M*2 con un mu´ltiplo de la identidad es la matriz cero:

[*C* , [*A*, *B*]2] = [*C* , *αI*2] = *C αI*2 *− αI*2*C* = *α*(*CI*2 *− I*2*C* ) = *α*(*C − C* ) = 0,

y por tanto *C* conmuta con [*A*, *B*]2.

1. Si fuese cierto que [*A*, *B*] = *αI*2, con *α* = 0, se tendr´ıa que tr[*A*, *B*] = tr(*αI*2) = 2*α* = 0, lo que supone una contradiccio´n con tr[*A*, *B*] = 0 (probado en el apartado anterior) y concluimos que [*A*, *B*] no puede ser nunca un mu´ltiplo no nulo de la identidad.

*̸ ̸*

Solucio´n 1.10. Es un ca´lculo directo verificar la identidad. Si *A* = *a b* , se tiene que:

( )

*c d*

*A*2 *−* tr(*A*)*A* + det(*A*)*I*2 = (*a b*) (*a b*) *−* (*a* + *d* ) (*a b*) + (*ad − bc*) (1 0) =

( )

( )

(

*c d*

*c d*

*c d*

0 1

0 *ad bc*)

*a*2 + *bc ab* + *bd*

= *ca* + *dc d* 2 + *bc*

( )

*a*2 + *da ab* + *db*

*− ac* + *dc d* 2 + *ad*

+ *ad − bc* 0 =

*−*

= 0 0 .

0 0

Veamos ahora que *A* es invertible si det(*A*) = 0. Podemos despejar det(*A*)*I*2 de la identidad del apartado anterior, de modo que:

*̸*

*A*2 *−* tr(*A*)*A* = *−* det(*A*)*I*2.

Puesto que det(*A*) *̸*= 0, podemos dividir por *−* det(*A*) y llegar a la identidad

tr(*A*)*A − A*2 = *I* .

1

det(*A*)

2

Sacando factor comu´n *A* (por la izquierda y por la derecha), se obtienen las identidades

*A* ( tr(*A*)*I*2 *− A* ) = *I* y ( tr(*A*)*I*2 *− A* ) *A* = *I* ,

det(*A*)

2

det(*A*)

2

lo que permite afirmar que *A* es invertible, y *A−*1 = 1 (tr(*A*)*I*2 *− A*).

det *A*

Solucio´n 1.11. Para que los sistemas de ecuaciones sean equivalentes, ambos deben tener el mismo conjunto de soluciones. Si consideramos el sistema formado por las cuatro ecuaciones,

 1 2 1 *a −* 1



(*A | B*) =  2 1 *b −*1

4 5 *−b* 1

1 *−*4 *b −* 4 *−*5

0 

 ∼

0



0

0

*F*2 *→F*2 *−*2*F*1 *F*3 *→F*3 *−*4*F*1 *F*4 *→F*4 *−F*1

 1 *a* 1 *a −* 1

 0 *−*3 *b −* 2 1 *−* 2*a*



0 *−*3 *−b −* 4 5 *−* 4*a*

0 *−*6 *b −* 5 *−*4 *− a*

0 

 ,

0



0

0

es inmediato comprobar, analizando las dos primeras ecuaciones, que el primer sistema tiene rango 2 para todo valor de *a*, *b* R. Por tanto, para que el segundo sistema sea equivalente al primero, es necesario que la matriz 4 4 tenga tambie´n rango 2, ya que en otro caso ambos sistemas no ser´ıan compatibles. Si realizamos ma´s operaciones elementales

*×*

*∈*

 1 *a* 1 *a −* 1 0 





 0 *−*3 *b −* 2 1 *−* 2*a*  ∼

0

 1 *a* 1 *a −* 1 0 

 0 *−*3 *b −* 2 1 *−* 2*a* 



0



 0 *−*3 *−b −* 4 5 *−* 4*a* 0  *F*3 *→F*3 *−F*2  0 0 *−*2*b −* 2 4 *−* 2*a* 0 

0

*F*4 *→F*4 *−*2*F*2

0

0 *−*6 *b −* 5 *−*4 *− a*

0 0 *−b −* 1 *−*6 + 3*a*

vemos que para que la matriz tenga rango 2, los para´metros *a* y *b* debera´n satisfacer las ecuaciones

*−b −* 1 = 0 y 2 *− a* = 0,

que proporcionan los valores *a* = 2, *b* = 1. Sustituyendo en la matriz anterior, obtenemos la matriz ampliada del sistema escalonada:

*−*





1 2 1 1 0

0 3 3 3 0





*− − −*



0 0 0 0 0 .



0 0 0 0 0

Por tanto, para *a* = 2 y *b* = 1, rg(*A B*) = 2 y las ecuaciones del segundo sistema se obtienen a partir del primero mediante operaciones elementales, por lo que toda solucio´n del primer sistema tambie´n lo sera´ del segundo.

*− |*

Es sencillo comprobar que la matriz del segundo sistema tiene tambie´n rango 2, por lo que las ecuacio- nes del primer sistema pueden ser tambie´n expresadas mediante operaciones elementales a partir del primero, y ambos sistemas son equivalentes.

Solucio´n 1.12. En primer lugar, la matriz *AB* esta´ bien definida y se trata de una matriz 2 *×* 2. Si llamamos

*A* = (*a*1) y *B* = *b*1 *b*2 ,

*a*2

se obtiene

*AB* = (*a*1) *b*1 *b*2 = (*a*1*b*1 *a*1*b*2) ,

y esta matriz nunca sera´ invertible porque det(*AB*) = *a*1*b*1*a*2*b*2 *− a*1*b*2*a*2*b*1 = 0 para cualquier valor

*a*2

*a*2*b*1 *a*2*b*2

*a*1, *a*2, *b*1, *b*2 *∈* R.

Finalmente, si *A* es un vector columna y *B* un vector fila, es decir,

*a*1

*a*2

 

*A* = .

 

.

*an*

y *B* = *b*1

*b*2 *· · · bn* .

Si expresamos la matriz *AB* en funcio´n de sus columnas, tenemos

*AB* = *b*1*A b*2*A* ... *bn−*1*A bnA* ,

de modo que todas las columnas de *AB* son proporcionales al vector columna *A*. Por tanto, es inmediato deducir que det(*AB*) = 0 (la matriz *AB* tiene rango menor o igual a 1) y la matriz no es invertible.

Solucio´n 1.13.

1. Como 0 = *An*, entonces 0 = det(*An*) = (det(*A*))*n* y deducimos que det(*A*) = 0.
2. Si *A* es nilpotente, se tiene que det(*A*) = 0 y aplicando el ejercicio [1.10](#_bookmark1) deducimos

*A*2 *−* tr(*A*)*A* = *−* det(*A*)*I*2 = 0, (1)

o equivalentemente, *A*2 = tr(*A*)*A*. Adema´s, deducimos que

*A*3 = *A*2*A* = tr(*A*)*A*2 = (tr(*A*))2*A*,

*A*4 = *A*3*A* = (tr(*A*))2*A*2 = (tr(*A*))3*A*,

de donde puede probarse por induccio´n que *An* = (tr *A*)*n−*1*A*. Deducimos entonces que *An* es una matriz no nula si *A* es no nula y tr(*A*) *̸*= 0.

Por tanto, para que *A* = 0 sea nilpotente, es necesario que tr(*A*) = 0 (y tambie´n det(*A*) = 0). Dichas matrices sera´n del tipo

*̸*

( ) *∈*

1. Si *An* = 0, entonces ya que

*A* = *a b* , *a*2 = *bc*, *a*, *b*, *c* R.

*c −a*

(*A* + *In*)*−*1 = *In − A* + *A*2 *− A*3 + ... + (*−*1)*n−*1*An−*1

(*In* + *A*)(*In − A* + *A*2 *− A*3 + ... + (*−*1)*n−*1*An−*1) = *In* + (*−*1)*n−*1*An* = *In*, (*In − A* + *A*2 *− A*3 + ... + (*−*1)*n−*1*An−*1)(*In* + *A*) = *In* + (*−*1)*n−*1*An* = *In*.

Solucio´n 2.1.

1. El conjunto *S* s´ı es un subespacio vectorial de R2 ya que
   1. si (*a*, *b*) y (*c*, *d* ) *∈ S* , entonces (*a*, *b*) + (*c*, *d* ) = (*a* + *c*, *b* + *d* ) *∈ S* ya que

(*a*, *b*) *∈ S ⇒ a* = 2*b* (*c*, *d* ) *∈ S ⇒ c* = 2*d*

1 + *⇒ a* + *c* = 2*b* + 2*d* = 2(*b* + *d* );

* 1. si (*a*, *b*) *∈ S* y *λ ∈* R, entonces *λ*(*a*, *b*) = (*λa*, *λb*) *∈ S* ya que

(*a*, *b*) *∈ S ⇒ a* = 2*b*

*λ ∈* R

1 *× ⇒ λa* = *λ*2*b* = 2(*λb*).

1. El conjunto *T* no es un subespacio vectorial de R2[*x* ] porque *q*(*x* ) = 0 *̸∈ T* (*q*(0) = 0 *̸*= 2).
2. El conjunto *R* no es un subespacio vectorial de *M*2*×*3 ya que la matriz *A* = (1 1 2) *∈ R* (con

1 1 3

*a* = 1), pero 2*A* = (2 2 4) *̸∈ R*.

2 2 6

1. El conjunto *U* no es un subespacio vectorial de R3: si tomamos *u* = (0, 0, 1) (vector obtenido con

*λ* = 0) y *u′* = (1, 2, 2) (vector obtenido con *λ* = 1), ambos pertenecen a *U*, pero su suma

*u* + *u′* = (0, 0, 1) + (1, 2, 2) = (1, 2, 3)

no pertenece a *U* (el sistema (1, 2, 3) = (*λ*, 2*λ*, *λ* + 1) es incompatible).

1. El conjunto *V* s´ı es subespacio vectorial de 2: si *A*, *B V* (es decir, *A* = *At* y *B* = *Bt*) y *λ* R, se tiene que

*M ∈ ∈*

* 1. (*A* + *B*)*t* = *At* + *Bt* = *A* + *B*, luego *A* + *B ∈ U*;
  2. (*λA*)*t* = *λAt* = *λA*, de donde se deduce que *λA ∈ U*; y por tanto *U* es subespacio.

1. El conjunto *W* no es un subespacio vectorial de R4. Como contraejemplo, si tomamos *λ* = 1 y *µ* = 1, obtenemos el vector *v* = (1, 1, 1, 0) *∈ W* . No obstante, 2*v* = (2, 2, 2, 0) no es un vector de *W* , ya que no es igual a (*λ*, *λµ*, *µ*, 0) para ningu´n valor de *λ*, *µ ∈* R.

Solucio´n 2.2.

1. El conjunto *W* s´ı es un subespacio vectorial de R2[*x* ] ya que
   1. si *r* (*x* ) = 2*b* + (*a* + *b*)*x* + (*a − b*)*x* 2 y *s*(*x* ) = 2*d* + (*c* + *d* )*x* + (*c* *− d* )*x* 2 *∈ W* , entonces la suma

*r* (*x* ) + *s*(*x* ) = 2(*b* + *d* ) +

(*a* + *c*) + (*b* + *d* ) *x* +

(*a* + *c*) *−* (*b* + *d* ) *x* 2 *∈ W* porque *a* + *c*, *b* + *d ∈* R;

* 1. si *r* (*x* ) = 2*b* +(*a*+*b*)*x* +(*a−b*)*x* 2 *∈ W* y *λ ∈* R, entonces *λr* (*x* ) = 2*λb* +(*λa*+*λb*)*x* +(*λa−λb*)*x* 2 *∈ W*

porque *λa*, *λb ∈* R.

1. *W* = *{*2*b* + (*a* + *b*)*x* + (*a − b*)*x* 2 *∈* R2[*x* ] *| a*, *b ∈* R*}* = *{a*(*x* + *x* 2) + *b*(2 + *x − x* 2) *∈* R2[*x* ] *| a*, *b ∈* R*}* =

= *⟨x* + *x* 2, 2 + *x − x* 2*⟩*.

1. Resolvemos: 3 + 2*x − x* 2 = *α*(*x* + *x* 2) + *β*(2 + *x − x* 2), es decir,



Te´rm. indep. : 3 = 2*β*

� *α* = ,

Coef. *x* : 2 = *α* + *β ⇒*

1

2

= 3 .

Coef. *x* 2 : *−*1 = *α − β*  *β* 2

Como el sistema tiene solucio´n, concluimos que *p*(*x* ) *∈ W* con *p*(*x* ) = 1 *x* + *x* 2 + 3 2 + *x − x* 2 .

2

2

Solucio´n 2.3. Tenemos tres vectores en un espacio de dimensio´n 3, as´ı que para comprobar que forman una base de R3 basta con ver que son linealmente independientes. Para ello, calculamos el rango:

1 *λ* + 1 3 *− λ* 1 *λ* + 1 3 *− λ* 

rg 1 *λ* 3





 *F*

1 *λ* + 1 1 *− λ*

=

2 *→F*2 *−F*1

rg 0 *−*1 *λ*

0 0 *−*2 *−* 2*λ*

 = 3.

*F*3 *→F*3 *−F*1

Como el rango de los vectores es 3 para cualquier *λ ∈* R, los vectores son linealmente independientes y para cualquier valor de *λ ∈* R forman una base de R3.

Solucio´n 2.4.

1. Es linealmente independiente porque *{u*, *w} ⊂ {u*, *v* , *w}*, que es linealmente independiente.
2. El nu´mero ma´ximo de vectores linealmente independientes coincide con la dimesio´n del espacio vectorial. Como *S* tiene 4 vectores y dim(*V* ) = 3, el conjunto *S* no es linealmente independiente.
3. Vamos a comprobar si *W* es linealmente independiente utilizando la definicio´n. Planteamos:

0 = *α*(*u* + *v* ) + *β*(*u − v* + *w* ) + *γ*(*v* + *w* ) = (*α* + *β*)*u* + (*α − β* + *γ*)*v* + (*β* + *γ*)*w* .

Como *{u*, *v* , *w}* es linealmente independiente:







*α* + *β* = 0

*α − β* + *γ* = 0 ∼

*α* + *β* = 0

*−*2*β* + *γ* = 0 ∼ 1

*α* + *β* = 0

*−*2*β* + *γ* = 0

 *β* + *γ* = 0

2

*E*2 *→E*2 *−E*1 

*β* + *γ* = 0

*E*3 *→E*3 + 2 *E*2 

3 *γ* = 0

Al ser el sistema compatible determinado con solucio´n *α* = *β* = *γ* = 0, deducimos que el conjunto

*W* s´ı que es linealmente independiente.

Solucio´n 2.5.

1. El conjunto *U* no es un sistema generador de *V* porque el nu´mero m´ınimo de vectores de un sistema generador coincide con la dimensio´n del espacio y dim(*V* ) = 3 *̸*= 2 = nº vectores de *U*.
2. El conjunto *W* s´ı es un sistema generador de *V* porque *B W* y *B* es sistema generador de *V* (por ser base).

*⊂*

Solucio´n 2.6.

1. El conjunto *B′* esta´ formado tres vectores y dim(R2[*x* ]) = 3, as´ı que para comprobar que forman una base de R2[*x* ] basta con ver que son linealmente independientes. Para ello, pasamos a coordenadas con respecto a la base esta´ndar *B* = *{*1, *x* , *x* 2*}*:

5*x* 2 = [0, 0, 5]*B* , *x* 2 + 2*x* = [0, 2, 1]*B* , *x* 2 + *x* + 7 = [7, 1, 1]*B* ,

 

0 0 5

y como rg 0 2 1 = 3, concluimos que los vectores de *B′* son linealmente independientes y,

 

7 1 1

por lo tanto, forman una base de R2[*x* ].

1. Escribimos las coordenadas de los elementos de *B′* con respecto *B* en las columnas de *PB←B′* en

 

0 0 7

el orden adecuado: *PB←B′* = 0 2 1 .

 

5 1 1

Solucio´n 2.7.

* Como *b*1 es el primer vector de la base *B*: *b*1 = [1, 0]*B* .
* De la matriz *PC←B* deducimos que *b*1 = [*−*1, 0]*C* .
* *PD←B* = *PD←C PC←B* = ( 1 0) (*−*1 2) = (*−*1 2 ).

*−*1 1 0 1 1 *−*1

* De la matriz *PD←B* deducimos que *b*1 = [*−*1, 1]*D* .
* *PB←C* = (*PC←B* )*−*1 = (*−*1 2) ya que

0 1

(*PC←B | I*2) = ( *−*1 2

0 1

0 1

*F*1 *→F*1 *−*2*F*2

0 1

*F*1 *→−F*1

0 1

1 0 ) ∼

( *−*1 0

0 1

1 *−*2 ) ∼

( 1 0

0 1

*−*1 2 ) =

Solucio´n 2.8.

= (*I*2 *|* (*PC←B* )*−*1).

1. Colocamos los tres vectores como columnas de una matriz *A* y la escalonamos:

1 2 1

*A* =   ∼

1 2 1

1 2 1 

  ∼

0 0 0

1 2 1 

0 *−*1 *−*1 .

1 2 0 *F*2 *→F*2 *−F*1 0 0 *−*1 *F*2 *↔F*4 0 0 *−*1

2 3 1

*F*3 *→F*3 *−F*1 *F*4 *→F*4 *−*2*F*1

0 *−*1 *−*1

0 0 0

vemos que el rango es 3, por lo que los tres vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base de *V* . Se sigue adema´s que dim(*V* ) = 3.

1. *V* es espacio vectorial por ser un subespacio vectorial de R4. En *V* , el subconjunto *W* viene definido como el siguiente conjunto de soluciones al sistema de ecuaciones lineales homoge´neas

*x*1 = 0, *x*2 = 0,

as´ı que es subespacio de *V* . Como *V* viene definido por la ecuacio´n impl´ıcita

*x*1 *− x*2 = 0,

se tiene que el u´nico vector de *V* que cumple que *x*1 = 0 y *x*2 = 0, es el vector 0. Se concluye que

*W* = *{*0*}*, el subespacio nulo, que no tiene base.

Solucio´n 2.9.

1. *B′* es un conjunto de 3 vectores en R3, luego basta ver que son linealmente independientes para verificar que forman base. Respecto a la base *B*, se tiene que

*e*1 + *e*2 = [1, 1, 0]*B*, *e*1 *− e*2 *− e*3 = [1, *−*1, *−*1]*B*, *e*3 = [0, 0, 1]*B*,

 

1 1 0

y como rg 1 *−*1 0 = 3, los vectores son linealmente independientes y constituyen una base

de R3.

0 *−*1 1

1. Por la propia definicio´n y construccio´n de la matriz cambio de base, se tiene que

1 1 0

*PB←B′* = 1 *−*1 0 ,

0 *−*1 1

y por las propiedades de la matriz cambio de base deducimos que

*PB′←B* = (*PB←B′* )*−*1 =

1 1 0 *−*1 1 1 0

1

1 *−*1 0





*−*

0

=

2

1

2

 

2



.

