# Matemáticas I

# Presentaciones

## Grado en Ingeniería Ambiental

Marta Latorre Balado y Javier Martínez Martínez
Material docente en abierto de la Universidad Rey Juan Carlos
BURJ Digital https://burjcdigital.urjc.es/

6 de septiembre de 2023



Universidad Rey Juan Carlos

# Índice

# Parte I. Álgebra lineal

# Tema 1. Matrices y sistemas de ecuaciones

Grado en Ingeniería Ambiental

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

# Matrices

## Matrices

- Una **matriz** de dimensión (orden o tamaño) $m \times n$ es una *tabla* ordenada de $mn$ elementos.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}\,.$$

- La matriz $A$ tiene $m$ **filas** y $n$ **columnas**.
- $a_{ij}$ denota el **elemento** (o entrada) situado en la fila $i$ y columna $j$.
- Dos matrices son **iguales** si son del mismo tamaño y todos sus elementos son iguales.
- Si $m = 1$ decimos que $A$ es una matriz **fila** y si $n = 1$ decimos que $A$ es una matriz **columna**.

# Matrices

- Si $m = n$ decimos que la matriz es **cuadrada**: $A \in \mathcal{M}_n$.
- Si $A$ es cuadrada y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, decimos que la matriz es **diagonal**.
- Llamamos matriz **identidad** $I_n \in \mathcal{M}_n$ a la matriz diagonal con $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n\,.$$

- La matriz **nula** $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tiene todos sus elementos iguales a cero.
- Decimos que $A \in \mathcal{M}_n$ es **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ y $A$ es **triangular superior** $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

# Operaciones con matrices

- **Suma de matrices.** Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se define la suma de matrices como

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}\,.$$

- **Producto de una matriz por un escalar.** Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se define el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ como

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}\,.$$

- **Ejemplo.** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

  calcula:

  **1)** $A + B$ **2)** $A + C$ **3)** $2B$

  *(Solución)*

# Operaciones con matrices

- **Producto de matrices.** Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times k}$, se define el producto de matrices como

$$AB = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times k} \quad \text{con} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\ ,$$

  para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y para todo $j = 1, 2, \ldots, k$.

- **Ejemplo.** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

  **1)** $AB$
  *(Solución)*

# Propiedades de las operaciones con matrices

- La suma de matrices es **asociativa**: si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces
$$(A + B) + C = A + (B + C)\,.$$
- La suma de matrices es **conmutativa**: si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces
$$A + B = B + A\,.$$
- El producto de matrices es **asociativo**: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times k}$ y $C \in \mathcal{M}_{k\times s}$, entonces
$$(AB)C = A(BC)\,.$$
- El producto de matrices es **distributivo** con respecto a la suma: si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times k}$, entonces
$$(A + B)C = AC + BC\,.$$

## Propiedades de las operaciones con matrices

- El producto de matrices **NO** es conmutativo.
- **Ejemplo.**

**1)** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $AB$ y $BA$.

**2)** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula $AC$ y $CA$.

*(Solución)*

# Propiedades de las operaciones con matrices

- No se puede trabajar con matrices del mismo modo que trabajamos con números reales.
- **Ejemplo.** Comprueba las siguientes igualdades.

**1)** $AB = 0$ pero $A \neq 0$ y $B \neq 0$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2)** $AB = AC$ pero $B \neq C$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3)** $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*(Solución)*

# Propiedades de las operaciones con matrices

- **Ejemplo.** Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y sea $I_n$ la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Comprueba que las siguientes igualdades son ciertas.

  **1)** $(A + I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n$.

  **2)** $(A - I_n)^2 = A^2 - 2A + I_n$.

  **3)** $(A + I_n)(A - I_n) = A^2 - I_n$.
  *(Solución)*

# Matriz traspuesta

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, llamamos matriz **traspuesta** de $A$ y se denota por $A^T$ o $A^t$, a la matriz obtenida al colocar las filas de $A$ en las columnas de $A^T$.
- $A^T \in \mathcal{M}_{n\times m}$.
- **Propiedades de la matriz traspuesta**
  **1)** Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $(A^T)^T = A$.
  **2)** Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $(A+B)^T = A^T + B^T$.
  **3)** Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
  **4)** Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times k}$, entonces $(AB)^T = B^T A^T$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n$, decimos que es **simétrica** si $A = A^T$ y decimos que es **antisimétrica** si $A = -A^T$.

# Matriz invertible (solo para matrices cuadradas)

- Decimos que una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ es **invertible** si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n$ tal que

$$AB = I_n \qquad \text{y} \qquad BA = I_n\,.$$

- En ese caso, decimos que $B$ es la **inversa** de $A$ y se denota por $A^{-1} = B$.

- Si existe la inversa, es única.

- **Propiedades de la matriz inversa**

  **1)** Si $A, B \in \mathcal{M}_n$, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

  **2)** Si $A \in \mathcal{M}_n$, entonces $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

# Determinante (solo para matrices cuadradas)

- Sea $A \in \mathcal{M}_2$, se define el **determinante** de $A$ como

$$|A| = \det(\mathrm{A}) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}\,.$$

- Sea $A \in \mathcal{M}_3$, se puede usar la **regla de Sarrus**:

$$\det(\mathrm{A}) = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \mathrm{aei} + \mathrm{bfg} + \mathrm{dhc} - \mathrm{ceg} - \mathrm{bdi} - \mathrm{fha}\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

*(Solución)*

# Determinante (solo para matrices cuadradas)

- Si $A \in \mathcal{M}_n$, se calcula el **determinante** de $A$ utilizando los determinantes de submatrices de tamaño inferior.
- Necesitamos las siguientes definiciones:
  - Llamamos **menor complementario** de $a_{ij}$ y lo denotamos por $\alpha_{ij}$ al determinante de la matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ obtenida al eliminar la fila $i$ y al columna $j$ de la matriz $A$.
  - Llamamos **adjunto** de $a_{ij}$ al valor $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$.
- **Ejemplo.** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, calcula $A_{3\,1}$.

*(Solución)*

# Determinante (solo para matrices cuadradas)

- Desarrollo por adjuntos de la **fila** $i$ (para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\mathrm{det}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{a}_{\mathrm{i1}}\mathrm{A}_{\mathrm{i1}} + \mathrm{a}_{\mathrm{i2}}\mathrm{A}_{\mathrm{i2}} + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{in}}\mathrm{A}_{\mathrm{in}}\,.$$

- Desarrollo por adjuntos de la **columna** $j$ (para cualquier $j = 1, 2, \ldots, n$):

$$\mathrm{det}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{a}_{\mathrm{1j}}\mathrm{A}_{\mathrm{1j}} + \mathrm{a}_{\mathrm{2j}}\mathrm{A}_{\mathrm{2j}} + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{nj}}\mathrm{A}_{\mathrm{nj}}\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ desarrollando por adjuntos de la primera columna. *(Solución)*

# Propiedades del determinante

- Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$.

**1)** $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$.

**2)** $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**3)** El determinante de $A$ cambia de signo al intercambiar dos filas (o columnas).

**4)** El determinante de $A$ no cambia al sumar a una fila (o columna) un múltiplo de otra.

**5)** $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{B})$.

**6)** Si $A$ es invertible, $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$.

**7)** Si $A$ es diagonal, triangular inferior o superior, $\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a}_{11} \cdot \mathrm{a}_{22} \cdot \ldots \cdot \mathrm{a}_{\mathrm{nn}}$.

# Determinante (solo para matrices cuadradas)

- **Teorema.** Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz cuadrada. Entonces,

$$A \text{ es invertible} \quad \text{si y solo si} \quad \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

# Sistemas de ecuaciones lineales

# Ecuación lineal

- Llamamos **ecuación lineal** de $n$ incógnitas a una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde
  - $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los **coeficientes**,
  - $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las **incógnitas**,
  - $b$ es el **término independiente**.

- **Ejemplo.**

**1)** $\log(x_1) + e^{x_2} + x_3^4 - \operatorname{sen}(x_4) + \dfrac{1}{x_5} + \sqrt{x_6} = 8$ no es una ecuación lineal.

**2)** $\log(2)x + \sqrt{5}\,y + 7 = e^5$ sí es una ecuación lineal.

# Ecuación lineal

- Llamamos **solución** de la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ a un conjunto de valores

$$\begin{cases} x_1 = c_1\,, \\ x_2 = c_2\,, \\ \quad\vdots \\ x_n = c_n\,, \end{cases}$$

  que verifican la ecuación, es decir, se cumple

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b\,.$$

- La solución de una ecuación lineal no es necesariamente única.

- **Ejemplo.** Calcula una solución de la ecuación $x + y = 0$. *(Solución)*

# Sistema de ecuaciones lineales

- Llamamos **sistema de ecuaciones lineales** de $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas a una expresión de la forma

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

  donde

  - $a_{ij}$ con $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$ son los **coeficientes**,
  - $x_j$ con $j = 1, 2, \ldots, n$ son las **incógnitas**,
  - $b_i$ con $i = 1, 2, \ldots, m$ son los **términos independientes**.

## Sistema de ecuaciones lineales

- Llamamos **solución** del sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de valores

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \,, \\ x_2 = c_2 \,, \\ \quad\vdots \\ x_n = c_n \,, \end{cases}$$

que verifican **todas** las ecuaciones del sistema.

## Discusión de un sistema

- Según el tipo de solución, un sistema lineal puede ser:
  - **compatible determinado**, si existe una única solución del sistema;
  - **compatible indeterminado**, si existe más de una solución del sistema;
  - **incompatible**, si no existe ninguna solución del sistema.

- **Ejemplo.** Discute los siguientes sistemas lineales.

**1)** $\left\{ \begin{array}{r} x + \phantom{2}y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{array} \right.$ **2)** $\left\{ \begin{array}{r} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right.$ **3)** $\left\{ \begin{array}{r} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{array} \right.$

*(Solución)*

# Resolución de un sistema lineal

# Método de Gauss

## Sistemas equivalentes

- Un método para resolver sistemas de ecuaciones consiste en reemplazar el sistema original por otro más sencillo con las mismas soluciones.

- **Ejemplo.** Los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{y} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right.$$

tienen la misma solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

## Sistemas equivalentes

- Decimos que dos sistemas lineales son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

- **Teorema.** Un sistema lineal es equivalente a cualquiera obtenido al realizar sobre él alguna de las siguientes operaciones elementales:

  **1)** intercambiar el orden de dos ecuaciones del sistema;

  **2)** multiplicar una ecuación por un escalar no nulo;

  **3)** sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

# Método de Gauss

- **Ejemplo.** Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss.

**1)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right.$

**2)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$

**3)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ & & 2y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$

*(Solución)*

# Forma matricial de un sistema lineal

# Forma matricial de un sistema lineal

El **sistema de ecuaciones lineales** de $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

se puede expresar de forma matricial como $AX = B$ siendo

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ la matriz de **coeficientes**,

# Forma matricial de un sistema lineal

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ la matriz de **incógnitas**,
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ la matriz de **términos independientes**.
- La matriz $(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}$ es la **matriz ampliada** del sistema.

# Método de Gauss

- **Método de Gauss:** es un método de resolución de sistemas $AX = B$ que consiste en hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada $(A|B)$ hasta obtener una matriz escalonada equivalente.

- **Teorema.** El sistema lineal $AX = B$ es equivalente a cualquiera obtenido al realizar sobre la **matriz ampliada** $(A|B)$ cualquiera de las siguientes operaciones elementales:

  **1)** intercambiar dos filas de la matriz;

  **2)** multiplicar una fila por un escalar no nulo;

  **3)** sumar a una fila un múltiplo de otra.

# Método de Gauss

- Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es **escalonada** si se cumplen las siguientes condiciones:

  **1)** las filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz;

  **2)** debajo del primer elemento no nulo de cada fila (llamado **pivote**) solo hay ceros;

  **3)** el pivote de una fila está situado más a la derecha que el pivote de las filas superiores.

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes matrices son escalonadas.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*(Solución)*

# Teorema de Rouché–Frobenius

- El **rango** de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$, es el número de filas no nulas de una matriz escalonada equivalente.

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$.

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \leq \mathrm{mín}\{\,\mathrm{m}, \mathrm{n}\,\}$.

- **Teorema de Rouché–Frobenius.** Si $AX = B$ es un sistema lineal con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}$, se cumple:
  - si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{n}$, entonces el sistema es compatible determinado;
  - si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}|\mathrm{B}) < \mathrm{n}$, entonces el sistema es compatible indeterminado;
  - si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \neq \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}|\mathrm{B})$, entonces el sistema es incompatible.