2

0 1 1 1 1

*−*

*−*

1

2 2

1. Supongamos que *v* es un vector que tiene las mismas coordenadas respecto a ambas bases, es decir, cumple que *v* = [*v*1, *v*2, *v*3]*B* = [*v*1, *v*2, *v*3]*B′* . Por tanto, matricialmente se verifica que:

*v*1 *v*1

*v*2 = *PB←B′* *v*2 ,

*v*3 *v*3

de donde despejando obtenemos el sistema

*v*1 0

(*PB←B′ − I*3) *v*2 = 0 .

*v*3

0

Como consecuencia, los vectores con las mismas coordenadas respecto a ambas bases son so- lucio´n de un sistema lineal homoge´neo y, por lo tanto, forman subespacio vectorial de R3.

Solucio´n 2.10. En primer lugar, se tiene que dim(*⟨v*1, *v*2*⟩*) = dim(*⟨v*3, *v*4*⟩*) = 2, ya que es sencillo verificar que *{v*1, *v*2*}* y *{v*3, *v*4*}* son dos conjuntos linealmente independientes.

Si formamos una matriz con *v*1, *v*2, *v*3 y *v*4 como filas y la escalonamos:

2 1 *−*1

2 1 *−*1 2 1 *−*1

3 3 *−*1 ∼



0 3 1 ∼ 0 3 1 

   2 2   2 2  ,

2

2

2

*−*

0 3 1

*F*2 *→F*2 *−* 3 *F*1

0 3 1

*F*3 *→F*3 *−*2*F*2

0 0 0

3 0 *−*2

*F*4 *→F*4 *−* 3 *F*1

0 *−*3

1

2

*F*4 *→F*4 +*F*2

0 0 0

vemos que el rango es 2, por lo que se deduce que *v*3 y *v*4 pueden expresarse como combinacio´n lineal de *v*1 y *v*2. Por tanto, *⟨v*3, *v*4*⟩ ⊆ ⟨v*1, *v*2*⟩*. Como ambos subespacios tienen dimensio´n dos, concluimos que

´

*⟨v*3, *v*4*⟩* = *⟨v*1, *v*2*⟩*, como querıamos probar.

Solucio´n 2.11.

1. Si resolvemos el sistema proporcionado por las ecuaciones impl´ıcitas de *W*1 obtenemos una base de dicho subespacio, como por ejemplo

*BW*1 = *{*(*−*1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)*}*,

lo que prueba que *W*1 tiene dimensio´n 2. Por otro lado, como (0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1) es un conjunto linealmente independiente, deducimos que tambie´n es base de *W*2.

*{ − }*

Si juntamos las bases de *W*1 y *W*2 obtenemos un sistema generador de *W*1 + *W*2, que puede no ser base. Si formamos una matriz con dichos vectores y escalonamos con operaciones elementales por filas:

*−*1 0 1 0 

  ∼

0 1 0 1

*−*1 0 1 0 

  ∼

0 1 0 1

*−*1 0 1 0

  ,

0 1 0 1

 1 1 *−*1 *−*1 *F*3 *→F*3 +*F*1  0 1 0 *−*1 *F*3 *→F*3 *−F*2  0 0 0 0

0 0 0 1

0 0 0 1

0 0 0 1

deducimos que el rango es 3 y se sigue que dim(*W*1 + *W*2) = 3.

Aplicando la fo´rmula de Grassmann obtenemos la dimensio´n del subespacio interseccio´n:

dim(*W*1 *∩ W*2) = dim(*W*1) + dim(*W*2) *−* dim(*W*1 + *W*2) = 2 + 2 *−* 3 = 1.

1. S´ı, es posible que exista. Un posible ejemplo viene dado por

*W*3 = *⟨*(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)*⟩*,

que cumple lo deseado.

1 0 *−*1 0

Veamos que es suplementario de *W*1. Se tiene que rg 0 1 0 1 = 4, de donde se deduce

0 0 1 0

 

0 0 0 1

que dim(*W*1 + *W*3) = 4 y por tanto *W*1 + *W*3 = R4. Como claramente dim(*W*3) = 2, la fo´rmula de Grassmann proporciona que dim *W*1 *W*3 = 0, de donde *W*1 + *W*3 = 0 , luego *W*3 es suplementario de *W*1. Ca´lculos similares prueban que *W*3 tambie´n es suplementario de *W*2.

*∩ { }*

Solucio´n 2.12. La respuesta es negativa: tres vectores no son siempre linealmente independientes aun- que dos a dos lo sean. Un posible ejemplo es el dado por los siguientes tres vectores de R3:

*v*1 = (1, 0, 0), *v*2 = (0, 1, 0), *v*3 = (1, 1, 0).

Es sencillo verificar que *v*1, *v*2 , *v*1, *v*3 , *v*2, *v*3 son conjuntos linealmente independientes, pero *v*1, *v*2, *v*3

*{ } { } { } { }*

es linealmente dependiente, puesto que *v*3 = *v*1 + *v*2.

Solucio´n 2.13.

1. Si recordamos la definicio´n del subespacio suma como

*V*1 + *V*2 = *{v*1 + *v*2 *| v*1 *∈ V*1, *v*2 *∈ V*2*}*,

se tiene que si *V*1 + *V*2 = *V* , todo vector *v* de *V* puede expresarse como *v* = *v*1 + *v*2 para algu´n

*v*1 *∈ V*1, *v*2 *∈ V*2. Si suponemos que hay otra expresio´n *v* = *v*1*′* + *v*2*′* , con *v*1*′ ∈ V*1, *v*2*′ ∈ V*2, se tiene que

*v* = *v*1 + *v*2 = *v*1*′* + *v*2*′* .

Despejando en la u´ltima igualdad, se sigue que

*v*1 *− v*1*′* = *v*2*′ − v*2.

Este vector pertenece simulta´neamente a *V*1 y *V*2, ya que *v*1 *− v*1*′ ∈ V*1, pero tambie´n *v*2 *− v*2*′ ∈ V*2.

Como *V*1 *∩ V*2 = *{*0*}*, se tendra´ entonces que

*v*1 *− v*1*′* = *v*2*′ − v*2 = 0

y por tanto *v*1 = *v*1*′* , *v*2 = *v*2*′* y concluimos que la expresio´n es u´nica.

1. Obtengamos en primer lugar una base de *V*1 +*V*2. Se verifica que los siguientes conjuntos son base de *V*1 y *V*2, respectivamente

*BV*1 = *{*(*−*1, 0, 1), (0, *−*1, 1)*}*, *BV*2 = *{*(1, 1, 1)*}*,

de donde se sigue que *V* +*V* = ( 1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1) es sistema generador de *V*1 + *V*2. Es adema´s base de *V*1 + *V*2 por ser linealmente independiente, puesto que

 

*B* 1 2 *{ − − }*

1 0 1

*−*

rg 0 1 1 = 3.

 *−* 

1 1 1

La descomposicio´n buscada se halla expresando el vector (1, 0, 1) respecto a esta base, para lo que resolvemos el sistema

(1, 0, 1) = *λ*1(*−*1, 0, 1) + *λ*2(0, *−*1, 1) + *λ*3(1, 1, 1),

o equivalentemente,



*−λ*1 + *λ*3 = 1,

*− λ*2 + *λ*3 = 0,

 *λ*1 + *λ*2 + *λ*3 = 1,

cuya solucio´n es *λ*1 = *−*1 , *λ*2 = 2 , *λ*3 = 2 . Por tanto, sumando los dos primeros vectores, que

3 3 3

pertenecen a *V*1, obtenemos la descomposicio´n deseada:

1

*v* = *−* (*−*

1, 0, 1) +

2

(0,

*−*1, 1) +

2

(1, 1, 1) =

( 1 , *−*2 , 1 ) + ( 2 ,

2 , 2 ) .

3 3 3

3 3 3

3 3 3

Solucio´n 3.1.

1. *f* no es una aplicacio´n lineal porque *f* (0, 0) = *x* 2 *̸*= 0 + 0*x* + 0*x* 2.
2. *f* es una aplicacio´n lineal ya que
   1. *f* (*x* , *y* , *z* ) + *f* (*u*, *v* , *w* ) = (*x −* 2*z* ) + (*u −* 2*w* ) = (*x* + *u*) *−* 2(*z* + *w* ) = *f* (*x* + *u*, *y* + *v* , *z* + *w* );
   2. *λf* (*x* , *y* , *z* ) = *λ*(*x −* 2*z* ) = *λx −* 2*λz* = *f* (*λx* , *λy* , *λz* ) = *f* (*λ*(*x* , *y* , *z* )).

(0 0)

0 0

0 0

1. *f* no es una aplicacio´n lineal porque *f* 0 0 = 0 0 *̸*= 0 0.

1 1

0 0

1. *f* no es una aplicacio´n lineal porque *f* (2 (2 2)) = *f* (4 4) = 16*x* 2 + 4*x* + 4 pero no coincide con

2 2 4 4

( )

2*f* 2 2 = 2(4*x* 2 + 2*x* + 2) = 8*x* 2 + 4*x* + 4.

2 2

Solucio´n 3.2.

1. ker(*f* ) = �(*a*, *b*) *∈* R2 *| f* (*x* , *y* ) = (0 0)1 = �(*a*, *b*) *∈* R2 *|* (*a* + *b b*) = (0 0)1 = *{*(0, 0)*}* ya que el

0 0



**** *a* + *b* = 0

0 *a* 0 0

sistema

****

*b* = 0

*a* = 0

0 = 0

es compatible determinado con solucio´n *a* = *b* = 0.

1. ker(*f* ) = *{ax* 2 + *bx* + *c ∈* R2[*x* ] *| f* (*ax* 2 + *bx* + *c*) = 0*}* = *{ax* 2 + *bx* + *c ∈* R2[*x* ] *| a* + 2*b − c* = 0*}* =

= *{*(*α −* 2*β*)*x* 2 + *βx* + *α ∈* R2[*x* ] *| α*, *β ∈* R*}* = *{α*(*x* 2 + 1) + *β*(*−*2*x* 2 + *x* ) *∈* R2[*x* ] *| α*, *β ∈* R*}* =

= *⟨x* 2 + 1, *−*2*x* 2 + *x⟩*,

 *−*

donde hemos resuelto la ecuacio´n

Solucio´n 3.3.

{*a* + 2*b − c* = 0 *⇒*

*a* = *α* 2*β*,

*b* = *β*,

 *c* = *α*,

con *α*, *β ∈* R.

1. Como *B* = *{*(1, 0), (0, 1)*}* es un sistema generador de R2, entonces

Im(*f* ) = *⟨f* (1, 0), *f* (0, 1)*⟩* = ((1 0) , (1 1)) .

0 1 0 0

1. Como *B* = *{*1, *x* , *x* 2*}* es una base de R2[*x* ], entonces

Solucio´n 3.4.

Im(*f* ) = *⟨f* (1), *f* (*x* ), *f* (*x* 2)*⟩* = *⟨−*1, 2, 1*⟩* = *⟨*1*⟩*.

1. Como dim(R2) = 2, basta con comprobar que los dos vectores de *B* son linealmente independientes y esto es cierto ya que rg (*−*1 1) = rg (*−*1 1) = 2.

2 1

0 3

1. Calculamos las coordenadas de la imagen de los elementos de *B* con respecto a *Bc* :

*f* (2, 1) = (0 *−*1) = 0 *·* (1 0) *−* 1 *·* (0 1) + 1 *·* (0 0) + 2 *·* (0 0) = [0, *−*1, 1, 2]*B* ,

1 2

0 0

0 0

1 0

0 1

*c*

*f* (*−*1, 1) = ( 1 *−*2) = 1 *·* (1 0) *−* 2 *·* (0 1) *−* 1 *·* (0 0) + 0 *·* (0 0) = [1, *−*2, *−*1, 0]*B* .

*−*1 0

0 0 0 0 1 0 0 1 *c*

 0 1 

Entonces, *MB ←B* (*f* ) = *−*1 *−*2.

*c*

 1 *−*1

2 0

1. ker(*f* ) =

�(*x* , *y* ) *∈* R2 *| f* (*x* , *y* ) =

0 0 =

(

)1

0 0

****

****

*α*

[*α*, *β*]*B | MBc ←B* (*f* ) *β*

(

)

0

= 0**** =

0

****



      

0

  

*−*

*α β*

2*α*



0****

0 1 0

****

(

)

****

****

  

0

*β* 0 ****

= [*α*, *β*]*B |* *−*1 *−*2 *α*

****

 1 *−*1

*β*

0****

****



2 0

=   =

0

[*α*, *β*]*B |* *−α −* 2*β* = 0 =

0

= *{*[0, 0]*B }* = *⟨*[0, 0]*B ⟩* = *⟨*(0, 0)*⟩*.

1. Como R2 = *⟨*(2, 1), (*−*1, 1)*⟩*, entonces Im(*f* ) = *⟨f* (2, 1), *f* (*−*1, 1)*⟩* = *⟨*[0, *−*1, 1, 2]*B* , [1, *−*2, *−*1, 0]*B ⟩*

y como adema´s, rg (1 *−*2 *−*1 0) = 2, deducimos que los vectores con coordenadas [0, *−*1, 1, 2]*B*

0 *−*1 1 2

y [1, *−*2, *−*1, 0]*B* son linealmente independientes y una base de Im(*f* ) es �(0 *−*1) , ( 1 *−*2)1.

1. Como *MBc ←B′* (*f* ) = *MBc ←B* (*f* )*PB←B′* , calculamos *PB←B′* :

1 2 *−*1 0

*c c c*

� 1 = 2*α − β* � *α* = 1

3

� *− ⇒*

� *λ* =

(1, 0) = *α*(2, 1) + *β*(*−*1, 1) *⇒*

0 = *α* + *β ⇒*

3

*β* = *−*1

*⇒* (0, 1) =

,

,

1 *−*1

3

3

*B*

(0, 1) = *λ*(2, 1) + *γ*(*−*1, 1) *⇒*

Entonces, *PB←B′* = 1 ( 1 1) y

0 = 2*λ γ*

1 = *λ* + *γ*

1

3

*γ* = 2

3

*⇒* (0, 1) =

1 2

, .

1. 3 *B*

*c* 3 *−*1 2

 0 1  (

) *−*1 2 

*M ′* (*f* ) = *M*

(*f* )*P*

*′* = 1 *−*1 *−*2

1 1 = 1  1 *−*5 .

Solucio´n 3.5.

*Bc ←Bc*

 1 

*Bc ←B*

1

*B←Bc*

3  1 *−*1

2 0

*−*1 2

3  2 *−*1

2 2

* 1. Como rg(*A*) = rg *−*1 = rg 0 = 1, deducimos que *f* es inyectiva (rg(*A*) = dim(R) = 1), no es

2

0

sobreyectiva (rg(*A*) = 1 *̸*= 3 = dim(R2[*x* ])) y no es biyectiva (porque no es sobreyectiva).

* 1. *f* no es inyectiva porque ker(*f* ) = (0, 0) (ya que (0, 1) ker(*f* )), no es sobreyectiva porque

*̸ { } ∈*

dim(R3) = 3 *>* 2 = dim(R2) y tampoco es biyectiva porque no es inyectiva (o sobreyectiva).

Solucio´n 3.6.

1. Calculamos las coordenadas de las ima´genes de los elementos de *B* con respecto *B′*:

*f* (*v*1) = *w*1 + 2*w*2 = [1, 2]*B′* , *f* (*v*2) = *−w*1 = [*−*1, 0]*B′* , *f* (*v*3) = *w*1 + *w*2 = [1, 1]*B′* ,

entonces, *MB′←B* (*f* ) = (1 *−*1 1).

2 0 1

1. Como dim(*W* ) = 2 (ya que la base *B′* tiene dos elementos) y *C* tiene dos vectores, basta con comprobar que esos vectores son linealmente independientes y esto es cierto ya que

rg ( 1 2) = rg (1 2) = 2.

*−*1 0 0 2

Por lo tanto, deducimos que *C* es una base de *W* .

1. Calculamos las coordenadas de las ima´genes de los elementos de *B* con respecto *B′*:

Sabemos que *f* (*v*1) = [1, 0]*C* y *f* (*v*2) = [0, 1]*C* y

*f* (*v*3) = *w*1 + *w*2 = *αf* (*v*1) + *βf* (*v*2) = *α*(*w*1 + 2*w*2) + *β*(*−w*1) *⇒* 0 = (*α − β −* 1)*w*1 + (2*α −* 1)*w*2

Al ser *B′* una base, los vectores *w*1 y *w*2 son linealmente independientes y como tenemos una combinacio´n lineal nula de esos dos elementos, deducimos que

y por lo tanto, Solucio´n 3.7.

2

2

1. Puesto que

*f* (*v*3) = [ 1 ,

*−*1 ]*C*

*α − β −* 1 = 0

2*α −* 1 = 0

� *⇒*

. Entonces, *MC←B* (*f* ) =

1

2

� *α* = ,

*β* = *−*1 ,

2

1

(1 0 ).

2

0 1 *−*1

2

*f* (1, 0, 0) = (1, 0, 1) = [1, 0, 1]*Bc* ,

*f* (0, 1, 0) = (1, 0, 0) = [1, 0, 0]*Bc* ,

*f* (0, 0, 1) = (0, 1, 1) = [0, 1, 1]*Bc* ,

 

1 1 0

se obtiene que *MBc ←Bc* (*f* ) = 0 0 1 .

 

1 0 1

1. Sea *V* el subespacio de ecuacio´n *x* + *y* + *z* = 0. Resolviendo el sistema formado por esa u´nica ecuacio´n impl´ıcita, se obtiene que los vectores *v*1 = (0, 1, 1), *v*2 = ( 1, 0, 1) forman una base de *V* . Sus ima´genes,

*− −*

*f* (*v*1) = (*−*1, 1, 1), *f* (*v*2) = (*−*1, 1, 0),

forman una base del subespacio *f* (*V* ). Por tanto, *f* (*V* ) = ( 1, 1, 1), ( 1, 1, 0) (es un plano, de ecua- cio´n *x* + *y* = 0).

*⟨ − − ⟩*

1. Un vector *v* = (*x* , *y* , *z* ) *∈* R3 cumplira´ que *f* (*v* ) *∈ W* si satisface la ecuacio´n impl´ıcita de *W* , es decir, si *x − y* = 0. Puesto que

*f* (*x* , *y* , *z* ) = (*x* + *y* , *z* , *x* + *z* ),

*f* (*v* ) cumplira´ la ecuacio´n si la diferencia entre su primera y segunda coordenada es cero, esto es, si

que es la ecuacio´n de un plano en R3.

Solucio´n 3.8.

(*x* + *y* ) *− z* = 0,

1. Puesto que *B′* = *{*(1, 1), (2, 1)*}* es base de R2 (son linealmente independientes), y adema´s

*f* (1, 1) = (2, 2), *f* (2, 1) = (0, 0),

se tiene que *MB ←B′* = (2 0).

*c* 2 0

Finalmente,

*MB ←B* (*f* ) = *MB ←B′* (*f* )*PB′←B*

*c*

*c*

*c*

= *MB ←B′* (*f* ) (*PB ←B′* )*−*1 =

*c*

*c*

*c*

(2 0) (1 2)*−*1

=

=

=

.