# Ejemplos

- **Ejemplo.** Discute los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss.

**1)** $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & y & - & z & + & t & = & -1 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & + & 4t & = & -6 \\ 4x & + & 2y & - & 4z & + & 6t & = & -10 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & + & 5t & = & -7 \end{array}\right.$$

**2)** $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & 3y & - & 3z & = & 2 \\ -4x & + & \alpha y & + & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

**3)** $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ -x & - & 4y & + & 3z & = & -2 \\ -2x & - & 2y & & & = & \beta \end{array}\right.$$

*(Solución)*

# Cálculo de la matriz inversa

# Método de Gauss–Jordan

# Método de Gauss–Jordan

- **Método de Gauss:** es un método de resolución de sistemas $AX = B$ que consiste en hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada $(A|B)$ hasta obtener una matriz escalonada equivalente.

- **Método de Gauss–Jordan:** es un método de resolución de sistemas $AX = B$ que consiste en hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada $(A|B)$ hasta obtener una matriz escalonada reducida equivalente.

# Método de Gauss–Jordan

- Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es **escalonada reducida** si se cumplen las siguientes condiciones:

  **1)** es escalonada;

  **2)** todos los pivotes son 1;

  **3)** todos los pivotes tienen encima y debajo 0.

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes matrices son escalonadas reducidas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*(Solución)*

## Cálculo de la matriz inversa

- Si $A \in \mathcal{M}_n$ es invertible, se puede obtener $A^{-1}$ realizando transformaciones elementales:

$$\left(A \mid I_n\right) \longrightarrow \left(I_n \mid A^{-1}\right) .$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss–Jordan.

**1)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

*(Solución)*

## Cálculo de la matriz inversa

- Si $A$ es una matriz invertible, entonces el sistema $AX = B$ es compatible determinado y además se cumple:

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B\,.$$

- Si $A$ es una matriz invertible, entonces el sistema $AX = 0$ es compatible determinado y la única solución es $X = 0$.

# Soluciones

# Soluciones

**Pág.** 5

**1)** $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**2)** No se puede calcular porque las matrices son de distinto tamaño: $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ y $C \in \mathcal{M}_{3\times 3}$.

**3)** $2B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

**Pág.** 6

**1)** $AB = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{pmatrix}$.

**Pág.** 8

**1)** $AB = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

**2)** $AC = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 11 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ y $CA$ no se puede calcular porque las matrices no tienen el tamaño adecuado: $C \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ y $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

## Soluciones

**Pág.** 9

**1)** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**2)** $AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$.

**3)** $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ y $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^2 - 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

**Pág.** 10

**1)** $(A+I_n)^2 = (A+I_n)(A+I_n) = AA + AI_n + I_nA + I_nI_n = A^2 + 2A + I_n$.

**2)** $(A-I_n)^2 = (A-I_n)(A-I_n) = AA - AI_n - I_nA + I_nI_n = A^2 - 2A + I_n$.

**3)** $(A+I_n)(A-I_n) = AA - AI_n + I_nA - I_nI_n = A^2 - I_n$.

# Soluciones

**Pág.** 13

**1)** det $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2.$

**2)** $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 4 - 6 - 0 - 1 + 4 = 1.$

**Pág.** 14

**1)** $\alpha_{3,1} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 15 = -3$ y $A_{3,1} = (-1)^4(-3) = -3.$

**Pág.** 15

**1)** $\det(A) = 1 \cdot (-1)^2 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$
$= (-1 + 36 - 6) + (12 - 2 + 2) = 41.$

# Soluciones

**Pág.** 20

**1)** $x = -\pi$, $y = \pi$.

**Pág.** 23

**1)** Es un sistema compatible indeterminado porque $\left\{ \begin{array}{l} x = 2\,, \\ y = -2\,, \end{array} \right.$ y $\left\{ \begin{array}{l} x = -5\,, \\ y = 5\,, \end{array} \right.$ son dos soluciones.

**2)** Es un sistema incompatible porque la expresión $x + y$ no puede tener dos valores distintos.

**3)** Es un sistema compatible determinado porque la única solución es $x = y = \frac{1}{2}$.

**Pág.** 27

**1)** $$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 9 \\ 2x + 4y - 3z &=& 1 \\ 3x + 6y - 5z &=& 0 \end{array} \right. \underset{\substack{E_2 \to E_2 - 2E_1 \\ E_3 \to E_3 - 3E_1}}{\sim} \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 9 \\ 2y - 7z &=& -17 \\ y - 11z &=& -27 \end{array} \right. \underset{E_3 \to 2E_3 - 3E_2}{\sim}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 9 \\ 2y - 7z &=& -17 \\ - z &=& -3 \end{array} \right. \longrightarrow \text{SCD:} \left\{ \begin{array}{l} x = 1\,, \\ y = 2\,, \\ z = 3\,. \end{array} \right.$$

# Soluciones

**2)** $\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ -x-2y-z=3 \end{array}\right. \underset{E_2\to E_2+E_1}{\sim} \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ 0=3 \end{array}\right. \longrightarrow$ SI

**3)** $\left\{\begin{array}{rrrcr} x+ & y+ & 2z & = & 3 \\ x- & y+ & z & = & -1 \\ & 2y+ & z & = & 4 \end{array}\right. \underset{E_2\to E_2-E_1}{\sim} \left\{\begin{array}{rrrcr} x+ & y+ & 2z & = & 3 \\ & -2y- & z & = & -4 \\ & 2y+ & z & = & 4 \end{array}\right. \underset{E_3\to E_3+E_2}{\sim}$

$\left\{\begin{array}{rrrcr} x+ & y+ & 2z & = & 3 \\ & -2y- & z & = & -4 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \longrightarrow$ SCI: $\left\{\begin{array}{l} x=3\alpha-5\,, \\ y=\alpha\,, \\ z=4-2\alpha\,, \end{array}\right.$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.

**Pág.** 32

**A)** Sí es escalonada.

**B)** No es escalonada porque el pivote de la segunda fila está más hacia la izquierda que el pivote de la primera fila.

**C)** Sí es escalonada.

**D)** Sí es escalonada.

**E)** Sí es escalonada.

# Soluciones

**Pág.** 34

**1)** $\left(A\,\middle|\,B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -4 & 6 & -10 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & -7 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 & 6 & -10 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & -7 \end{array}\right)$

$$\underset{\substack{F_3 \to F_3 - 2F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 \to F_3 + 2F_2 \\ F_4 \to F_4 - F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como $\text{rg}\,(A|B) = \text{rg}\,(A) = 2 < 4 =$ nº incógnitas, es SCI y con solución:

$$\begin{cases} x = -{}^{\alpha}\!/_{2} - \beta - 2\,, \\ y = \alpha - \beta - 1\,, \\ z = \alpha\,, \\ t = \beta\,, \end{cases} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

## Soluciones

**2)** $\left(A \,\middle|\, B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ -4 & \alpha & 4 & 2 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & \alpha - 2 & 6 & 4 \end{array}\right)$

- Si $\alpha = 2$: la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right)$ y como $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 3 =$ $=$ nº incógnitas, es SCD con solución $\left\{\begin{array}{l} x = 2/3\,, \\ y = 4/3\,, \\ z = 2/3\,. \end{array}\right.$
- Si $\alpha \neq 2$:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & \alpha - 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - \frac{\alpha-2}{3} F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha+4}{\alpha-2} & \frac{2}{3}\,\frac{8-\alpha}{\alpha-2} \end{array}\right)$
  - Si $\alpha = -4$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4/3 \end{array}\right)$ y como $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 3 \neq 2 = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$, es SI.

## Soluciones

- Si $\alpha \neq -4$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha+4}{\alpha-2} & \frac{2}{3}\frac{8-\alpha}{\alpha-2} \end{array}\right)$ y como $\operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(A) =$ $= 3 =$ nº de incógnitas, es SCD con solución: $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}, \\ y = \frac{4}{3}, \\ z = \frac{2}{3}\frac{8-\alpha}{\alpha+4}. \end{array}\right.$ .

**3)** $\left(A \,\middle|\, B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & \beta \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow -F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ \alpha & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & \beta \end{array}\right)$

$$\underset{\substack{F_2 \to F_2 - \alpha F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2-4\alpha & -3+3\alpha & -3-2\alpha \\ 0 & 6 & -6 & 4+\beta \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow \frac{1}{6}F_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 2-4\alpha & -3+3\alpha & -3-2\alpha \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + (4\alpha-2)F_2}{\sim}$$

# Soluciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 0 & -1-\alpha & -3-2\alpha+\frac{2\alpha-1}{3}(4+\beta) \end{array}\right)$$

- Si $\alpha = -1$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -5-\beta \end{array}\right)$.
  - Si $\beta = -5$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ y como $\mathrm{rg}\,(A|B) = \mathrm{rg}\,(A) = 2 < 3 =$

    $=$ nº incógnitas, es SCI con solución: $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}\,, \\ y = \frac{4}{3}\,, \\ z = \frac{2}{3}\,\frac{8-\alpha}{\alpha+4}\,. \end{array}\right.$ .
  - Si $\beta \neq -5$, la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -5-\beta \end{array}\right)$ y como $\mathrm{rg}\,(A|B) = 3 \neq 2 = \mathrm{rg}\,(A)$

    es SI.

# Soluciones

- Si $\alpha \neq -1$ la matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4+\beta}{6} \\ 0 & 0 & -1-\alpha & -3-2\alpha+\frac{2\alpha-1}{3}(4+\beta) \end{array}\right)$ y como

  $\mathrm{rg}\,(A|B) = 3 = \mathrm{rg}\,(A) =$ nº incógnitas, es SCD con solución: $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}, \\ y = \frac{4}{3}, \\ z = \frac{2}{3}\frac{8-\alpha}{\alpha+4}. \end{array}\right.$ .

**Pág.** 37

**A)** Sí es escalonada reducida.

**B)** Sí es escalonada reducida.

**C)** No es escalonada reducida porque el pivote de la segunda fila no es 1.

**D)** Sí es escalonada reducida.

# Soluciones

**Pág.** 38

**1)** $\left(A \,\middle|\, I_2\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\sim}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow -F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2 - 3F_1}{\sim}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \left(I_2 \,\middle|\, A^{-1}\right).$

**2)** $\left(B \,\middle|\, I_2\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\sim}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$

Como en la primera submatriz no podremos tener nunca la identidad porque hay menos pivotes que filas, $B$ no es invertible.

# Soluciones

**3)** $\left(C \,\middle|\, I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1}}{\sim}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\sim}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to 5F_1 - 2F_3 \\ F_2 \to F_2 + F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -5 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$\underset{F_1 \to 2F_1 + 5F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1/20,\ F_2 \to F_2/2,\ F_3 \to -F_3/5}{\sim}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/20 & 1/20 & 3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right) = \left(I_3 \,\middle|\, C^{-1}\right).$

# Tema 2. Espacios vectoriales

Grado en Ingeniería Ambiental

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

# Espacio vectorial

# Espacio vectorial

- Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales y $V$ es un conjunto no vacío, decimos que $V$ es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}$-espacio vectorial) si

**1)** En $V$ hay definida una operación interna, llamada **suma** y denotada por $+$, que verifica las siguientes propiedades:

**a)** Asociatividad: $(u+v)+w = u+(v+w)$ para todo $u, v, w \in V$.

**b)** Conmutatividad: $u+v = v+u$ para todo $u, v \in V$.

**c)** Existencia del elemento neutro: existe $0 \in V$ tal que $v+0 = v$ para todo $v \in V$.

**d)** Existencia del elemento opuesto: para cada $u \in V$ existe $w \in V$ tal que $u+w = 0$. Se denota por $w = -u$.

# Espacio vectorial

**2)** En $V$ hay definida una operación externa, llamada **producto por escalar**, que verifica las siguientes propiedades:

- **a)** $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $u, v \in V$.
- **b)** $(\lambda + \beta)u = \lambda u + \beta u$ para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $u \in V$.
- **c)** $(\lambda\beta)u = \lambda(\beta u)$ para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $u \in V$.
- **d)** $1\, u = u$ para todo $u \in V$ (1 es el elemento neutro del producto por escalar).

- Llamamos **vectores** a los elementos de $V$ y **escalares** a los elementos de $\mathbb{R}$.