2 0

1 1

(2 0) (*−*1 2 )

2 0

1 *−*1

(*−*2 4)

*−*2 4

1. Empleando de nuevo la matriz cambio de base adecuada, tenemos que

*MB′←B′* (*f* ) = *PB′←B MB ←B′* (*f* ) = (*−*1 2 ) (2 0) = (2 0) .

*c*

*c*

1 *−*1

2 0

0 0

Solucio´n 3.9. Recordemos que, dada una matriz cuadrada *A* = (*aij* ) *∈ Mn*, se define la traza como

*n*

L

tr(*A*) = *a*11 + *a*22 + ... + *ann* = *aii* .

*i* =1

En el caso de *M*2, la aplicacio´n viene dada por *f* (*A*) = *a*11 + *a*22.

1. *f* es lineal, puesto que si *A*, *B ∈ M*2 y *λ ∈* R se cumple:
   1. *f* (*A*) + *f* (*B*) = *a*11 + *a*22 + *b*11 + *b*22 = *a*11 + *b*11 + *a*22 + *b*22 = *f* (*A* + *B*);
   2. *λf* (*A*) = *λ*(*a*11 + *a*22) = *λa*11 + *λa*22 = *f* (*λA*).
2. Sea *A ∈ M*2 tal que *f* (*A*) = 0. Por la definicio´n de traza, *A* verifica la ecuacio´n impl´ıcita

tr(*A*) = *a*11 + *a*22 = 0

cuya solucio´n es

*a*11 = *−λ*, *a*12 = *γ*, *a*21 = *β*, *a*22 = *λ*,

con *λ*, *β*, *γ ∈* R. Matricialmente:

ker(*f* ) = �(*−λ γ*) : *λ*, *β*, *γ ∈* R1 .

Se tiene por tanto que dim(ker(*f* )) = 3 y una base viene dada por:

*β λ*

*B* = �(*−*1 0) , (0 1) , (0 0)1 .

ker(*f* )

0 1

0 0

1 0

Solucio´n 3.10. Si realizamos operaciones elementales por filas para calcular el rango de *MBc* (*f* ),

4 2 2

2 1 1

2 1 1 

*α* 4 4 ∼ *α* 4 4 ∼ 0 4 *− α* 4 *− α*  ,

2

2

2 1 *β*

*F*1 *→* 1 *F*1

2 1 *β*

*F*2 *→F*2 *− α F*1 *F*3 *→F*3 *−F*1

2

0 0

2

*β −* 1

podemos hacer el siguiente ana´lisis por casos analizando sus pivotes:

* Si *α ̸*= 8, *β ̸*= 1, entonces rg(*A*) = 3.
* Si *α ̸*= 8, *β* = 1, entonces rg(*A*) = 2.
* Si *α* = 8, *β ̸*= 1, entonces rg(*A*) = 2.
* Si *α* = 8, *β* = 1, entonces rg(*A*) = 1.

Puesto que rg(*A*) = dim(Im(*f* )) y dim(ker(*f* )) + dim(Im(*f* )) = 3, se tendra´ que

* Si *α ̸*= 8 y *β ̸*= 1, entonces *f* es biyectiva porque dim(ker(*f* )) = rg(*A*) = dim(Im(*f* )).
* En resto de casos (*α* = 8 o *β* = 1), *f* no es inyectiva (porque dim(ker(*f* )) *̸*= rg(*A*)) ni sobreyectiva (porque dim(Im(*f* )) *̸*= rg(*A*)).

Solucio´n 3.11.

1. La aplicacio´n *g* es lineal, puesto que, para todo *A*1, *A*2 *∈ M*2, *α ∈* R, se tiene que
   1. *g* (*A*1 + *A*2) = (*A*1 + *A*2)*B* = *A*1*B* + *A*2*B* = *g* (*A*1) + *g* (*A*2),
   2. *g* (*αA*1) = (*αA*1)*B* = *αA*1*B* = *αg* (*A*1),

por las propiedades del producto matricial.

1. Si calculamos las ima´genes de las matrices de la base cano´nica y las expresamos en coordenadas, se tiene que

*g* (1 0) = (1 0) (1 3) = (1 3) = [1, 3, 0, 0]*B* ,

0 0

0 0

2 6

0 0

*c*

*g* (0 1) = (0 1) (1 3) = (2 6) = [2, 6, 0, 0]*B* ,

0 0

0 0

2 6

0 0

*c*

*g* (0 0) = (0 0) (1 3) = (0 0) = [0, 0, 1, 3]*B* ,

1 0

1 0

2 6

1 3

*c*

*g* (0 0) = (0 0) (1 3) = (0 0) = [0, 0, 2, 6]*B* ,

0 0

0 1

2 6

2 6

*c*

de donde se obtiene que la matriz asociada respecto a la base cano´nica es

1 2 0 0

*MB ←B* (*f* ) =   .

3 6 0 0

 

*c*

*c*

0 0 1 2

0 0 3 6

1. Una matriz *A ∈ M*2 pertenece al nu´cleo si cumple que *g* (*A*) = 0, esto es

(*a*11 *a*12) (1 3) = (0 0) .

*a*21 *a*22 2 6 0 0

Se obtiene el sistema de ecuaciones

****

*a*11 + 2*a*12 = 0, 3*a*11 + 6*a*12 = 0,

**** 21

*a*

+ 2*a*22

= 0,

cuya solucio´n es

3*a*21 + 6*a*22 = 0,

*a*11 = *−*2*µ*, *a*12 = *µ*, *a*21 = *−*2*λ*, *a*22 = *λ*,

con *λ*, *µ ∈* R. Por tanto,

ker(*g* ) =

*−*2*µ µ*

*−*

�(

2*λ λ*)

*| λ*, *µ ∈* R1 .

El nu´cleo tiene dimensio´n 2 y una base viene dada por *B*

= �(*−*2 1) , ( 0 0)1.

1. La dimensio´n de la imagen es igual a 2, dado que

ker(*g* )

0 0 *−*2 1

dim(Im(*g* ) = dim(*M*2) *−* dim(ker(*g* )) = 4 *−* 2 = 2.

Solucio´n 4.1. Calculamos los valores propios (con sus multiplicidades algebraicas):

3 *− λ* 2 0 

*p*(*λ*) = det(*A − λI*3) = det 

*−*1 *−λ* 0

1 0 2 *− λ*

 = *−*(*λ −* 2)2(*λ −* 1).

Los valores propios de *A* son *λ*1 = 1 y *λ*2 = 1 con *ma*(1) = 1 y *ma*(2) = 2. Calculamos las multiplicidades geome´tricas:

*mg* (1) = 1 proque 1 *≤ mg* (1) *≤ ma*(1) = 1,

 1 2 0 1 2 0

*mg* (2) = 3 *−* rg(*A −* 2*I*3) = 3 *−* rg *−*1 *−*2 0 = 3 *−* rg 0 0 0 = 3 *−* rg 0 *−*2 0 =

1 2 0

= 3 *−* 2 = 1.

1 0 0

0 *−*2 0

0 0 0

Como *ma*(2) = 2 *̸*= 1 = *mg* (2), concluimos que *A* no es diagonalizable.

Solucio´n 4.2. Sea *Bc* = *{*(1, 0), (0, 1)*}*. Entonces *A* = *MB ←B* (*f* ) = (3 *−*1). Como la matriz es sime´trica

*c*

*c*

2 0

(*A* = *AT* ), deducimos que *f* es diagonalizable. Para obtener la base *B*, necesitamos los valores y vectores propios de *A*.

Calculamos los valores propios (con sus multiplicidades algebraicas):

*p*(*λ*) = det(*A − λI*2) = det (3 *− λ −*1) = (*λ −* 2)(*λ −* 1).

2 *−λ*

Los valores propios de *A* son *λ*1 = 1 y *λ*2 = 1 con *ma*(1) = 1 y *ma*(2) = 1. Calculamos el subespacio propio *V*1:

*V*1 = �(*x* , *y* ) *∈* R2 *| A* (*x* ) = 1 (*x* )1 = �(*x* , *y* ) *∈* R2 *|* (*A − I*2) (*x* ) = (0)1 ,

*y*

*y*

*y*

0

resolvemos el sistema (*A − I*2)*X* = 0, es decir, � 2*x − y* = 0 *⇒* SCI con solucio´n: � *x* = *α*, con *α ∈* R.

Entonces,

*V*1 = *{*(*α*, 2*α*) *∈* R2

*| α ∈* R*}* = *⟨*(1, 2)*⟩*.

2*x − y* = 0

*y* = 2*α*,

Calculamos el subespacio propio *V*2:

*V*2 = �(*x* , *y* ) *∈* R2 *| A* (*x* ) = 2 (*x* )1 = �(*x* , *y* ) *∈* R2 *|* (*A −* 2*I*2) (*x* ) = (0)1 ,

*y*

*y*

*y*

0

resolvemos el sistema (*A −* 2*I*2)*X* = 0, es decir, � *x − y* = 0 *⇒* SCI con solucio´n: � *x* = *β*,

con *β ∈* R.

Entonces, *V*2 = *{*(*β*, *β*) *∈* R2 *| β ∈* R*}* = *⟨*(1, 1)*⟩*.

2*x −* 2*y* = 0

*y* = *β*,

La base que buscamos es *B* = *{*(1, 2), (1, 1)*}*.

*−*3 0 *−a*

Solucio´n 4.3. Si *B* es la base cano´nica de R3, entonces *A* = *MB←B* (*f* ) = 0 2 0 .

 

1 0 0

Calculamos los valores propios de *A*:

*−*3 *− λ* 0 *−a*

(*−*3 *− λ −a*)

*p*(*λ*) = det(*A − λI*3) = det  0 2 *− λ* 0  = (2 *− λ*)(*−*1)2+2 det =

1 0 *−λ*

Adj. *C*2

1 *−λ*

= (2 *− λ*) [*λ*(3 + *λ*) + *a*] = (2 *− λ*)(*λ*2 + 3*λ* + *a*).

Como las ra´ıces de la ecuacio´n *λ*2 + 3*λ* + *a* = 0 vienen dadas por *λ* = *−*3*±√*9*−*4*a* , deducimos que *f* tiene tres valores propios (no necesariamente distintos) si 9 *−* 4*a ≥* 0, es decir, s2i *a ≤* 9 .

4

Solucio´n 4.4.

1. Como *λ* = 3 es valor propio de *A*, sabemos que 3 es ra´ız del polinomio caracter´ıstico, es decir,

*p*(3) = 0. Calculamos:

 

*−*2 *β β* 0 

 

*p*(3) = det(*A −* 3*I*4) = det  1 *−*1 *−*1 0  =

*−*2 *β β*

(*−*5)(*−*1)4+4 det  1 *−*1 *−*1 =

 0 0 *−*2 0  Adj. *C*4

*β* 1 0 *−*5

= (*−*5)(*−*2)(*−*1)3+3 det (*−*2 *β* ) = 10(2 *− β*) = 0 *⇒ β* = 2.

1 *−*1

1. Calculamos el subespacio propio *V*3:

4 *y y*

2 *y* 0

0 0 *−*2

Adj. *F*3

****

*x*  *x* ****

****

*x*  0****

*V*3 =

****

(*x* , *y* , *z* , *t*) *∈* R *| A*   = 3   =

*t*

*t*

(*x* , *y* ) *∈* R *|* (*A −* 3*I*4)   =   ,

*t*

0

resolvemos el sistema (*A −* 3*I*4)*X* = 0:



*z* 

*z* ****

****







*−*2 2 2 0 0

1 *−*1 *−*1 0 

0

0 0 *−*2 0

2 1 0 *−*5

0

0

∼ 

2

2 2 2 0

0 0 0 0

*−*

0

*z* 

0****

 ∼ 

0

0 0 *−*2 0

0 3 2 *−*5

0  *F*2 *↔F*4 

0

*−*2 2 2 0

0 3 2 *−*5

*−*

0 0 2 0

0 0 0 0

0 

 .

0



0

0

  *x* = 5*α* ,





*F*2 *→F*2 + 1 *F*1

*F*4 *→F*4 +*F*1

Es decir

*x − y − z* = 0

3*y* + 2*z −* 5*t* = 0

*⇒* SCI con solucio´n:



3

*y* = 5*α* ,

*z* = 0,

con *α ∈* R. Entonces,

3

 *z* = 0

**** *t* = *α*,

*V* = �( 5*α* , 5*α* , 0, *α*) *∈* R2 *| α ∈* R1 = (( 5 5 ))

3

3

3

3

,

3

, 0, 1

y tres vectores de *V*3 son ( 5 , 5 , 0, 1), (5, 5, 0, 3) y (*−*5, *−*5, 0, *−*3).

3

3

1. Calculamos el polinomio caracter´ıstico:

1 *− λ* 2 2 0 

*p*(*λ*) = det(*A − λI*4) = det 



1 2 *− λ −*1 0

0 0 1 *− λ* 0

2 1 0 *−*2 *− λ*

=

Adj. *C*4

1 *− λ* 2 2 

= (*−*2 *− λ*)(*−*1)4+4 det 



1 2 *− λ −*1

0 0 1 *− λ*

=

Adj. *F*3

= (*−*2 *− λ*)(1 *− λ*)(*−*1)3+3 det (1 *− λ* 2 ) = (*−*2 *− λ*)(1 *− λ*)[(1 *− λ*)(2 *− λ*) *−* 2] =

1 2 *− λ*

= (*−*2 *− λ*)(1 *− λ*)*λ*(*λ −* 3).

Los valores propios son *λ*1 = 0, *λ*2 = 1, *λ*3 = 2 y *λ*4 = 3. Como *A* 4 tiene 4 valores propios distintos, es diagonalizable.

*− ∈ M*

1 0   4  0

|  |  |
| --- | --- |
| 2 | 2 |
| 2 | *−*1 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

0 *−*2 0

1

1. Calculamos *Av* =    = . Como *Av* = 0 *· v* , deducimos que *v* es un vector

0 0   0  0

2

*−*2

1

0

*A* asociado al valor propio *λ* = 0

propio de

.

Solucio´n 4.5. Calculamos el polinomio caracter´ıstico de *A*:

2 *− λ −*2 *−*2 

*p*(*λ*) = det(*A − λI*3) = det 

*−*1 1 *− λ* 1

1 *−*1 *−*1 *− λ*

 = *−λ*3 + 2*λ*2 = *λ*2(*−λ* + 2),

y obtenemos que los autovalores de *A*: *λ* = 0, que es autovalor doble (o dicho de otro modo, tiene multiplicidad algebraica 2) y *λ* = 2, que es autovalor simple (la multiplicidad algebraica es 1).

El subespacio propio asociado a *λ* = 0 es el nu´cleo de *A*, *V*0 = ker(*A*). Resolvemos el sistema *AX* = 0:

 2 *−*2 *−*2 0 

 1 *−*1 *−*1 0 

 1 *−*1 *−*1 0 

 *−*1 1 *−*1 0  *F* ∼  *−*1 1 *−*1 0  *F* ∼  0 0 0 0  ,

1 *−*1 *−*1

0

1 *↔F*3

2 *−*2 *−*2

0

2 *→F*2 +*F*1

*F*3 *→F*3 *−*2*F*1

0 0 0

0

y vemos que el nu´cleo viene definido por la ecuacio´n *x − y − z* = 0, cuya solucio´n es

*V*0 = *{*(*µ* + *β*, *µ*, *β*) *| β*, *µ ∈* R*}*.

La multiplicidad geome´trica de *λ* = 0 es 2 y una base del nu´cleo es *{*(1, 0, 1), (0, 1, 1)*}*.

Para el segundo espacio propio, resolvemos el sistema de ecuaciones asociado a *V*2 = ker(*A −* 2*I*3):

 0 *−*2 *−*2 0   1 *−*1 *−*3 0   1 *−*1 *−*3 0   1 *−*1 *−*3 0 

 *−*1 *−*1 1 0  *F* ∼  *−*1 *−*1 1 0  *F* ∼  0 *−*2 *−*2 0  *F* ∼ *F*  0 *−*2 *−*2 0  .

1 *−*1 *−*3

0

1 *↔F*3

0 *−*2 *−*2

0

2 *↔F*2 +*F*1

0 *−*2 *−*2

0

3 *↔F*3 *−* 2

0 0 0

0

La solucio´n del sistema escalonado es la siguiente:

*V−*2 = *{*(2*β*, *−β*, *β*) *| β ∈* R*}*,

de donde obtenemos el autovector (2, *−*1, 1) como base. La multiplicidad geome´trica de *λ* = *−*2 es 1.

Dado que las multiplicidades geome´tricas y algebraicas coinciden para *λ* = 0 y *λ* = 2, la matriz *A* es diagonalizable.

*−*

Solucio´n 4.6. Si tomamos una matriz sime´trica 2 *×* 2, es decir, *A* = (*a b*) con *a*, *b*, *c ∈* R, y calculamos

*b c*

su polinomio caracter´ıstico

*−* 2 (

*p*(*λ*) = det(*A λI* ) = det *a − λ b*

*b c − λ*

=

) = (*a − λ*)(*c − λ*) *− b*2 = *λ*2 *−* (*a* + *c*)*λ* + (*ac − b*2),

al calcular sus ra´ıces vemos que

(*a* + *c*) *±* (*a* + *c*)2 *−* 4(*ac − b*2) (*a* + *c*) *±* (*a − c*)2 + 4*b*2

2

*λ* =

=

2

.

=

(*a* + *c*) *± √a*2 + *c*2 + 2*ac −* 4*ac* + 4*b*2 2

Como (*a c*)2 + 4*b*2 0, las ra´ıces son siempre nu´meros reales (la ra´ız es siempre mayor o igual a 0). Pueden darse dos casos:

*− ≥*

* (*a c*)2 + 4*b*2 *>* 0, en cuyo caso la matriz tiene dos autovalores reales distintos y es, por tanto, diagonalizable.

*−*

* (*a c*)2 + 4*b*2 = 0, lo que sucede si *a* = *c*, *b* = 0. En ese caso, *A* es tambie´n diagonalizable ya que es una matriz diagonal.

*−*

Solucio´n 4.7.

1. Calculamos el polinomio caracter´ıstico:

 

*−λ* 2 1

det(*A − λI*3) = det 2 3 *− λ* 2 = *−λ*3 + 3*λ*2 + 9*λ* + 5 = *−*(*λ* + 1)2(*λ −* 5),

 

1 2 *−λ*

y deducimos que los autovalores de *A* son: *λ* = 1, con multiplicidad algebraica 2, y *λ* = 5, con multiplicidad algebraica 1.

*−*

Del mismo modo,

2 *− λ* 1 0 

det(*B − λI*3) = det 

*−*1 2 *− λ* 0

0 0 *−*1 *− λ*

 = *−λ*3 + 3*λ*2 *− λ −* 5 = *−*(*λ* + 1)(*λ*2 *−* 4*λ* + 5).

Las ra´ıces del polinomio caracter´ıstico son 1, 2 *ι*˙, 2 + *ι*˙, luego tiene un u´nico autovalor real con multiplicidad algebraica 1 y dos autovalores complejos, 2 + *ι*˙ y 2 *ι*˙, tambie´n con multiplicidad algebraica 1.

*−*

*− −*

1. Si calculamos los subespacios propios de *A*, tenemos que *V−*1 = ker(*A*+*I*3). Si resolvemos el sistema

(*A* + *I*3)*X* = 0,









1 2 1 0 1 2 1 0

 2 4 2 0  *F* ∼ 2*F*  0 0 0 0  .