# Espacio vectorial

- **Ejemplo.** Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales.

  **1)** $\mathbb{R}^n$: las $n$-tuplas de números reales

  **2)** $\mathcal{M}_{m\times n}$: las matrices de tamaño $m \times n$

  **3)** $\mathbb{R}[x]$: los polinomios con coeficientes reales

  **4)** $\mathbb{R}_n[x]$: los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales

- **Ejemplo.** Los siguientes conjuntos **NO** son espacios vectoriales.

  **1)** El conjunto formado por un único elemento (no nulo), $V = \{\, -7 \,\}$

  **2)** $V = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; y = 3x + 1 \,\}$

  *(Solución)*

# Subespacio vectorial

## Subespacio vectorial

- Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $W$ es un subconjunto no vacío de $V$, decimos que $W$ es un **subespacio vectorial** de $V$ si es un espacio vectorial utilizando las mismas operaciones de suma y producto por escalar.

- **Caracterización (I)**

$$\left.\begin{array}{c} W \text{ es subespacio} \\ \text{vectorial de } V \end{array}\right\} \text{ si y solo si } \left\{\begin{array}{cc} u+v \in W & \text{para todo } u, v \in W, \\ \lambda u \in W & \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

- **Caracterización (II)**

$$\left.\begin{array}{c} W \text{ es subespacio} \\ \text{vectorial de } V \end{array}\right\} \text{ si y solo si } \Big\{ \lambda u + \beta v \in W \quad \begin{array}{c} \text{para todo } u, v \in W, \\ \text{para todo } \lambda, \beta \in \mathbb{R}. \end{array}$$

## Subespacio vectorial

- Si $V$ es un espacio vectorial, entonces $V$ y $\{0\}$ son dos subespacios vectoriales de $V$.

- **Ejemplo.** Justifica si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.

**1)** $W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \}$

**2)** $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1 \}$

**3)** $T = \{ (2t, 4t, -t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \}$

**4)** $P = \{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(3) = 0 \}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$

**5)** $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

**6)** Sea $A \in \mathcal{M}_n$ invertible. $V = \{ X \in \mathcal{M}_{n\times 1} \mid AX = 0 \}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}$

*(Solución)*

# Subespacio vectorial

- Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $W$ un subconjunto de $V$.
  Si $0 \notin W$, entonces $W$ **NO** es un subespacio vectorial de $V$.

- **Ejemplo.** Justifica si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.

  **1)** $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + 1 \}$

  **2)** $T = \{ 1 + ax + bx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

  **3)** $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 2a & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$

  **4)** $W = \{ (t, t^2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \}$

  *(Solución)*

# Unión e intersección de conjuntos

- Sean $A$ y $B$ dos conjuntos.
  - La **unión** de $A$ y $B$ es
    $$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \ \text{ o bien } \ x \in B \,\}.$$
  - La **intersección** de $A$ y $B$ es
    $$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \in B \,\}.$$

# Unión, intersección y suma de subespacios

- **Intersección de subespacios.**
  - **Teorema.** Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $W$ y $S$ son dos subespacios vectoriales de $V$, entonces $W \cap S$ es subespacio vectorial de $V$.

- **Unión de subespacios.**
  - En general, $W \cup S$ **NO** es un subespacio vectorial de $V$.

- **Suma de subespacios.**
  - Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $W$ y $S$ son dos subespacios vectoriales de $V$, se define el subespacio vectorial **suma** de $W$ y $S$ como el menor subespacio vectorial que contiene a $W$ y a $S$.

# Unión, intersección y suma de subespacios

- **Ejemplo.**

**1)** Sabiendo que $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$ y $T = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \}$ son dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$, determina si

**a)** $S \cap T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

**b)** $S \cup T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

**2)** Sabiendo que $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \}$ y $T = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x \}$ son dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$, determina si

**a)** $S \cap T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

**b)** $S \cup T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

*(Solución)*

# Dependencia e independencia lineal

# Combinación lineal

- Si $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$, llamamos **combinación lineal** de $u_1, u_2, \ldots, u_k$ a cualquier vector de la forma

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k \in V ,$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

# Combinación lineal

- **Ejemplo.**

**1)** Sean los vectores $u = (1, 0, 0)$ y $v = (0, 2, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

**a)** El vector $(2, -2, 0)$ es combinación lineal de $u$ y $v$.

**b)** El vector $(0, 0, 1)$ no es combinación lineal de $u$ y $v$.

**2)** Sean los polinomios $p(x) = 1 + x$ y $q(x) = 1 + x^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

**a)** El polinomio $r(x) = 2$ no es combinación lineal de $p(x)$ y $q(x)$.

**b)** El polinomio $s(x) = 2 + x + x^2$ es combinación lineal de $p(x)$ y $q(x)$.

*(Solución)*

## Dependencia e independencia lineal

- Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$, decimos que el conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ es **linealmente dependiente** si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k \, .$$

- En caso contrario decimos que el conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ es **linealmente independiente**.

# Dependencia e independencia lineal

- **Ejemplo.** Justifica si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes.

**1)**
$$\begin{aligned} u &= (1,0,1)\,, \\ v &= (1,1,0)\,, \\ w &= (1,1,1)\,, \\ t &= (1,2,1)\,. \end{aligned}$$

**2)**
$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + x + 1\,, \\ q(x) &= 2x + 1\,, \\ r(x) &= x^2 + 1\,. \end{aligned}$$

*(Solución)*

# Dependencia e independencia lineal

- **Proposición.** Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y tenemos los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+r} \in V$, entonces se cumple:

  **1)** Si $0 \in \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, entonces $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ son linealmente dependientes.

  **2)** $v \in V$ es linealmente independiente si y solo si $v \neq 0$.

  **3)** Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ son linealmente dependientes, entonces $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+r}\}$ también son linealmente dependientes.

  **4)** Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+r}\}$ son linealmente independientes, entonces $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ también son linealmente independientes.

  **5)** $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ son linealmente dependientes si y solo si al menos uno de los vectores es combinación lineal del resto.

# Rango

- **Proposición.** Un conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \} \subseteq \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si y solo si la matriz cuyas filas son los vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ tiene rango $k$.

- **Ejemplo.** Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes.

  **1)** $T = \{ (1, 1, 2, 2), (0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2) \}$.

  **2)** $S = \{ (1, 1, 2, 2), (0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2), (1, 1, 1, 1) \}$.

  *(Solución)*

# Sistema generador

# Sistema generador

- Si $W$ es un subespacio vectorial de $V$, decimos que $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \} \subset W$ es un **sistema generador** de $W$ si todo elemento de $W$ se puede expresar como combinación lineal del conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$.

# Sistema generador

- **Ejemplo.** Determina si los siguientes conjuntos son sistemas generadores de los espacios indicados.

**1)** $S = \{\,(0,1),\ (1,0),\ (1,-1)\,\}$ de $\mathbb{R}^2$.

**2)** $P = \{\,1,\ x,\ x^2\,\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

**3)** $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_2$.

**4)** $T = \{\,(0,3,0),\ (1,0,0)\,\}$ de $\mathbb{R}^3$.

*(Solución)*

# Subespacio generado

- Si $S = \{ u_1, u_2, \dots, u_k \} \subset V$, con $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, llamamos **subespacio vectorial generado por** $S$ (es decir, $\langle S \rangle$) al conjunto de todos los vectores obtenidos como combinación lineal de los elementos de $S$.

- $\langle S \rangle$ es el subespacio vectorial de $V$ más pequeño (con menor cantidad de elementos) que contiene a $S$.

- **Ejemplo.** Describe los siguientes subespacios vectoriales.

  **1)** $\langle (1, 0) \rangle$

  **2)** $\langle (2, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$

  **3)** $\langle x^2 + 1 \rangle$

  *(Solución)*

# Bases y dimensión

# Base y dimensión

- Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, decimos que el conjunto de vectores $B = \{ v_1,\ v_2\ \ldots, v_n \} \subset V$ es una **base** de $V$ si

  **1)** $B$ es un conjunto linealmente independiente,

  **2)** $B$ es un sistema generador de $V$.

- Si $B$ tiene $n$ elementos, entonces todas las bases de $V$ tienen $n$ elementos.

- Si cambiamos el orden de los elementos de $B$ obtenemos una base $B'$ distinta.

- Llamamos **dimensión** de $V$, $\dim(V)$, al número de elementos de $B$.

# Base y dimensión

- **Ejemplo.**

**1)** $B = \{ (1,0), (0,1) \}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

**2)** $B = \{ (1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1) \}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Se llama **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

**3)** $B = \{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$. Sea llama **base estándar** de $\mathbb{R}_n[x]$.

**4)** El espacio vectorial trivial $V = \{ 0 \}$ tiene dimensión 0 ya que $\{ 0 \}$ es un sistema generador de $V$ pero no es linealmente independiente.

**5)** $B = \{ 1, x, x^2, \dots \}$ es una base de $\mathbb{R}[x]$.

# Base y dimensión

- **Teorema.** Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces

**1)** $\dim(V)$ es el número mínimo de vectores que forman un sistema generador de $V$.

**2)** $\dim(V)$ es el número máximo de vectores de $V$ linealmente independientes.

**3)** Si $W$ es subespacio vectorial de $V$, entonces $\dim(W) \leq \dim(V)$.

**4)** Si $W$ es subespacio vectorial de $V$, entonces

$$\dim(W) = \dim(V) \text{ si y solo si } W = V.$$

**5)** Si $W$ y $S$ son dos subespacios vectoriales de $V$, entonces

$$\dim(W + S) = \dim(W) + \dim(S) - \dim(W \cap S).$$

# Base y dimensión

**6)** Si $S = \{ u_1, u_2, \dots, u_m \}$ es un sistema generador de $V$ ($m \geq \dim(V)$), entonces existe un subconjunto de $S$ linealmente independiente.

**7)** Si $u_1, u_2, \dots, u_r \in V$ son linealmente independientes ($r \leq \dim(V)$), existen vectores $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n \in V$ tales que $\{ u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n \}$ es una base de $V$.

- **Teorema.** Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$ y $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ es un conjunto de $n$ vectores de $V$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

**1)** $S$ es una base de $V$.

**2)** $S$ es un sistema generador de $V$.

**3)** $S$ es linealmente independiente.

# Base y dimensión

- **Ejemplo.** Encuentra una base y determina la dimensión de los siguientes subespacios.

**1)** $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0,\ 2x - y + 3z = 0 \}$

**2)** $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0,\ 4x - 2y + 6z = 0,\ -6x + 3y - 9z = 0 \}$

**3)** $T = \langle x^3 + x^2 + x,\ x^3 - 1,\ x^2 + x + 1,\ x^2 + 1,\ 2x^2 + x + 2 \rangle$

*(Solución)*

# Unión, intersección y suma de subespacios

- **Ejemplo.** Calcula una base de $S+T$ siendo

**1)** $S = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x+y+z=0\,\}$ y
$T = \langle\,(1,1,1),\,(1,1,0),\,(-1,-1,0)\,\rangle\,.$

**2)** $S = \{\,a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\big|\; a-c-d=0,\; b+c=0\,\}$ y
$T = \langle\,1+x^2+x^3,\;1-x-x^2,\;x+2x^2+x^3\,\rangle\,.$

*(Solución)*

# Coordenadas y cambio de base

## Coordenadas

- Todo elemento de $V$ se puede expresar de forma **única** como combinación lineal de los elementos de una base.

- Si $v \in V$ y $B = \{ u_1, u_2, \dots, u_n \}$ es un base de $V$, entonces existen unos únicos valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n\,.$$

- Decimos que los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son las **coordenadas** de $v \in V$ con respecto de la base $B$ y lo denotamos por

$$v = [\lambda_1,\, \lambda_2, \dots, \lambda_n]_B\,.$$

# Coordenadas

- **Ejemplo.**

**1)** En $\mathbb{R}^2$, calcula las coordenadas de $v = (2, -4)$ con respecto a las bases:

**a)** $B = \{ (1,0),\ (0,1) \}$ (base canónica de $\mathbb{R}^2$).

**b)** $B' = \{ (1,1),\ (0,2) \}$.

**2)** En $\mathbb{R}_2[x]$, calcula las coordenadas de $p(x) = 6x^2 - 2x + 3$ con respecto a las bases:

**a)** $B = \{ 1,\ x,\ x^2 \}$ (base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$).

**b)** $B' = \{ x^2,\ x+1,\ -5 \}$

*(Solución)*

# Vectores linealmente independientes y coordenadas

- **Proposición.** Un conjunto de vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \} \subseteq V$ es linealmente independiente si y solo si la matriz cuyas columnas (o filas) son las coordenadas de los vectores $\{ u_1, u_2, \ldots, u_k \}$ tiene rango $k$.