1 2 1

0

2 *→F*2 *−*

1

0 0 0

0

*F*3 *→F*3 *−F*1

El nu´cleo tiene por tanto una u´nica ecuacio´n impl´ıcita, *x* + 2*y* + *z* = 0, y la solucio´n es

*V−*1 = *{*(*−*2*µ − β*, *µ*, *β*) *| β*, *µ ∈* R*}*.

 2 *−*2 2

1 2 *−*5

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Una base de *V−*1 esta´ formada por los autovect Para el segundo autovalor, resolvemos el sistema   *−*5 2 1 0   1 2 *−*5 | | ores *{*(*−*2, 1, 0), (*−*1, 0, 1)*}*.  de ecuaciones asociado a *V*5  0   1 2 *−*5  *F*3 *→F*3 +5*F*1 | = ker(*A −* 5*I*3):  0   0  ∼  *−*1  0 *F*2 *→* 6 *F*2 *F*3 *→F*3 +2*F*2 |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| 0 0 0 | 0 |  |  |

0 *F* ∼ 

2 *−*2 2



*−*5 2 1

0  *F*

∼ 2*F*  0 *−*6 12

1 2 5

 *−*

0

1 *↔F*3

0

2 *→F*2 *−*

1

0 12 *−*24

∼  0 1 *−*2

0

0  .

Obtenemos el sistema de ecuaciones *x* + 2*y −* 5*z* = 0,

�

*y −* 2*z* = 0,

cuya solucio´n es

*V−*5 = *{*(*β*, 2*β*, *β*) *| β ∈* R*}*.

Una base es la formada por el autovector *{*(1, 2, 1)*}*.

Las multiplicidades algebraica y geome´trica de todos los autovalores coinciden, luego la matriz *A*

es diagonalizable sobre R. Una forma diagonal *D* y una matriz de paso *P* para *A* son

*−*1 0 0 *−*2 *−*1 1

*D* =  0 *−*1 0 , *P* =  1 0 2 ,

de modo que *A* = *PDP−*1.

0 0 5

0 1 1

La matriz *B* no es diagonalizable sobre R, ya que no tiene tres autovalores reales.

Solucio´n 4.8. A partir de los datos, se sigue que una forma diagonal de *M* es *D* = (2 0 ) respecto a

la base

)

(

*{*(2, 3), (1, 2)*}*. Si llamamos

2 1

*P* = *MBc ←B* = 3 2 ,

0 *−*1

la matriz *M* buscada cumple *M* = *PDP−*1. Por tanto

(2 1) (2 0 ) (2 1)*−*1

(2 1) (2 0 ) ( 2 *−*1)

(11 *−*6 )

*M* = 3 2

Solucio´n 4.9.

0 *−*1 3 2

= 3 2

0 *−*1

*−*3 2

= .

18 *−*10

1. Sea *λ* un autovalor de *A*. Por definicio´n, existe un autovector *v* no nulo tal que *Av* = *λv* . Entonces, si aplicamos *An* al vector *v* , aplicando *n* veces la definicio´n de autovector, vemos que

*Anv* = *An−*1(*Av* ) = *An−*1(*λv* ) = *λAn−*1*v* = *λAn−*2(*Av* ) = *λAn−*2(*λv* ) = *λ*2*An−*2*v* = ... = *λnv* ,

de donde se deduce que *λn* es autovalor de *An*. Como *An* es la matriz nula (su u´nico autovalor es el 0), se deduce que *λn* = 0 y concluimos que *λ* = 0.

1. Sea *λ* un autovalor de *A*. Existe entonces *v* = 0 tal que *Av* = *λv* . Aplicando *A−*1 a ambos lados, deducimos que

*̸*

*A−*1(*Av* ) = *A−*1(*λv* ),

y como *A−*1*A* = *In* y *A−*1 es lineal, entonces *v* = *λA−*1*v* y despejando:

*A−*1*v* = *λ−*1*v* .

1. Si *λ* es autovalor de *A* entonces es ra´ız del polinomio caracter´ıstico y cumple por ello la ecuacio´n

det(*A − λIn*) = 0.

Si trasponemos la matriz *A λIn*, se tiene que (*A λIn*)*t* = *At λI t* = *At λIn* (por las propiedades de la traspuesta y por ser la matriz identidad una matriz sime´trica). Como el determinante de una matriz y de su traspuesta son iguales, se deduce que

*n*

*− − − −*

det(*A − λIn*) = det((*A − λIn*)*t*) = det(*At − λIn*) = 0,

lo que en particular implica que *λ* es ra´ız del polinomio caracter´ıstico de *At*, y por tanto es autovalor de *At*.

1. Sean *λ*1 y *λ*2 dos autovalores distintos y sean *v*1 y *v*2 sus respectivos autovectores asociados.

Veamos que *v*1 y *v*2 son linealmente independientes. Sean *a*1, *a*2 escalares tales que

*a*1*v*1 + *a*2*v*2 = 0. (2)

Si aplicamos *A* a la igualdad anterior se tiene que

*A*(*a*1*v*1 + *a*2*v*2) = *a*1*Av*1 + *a*2*Av*2 = *a*1*λ*1*v*1 + *a*2*λ*2*v*2 = 0.

Por otro lado, si se multiplica [(2)](#_bookmark15) por *λ*2 conseguimos

*λ*2*a*1*v*1 + *λ*2*a*2*v*2 = 0. (3)

Restando [(3)](#_bookmark16) y [(3)](#_bookmark16) deducimos que

*a*1(*λ*2 *− λ*1)*v*1 = 0

y como *λ*1 = *λ*2 y *v*1 = 0, se sigue que *a*1 = 0. Sustituyendo de nuevo en [(2)](#_bookmark15) se obtiene que *a*2 = 0 y por tanto los autovectores son linealmente independientes.

*̸ ̸*

Solucio´n 5.1.

1. Vamos a comprobar que la matriz de Gram *GB* (siendo *B* la base cano´nica de R3) es sime´trica y definida positiva.

Calculamos la matriz de Gram:

(1, 0, 0) *·* (1, 0, 0) (1, 0, 0) *·* (0, 1, 0) (1, 0, 0) *·* (0, 0, 1)  2 *−*2 1

*GB* = (1, 0, 0) *·* (0, 1, 0) (0, 1, 0) *·* (0, 1, 0) (0, 1, 0) *·* (0, 0, 1) = *−*2 *β* 0 ,

(1, 0, 0) *·* (0, 0, 1) (0, 1, 0) *·* (0, 0, 1) (0, 0, 1) *·* (0, 0, 1)

1 0 6

que es sime´trica (*GB* = *GT* ) y tambie´n necesitamos que sea definida positiva:

24 det(*GB* ) = 11*β −* 24 *>* 0 *⇒ β >* 11 ;

*B*

det ( 2 *−*2) = 2*β −* 4 *>* 0 *⇒ β >* 2;

*−*2 *β*

det(2) = 2 *>* 0.

Concluimos que la aplicacio´n *·* es un producto escalar si *β >* 24 .

11

1. Calculamos un sistema generador de *W* :

*W* = *{*(*x* , *y* , *z* ) *∈* R3 *| x* + *y − z* = 0*}* = *{*(*α − β*, *β*, *α*) *∈* R3 *| α*, *β ∈* R*}* = *⟨*(1, 0, 1), (*−*1, 1, 0)*⟩*.

Como *v* (1, 0, 1) = 2 1 1 2 1 0 2 1 1 + 3 1 0 + 1 1 1 1 + 6 ( 1) 1 = 6 = 0, deducimos

*· · · − · · − · · · · · − · · − · − ̸*

que *v* no es ortogonal a *W* .

Solucio´n 5.2.

1. *∥v∥* = (2, 0, 1) *·* (2, 0, 1) = *√*13 ya que





(2, 0, 1) = *α*(1, 1, 1) + *β*(1, *−*1, 0) + *γ*(0, 0, 1) *⇒*

 

2 = *α* + *β*

0 = *α β*

*−*

 1 = *α* + *γ*

*α* = 1,

*β* = 1,

*⇒*

 *γ* = 0,

*⇒ v* = [1, 1, 0]*B* ,

1 7 0 5 1

7

(2, 0, 1) *·* (2, 0, 1) = 1 1 0 *GB* 1 = 1 1 0 0 9 1 1 = 1 1 0 9 = 13.

0

5 1 4

0

6

1. d(*v* , *w* ) = *∥v − w∥* = *∥*(2, 2, 1) *−* (2, 2, 0)*∥* = *∥*(0, 0, 1)*∥* = (0, 0, 1) *·* (0, 0, 1) = *√*4 = 2.

Solucio´n 5.3.

1. *p*(*x* ) *· q*(*x* ) = (*x* + *x* 2) *·* (1 + *x* ) = 1 *·* 0 + 1 *·* 1 + 0 *·* 1 + 1 *·* 1 + 1 *·* 0 + 2 *·* 0 *·* 1 = 2.
2. Como *∥r* (*x* )*∥* = (*−x* 2) *·* (*−x* 2) = (*−*1) *·* (*−*1) = 1, el vector *r* (*x* ) es unitario.

*p*(*x* ) *· p*(*x* ) *p*(*x* ) *· q*(*x* ) *p*(*x* ) *· r* (*x* )  2 2 *−*1

(c) *GB* =

*q*(*x* ) *· p*(*x* ) *q*(*x* ) *· q*(*x* ) *q*(*x* ) *· r* (*x* )

*r* (*x* ) *· p*(*x* ) *r* (*x* ) *· q*(*x* ) *r* (*x* ) *· r* (*x* )

=

2 5 0

*−*1 0 1

.

Solucio´n 5.4.

1. Como *b*1 = (1, 2, 0, *−*1) y *b*2 = (2, 1, 1, 0) son linealmente independientes (porque tienen rango 2), el conjunto *B* = *{b*1, *b*2*}* es una base de *T* . Utilizamos el me´todo de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal *B′* = *{w*1, *w*2*}* a partir de *B*.

*b*1 (1, 2, 0, *−*1)

*w*1 = =

*∥b*1*∥*

(1, 2, 0, *−*1)

( 1 2

*−*1 )

1 ( 1 2

(1, 2, 0, *−*1) *·* (1, 2, 0, *−*1) = *√*1 + 4 + 0 + 1 =

*√*6 , *√*6 , 0, *√*6

.

*u*2 = *b*2 *− Pr ⟨w*1 *⟩*(*b*2) = *b*2 *−* (*b*2 *· w*1)*w*1 = *b*2 *−*

(2, 1, 1, 0) *·*

*√*6 , *√*6 , 0, *√*6

*w*1 =

*−*1 )

, 1,

3 3

;

2 2

= *b*2 *−*

*√*6 + *√*6 + 0 + 0

*w*1 = (2, 1, 1, 0) *−*

, , 0,

6 6

=

,

3

( 4 8

*−*4 )

6

( 4 *−*1 2 )

*u*2

( 4 , *−*1 , 1, 2 )

( 4 , *−*1 , 1, 2 )

( 4

*−*1 1

2 )

*w*2 = *∥u ∥* = q 4 *−*1 2

2

( 3 ,

3 , 1, 3 ) *·* ( 3 ,

9 + 9 + 1 + 9

3

3

3

4 *−*1

3 , 1, 3 )

2 = q 4 1

4 = *√*18 , *√*18 , *√*2 , *√*18 .

Una base ortonormal de *T* es *B′* = { *√*1 , *√*2 , 0, *√−*1 , *√*4

3

6

6

6

18

3

3

, *√−*1 , *√*1 , *√*2

18

2

}.

1. Como (*x* 2 1) (*x* 2 + 2*x* + 3) = 3 1 1 + 2 0 2 + ( 1) 3 = 0, la base *B* es ortogonal y una base ortonormal de *W* sera´

*− · · · · · − ·*

18

*′* � *x* 2 *−* 1

*x* 2 + 2*x* + 3 1

� 1 2

1 1 2 1

3 1

ya que

*B* = ,

*∥x* 2 *−* 1*∥*

=

*∥x* 2 + 2*x* + 3*∥*

2 *x −* 2 , *√*20 *x*

+ *√*5 *x* + *√*20

1. Como

*x* 2 1 = (*x* 2 1) (*x* 2 1) = 3 1 1 + 2 0 0 + ( 1) ( 1) = *√*4 = 2,

*∥x* 2 + 2*x* + 3*∥* = (*x* 2 + 2*x* + 3) *·* (*x* 2 + 2*x* + 3) = *√*3 *·* 1 *·* 1 + 2 *·* 2 *·* 2 + 3 *·* 3 = *√*20.

*∥ − ∥*  *− · −*  *· · · · − · −*

*S* = �(*a b*) *| a − b* + *c −* 2*d* = 0, *b − c* + *d* = 0, *c* + *d* = 01 = �( *α −*2*α*) *| α ∈* R1 =

*c d*

= (( 1 *−*2)) ,

*−*1 1

una base de *S* es *B* = �( 1 *−*2)1. Y como adema´s

*−*1 1

*−α α*

( 1 *−*2) = s( 1 *−*2) *·* ( 1 *−*2) = 1 *·* 1 + (*−*2) *·* (*−*2) + (*−*1) *·* (*−*1) + 1 *·* 1 = *√*7,

*√*

*√* \ es una base ortonormal de

*−*1 1

*−*1 1

*−*1 1

entonces

Solucio´n 5.5.

*B′* =

1 *−*2

7 7

*S* .

*−*1 1

*√*

*√*

7 7

*b*1 *· b*1 *b*1 *· b*2 *b*1 *· b*3 1 0 1

1. *GB* = *b*2 *· b*1 *b*2 *· b*2 *b*2 *· b*3 = 0 1 0.

1 0 2

*b*3 *· b*1 *b*3 *· b*2 *b*3 *· b*3

1. d(*b*1, *b*3) = (*b*1 *− b*3) *·* (*b*1 *− b*3) = *√b*1 *· b*1 *− b*1 *· b*3 *− b*1 *· b*1 + *b*3 *· b*3 = *√*1 + 1 + 1 + 2 = *√*5.

Como cos((*b*3 *− b*1), *b*2) = (*b*3 *−b*1 )*·b*2 = *√*0 = 0, entonces A´ngulo((*b*3 *− b*1), *b*2) = *π* .

*∥b*3*−b*1*∥∥b*2*∥* 5*·*1 2

1. Utilizamos el me´todo de Gram-Schmidt para obtener la base ortonormal de *V* . Calculamos:

*v* = *b*1 = *b*1 = *b* .

1

1

*∥b*1*∥* 1

*u*2 = *b*2 *− Pr* 1*⟨v*1 *⟩*(*b*2) = *b*2 *−* (*b*2 *· v*1)*v*1 = *b*2 *−* (*b*2 *· b*1)*v*1 = *b*2 *−* 0 = *b*2;

= *u*2 = *b*2 = *b*2 = *b* .

*∥u*2*∥ ∥b*2*∥* 1

2

*v*

2

*u*3 = *b*3 *− Pr ⟨v*1 ,*v*2 *⟩*(*b*3) = *b*3 *−* (*b*3 *· v*1)*v*1 *−* (*b*3 *· v*2)*v*2 = *b*3 *−* (*b*3 *· b*1)*b*1 *−* (*b*3 *· b*2)*b*2 =

1

= *b*3 *− b*1 *−* 0 = *b*3 *− b*1;

*v* = *u*3 = *b*3 *− b*1 = *b*3*√− b*1 .

3

*∥u*3*∥ ∥b*3 *− b*1*∥* 5

Entonces *B′* = *{v*1, *v*2, *v*3*}* = {*b*1, *b*2, *√*1 (*b*3 *− b*1)}.

 

5

1 0 0

1. Como *B′* es ortonormal, *GB′* = 0 1 0 .

 

0 0 1

Solucio´n 5.6.

1. Calculamos las coordenadas de los vectores de *Bc* = *{e*1, *e*2, *e*3*}* con respecto a la base *B*:

 *α*1 = 0

*e*1 = (1, 0, 0) = *α*1(1, 1, 1) + *β*1(1, 1, 0) + *λ*1(1, 0, 0) *⇒*

*β*1 = 0

 *λ*1 = 1

*α*

= 0



*⇒* (1, 0, 0) = [0, 0, 1]*B* ,

*e*2 = (0, 1, 0) = *α*2(1, 1, 1) + *β*2(1, 1, 0) + *λ*2(1, 0, 0) *⇒*

2

*β*2 = 1

 *λ*2 = *−*1

*α*

= 1



*⇒* (0, 1, 0) = [0, 1, *−*1]*B* ,

*e*3 = (0, 0, 1) = *α*3(1, 1, 1) + *β*3(1, 1, 0) + *λ*3(1, 0, 0) *⇒*

para poder utilizar la matriz *GB* .

3

*β* = 1

3 *−*

 *λ*3 = 0

*⇒* (0, 0, 1) = [1, *−*1, 0]*B* ,

*e*1 *· e*1 =

0 0 1

0

*GB* 0 = 3, *e*1 *· e*2 =

1

 

 

0 0 1

 0 

*−*1

*GB*  1  = *−*2,

*e*1 *· e*3 =

1

0 0 1 *GB* *−*1 = *−*1, *e*2 *· e*2 =

 

0

0 1 *−*1

 0 

*−*1

*GB*  1  = 3,

 

*e*2 *· e*3 =

0 1 *−*1

1

*GB* *−*1 = *−*2, *e*3 *· e*3 =

0

1 *−*1 0

1

*GB* *−*1 = 1.

0

 3 *−*2 *−*1

Concluimos que *GBc* = *−*2 3 *−*2.

*−*1 *−*2 1

1. Como (1, 1, 1) = [1, 0, 0]*B* y (0, 1, 0) = [0, 1, *−*1]*B* , entonces

 0   1 *−*1 0  0 

*−*1

(1, 1, 1) *·* (0, 1, 0) =

1 0 0

*GB*  1  = 1 0 0 *−*1 2 1  1  =

*−*1

0 1 3

*−*1

1 0 0  1  = *−*1.

*−*2

1. Como (1, 1, 1) = [1, 1, 1]*B* y (0, 1, 0) = [0, 1, 0]*B* , entonces

*c c*

0

 3 *−*2 *−*1 0

*−*2

(1, 1, 1) *·* (0, 1, 0) =

1 1 1

*GBc* 1 =

0

1 1 1 *−*2 3 *−*2 1 =

*−*1 *−*2 1

0

1 1 1  3  = *−*1.

*−*2

1. S´ı porque el valor del producto escalar entre dos vectores no var´ıa si no cambia la definicio´n del producto escalar.

Solucio´n 5.7.

1. La matriz de Gram para la base cano´nica *Bc* = *{*(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)*}* sera´

(1, 0, 0) *·* (1, 0, 0) (1, 0, 0) *·* (0, 1, 0) (1, 0, 0) *·* (0, 0, 1) 3 1 1

*GBc* = (1, 0, 0) *·* (0, 1, 0) (0, 1, 0) *·* (0, 1, 0) (0, 1, 0) *·* (0, 0, 1) = 1 3 0 .

1. Se tiene que

(1, 0, 0) *·* (0, 0, 1) (0, 1, 0) *·* (0, 0, 1) (0, 0, 1) *·* (0, 0, 1)

1 0 3

3 1 1 1 4

*v · v* = 1 0 1 1 3 0 0 = 1 0 1 1 = 8,

de donde *∥v∥* = *√v · v* = *√*8 = 2*√*2.

1 0 3 1 4

1. Si llamamos *W* = (1, 0, 1) , se tiene que (*x* , *y* , *z* ) es ortogonal a (1, 0, 1) si (*x* , *y* , *z* ) (1, 0, 1) = 0. Empleando la matriz de Gram, esto es equivalente a

*⟨ ⟩ ·*

3 1 1 1 4

   

 

*x y z* 1 3 0 0 = *x y z* 1 = 0,

1 0 3

1

4

luego la ecuacio´n impl´ıcita de *W ⊥* es 4*x* + *y* + 4*z* = 0 y entonces

*W ⊥* = *{*(*x* , *y* , *z* ) *∈* R3 *|* 4*x* + *y* + 4*z* = 0*}*.

Solucio´n 5.8.

1. Calculamos la matriz de Gram para *Bc* = *{*1, *x* , *x* 2*}*:

 1 *·* 1 1 *· x* 1 *· x* 2 

=  *x ·* 1 *x · x x · x* 2  = 3 5 9  ,

*GB*

*c*

3 3 5 

*x* 2 *·* 1 *x* 2 *· x x* 2 *· x* 2

5 9 17

donde cada producto escalar se ha calculado en base a la definicio´n dada. Por ejemplo,

*x* 2 *· x* 2 = 02 *·* 02 + 12 *·* 12 + 22 *·* 22 = 17.

1. Puesto que *x* = [0, 1, 0]*B* , *x* 2 = [0, 0, 1]*B* , entonces

*c c*

d(*x* , *x* 2) = *∥x − x* 2*∥* = *∥*(0, 1, 0) *−* (0, 0, 1)*∥* = *∥*(0, 1, *−*1)*∥* = (0, 1, *−*1) *·* (0, 1, *−*1).

Si calculamos el producto escalar empleando la matriz de Gram,

(0, 1, *−*1) *·* (0, 1, *−*1) =

0 1 *−*1

0

*GBc*  1  =

 

0 1 *−*1

3 3 5 0

3 5 9   1  =

   

1

*−*

*−*2

 

*−*4 = 4.

*−*8

=

0 1 *−*1

5 9 17 *−*1

Se concluye que d(*x* , *x* 2) = *√*4 = 2.

1. Si tomamos coordenadas y denotamos *v*1 = 1 + *x* = [1, 1, 0]*B* , *v*2 = 1 *x* = [1, 1, 0]*B* , empleando la matriz de Gram podemos calcular

*c − − c*

3 3 5  1  6 

*∥v*1*∥* = 1 1 0 3 5 9  1 = 1 1 0  8  = 14,

2

5 9 17 0 14

de donde deducimos que *∥v*1*∥* = *√*14, y tambie´n

3 3 5   1   0 

*∥v*2*∥* =

2

1 *−*1 0 3 5 9  *−*1 = 1 *−*1 0 *−*2 = 2,

luego *∥v*2*∥* = *√*2.

Solucio´n 5.9.

1. Resolviendo el sistema

5 9 17 0 *−*4

se obtiene que

*x* + *y* + *z* = 0,

*y − z* + 2*t* = 0,

�

*W* = *{*(*−*2*µ* + 2*λ*, *µ −* 2*λ*, *µ*, *λ*) *∈* R4 *| λ*, *µ ∈* R*}*,

de donde dim(*W* ) = 2 y una base de *W* viene dada por *B* = *{e*1, *e*2*}* siendo *e*1 = (*−*2, 1, 1, 0) y

*e*2 = (2, *−*2, 0, 1).

1. A partir de *B*, construimos una nueva base ortogonal *B′* = *w*1, *w*2 mediante Gram-Schmidt. El primer vector se obtiene normalizando *e*1:

*{ }*

.

*e*1 (*−*2, 1, 1, 0) 1

*w*1 = =

*∥e*1*∥*

( *−*2 1 1 )

Para el segundo vector de la base ortonormal, calculamos

(*−*2, 1, 1, 0) *·* (*−*2, 1, 1, 0) = *√*6 (*−*2, 1, 1, 0) =

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

( ( *−*2 1 1 )) ( *−*2 1 1 )

*u*2 = *e*2 *− Pr* 1*⟨w*1 *⟩*(*e*2) =

= (2, *−*2, 0, 1) *−*

(2, *−*2, 0, 1) *·*

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

=

*√* ( *−*2 1 1 )

que es perpendicular al primero y al normalizarlo obtenemos

= (2, *−*2, 0, 1) +

6

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

= (0, *−*1, 1, 1),

*u*2 (0, *−*1, 1, 1) ( *−*1 1 1 )

*w*2 = =

*∥u*2*∥*

*√*3 =

0, *√*3 , *√*3 , *√*3

.

La base ortogonal pedida es *B′* = { *√−*2 , *√*1 , *√*1 , 0 , 0, *√−*1 , *√*1 , *√*1 }.

1. Finalmente, si *v* = (1, 0, 0, 0), como

6 6 6

*−*2

3 3 3

se tiene que

*v · w*1 = *√*6 , *v · w*2 = 0,

1 ( *−*2 1 1 )

2

( *−*1 1

1 ) ( 2

*−*1 *−*1 )

*Pr W* = (*v · w*1)*w*1 + (*v · w*2)*w*2 = *−√*6

Solucio´n 5.10.

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

+ 0 0, *√*3 , *√*3 , *√*3 =

, , , 0 .

3 3 3

*∥u* + *v∥*

2

+ *∥u − v∥*

= (*u* + *v* ) *·* (*u* + *v* ) + (*u − v* ) *·* (*u − v* )

= *u · u* + 2(*u · v* ) + *v · v* + *u · u −* 2(*u · v* ) + *v · v*

2

= 2(*u · u*) + 2(*v · v* ) = 2*∥u∥*2 + 2*∥v∥*2.

Solucio´n 5.11. Supongamos que *u*, *v* satisfacen

*∥u∥* + *∥v∥* = *∥u* + *v∥* .

2 2 2

Si expandimos ambos lados de la igualdad, vemos que

*u · u* + *v · v* = (*u* + *v* ) *·* (*u* + *v* ) = *u · u* + 2*u · v* + *v · v* .

Despejando llegamos a 2*u · v* = 0, lo que implica que *u · v* = 0 y entonces *u*, *v* son ortogonales.

Solucio´n 5.12. En primer lugar, tomamos una base de *W* , *BW* = *{w*1, *w*2*}*, donde

*w*1 = (*−*1, 1, 2, 0), *w*2 = (0, 0, 0, 1),

y calculamos una base ortonormal, *BW* = *{e*1, *e*2*}*, mediante el me´todo de Gram-Schmidt.

*w*1 1

( *−*1 1 2 )

*e*1 = *∥w ∥* = *√*6 (*−*1, 1, 2, 0) =

1

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

( (

*e*2 = *w*2 *−* (*w*2 *· e*1)*e*1 = (0, 0, 0, 1) *−*

(0, 0, 0, 1) *·*

1 1 2

*−√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

=

)) ( *−*1

1 2 )

( *−*1 1 2 )

Observamos que el resultado es la base original normalizada, ya que era ortogonal de partida.

= (0, 0, 0, 1) *−* 0

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

= (0, 0, 0, 1).

El vector de *W* ma´s cercano a *v* = (1, 2, 3, 1) es su proyeccio´n sobre *W* :

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

+ ((1, 2, 3, 1) *·* (0, 0, 0, 1)) (0, 0, 0, 1) =

( ( *−*1

*Pr* 1*W* (*v* ) = (*v · e*1)*e*1 + (*v · e*2)*e*2 =

=

(1, 2, 3, 1) *·*

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

1 2

)) ( *−*1

.

1 2 )

7 ( *−*1

= *√*6

*√*6 , *√*6 , *√*6 , 0

+ 1(0, 0, 0, 1) =

1 2 )

( *−*7 7 7 )

Solucio´n 5.13. Sea *BU* = *u*1, ... , *ur* una base de *U* y *BV* = *v*1, ... , *vs* una base de *V* . Si consideramos el subespacio suma *U* + *V* , el conjunto

*{ } { }*

, , , 1

6 6 3

*SU*+*V* = *{u*1, ... , *ur* , *v*1, ... , *vs }*

es un sistema generador de *U* + *V* . Teniendo esto en cuenta:

* Si *w ∈* (*U* + *V* )*⊥*, *w* es perpendicular a todos los vectores de *U* + *V* . En particular, es perpendicular al sistema de generadores dado, por lo que *w · ui* = 0 y *w · vi* . Como *BU* y *BV* son bases, se deduce entonces que *w* es perpendicular a todo vector de *U* y a todo vector de *V* , esto es , *w ∈ U⊥ ∩ V ⊥*.
* Si *w U⊥ V ⊥*, *w* es perpendicular a la base de *U* y a la base de *V* , luego es perpendicular al sistema de generadores *SU*+*V* , lo que quiere decir que es perpendicular a cualquier vector de *U* + *V* y, como consecuencia, *w ∈* (*U* + *V* )*⊥*.

*∈ ∩*

Solucio´n 6.1.

1. (*ι*˙ + 3)(2*ι*˙ *−* 1) =

2*ι*˙2 *− ι*˙ + 6*ι*˙ *−* 3

*−*5 + 5*ι*˙ 1 + *ι*˙ =

2

*−*5 *−* 5*ι*˙ + 5*ι*˙ *−* 5*ι*˙

= 0 = 0.

1 *− ι*˙

1 *− ι*˙

1 *− ι*˙

1 + *ι*˙

12 + 12 2

1. (1 + *ι*˙)2 + 2*ι*˙ =

=

=

=

(1 + *ι*˙)(2 *−* 2*ι*˙)

2 *−* 2*ι*˙ + 2*ι*˙ *−* 4*ι*˙2

6 3 *− ι*˙ =

18 + 6*ι*˙

=

9 + 3 *ι*˙.

3 + *ι*˙

*π ι*˙

(c) 2*e* 3

*−*(*ι*˙+2) = 2

3 + *ι*˙

*π*

cos( 3 ) + *ι*˙ sin( 3 )

3 + *ι*˙

*π*

*−*(*ι*˙+2) = 2

3 + *ι*˙ 3 *− ι*˙

1 *√*3

*−*(*ι*˙+2) = 1+

2 + *ι*˙ 2

32 + 12 5 5

*√ √*

3*ι*˙*−*(*ι*˙+2) = = *−*1+(

3*−*1)*ι*˙.

4 *π* ( 4 )

(d)

4

=

2*ι*˙.

4

2 *−π*

2

*−π −π*

= 2 3*π* = 2 *−π* = 2

cos( 4 ) + *ι*˙ sin( 4 )

2 *− ι*˙ 2

=

2 *−*

4

*√*2

= 2

*√*2 *√ √*

2 4 2

*π* + *π*

Solucio´n 6.2.

1. *e*1+*ι*˙ = *e*1.

10

1. 2 *π* 3*π*1 *−π* = 2 *·* 3 *·* 1 *π*

5

2

5 +*π−* 2

(c) *ι*˙7 = *ι*˙4*ι*˙2*ι*˙ = 1 *·* (*−*1) *· ι*˙ = *−ι*˙ = 1 *−π* , donde hemos utilizado que *|ι*˙*|* = 02 + (*−*1)2 = 1 y Arg(*−ι*˙) = *−π*

*π* = 6 7*π* .

2

(porque *−ι*˙ esta´ situado en la parte negativa del eje vertical).

2

Solucio´n 6.3. Como *z* 4 = *eπι*˙, tenemos que calcular todas las ra´ıces cuartas de *w* = *eπι*˙.

* Calculamos el mo´dulo y argumento de *w* = *e*0+*πι*˙ = *e*0(cos *π* + *ι*˙ sin *π*) = *−*1 + 0*ι*˙ = *−*1:

*|w|* = (*−*1)2 + 02 = 1 y Arg(*w* ) = *π* (porque *w* esta´ en la parte negativa del eje horizontal).

* Calculamos las ra´ıces cuartas de *w* con la fo´rmula *vk* = 4 *|w|* Arg(*w* )+2*kπ* para *k* = 0, 1, 2, 3:

4

*v*0 = *√*1 *π* = 1 *π* , *v*1 = *√*1 *π*+2*π* = 1 3*π* ,

4

4

4

4

4

4

*√*4 *√*4

*v*2 =

1 *π*+4*π* = 1 5*π* = 1 *−*3*π* , *v*3 = 1 *π*+6*π* = 1 7*π* = 1 *−π* .

Solucio´n 6.4.

4 4 4

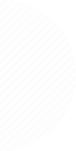
4 4 4

*I*m(*z* )

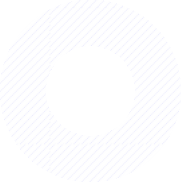
*I*m(*z* )

*I*m(*z* )

*C*



*B*



*R*e(*z* )

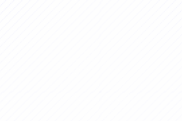
*A*

*R*e(*z* )

*R*e(*z* )

*I*m(*z* )

*I*m(*z* )



*D*

*R*e(*z* ) *R*e(*z* )

*E*

donde hemos calculado las ra´ıces cu´bicas de *w* = *−*8:

*| |*  *−*

* Mo´dulo y argumento: *w* = ( 8)2 + 02 = 8 y Arg(*w* ) = *π* (porque *w* esta´ en la parte negativa del eje horizontal).
* Ra´ıces cu´bicas de *w* : *zk* = 3 *|w|* Arg(*w* )+2*kπ* para *k* = 0, 1, 2:

3

*z*0 = *√*8 *π* = 2 *π* , *z*1 = *√*8 *π*+2*π* = 2*π*, *z*2 = *√*8 *π*+4*π* = 2 5*π* = 1 *−π* .

3

3

3

3 3 3

3 3 3

Solucio´n 6.5.

1. Como *z* 3 = *−*1 + *ι*˙, calculamos las ra´ıces cu´bicas de *w* = *−*1 + *ι*˙.

– Mo´dulo y argumento: *|w|* = (*−*1)2 + 12 = *√*2 y Arg(*w* ) = *π −* arctan 1 = *π − π* = 3*π* (porque

*w* esta´ en el segundo cuadrante).

* + Ra´ıces cu´bicas de *w* : *zk* = 3 *|w|* Arg(*w* )+2*kπ* para *k* = 0, 1, 2:

3

1 4 4

*z*0 =

6

q3 *√*

2 3*π* +0 = *√*

4

3

2 *π* , *z* =

4

1

q3 *√*

2 3*π* +2*π* = *√*

4

6

3

2 11*π* ,

12

*z*2 =

q3 *√*

2 3*π* +4*π* = *√*2 19*π* = 1 *−*5*π* .

4 12 12

6

3

1. Hacemos el cambio de variable *t* = *z* + 1 y resolvemos *t*4 = 16 calculando las ra´ıces cuartas de

*w* = 16:

* + Mo´dulo y argumento: *w* = *√*162 + 02 = 16 y Arg(*w* ) = 0 (porque *w* esta´ en la parte positiva del eje horizontal).

*| |*

* + Ra´ıces cuartas de *w* : *tk* = 4 *|w|* Arg(*w* )+2*kπ* para *k* = 0, 1, 2, 3:

*t*0 = *√*

4

4

160 = 20 = 2(cos 0 + *ι*˙ sin 0) = 2,

4

*t*1 = *√*

4

*√*4

160+2*π* = 2 *π*

4 2

*π*

= 2(cos

2

+ *ι*˙ sin

*π*

) = 2*ι*˙,

2

*t*2 =

*√*4

160+4*π* = 2*π* = 2(cos *π* + *ι*˙ sin *π* = 2,

4

*−*

*−π −π*

*t*3 =

160+6*π* = 2 3*π* = 2 *−π* = 2(cos(

4

2

2

) + *ι*˙ sin(

2

2 )) = *−*2.

Deshacemos el cambio de variable *zk* = *tk −* 1:

*z*0 = *t*0 *−* 1 = 1, *z*1 = *t*1 *−* 1 = *−*1 + 2*ι*˙, *z*2 = *t*2 *−* 1 = *−*3, *z*3 = *t*3 *−* 1 = *−*1 *−* 2*ι*˙.

Solucio´n 6.6. Si escribimos *z* = *a* + *bi* , tendremos por un lado

*|z* + 1*|* = *|a* + *bι*˙ + 1*|* = *|*(*a* + 1) + *bι*˙*|* = (*a* + 1)2 + *b*2,

y por otro,

*|z − i |* = *|a* + *bι*˙ *− ι*˙*|* = *|a* + (*b −* 1)*ι*˙*|* = *a*2 + (*b −* 1)2.

Ambas expresiones son iguales si, y so´lo si,

(*a* + 1)2 + *b*2 = *a*2 + (*b −* 1)2,

que desarrollando ambos lados, es equivalente a

*a*2 + 2*a* + 1 + *b*2 = *a*2 + *b*2 *−* 2*b* + 1.

Simplificando, se llega a la condicio´n *a* = *b*. Por tanto, los nu´meros complejos solucio´n de la ecuacio´n dada son de la forma

*−*

*z* = *a − aι*˙, *a ∈* R.

Se trata de una recta en el plano complejo, mu´ltiplos reales del nu´mero complejo 1 *− ι*˙.

Solucio´n 6.7.

1. En primer lugar, *−*1 = *ι*˙. Como *ι*˙4 = 1, deducimos que

*ι*˙

( )

En forma polar, 10.

1 100

*−ι*˙

= *ι*˙100 =

*ι*˙4

25

= 125 = 1.

1. En forma polar, 1 *ι*˙ = *√*2 *−π* y entonces

*−*

2

*√*2 *−π*

2

50

= 225

*−*50*π* = 2

25

2

*−*25*π* = 225*π* .

En forma bino´mica, 225*π* = 225(cos *π* + *ι*˙ sin *π*) = *−*225.

1. Las formas polares de 2 + 2*ι*˙ y 2 *−* 2*ι*˙ son *√*8 *π* y *√*8*− π* (son conjugados). Por tanto, en forma polar,

se tiene que

*√*8 *π*

4

20

= 810

20*π* = 8

4

4

5*π* = 810*π* y

10

4

*√*8 *−π*

4

40

= 820

*−*20*π* = 8

20

4

*−*5*π* = 820*π* .

Y por lo tanto,

810*π*

=

820*π*

1

810

( )

= 8*−*100.

0

En forma bino´mica, 8*−*100 = 8*−*10(cos 0 + *ι*˙ sin 0) = 8*−*10 (es un nu´mero real).

Solucio´n 6.8. Para resolver la ecuacio´n *x* 6 2*x* 3 + 2 = 0, hacemos el cambio de variable *z* = *x* 3 y obte- nemos la ecuacio´n de grado dos

*−*

que tiene como solucio´n:

*z* 2 *−* 2*z* + 2 = 0,

*−b ± √b*2 *−* 4*ac* 2*a*

*z* =

2 *± √*4 *−* 8 =

2

=

2 *± √−*4 =

2

2 *±* 2*√−*1 = 1 *ι*˙,

2

*±*

es decir, tiene dos ra´ıces complejas: *z*1 = 1 + *ι*˙ y *z*2 = 1 *− ι*˙.