- **Ejemplo.** Si $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $q(x) = 4x^2 + 3x + 2$ y $r(x) = 6x^2 + 4x + 3$. ¿Los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o independientes?

  **1)** $T = \{ p(x),\ q(x),\ r(x) \}$

  **2)** $S = \{ p(x),\ q(x) \}$

  *(Solución)*

# Matriz de cambio de base

- Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $n$ y sean $B = \{ u_1, u_2, \dots, u_n \}$ y $B' = \{ w_1, w_2, \dots, w_n \}$ dos bases de $V$.
- Podemos escribir

$$\begin{aligned}
u_1 &= \lambda_1^1 w_1 + \lambda_2^1 w_2 + \cdots + \lambda_n^1 w_n = [\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots, \lambda_n^1]_{B'} \,, \\
u_2 &= \lambda_1^2 w_1 + \lambda_2^2 w_2 + \cdots + \lambda_n^2 w_n = [\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2]_{B'} \,, \\
&\vdots \\
u_n &= \lambda_1^n w_1 + \lambda_2^n w_2 + \cdots + \lambda_n^n w_n = [\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n]_{B'} \,.
\end{aligned}$$

- La **matriz de cambio de base de $B$ a $B'$** es

$$P_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \in M_n \,.$$

# Matriz de cambio de base

- En la columna $j$ están las coordenadas del vector $u_j$ con respecto a la base $B'$ (para $j = 1, 2, \ldots, n$).
- La matriz de cambio de base de $B'$ a $B$ es la inversa de $P_{B' \leftarrow B}$: $P_{B \leftarrow B'} = (P_{B' \leftarrow B})^{-1}$.
- Si $v \in V$ es un vector con coordenadas $v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_B$ y $v = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]_{B'}$, se cumple

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = P_{B' \leftarrow B} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ o equivalentemente, } v_{B'}^T = P_{B' \leftarrow B}\, v_B^T .$$

# Matriz de cambio de base

- **Ejemplo.**

**1)** Si $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0), (0,1,1), (0,1,0)\}$ son dos bases de $\mathbb{R}^3$, calcula:

**a)** La matriz de cambio de base de $B'$ a $B$.

**b)** Las coordenadas con respecto a la base canónica del vector $v \in \mathbb{R}^3$ sabiendo que $v = [1, 0, -2]_{B'}$.

**2)** Si $B = \{\, 1,\ x,\ x^2 \,\}$ y $B' = \{\, x^2 - 2x + 1,\ 2x - 2,\ 2 \,\}$ son dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$, calcula:

**a)** La matriz de cambio de base de $B'$ a $B$.

**b)** Las coordenadas del vector $p(x) = 1 + 2x - 2x^2$ con respecto a la base $B'$.

*(Solución)*

# Soluciones

**Pág.** 5

**1)** Utilizando las operaciones suma de vectores y producto de un vector por un escalar y el elemento neutro es el $(0, 0, \dots, 0)$.

**2)** Utilizando las operaciones suma de matrices y producto de una matriz por un escalar y el elemento neutro es el $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

**3)** Utilizando las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar y el elemento neutro es el $0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + \dots$

**4)** Utilizando las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar y el elemento neutro es el $0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$.

**Pág.** 5

**1)** No es un subespacio vectorial porque $-7 \in V$ pero $4 \cdot (-7) \notin W$.

**2)** No es un subespacio vectorial porque no contiene al neutro: $(0, 0) \notin V$ ya que $0 \neq 3 \cdot 0 + 1$.

## Pág. 8

**1)** $W$ sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ porque:

- Si $(x, y)$, $(z, t) \in W$, ¿$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t) \in W$? Cierto ya que
$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in W \;\Rightarrow\; y = 2x \\ (z,t) \in W \;\Rightarrow\; t = 2z \end{array}\right\} + \;\Rightarrow y + t = 2x + 2z = (2x + z).$$

- Si $(x, y) \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, ¿$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in W$? Cierto ya que
$$\left.\begin{array}{r} (x,y) \in W \;\Rightarrow\; y = 2x \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \times \;\Rightarrow \lambda y = \lambda 2x = 2(\lambda x).$$

**2)** $S$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ porque $(1, 0) \in S$ pero $2(1, 0) \notin S$ porque $2 + 0 \neq 1$.

**3)** $T$ sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ porque:

- Si $(2t, 4t, -t)$, $(2s, 4s, -s) \in T$, ¿$(2t, 4t, -t) + (2s, 4s, -s) \in W$? Cierto ya que $(2t, 4t, -t) + (2s, 4s, -s) = (2(t + s), 4(t + s), -(t + s))$ con $s + t \in \mathbb{R}$.

- Si $(2t, 4t, -t) \in T$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, ¿$\lambda(2t, 4t, -t) \in W$? Cierto ya que $\lambda(2t, 4t, -t) = (2(\lambda t), 4(\lambda t), -(\lambda t))$ con $\lambda t \in \mathbb{R}$.

**4)** $P$ sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ porque:

- Si $p(x),\ q(x) \in P$, ¿$p(x) + q(x) \in P$? Cierto ya que
$$\left.\begin{array}{l} p(x) \in P \ \Rightarrow \ p(3) = 0 \\ q(x) \in P \ \Rightarrow \ q(3) = 0 \end{array}\right\} + \ \Rightarrow p(3) + q(3) = 0.$$
- Si $p(x) \in P$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, ¿$\lambda p(x) \in W$? Cierto ya que
$$\left.\begin{array}{r} p(x) \in P \ \Rightarrow \ p(3) = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \times \ \Rightarrow \lambda p(3) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

**5)** $N$ sí es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$ porque:

- Si $A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 2b \\ 0 & -b \end{pmatrix} \in N$, ¿$A + B \in P$? Cierto ya que $A + B = \begin{pmatrix} a+b & 2(a+b) \\ 0 & -(a+b) \end{pmatrix}$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, ¿$\lambda A \in W$? Cierto ya que $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & 2(\lambda a) \\ 0 & -(\lambda a) \end{pmatrix}$.