Si tratamos de deshacer el cambio de variable original, debemos resolver la ecuacio´n

*x* 3 = 1 + *ι*˙,

lo que equivale a hallar las ra´ıces cu´bicas de 1 + *ι*˙, cuya expresio´n en polares es *√*2 *π* . Empleando la

fo´rmula *xk* = 3 *|*1 + *ι*˙*|* Arg(1+*ι*˙)+2*kπ* para , las ra´ıces cu´bicas son:

4

*k* = 0, 1, 2

3

*x*1 =

q3 *√*

*π √*6

4

2

=

3

2 *π* , *x* =

12

2

q3 *√*

2 *π* +2*π* = *√*

3

4

6

2 3*π* , *x*3 =

4

q3 *√*

2 *π* +4*π* = *√*

3

4

6

2 17*π* = *√*

12

6

2 *−*7*π* .

12

La ecuacio´n 3 se resuelve de modo similar, teniendo en cuenta que en polares tiene expresio´n

*x* = 1*−ι*˙ 1*−ι*˙

*√*2 *−π* . Las soluciones son:

4

*x*4 =

3 *√*2

3

q

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *−π* =  4 | *√*6 q3 | *√* | *−π* +2*π* = | *√*6 q3 | *√* | *−π* +4*π* = | *√*6  4 | *√*6 2 *−*  *π*  4 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

2 *−π* , *x*5 = 2

12 4

3

2 7*π* , *x*6 = 2

12 4

3

2 5*π* = .

Solucio´n 6.9. Despejando, se obtiene que

*z* (*ι*˙ + 1) = (*z −* 2)(1 *− ι*˙) *⇒ z* (*ι*˙ + 1) = *z* (1 *− ι*˙) + (*−*2 + 2*ι*˙),

y agrupando y despejando de nuevo *z* llegamos a

*z* (*ι*˙ + 1) *− z* (1 *− ι*˙) = *−*2 + 2*ι*˙

*⇒* 2*ι*˙*z* = *−*2 + 2*ι*˙

*⇒ z* = *−*2 + 2*ι*˙ = *−*1 + *ι*˙ = 1 + *ι*˙.

Por tanto, el nu´mero complejo pedido es *z* 2 + *ι*˙ = (1 + *ι*˙)2 *− ι*˙ = 1 + 2*ι*˙ + *ι*˙2 *− ι*˙ = *ι*˙, cuya forma polar es 1 *π* .

2

2*ι*˙

*ι*˙

Solucio´n 6.10. Sea *p*(*x* ) = *anxn* + *an−*1*xn−*1 + ... + *a*1*x* + *a*0 un polinomio con coeficientes reales, es decir,

*ai ∈* R. Si *z* es ra´ız de *p*(*x* ), esto quiere decir que *p*(*z* ) = 0, y por tanto

*anzn* + *an−*1*zn−*1 + ... + *a*1*z* + *a*0 = 0.

Si conjugamos ambos lados de la ecuacio´n y aplicamos las propiedades de la conjugacio´n de nu´meros complejos respecto a la suma y al producto, se tiene que

0 = *anzn* + *an−*1*zn−*1 + ... + *a*1*z* + *a*0 = *anzn* + *an−*1*zn−*1 + ... + *a*1*z* + *a*0 =

= *an zn* + *an−*1 *zn−*1 + ... + *a*1 *z* + *a*0 =

= *an z n* + *an−*1 *z n−*1 + ... + *a*1 *z* + *a*0 =

= *anz n* + *an−*1*z n−*1 + ... + *a*1*z* + *a*0 = *p*(*z* ),

donde hemos aplicado tambie´n que *ai* = *ai* por ser los coeficientes nu´meros reales.

Solucio´n 7.1.

*√x − √a*

(a) l´ım

*x*

2 =

0

*√x − √a √x* + *√a*

*x − a*

*→a*+ *− a*) 0 *→a*+ (*x − a*) *x* + *a*

(*x*

= l´ım

*x*

2

*√*

*√*

=

*→a*+ (*x − a*) ( *x* + *a*)

1 1

= l´ım

*x*

2 *√*

*√*

= l´ım

*x→a*+ (*x −*

*a*)(*√x* +

*√a*) =

0+ *·* 2*√a*

= +*∞*.

(b) l´ım

*√x − a* = 0 = l´ım (*x − a*) 1 *−*1 = l´ım

*√x − a* = *√a*+ *− a* = *√*0+ = 0.

*x→a*+

2

*x − a*

*x − a*

*√*

0

0

=

*x→a*+

1*−* 1

= l´ım (*x − a*)

*x→a*+

1

2 = l´ım

*√* = *√* = *√* =

1 1 1

+ = +*∞*.

*x→a*+

(c) l´ım

*x − a* 0 *x→a*+

*x→a*+

*x − a a*+ *− a* 0+ 0

1. l´ım

*x→*+*∞*

*x* 2 + *a − ax*

= 1 + *∞ − ∞*l

= l´ım

*x→*+*∞*

*√x* 2 + *a ax √x* 2 + *a* + *ax*

=

*√*

*−*

*x* 2 + *a* + *ax*

*x* 2 + *a − a*2*x* 2 (1 *− a*2)*x* 2 + *a*

= l´ım

*x→*+*∞*

Si *a ̸*= 1:

*√x* 2

+ *a* + *ax*

= l´ım

*x→*+*∞*

*√x* 2

.

+ *a* + *ax*

l´ım

*x→*+*∞*

*x* 2 + *a − ax*

= l´ım

*x→*+*∞*

�

(1 *a*2)*x* 2 + *a*

=

*√*

*−*

*x* 2 + *a* + *ax*

*∞* = l´ım

+*∞ x→*+*∞*

(1 *a*2)*x* 2 + *a*

=

*√*

*−*

*x* 2 + *a* + *ax*

= l´ım

*x*

*x→*+*∞*

Si *a* = 1:

*−*

(1 *− a*2)*x* + *a*

*x* 2

+*∞* si *a ∈* [0, 1),

*−∞* si *a ∈* (1, +*∞*).

l´ım

*x→*+*∞*

*x* 2 + 1 *x* = l´ım

1 + *a* + *a* =

*x→*+*∞*

1

*√x* 2 + 1 + *x*

= 1 = 0.

+*∞*

Solucio´n 7.2.

1. l´ım *f* (*x* ) = l´ım *x* sin *π* = 0 por el Criterio del Sa´ndwich ya que l´ım *x* = 0 y 1sin *π* 1 *≤* 1.

*x→*0

*x→*0

*x*

*x→*0

*x*

l´ım *g* (*x* ) = l´ım

=

*−*1*/x*

*⇒*

21*/x* + 5*−*1*/x*

1*/x*

21*/*0 + 5*−*1*/*0

calculamos los l´ımites laterales:

1*/*0

*−*1*/*0

*x→*0

*x→*0 3

+ 4 3

21*/x* + 5*−*1*/x*

3

+ 4

+ 4

21*/*0+ + 51*/*0*−*

2+*∞* + 5*−∞*

+*∞* + 0

l´ım

*→*0+

*x*

*g* (*x* ) = l´ım

*x*

*→*0+ 3

1*/x*

=

*−*1*/x*

+ 4

1*/*0+

1*/*0*−*

= = =

3+*∞* + 4*−∞* +*∞*

3

2

+ 0

2 1*/x*

+ 15

*−*1*/x*

 2 1*/*0+

+ 15

1*/*0*−* 

3 *−∞*

+ 15

*−∞*

0 + 0

= l´ım

3

*x→*0+

1 + 12*−*1*/x* = 

1 + 121*/*0*−*  =

1 + 12*−∞*

= = 0.

1 + 0

l´ım

*x→*0*−*

*g* (*x* ) = l´ım

*x→*0*−*

21*/x* + 5*−*1*/x*

31*/x* + 4*−*1*/x* =

21*/*0*−* + 51*/*0+

31*/*0*−* + 41*/*0+



2*−∞* + 5+*∞*

=

3*−∞* + 4+*∞*

= 0 + *∞* =

0 + *∞*

1*/x*

5 *−*1*/x*

 1*/*0*−*

5 1*/*0+ 

*−∞*  5 +*∞*

8 +

121*/*0*−* + 1

= 4

= l´ım 4

*x→*0*−*

121*/x* + 1

8 + 8 +

 =

12*−∞* + 1

0 + 1

4

= 0 + *∞* = +*∞*.

Como los l´ımites laterales no coinciden, no existe l´ım *g* (*x* ).

*x→*0



 3*x* 2

1. l´ım *h*(*x* ) = l´ım (3*x* 2 + 1) 1

*x* 2

*x→*0

*x→*0

*x→*0

1

1

l

= 1 0+ =

11+*∞*l

= l´ım 

1

1 + 1

3*x* 2 *x* 2



1

= *e*3.

3*x* 2

Solucio´n 7.3.

1. La funcio´n es continua en todo su dominio (Dom(*f* ) = [*−*1, 1]) porque es una ra´ız cuadrada de un polinomio (que siempre es positivo en [*−*1, 1]).
2. La funcio´n *g* es continua en (*−*1, 1) por estar definida como la ra´ız cuadrada de un polinomio (que siempre es positivo en (*−*1, 1)) y tambie´n es continua en (*−∞*, *−*1) *∪* (1, +*∞*) por ser constante.

La funcio´n es continua en *x* = *−*1 si *f* (*−*1) = *x* l´ım 1

*→−*

*f* (*x* ). Calculamos *f* (*−*1) = 1 *−* (*−*1)2 = 0 y

l´ım

*x→−*1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x→−*1*−*

0 = 0 y l´ım

*x→−*1+

*f* (*x* ) = l´ım

*x→−*1+

1 *− x* 2 = 1 *−* (*−*1)2 = 0,

es decir, *f* (*−*1) = 0 = *x* l´ım 1 *f* (*x* ) y deducimos que *f* es continua en *x* = *−*1.

´ *→− √*

2

La funcion es continua en *x* = 1 si *f* (1) = l´ım *f* (*x* ). Calculamos *f* (1) =

*x→*1

*−*  *−*

1 *−* 1

= 0 y

l´ım

*x→*1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*1*−*

1 *x* 2 = 1 12 = 0 y l´ım

*x→*1+

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*1+

0 = 0,

es decir, *f* (1) = 0 = l´ım *f* (*x* ) y deducimos que *f* es continua en *x* = 1.

*x→*1

1. La funcio´n *g* es continua en (*−*1, 1) por estar definida como la ra´ız cuadrada de un polinomio (que siempre es positivo en (*−*1, 1)) y tambie´n es continua en (*−∞*, *−*1) *∪* (1, +*∞*) por ser un polinomio.

La funcio´n es continua en *x* = *−*1 si *f* (*−*1) = *x* l´ım 1 *f* (*x* ). Calculamos *f* (*−*1) = 1 *−* (*−*1) = 0 y

2

*→−*

l´ım

*x→−*1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x→−*1*−*

(*x −* 1) = *−*2 y *x* l´ım +

*f* (*x* ) = l´ım

*x→−*1+

1 *− x* 2 = 1 *−* (*−*1)2 = 0.

*→−*1

Como los l´ımites laterales no coinciden, deducimos que no existe l´ım *f* (*x* ) y, por lo tanto, *f* no es

*→−*

continua en *x* = *−*1. Adema´s, como

*x* 1

*x* l´ım *± f* (*x* ) *∈* R, deducimos que *f* tiene una discontinuidad de

salto finito en

*x* = *−*1.

*→−*1

*√*

La funcio´n es continua en *x* = 1 si *f* (1) = l´ım *f* (*x* ). Calculamos *f* (1) =

*x→*1

*−*  *−*

1 *−* 12 = 0 y

l´ım

*x→*1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*1*−*

1 *x* 2 = 1 12 = 0 y l´ım

*x→*1+

*f* (*x* ) = l´ım (*x* 1) = 1 1 = 0,

*→*1+

*x − −*

es decir, *f* (1) = 0 = l´ım *f* (*x* ) y deducimos que *f* es continua en *x* = 1.

*x→*1

Solucio´n 7.4. Para que *f* sea continua en *x* = 2 necesitamos que l´ım *f* (*x* ) = *f* (2) =  2*α*

= *α* . Calculamos

los l´ımites laterales:

l´ım

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*2

*αx α*2 *α*

= = ,

0+4 2

*x→*2*−*

*x→*2*− |x −* 2*|* + 4 *|*2 *−* 2*|* + 4 2

l´ım *f* (*x* ) = l´ım (*x −* 2) sin *πx*  = 0,

*x→*2+

*x→*2+

*x−*2

donde hemos aplicado el Criterio del Sa´ndwich (porque l´ım (*x −* 2) = 0 y 1sin *πx* 1 *≤* 1). Deducimos que

*f* es continua en *x* = 2 si *α* = 0, es decir, si *α* = 0.

2

*x→*2

*x−*2

Para que *f* sea continua en *x* = 10 necesitamos que l´ım *f* (*x* ) = *f* (10) = 8 sin 5*π* = 8 sin *π* = 4*√*2.

Calculamos los l´ımites laterales:

l´ım *f* (*x* ) = l´ım (*x −* 2) sin *πx* = 8 sin 10*π* = 4*√*2,

*x→*10

4

4

*x→*10*−*

*x→*10*−*

*x−*2

8

l´ım

*f* (*x* ) = l´ım

*h*(*x −* 10) *−* 10 = *h*(0) *−* 10 = *β −* 10 .

*x→*10+

*x→*10+

10*x* + 10

1010 + 10

1010 + 10

Deducimos que *f* es continua en *x* = 10 si *β−*10 = 4*√*2, es decir, si *β* = 10 + 4*√*2(1010 *−* 10).

1010 +10

Solucio´n 7.5. Definimos la funcio´n *f* (*x* ) = 2*x −* 3 *−* sin *x* , que es continua en R, en particular en [0, *π*]. Adema´s, como *f* (0) = 0 *−* 3 *−* sin 0 = *−*3 *<* 0 y *f* (*π*) = 2*π −* 3 *−* sin *π* = 2*π −* 3 *>* 0, por el teorema de Bolzano deducimos que existe *ξ ∈* (0, *π*) tal que *f* (*ξ*) = 0, es decir, sin *ξ* = 2*ξ −* 3.

Solucio´n 7.6.

1. *f* (0) = *√*02 + 4 = 2 y *f* (2) = 2 + 6 = 8 = *−*8.

22 *−* 4 *·* 2 + 3 *−*1

1. Si *x ∈* (*−∞*, 0] *⇒ f* (*x* ) = 0 *⇒ √x* 2 + 4 = 0 *⇒ x* 2 = *−*4 *⇒*No hay solucio´n.

Si *x ∈* (0, +*∞*) *⇒ f* (*x* ) = 0 *⇒*  *x* + 6 = 0 *⇒ x* + 6 = 0 *⇒ x* = *−*6 *̸∈* (0, +*∞*) *⇒*No hay solucio´n.

*x* 2 *−* 4*x* + 3

1. Para poder utilizar el Teorema de Bolzano la funcio´n *f* tiene que ser continua en el intervalo [0, 2], pero esto no es cierto porque en *x* = 1 la funcio´n tiene una discontinuidad de salto infinito ya que

l´ım

*f* (*x* ) = l´ım

*x* + 6 = 7 = *−∞*.

*x→*1+

*x→*1+ (*x −* 1)(*x −* 3)

0+ *·* (*−*2)

Solucio´n 7.7. Definimos la funcio´n *g* (*x* ) = *f* (*x* ) *− x* , que es continua en el intervalo [0, 1].

Si *f* (0) *̸*= 0 y *f* (1) *̸*= 1, entonces *g* (0) = *f* (0) *−* 0 *>* 0 y *g* (1) = *f* (1) *−* 1 *<* 0 y por el teorema de Bolzano deducimos que existe *ξ ∈* (0, 1) *⊂* [0, 1] tal que *g* (*ξ*) = 0, es decir, *f* (*ξ*) = *ξ*.

Si *f* (0) = 0 o *f* (1) = 1, la solucio´n de la ecuacio´n ser´ıa *x* = 0 o *x* = 1, respectivamente.

Solucio´n 7.8. Si definimos la funcio´n

*f* (*x* ) = *x* 2 *−* cos *x* + *x* sin *x* ,

*f* (*x* ) es una funcio´n continua en todo R por ser suma y producto de funciones continuas. Es fa´cil verificar adema´s que *f* (0) = *−*1 *<* 0 y *f* (*π*) = *π*2 + 1 *>* 0, por lo que el Teorema de Bolzano permite afirmar que existe *x*1 *∈* (0, *π*) tal que *f* (*x*1) = 0, esto es, una solucio´n real a la ecuacio´n dada.

Por otro lado, tomando ahora *x* = *π*, *f* ( *π*) = *π*2 + 1 *>* 0, as´ı que tambie´n podemos aplicar de nuevo el teorema de Bolzano al intervalo [ *π*, 0] y afirmar que existe un segundo valor *x*2 ( *π*, 0) tal que *f* (*x*2) = 0, lo que proporciona una segunda solucio´n real.

*− ∈ −*

*− −*

Solucio´n 7.9. Consideramos la funcio´n

*f* (*x* ) = *x* 6 *−* 6*x −* 1,

que es continua y derivable en todo R, ya que es una funcio´n polino´mica. Adema´s, *f* (*x* ) cumple que *f* (0) = 1 *<* 0, *f* ( 1) = 6 *>* 0 y *f* (2) = 26 12 1 = 51 *>* 0, luego podemos aplicar el teorema de Bolzano a los intervalos [ 1, 0] y [0, 2] para garantizar que existen dos puntos donde *f* se anula, *x*1 y *x*2, pertenecientes a los intervalos ( 1, 0) y (0, 2), respectivamente. Los puntos *x*1 y *x*2 proporcionan dos soluciones reales de la ecuacio´n dada.

*−*

*−*

*− − − −*

Vamos ahora a comprobar que no existen ma´s soluciones reales: si analizamos el signo de *f ′*(*x* ),

*f ′*(*x* ) = 6*x* 5 *−* 6 = 6(*x* 5 *−* 1),

se tiene que *f* (*x* ) es decreciente en ( , 1) y creciente en (1, + ). Una funcio´n as´ı tiene como ma´ximo dos ra´ıces reales: dado que es estrictamente mono´tona en ( , 1) y en (1, + ), so´lo puede tener una ra´ız cada uno de los intervalos (tambie´n se puede comprobar utilizando el Teorema de Rolle).

*−∞ ∞*

*−∞ ∞*

Solucio´n 7.10.

l´ım ( 1 *−*

1 = 1

*∞ − ∞*l

= l´ım

*x −* 1 *−* log *x*

= 0

= l´ım

1 1

=

*x*

*x*

*−*

*x→*1

log *x*

*x −* 1

*x→*1 (*x −* 1) log *x*

0 *x→*1 1 (*x −* 1) + log *x*

= l´ım *x −* 1 = 0 = l´ım 1 = 1 .

)

*x→*1 *x −* 1 + *x* log *x* 0 *x→*1 1 + log *x* + 1 2

1. l´ım (1 + *x* sin *x* )2*/x*2 = 11*∞*l = l´ım  1 + 1



*x* 2

1

*x* sin *x*

2*x* sin *x x* 2



= l´ım *e*(1+*x* sin *x−*1) 2

l´ım*x →*0 (*x* sin *x* ) 2

= *e x* 2 .

*x→*0

*x→*0

1

*x* sin *x*

*x→*0

Calculamos el l´ımite del exponente utilizando que l´ım sin *x* = 1:

*x→*0 *x*

l´ım

2*x* sin *x*

2 = l´ım

2 sin *x*

= 2.

Por tanto, l´ım (1 + *x* sin *x* )2*/x*2 = *e*2.

*x→*0

*x→*0 *x*

*x→*0 *x*

1. l´ım *√*3

= 0

= l´ım (*x − a*)

1*−*1*/*3

= l´ım (*x − a*)

2*/*3

= (*a − a*)

2*/*3

= 0.

*x→a*

*x − a*

*x − a*

0 *x→a*

*x→a*

1. Si empleamos la identidad *x* 3 *− y* 3 = (*x − y* )(*x* 2 + *xy* + *y* 2) (similar a la habitualmente utilizada

*x* 2 *− y* 2 = (*x − y* )(*x* + *y* )), y la aplicamos con *x* 1*/*3 y *a*1*/*3 como te´rminos, se obtiene que

*x − a*

*√*3

*x − a*

(*x* 1*/*3 *− a*1*/*3)(*x* 2*/*3 + *x* 1*/*3*a*1*/*3 + *a*2*/*3)

l´ım

*x→a*

*x − √*3 *a*

= l´ım

*x→a x*

1*/*3

1*/*3 = l´ım

*− a x→a*

*x* 1*/*3

*− a*1*/*3 =

= l´ım (*x* 2*/*3 + *x* 1*/*3*a*1*/*3 + *a*2*/*3) = 3*a*2*/*3.

*x→a*

Solucio´n 7.11. Como la funcio´n *f* (*x* ) es una funcio´n racional (cociente de dos polinomios), para que sea continua en todo R sera´ necesario que *x* 2 2*ax* +5*a* = 0 para todo *x* R, ya que en caso contrario existira´ un *x*0 R en el que el denominador se anule. En ese caso, la funcio´n no estara´ definida en *x*0 y no tendra´ sentido entonces hablar de su continuidad en ese punto (y no podremos ni mucho menos decir que es continua en todo R).

*∈*

*− ̸ ∈*

Si calculamos las ra´ıces de *x* 2 *−* 2*ax* + 5*a*, se tiene que

2*a √*4*a*2 20*a*

*± −*

*x* =

2

= 2*a ±* 4*a*(*a −* 5).

2

La funcio´n no tendra´ ra´ıces reales siempre que 4*a*(*a −* 5) *<* 0, lo que sucede solamente si, y so´lo si,

*a ∈* (0, 5).

Por tanto, *f* (*x* ) es continua en todo R si *a ∈* (0, 5).

Solucio´n 7.12. Para que la funcio´n sea continua en 0 debera´ suceder que

l´ım

*x→*0*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*0+

*f* (*x* ) = *f* (0),

y dado que *f* (0) = *c*, el u´nico valor de *c* que hara´ continua la funcio´n sera el valor del l´ımite, que debe existir y ser u´nico. Calculando el valor del l´ımite en *x* = 0, se tiene que

l´ım *x* cot *x* = l´ım *x* cos *x* = 0 = l´ım cos *x − x* sin *x* = 1

*x→*0

*x→*0

sin *x*

0

*x→*0

cos *x*

Se deduce que *c* = 1 es el u´nico valor de *c* que hace la funcio´n continua (en el resto de casos posee una discontinuidad de tipo evitable).

Solucio´n 7.13. Si calculamos el l´ımite de *f* (*x* ) por la izquierda, vemos que

*x* 2

l´ım

*x→*0*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*0*−* 4 + sin

2 1 = 0,

*x*

puesto que 0 *≤* sin2 1 *≤* 1, de donde se deduce que

*x*

*x* 2 *x* 2 *x* 2

5 *≤* 4 + sin2 1 *≤* 4 ,

*x*

y como l´ım *x*2 = l´ım

5

*x* 2 = 0, se tiene que el l´ımite lateral por la izquierda es cero.

*x→*0*− x→*0*−*

4

Si analizamos el l´ımite por la derecha, y recordamos que l´ım 1 = +*∞*, tenemos que

*x→*0+ *x*

31*/x* + 21*/x* 1 *∞* l ( 3 )1*/x* + ( 2 )1*/x*

l´ım

*x→*0+

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*0+

=

= l´ım

*x→*0+

4

4

=

= 0,

41*/x*

*∞*

1

0 + 0

1

de donde se deduce que existe l´ım *f* (*x* ) para cualquier valor de *c ∈* R, y su valor es 0. El u´nico valor que

hace a

continua es

*x→*0 .

*f* (*x* )

*c* = 0, ya que de este modo l´ım *f* (*x* ) = *c* = 0

*x→*0

Solucio´n 8.1.

l´ım

*e−*1*/x*

= l´ım

1

*x* =

*x* 2

+*∞*

= l´ım

*−*1

*x* 2 = l´ım

1 = 1

= 0.

*x→*0+ *x*

*x→*0+ *e*1*/x*

+*∞ x→*0+ *−*1 *e*1*/x*

*x→*0+ *e*1*/x* +*∞*

Solucio´n 8.2. Como 0 = *f* (2) = 4*a* + 2*b* y *f ′*(2) = 4*a* + *b* (ya que *f ′*(*x* ) = 2*ax* + *b*), al sustituir en la ecuacio´n de la recta tangente *y f* (2) = *f ′*(2)(*x* 2) *y* 0 = (4*a* +*b*)(*x* 2) deducimos que 4*a* +*b* = 1 y resolvemos el sistema

*− − ⇒ − −*

�

*⇒* �

Solucio´n 8.3.

1. Existencia de solucio´n.

4*a* + 2*b* = 0,

4*a* + *b* = 1,

*a* = 1,

*b* = *−*3.

La funcio´n *f* (*x* ) = *xex*2 *−*1 + *λx* es continua en [*−α*, *α*] y adema´s, como *f* (*−α*) = *−αeα*2 *−*1 *− αλ* y *f ′*(*α*) = *αeα*2 *−*1 + *αλ*, es decir, *f* (*−α*)*f* (*α*) = *−α*2(*eα*2 *−*1 + *λ*)2 *<* 0. Por lo tanto, el teorema de Bolzano prueba que existe *ξ ∈* (*−α*, *α*) tal que *f* (*ξ*) = 0.

1. Unicidad de solucio´n.

Suponemos, por reduccio´n al absurdo, que existen *ξ*1 *< ξ*2 con *ξ*1, *ξ*2 [ *α*, *α*] tales que *f* (*ξ*1) = *f* (*ξ*2). Como *f* es continua en [*ξ*1, *ξ*2] y derivable en (*ξ*1, *ξ*2), deducimos que existe *z* (*ξ*1, *ξ*2) tal que *f ′*(*z* ) = 0. Es decir, 0 = *f ′*(*z* ) = *ez*2 *−*1 +2*z* 2*ez*2 *−*1 +*λ* pero esto es imposible porque (1+2*z* 2)*ez*2 *−*1 +*λ >* 0 y concluimos que la solucio´n es u´nica.

*∈*

*∈ −*

Solucio´n 8.4.

1. *f* (*−*4) = 3 (1 *−* 4)2 = *√*3 9 y *f* (2) = 3 (1 + 2)2 = *√*3 9.

1. Calculamos *f ′*(*x* ) = 2 *√*3 1 y si *f ′*(*x* ) = 0, entonces 2 = 0 y deducimos que la ecuacio´n no tiene

solucio´n.

3 1+*x*

1. No se contradice el Teorema de Rolle porque la funcio´n *f* (*x* ) no es derivable en *x* = *−*1 *∈* (*−*4, 2):

l´ım

*x→−*1+

*f* (*x* ) *− f* (*−*1)

*x −* (*−*1)

= l´ım

*x→−*1+

(1 + *x* )2*/*3 *−* 0

*x* + 1

= l´ım

*x→−*1+

1 (1 + *x* )1*/*3 =

1

0+ = +*∞*.

Solucio´n 8.5. Definimos la funcio´n *f* (*x* ) = *ex* sin(2*x* ) y calcularemos el polinomio de Taylor *P*2,0(*x* ):

*f* (*x* ) = *ex* sin(2*x* ) *f* (0) = 0,

*f ′*(*x* ) = *ex* (sin(2*x* ) + 2 cos(2*x* )) *f ′*(0) = 2,

*f ′′*(*x* ) = *ex* (*−*3 sin(2*x* ) + 4 cos(2*x* )) *f ′′*(0) = 4.

Entonces, el polinomio de Taylor queda:

*P*2,0(*x* ) = *f* (0) + *f ′*(0)(*x −* 0) + *f*

*′′*(0)

(*x* 0)2

= 0 + 2*x* +

*−*

2

4*x* 2

= 2*x* + 2*x* 2

2

= 2*x* (1 + *x* ).

Una aproximacio´n a *e*0,1 sin(0,2) es *f* (0,1) *≈ P*2,0(0,1) = 2 *·* 0,1 *·* (1 + 0,1) = 0,22. Acotamos el error cometido sabiendo que *ξ ∈* (0, 0,1):

*f ′′′*(*ξ*)

1

1 1

3 0,13 *ξ*

*R* (0,1) = (0,1 *−* 0) 1 =

1

1 2,0 1 1

*e*

1

1

3!

6 1 (*−*11 sin(2*ξ*) *−* 2 cos(2*ξ*))1 *≤*

*≤* 6 *e* (11*|* sin(2*ξ*)*|* + 2*|* cos(2*ξ*)*|*) *≤* 6 *e* (11 + 2) *≤* 6 0,1 *e ≤* 3 6 0,1

0,13

*ξ*

0,13

*ξ*

13

3

13

3

13

= 2 0,001 =

Solucio´n 8.6.

= 0,0065.

1. Dom(*f* ) = (0, 2) *∪* (2, +*∞*).
2. Puntos de corte con los ejes: no hay punto de corte con el eje de ordenadas porque 0 *̸∈* Dom(*f* ) y

*x*

*e*

tampoco hay punto de corte con el eje de abscisas porque la ecuacio´n *√x* (*x* 2) = 0 *⇒ e*

*−*

*x*

tiene solucio´n.

= 0 no

1. As´ıntotas horizontales:

*ex*

+*∞* *ex*

2*√xex*

+*∞*

l´ım

*x→*+*∞*

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*+*∞*

*√x* (*x −* 2) =

= l´ım 1

+*∞ x→*+*∞* 2*√*

*x*

*√*

*x*

*x* (*x −* 2) + *√x*

= l´ım = =

*x→*+*∞* 3*x −* 2 +*∞*

= l´ım

*x→*+*∞*

*√*1 *ex* + 2*√xex* 3

= l´ım

*x→*+*∞*

1 + 2*√x*

3

*ex* =

0 + *∞*

3

*·* (+*∞*)

= +*∞*.

No hay as´ıntota horizontal en +*∞* porque *x* l´ım *f* (*x* ) *̸∈* R y tampoco en *−∞* porque el dominio esta´

acotado por la izquierda.

1. As´ıntotas verticales:

l´ım

*x→*0+

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*0+

*→*+*∞*

*ex*

*√x* (*x −* 2) =

1

0+ *·* (*−*2)

= *−∞*,

l´ım

*x→*2*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*2*−*

*ex*

*√x* (*x −* 2) =

*e*2

*√*2 *·* 0*−*

= *−∞*,

l´ım

*x→*2+

*f* (*x* ) = l´ım

*x→*2+

*ex*

*√x* (*x −* 2) =

*e*2

*√*2 *·* 0+

= +*∞*.

Las rectas *x* = 0 y *x* = 2 son as´ıntotas verticales de *f* .

1. Monoton´ıa: calculamos la derivada de *f* .

*f ′*(*x* ) =

*ex √x* (*x −* 2) *− ex* *√*1

(*x −* 2) + *√x*

= *ex*

2*x* (*x −* 2) *−* (*x −* 2) *−* 2*x*

= *ex*

2*x* 2 7*x* + 2

*√* .

*−*

*x* (*x −* 2)2

2

*x*

Si *x*1 = 7*−√*33 *<* 7 *<* 2,

*√*

*f ′*(*x* ) = 0 *⇒* 2*x* 2 *−* 7*x* + 2 = 0 *⇒*

*√*4

4 *√*

*>*

2 *xx* (*x −* 2)2

2 *xx* (*x −* 2)2

Estudiamos el signo de *f ′*(*x* ):

*x*2 = 7+

4

33 7+

4

25 *>* 2.

* Si *x ∈* (0, *x*1): *f ′*(*x* ) *>* 0 y la funcio´n es creciente.
* Si *x ∈* (*x*1, 2) *∪* (2, *x*2): *f ′*(*x* ) *<* 0 y la funcio´n es decreciente.
* Si *x ∈* (*x*2, +*∞*): *f ′*(*x* ) *>* 0 y la funcio´n es creciente.

1. Extremos relativos: de la monoton´ıa deducimos que *f* tiene un ma´ximo local en *x* = *x*1 y un m´ınimo local en *x* = *x*2.
2. Representacio´n gra´fica:

*y*

*x*

Solucio´n 8.7. Si tomamos el polinomio de grado *n* en el origen de la funcio´n exponencial *f* (*x* ) = *ex* ,

*x* 2 *x* 3 *xn*

*Pn*,0 = 1 + *x* +

2 + 3! + *· · ·* + *n*! ,

una aproximacio´n del nu´mero pedido, *√*3 *e*2 = *f* 2 , sera´ *P*

3

*n*,0

2 :

2 22 2*n*

3

*Pn*,0 = 1 + 3 + 2 *·* 32 + *· · ·* + *n*! *·* 3*n* .

Dado que para el error cometido sabemos que *ξ ∈* 0, 2 , tomando la fo´rmula del error buscamos un

3

*n* N tal que

*∈*

1

=

1

1

2 1

1 *f n*+1(*ξ*) 2

*n*+11

*eξ* 2*n*+1 *−*2

*Rn*,0

1

3 1 1 (*n* + 1)!

3 *−* 0

1 = 1 (*n* + 1)!3*n*+1 1 *≤* 10 .

Dado que *eξ < e*1 = *e <* 3, se tendra´ que

1*R*  2 1 *<* 1

3 *·* 2*n*+1

1 = 1

*n*+1

1 .

2

Tomando *n* = 4, se obtiene que 1

*n*,0 3 1

25

1 (*n* + 1)!3*n*+1 1

4

1 (*n* + 1)!3*n* 1

*−*2

5!34 = 1215 *≈* 0, 003292 *<* 10 ,

siendo *n* = 4 el primer entero para el que se cumple el error es menor que 10*−*2 (para *n* = 3 se obtiene

2 0, 0247). Por tanto, sustituyendo en el polinomio de Taylor de grado 4, la aproximacio´n que cumple lo pedido es

81

*≈*

*√*3 *e*2 *≈* 1 + 2 + 2 + 4 + 2 .

3

9

81

243

Solucio´n 8.8. Si calculamos las derivadas de la funcio´n secante, vemos que:

*f ′*(*x* ) = sin *x*

cos2 *x*

= tan *x* sec *x* ,

*f ′′*(*x* ) = sec3 *x* + sec *x* tan2 *x* ,

y como sec( *π* ) = *√*2, tan( *π* ) = 1, deducimos que *f* ( *π* ) = *√*2, *f ′*( *π* ) = *√*2 y *f ′′*( *π* ) = 2*√*2 + *√*2 = 3*√*2.

4 4 4 4 4

Por tanto, el polinomio de Taylor en *π* vendra´ dado por

4

*π* 2

*P*2, *π* (*x* ) = *f*

*π* + *f ′ π*

*x − π*

+ *f ′′*

*π* (*x −* 4 )

= *√*2 +

*√*2(*x − π* ) + *√*3 (*x − π* )2.

4

Solucio´n 8.9.

4 4 4 4 2

4 2 4

1. Dom(*f* ) = R+ *\ {*1*}* = (0, 1) *∪* (1, +*∞*).
2. Puntos de corte con los ejes: no hay punto de corte con el eje de ordenadas porque 0 *̸∈* Dom(*f* )

*x ⇒*

y tampoco hay punto de corte con el eje de abscisas porque la ecuacio´n = 0 *x* = 0 tiene

log *x*

como u´nica solucio´n *x* = 0, que no pertenece al dominio.

1. As´ıntotas horizontales:

l´ım *f* (*x* ) = l´ım = 1 l = l´ım = l´ım *x* = +*∞*,

*x ∞* 1

*x→*+*∞*

*x→*+*∞* log *x*

*∞*

*x→∞* 1

*x→∞*

*x*

luego no hay as´ıntota horizontal en + y tampoco en porque el dominio esta´ acotado por la izquierda.

1. As´ıntota oblicua:

*∞ −∞*

l´ım

*f* (*x* )

= l´ım

1

= 0,

*x→*+*∞ x x→*+*∞* log *x*

luego tampoco hay as´ıntota oblicua en +*∞*.

1. As´ıntotas verticales:

l´ım

*x→*1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x* = 1 = *−∞*,

l´ım *f* (*x* ) = l´ım

*x→*1*−* log *x*

0*−*

*x* = 1 = +*∞*

*x→*1+

La recta *x* = 1 es as´ıntota vertical de *f* .

*x→*1+ log *x* 0+

1. Monoton´ıa: calculamos *f ′*(*x* ) = log *x −* 1 .

(log *x* )2

Si *f ′*(*x* ) = 0 log *x* 1 = 0 log *x* = 1 *x* = *e*, por lo que la funcio´n, que es continua y derivable en su dominio por ser cociente de funciones derivables, tiene un u´nico punto cr´ıtico.

*⇒ − ⇒ ⇒*

Estudiamos el signo de *f ′*(*x* ):

* Si *x ∈* (0, 1) *∪* (1, *e*): *f ′*(*x* ) *<* 0 y la funcio´n es decreciente.
* Si *x ∈* (*e*, +*∞*): *f ′*(*x* ) *>* 0 y la funcio´n es creciente.

1. Extremos relativos: de la monoton´ıa deducimos que *f* tiene un m´ınimo local en *x* = *e*. Representacio´n gra´fica:

*y*

*x*

Solucio´n 8.10. Aplicando la definicio´n de valor absoluto, se tendra´ que

*f* (*x* ) = �

1 *− |x|* si 1 *− |x| >* 0,

*−*1 + *|x|* si 1 *− |x| ≤* 0,

Puesto que 1 *x >* 0 si y so´lo si 1 *< x <* 1, podemos expandir la funcio´n anterior y considerar la expresio´n alternativa

*− | | −*



*− | | ≤ −*

*f* (*x* ) =

1 + *x* si *x* 1,

1 *x* si 1 *< x <* 1,

*− | | −*

 *−*1 + *|x|* si *x ≥* 1.

Finalmente, analizando *x* en cada uno de los intervalos dados, llegamos a la siguiente u´ltima expresio´n de *f* (*x* ) como funcio´n a trozos, que no involucra valores absolutos:

*| |*

Teniendo esto en cuenta:

1. Dom(*f* ) = R.

*f* (*x* ) =

****

1 + *x* si *−*1 *< x ≤* 0, 1 *− x* si 0 *< x <* 1,

*−*1 + *x* si *x ≥* 1.

**** *−*1 *− x* si *x ≤ −*1,

1. Puntos de corte con los ejes: se tiene que 1 *x* = 0 si y so´lo si 1 *x* = 0, lo que sucede si y so´lo si *x* = 1, esto es, la funcio´n corta al eje de abscisas cuando *x* = 1 (puntos ( 1, 0) y (1, 0)). En cuanto al eje de ordenadas, se tiene que *f* (0) = 1, luego corta a dicho eje en el (0, 1).

*| | ± −*

*| − | || − | |*

1. Continuidad: la funcio´n valor absoluto *g* (*x* ) = *x* es una funcio´n continua en todo R, y la funcio´n

*| |*

*f* (*x* ) dada es composicio´n y suma de funciones continuas, luego es continua en todo R.

1. Derivabilidad: analizando la descripcio´n de *f* (*x* ) como funcio´n a trozos, es una funcio´n lineal en cada uno de ellos, luego es derivable en ( , 1) ( 1, 0) (0, 1) (1, ) (coincide con una funcio´n lineal, por tanto derivable, en un entorno abierto). En esos intervalos, se tiene que

*−∞ − ∪ − ∪ ∪ ∞*

Dado que

*f ′*(*x* ) =

1 si 1 *< x <* 0,

1 si 0 *< x <* 1,

**** *−*

*−*

**** *−*1 si *x < −*1,

1 si *x >* 1.

*x* l´ım *− f ′*(*x* ) = *x* l´ım *− −*1 *̸*= 1 = *x* l´ım + 1 = *x* l´ım + *f ′*(*x* ),

*→−*1

*→−*1

*→−*1

*→−*1

la funcio´n no es derivable en *x* = 1. Un ca´lculo ana´logo prueba que tampoco es derivable en *x* = 0

*−*

ni en *x* = 1.

1. Monoton´ıa: analizando el signo de la derivada, vemos que e´sta no se anula nunca y que:
   * Si *x ∈* (*−∞*, *−*1) *∪* (0, 1), la funcio´n es decreciente.
   * Si *x ∈* (*−*1, 0) *∪* (1, +*∞*), la funcio´n es creciente.

La funcio´n presenta tres puntos cr´ıticos, *x* = 1, *x* = 0, *x* = 1: se tiene que *x* = 1 son m´ınimos relativos (y de hecho absolutos, puesto que *f* (1) = *f* ( 1) = 0 y la funcio´n es siempre mayor o igual a cero) y *x* = 0 es ma´ximo relativo (no absoluto).

*−*

*− ±*

Solucio´n 8.11. La distancia entre el punto *P*0 := (0, 2) y un punto gene´rico *P* = (*x* , *y* ) R2 viene dada por la funcio´n distancia

*∈*

*d* (*x* , *y* ) = (*x −* 0)2 + (*y −* 2)2 = *x* 2 + (*y −* 2)2.

Si exigimos ahora que el punto pertenezca a la para´bola *y* = *x* 2, obtenemos sustituyendo en la funcio´n de arriba una funcio´n distancia de una variable

*d* (*x* ) := *d* (*x* , *x* 2) = *x* 2 + (*x* 2 *−* 2)2,

de la que buscamos hallar los m´ınimos absolutos. La funcio´n *x* 2 + (*x* 2 2)2 es estrictamente positiva, luego es derivable por ser composicio´n de funciones derivables (la funcio´n ra´ız cuadrada lo es en R+). Si calculamos la derivada obtenemos:

*−*

*′* 2*x* + 2(*x* 2 *−* 2)2*x* 2*x* (1 + 2(*x* 2 *−* 2)) *x* (1 + 2(*x* 2 *−* 2))

*d* (*x* ) = 2 *x* 2 + (*x* 2 *−* 2)2 = 2 *x* 2 + (*x* 2 *−* 2)2 = *x* 2 + (*x* 2 *−* 2)2 ,

y deducimos que los puntos cr´ıticos, es decir, la solucio´n de *d′*(*x* ) = 0, son *x* = 0 y aquellos tales que

1 + 2(*x* 2 *−* 2) = 0,

esto es, *x* 2 = 3 , de donde *x* = *±*J 3 . Analizando el signo de *d′*(*x* ), vemos que la funcio´n *d* (*x* ) es decre-

2

2

ciente en *−∞*, *−*J 3 *∪* 0, J 3 y creciente en *−*J 3 , 0 *∪* J 3 , *∞* .

J

2

2

2

2

Por tanto *x* = 0 es un ma´ximo relativo y *x* = *±* 3 son ambos m´ınimos relativos (y de hecho absolutos). Por tanto, los puntos de la para´bola donde la distancia al punto (0, 2) se minimiza son

*P* = *−*r 3 , 3 , *P* = r 3 , 3 .

2

1

2

2

2

2

2

Solucio´n 9.1. Utilizamos la fo´rmula de integracio´n por partes con

 *u* = arcsin *x ⇒ du* = *√*

r

1

1. *− x*r2

*dx* ,

para resolver la integral:

 *dv* = *dx ⇒ v* =

*dv* =

*dx* = *x* ,

r arcsin *x dx* = *x* arcsin *x −* r

*x*

*√*1 *− x* 2

*−*

*dx* = *x* arcsin *x* + 1 r *−*2*x* (1 *− x* 2)*−*1*/*2 *dx* =

= *x* arcsin *x* +

1 (1 *x* 2)1*/*2

1

+ *C* = *x* arcsin *x* +

1 *− x* 2 + *C* .

2

2 2

Solucio´n 9.2. Utilizamos el cambio de variable *x −* 2 = *t*2 con *dx* = 2*t dt*:

r

r

r

*x* 2

*√x −* 2 *dx* =

(*t*2 + 2)2

2*t dt* = 2

*t*

(*t*4

+ 4*t*2

+ 4) *dt* =

2*t*5

+

5

8*t*3

+ 8*t* + *K* =

3

= 2 (*x* 2)5*/*2 + 5

*−*

8

3 (*x −* 2) + 8(*x −* 2) + *K* .

3*/*2 1*/*2

Solucio´n 9.3. Utilizamos la fo´rmula de integracio´n por partes con

 *u* = *e ⇒ du* = 2*e dx* ,

2*x* 2*x*

 *dv* = sin *x dx ⇒ v* = r *dv* = r sin *x dx* = *−* cos *x* ,

para resolver la integral:

*I* = r *e*2*x* sin *x dx* = *−e*2*x* cos *x −* r *−*2*e*2*x* cos *x dx* = *−e*2*x* cos *x* + 2 r *e*2*x* cos *x dx* =

= *−e*2*x* cos *x* + 2 *e*2*x* sin *x −* r 2*e*2*x* sin *x dx* = *−e*2*x* cos *x* + 2*e*2*x* sin *x −* 4 r *e*2*x* sin *x dx* =

= *e*2*x* (2 sin *x −* cos *x* ) *−* 4*I* ,

donde hemos vuelto a utilizar la fo´rmula de integracio´n por partes con

 *u* = *e ⇒ du* = 2*e dx* ,

2*x* 2*x*

 *dv* = cos *x dx ⇒ v* = r *dv* = r cos *x dx* = sin *x* .

Hemos obtenido

2*x*

*I* = *e*2*x*

Solucio´n 9.4.

(2 sin *x −* cos *x* ) *−* 4*I ⇒* 5*I* = *e*

(2 sin *x −* cos *x* ) *⇒ I* =

*e*2*x*

5 (2 sin *x −* cos *x* ) + *K* .

(a) Utilizamos el cambio de variable *x* = sin *t* con *dx* = cos *t dt* y � si *x* = 0 *→ t* = arcsin 0 = 0,

si *x* = 1 *→ t* = arcsin 1 = *π* ,

enton-

ces

r 1

1 *− x* 2 *dx* =

r *π*

1 *−* sin2 *t* cos *t dt* =

*π*

2

cos2 *t dt* =

r

r *π* 1 + cos(2*t*)

2

*dt* =

0 0

2

1 r *π*

2

1 r *π*

0 0

11 l *π* 11

2

l

2

*π* 1 *π* 1 *π*

2

= *dt* +

2

2 0 4 0

2 cos(2*t*) *dt* = *t* +

2 0 4

2

sin(2*t*) 0 = 2 2 + 4 (sin *π −* sin 0) = 4 .

(b) 2

r

0

*f* (*x* ) *dx* =

1

*f* (*x* ) *dx* +

r

0

2

*f* (*x* ) *dx* =

r

1

1

(2*x* 3) *dx* +

r

*−*

0

2

(3*x* 2

r

1

*−* 4*x* ) *dx* =

1*x* 2

*−* 3*x*

1

+ *x* 3

l

1

0

*−* 2*x*

1. 2 =

1

l

= (1 *−* 3) *−* 0 + (8 *−* 8) *−* (1 *−* 2) = *−*1.

Solucio´n 9.5. Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, resolvemos la divisio´n:

3*x* 5 *−* 4*x* 3 + 5*x* 2 *−* 10*x* + 6 2*x* 3 *−* 2*x* 2 *−* 2

Entonces

*x* 4 *−* 2*x* 3 + 2*x* 2 *−* 2*x* + 1 = 3*x* + 6 + *x* 4 *−* 2*x* 3 + 2*x* 2 *−* 2*x* + 1 .

3*x* 5 4*x* 3 + 5*x* 2 10*x* + 6

r *− −*

r

*x* 4 *−* 2*x* 3 + 2*x* 2 *−* 2*x* + 1 *dx* =

r *− −*

(3*x* + 6) *dx* +

2*x* 3 2*x* 2 2

*x* 4 *−* 2*x* 3 + 2*x* 2 *−* 2*x* + 1 *dx* =

r *− −*

r *− −*

3*x* 2

= + 6*x* + 2

2*x* 3 2*x* 2 2

*x* 4 *−* 2*x* 3 + 2*x* 2 *−* 2*x* + 1 *dx* =

r

r *−*

r

3*x* 2

+ 6*x* +

2

2*x* 3 2*x* 2 2

(*x* 2 + 1)(*x −* 1)2 *dx* =

3*x* 2

= + 6*x* + 2

3*x* 2

1 *dx* +

*x* 2 + 1

2 *dx*

*x −* 1

1

1 *dx* = (*x −* 1)2

= 2 + 6*x* + arctan *x* + 2 log *|x* + 1*|* + *x −* 1 + *C* ,

donde hemos utilizado la descomposicio´n en fracciones simples:

2*x* 3 *−* 2*x* 2 *−* 2

*Mx* + *N A*

*B* (*Mx* + *N*)(*x −* 1)2 + *A*(*x* 2 + 1)(*x −* 1) + *B*(*x* 2 + 1)

(*x* 2 + 1)(*x −* 1)2 =

es decir,

*x* 2 + 1 + *x* + 1 + (*x −* 1)2 =

(*x* 2 + 1)(*x −* 1)2 ,

2*x* 3 *−* 2*x* 2 *−* 2 = *M*(*x* 3 *−* 2*x* 2 + *x* ) + *N*(*x* 2 *−* 2*x* + 1) + *A*(*x* 3 *− x* 2 + *x −* 1) + *B*(*x* 2 + 1),

y el sistema obtenido al igualar coeficientes es:

Coef. *x* 3 : 2 = *M* + *A*

Coef. *x* 2 : *−*2 = *−*2*M* + *N − A* + *B*

****

*M* = 0,

*N* = 1,

****

Coef. *x* : 0 = *M −* 2*N* + *A*

*⇒ A* = 2,

Te´rm. indep. : *−*2 = *N − A* + *B*   *B* = *−*1.

 

Solucio´n 9.6. Si realizamos una descomposicio´n en fracciones simples, dado que el denominador fac- toriza como *x* 3 + 2*x* 2 + 3*x* + 6 = (*x* + 2)(*x* 2 + 3), obtenemos que:

*−*4 = *A*

*Mx* + *N A*(*x* 2

+ =

+ 3) + (*Mx* + *N*)(*x* + 2)

,

(*x* + 2)(*x* 2 + 3) *x* + 2

*x* 2 + 3

(*x* + 2)(*x* 2 + 3)

de donde igualando numeradores y operando conseguimos la expresio´n

*−*4 = (*A* + *M*)*x*

2

+ (2*M* + *N*)*x* + (3*A* + 2*N*),

y al igualar coeficientes es llegamos al sistema

Coef. *x* 2 : 0 = *A* + *M*

Coef. *x* : 0 = 2*M* + *N*

Te´rm. indep. : *−*4 = 3*A* + 2*N*



*A* = 4*/*7,

 *−*

*M* = 4*/*7,

*⇒*

 *N* = *−*8*/*7.

Se sigue que

r *−*4 *dx* = *−* 4 r 1 *dx* + 1 r 4*x −* 8 *dx* = *−* 4 r 1 *dx* + 4 r *x dx −* 8 r 1 *dx* .

*x* 3 + 2*x* 2 + 3*x* + 6

7

*x* + 2

7

*x* 2 + 3

7

*x* + 2

7

*x* 2 + 3

7

*x* 2 + 3

Las dos primeras integrales son inmediatas:

*−* 4 r 1 *dx* = *−* 4 log *|x* + 2*|* y 4 r *x dx* = 2 r 2*x dx* = 2 log *|x* 2 + 3*|*.

7

*x* + 2

7

7

*x* 2 + 3

7

*x* 2 + 3

7

La u´ltima es una integral de tipo arcotangente, puesto que

8 r 1

8 r 1

8 *√*

r 1*/√*3

8*√*3

( *x* )

*−* 7 *x* 2 + 3 *dx* = *−* 7

3

3 *x* 2 + 1

*dx* = *−* 21 3

1 + *x*

*√*

3

arctan

21

2

2 *dx* = *−*

arctan .

21 3

+ 3*| −*

*√*3

+ *K* .

*√*

Concluimos que

r *−*4 4

*x* 3 + 2*x* 2 + 3*x* + 6 *dx* = *−* 7 log *|x* + 2*|* + 7 log *|x*

2 8*√*3

( *x* )

Solucio´n 9.7. Si tomamos el cambio de variable *t* = *√x* , con *dt* =

integral se convierte en

1

2*√x dx* (y por tanto 2*t dt* = *dx* ), la

r *e√x dx* = r 2*tet dt*.

Resolviendo ahora por partes, con  *u* = 2*t ⇒ du* =r2 *dt*,

se llega a

 *dv* = *et dt ⇒ v* = *et dt* = *et*,

r *e√x dx* = r 2*tet dt* = 2*tet −* r 2*et dt* = 2*tet −* 2*et* + *K* = 2*√xe√x −* 2*e√x* + *K* = 2*e√x* *√x −* 1 + *K* .

Solucio´n 9.8. La integral pedida es la integral de la funcio´n secante, para la que existen varios me´todos de ca´lculo empleando identidades trigonome´tricas. Uno de los ma´s sencillos es el siguiente: si multipli- camos numerador y denominador por cos *x* y utilizamos que cos2 *x* + sin2 *x* = 1, se obtiene:

r 1 *dx* = r cos *x dx* = r cos *x dx* .

cos *x*

cos2 *x*

1 *−* sin2 *x*

Utilizando ahora el cambio de variable *t* = sin *x* , con *dt* = cos *x dx* , llegamos a

r cos *x dx* = r 1 *dt*,

1 *−* sin2 *x* 1 *− t*2

que se trata de una integral racional. Descomponiendo en fracciones simples:

1 1 *A B*

= = +

= *A*(1 *− t*) + *B*(1 + *t*) = (*B − A*)*t* + (*A* + *B*),

1 *− t*2

(1 *− t*)(1 + *t*)

1 + *t*

1 *− t*

(1 *− t*)(1 + *t*)

(1 *− t*)(1 + *t*)

e igualando coeficientes se obtiene

Coef. *t* : 0 = *B − A* 1 *⇒* � *A* = 1*/*2,

En consecuencia

Te´rm. indep. : 1 = *A* + *B*

*B* = 1*/*2.

r 1 *dx* = r 1 *dt* = r 1*/*2 *dt* + r 1*/*2 *dt* = 1 (log *|*1 + *t| −* log *|*1 *− t|*) + *K* =

cos *x*

1 1 + *t* 1 1 + sin *x*

1 *− t*2

1 + *t*

1 *− t* 2

2 11 *− t* 1 2 11 *−* sin *x* 1

= log 1 1 + *K* = log 1 1 + *K* .

Solucio´n 9.9. Calculamos primero la integral indefinida. Si escogemos el cambio de variable *t* = *√x* , con

1

*dt* = 2*√x dx* (y por tanto 2*t dt* = *dx* ) se tiene que

1

r

1 + *√x dx* =

1 2*t dt* = 2

1 + *t*

r

*t dt* = 2 1 + *t*

1 + *t −* 1 *dt* = 2

1 + *t*

r

1 1

1 + *t*

*−* )

r (

*dt* =

= 2 (*t −* log *|*1 + *t|*) + *K* = 2 *√x −* log *|*1 + *√x|* + *K* .

r

Aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida:

1 1

r

1 + *√x dx* =

0

12 *√*

*x −* log

11 +

*√x* 1 l1 = 2(1 *−* log 2) *−* 2(0 *−* 0) = 2 *−* 2 log 2 = 2 *−* log 4.

0

Solucio´n 9.10. Calculamos en primer lugar la integral indefinida. El denominador sugiere emplear el cam- bio de variable *x* = 2 sin *t*, de donde *dx* = 2 cos *t dt*.

Aplicando dicho cambio,

r *x* 2

r 4 sin2 *t*

r 8 sin2 *t* cos *t*

r 8 sin2 *t* cos *t* r 2

*√*4 *− x* 2 *dx* =

4 *−* 4 sin2 *t* 2 cos *t dt* =

J4(1 *−* sin2 *t*)

*dt* =

*dt* =

2 cos *t*

4 sin

*t dt*.

La integral de sin2 *t* se resuelve utilizando identidades trigonome´tricas del a´ngulo doble: puesto que

sin2 *t* + cos2 *t* = 1 y cos2 *t −* sin2 *t* = cos(2*t*), se obtiene restando ambas ecuaciones que

sin2 *t* = 1 *−* cos(2*t*) ,

2

y por tanto

r 4 sin2 *t dt* = 4 r 1 *−* cos(2*t*) *dt* = 2 r (1 *−* cos(2*t*)) *dt* = 2 *t −* 1 sin(2*t*) + *K* = 2*t −* sin(2*t*) + *K* .

2

2

Para resolver la integral indefinida no es necesario deshacer el cambio de variable ya que basta ver que la funcio´n 2 sin *t* es biyectiva en el intervalo (0, *π* ) y que si *t ∈* (0, *π* ), entonces *x* = 2 sin *t ∈* (0, 2). Por ello,

2 2

r 2 *x* 2 *π*

l

1

2

*√*4 *− x* 2 *dx* = 2*t −* sin(2*t*) 0 = (*π −* sin *π*) *−* (0 *−* sin 0) = *π*.

0