**6)** Como $A$ es invertible, existe $A^{-1}$. Entonces, $AX = 0 \ \Rightarrow \ A^{-1}AX = A^{-1}0 \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ I_nX = 0 \ \Rightarrow \ X = 0$. Es decir, $V = \{0\}$ que es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}$.

**Pág.** 9

**1)** $S$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ ya que $(0,0) \notin S$ porque $0 \neq 0+1$.

**2)** $T$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ ya que $0 = 0 + 0\,x + 0\,x^2 \notin T$ porque el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 1 = 0\,, \\ a = 0\,, \\ b = 0\,, \end{array} \right.$ no tiene solución.

**3)** $N$ no es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$ ya que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin N$ porque el sistema

$\left\{ \begin{array}{l} a = 0\,, \\ a+1 = 0\,, \\ 2a = 0\,, \\ -a = 0\,, \end{array} \right.$ no tiene solución.

**4)** $W$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ ya que $(1,1,0) \in W$ pero $2\,(1,1,0) \notin W$.

**Pág.** 12

**1)** **a)** $S \cap T$ sí es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ por ser intersección de dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

**b)** $S \cup T$ no es subespacio vectorial porque $(1,0) \in S \subset S \cup T$ y $(0,7) \in T \subset S \cup T$ pero $(1,0) + (0,7) = (1,7) \notin S \cup T$ porque $(1,7) \notin S$ ni $(1,7) \notin T$.

**2)** **a)** $S \cap T$ sí es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ por ser intersección de dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

**b)** $S \cup T$ no es subespacio vectorial porque $(1,2) \in S \subset S \cup T$ y $(1,3) \in T \subset S \cup T$ pero $(1,2)+(1,3)=(2,5) \notin S \cup T$ porque $(2,5) \notin S$ ni $(2,5) \notin T$.

**Pág.** 15

**1)** **a)** Cierto porque $(2,-2,0) = 2\,u - v$.

**b)** Cierto porque $(0,0,1) = \alpha\,(1,0,0) + \beta\,(0,2,0) \ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = 1\,\alpha\,, \\ 0 = 2\,\beta\,, \\ 1 = 0 \end{array}\right.$ no tiene solución.

**2)** **a)** Cierto porque $2 = \alpha\,(1+x) + \beta\,(1+x^2) \ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 = \alpha + \beta\,, \\ 0 = \alpha\,, \\ 0 = \beta\,, \end{array}\right.$ no tiene solución.

**b)** Cierto porque $s(x) = p(x) + q(x)$.

**Pág.** 17

**1)** Si $(0,0,0)=\alpha\,(1,0,1)+\beta\,(1,1,0)+\gamma\,(1,1,1)+\lambda\,(1,2,1)$, entonces

$$\left\{\begin{array}{l} 0=\alpha+\beta+\gamma+\ \ \lambda\\ 0=\qquad\ \beta+\gamma+2\lambda\\ 0=\alpha\qquad+\gamma+\ \ \lambda\end{array}\right. \underset{E_3\to E_3-E_1}{\sim} \left\{\begin{array}{l} 0=\alpha+\beta+\gamma+\ \ \lambda\\ 0=\qquad\ \beta+\gamma+2\lambda\\ 0=\quad-\beta\end{array}\right. \underset{E_3\to E_3+E_2}{\sim}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0=\alpha+\beta+\gamma+\ \ \lambda\\ 0=\qquad\ \beta+\gamma+2\lambda\\ 0=\qquad\qquad\ \gamma+2\lambda\end{array}\right. \text{ es un SCI con solución: } \left\{\begin{array}{l} \alpha=-s\,,\\ \beta=0\,,\\ \gamma=-2s\,,\\ \lambda=s\end{array}\right. \text{ con } s\in\mathbb{R}.$$

Deducimos que los vectores $\{\,u,\ v,\ w,\ t\,\}$ son linealmente dependientes.

**2)** Si $0=0+0\,x+0\,x^2=\alpha\,(1+x+x^2)+\beta\,(1+2x)+\gamma\,(1+x^2)$, entonces

$$\left\{\begin{array}{l} 0=\alpha+\ \ \beta+\gamma\\ 0=\alpha+2\beta\\ 0=\alpha\qquad\ +\gamma\end{array}\right. \underset{\substack{E_2\to E_2-E_1\\ E_3\to E_3-E_1}}{\sim} \left\{\begin{array}{l} 0=\alpha+\beta+\gamma\\ 0=\qquad\beta-\gamma\\ 0=\quad-\beta\end{array}\right. \underset{E_3\to E_3+E_2}{\sim} \left\{\begin{array}{l} 0=\alpha+\beta+\gamma\\ 0=\qquad\beta-\gamma\\ 0=\qquad\quad\ -\gamma\end{array}\right.$$

es un SCD con solución: $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Deducimos que los vectores $\{\,p(x),\ q(x),\ r(x)\,\}$ son linealmente independientes.

**Pág.** 19

**1)** Como $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 2F_1}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{=}$

$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ deducimos que los vectores de $T$ son linealmente dependientes.

**2)** Como $S = T \cup \{(1,1,1,1)\}$ y los vectores de $T$ son linealmente dependientes, también lo son los de $S$.

**Pág.** 22

**1)** $S$ sí es sistema generador de $\mathbb{R}^2$ porque si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, el sistema $(a,b) = \alpha\,(0,1) + \beta\,(1,0) + \gamma\,(1,-1)$ tiene solución:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = & \beta + \gamma \\ b = \alpha & \quad\; - \gamma \end{array} \right. \quad \text{es SCI con solución: } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = b + t\,, \\ \beta = a - t\,, \\ \gamma = t\,, \end{array} \right. \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

**2)** $P$ sí es sistema generador de $\mathbb{R}_2[x]$ porque si $a+b\,x+c\,x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, el sistema

$a+b\,x+c\,x^2=\alpha\,1+\beta\,x+\gamma\,x^2$ tiene solución: $\left\{\begin{array}{l}\alpha=a\,,\\ \beta=b\,,\\ \gamma=c\,,\end{array}\right.$ con $t\in\mathbb{R}$.

**3)** $R$ no es sistema generador de $\mathcal{M}_2$ porque si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$, el sistema

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, es decir,

$\left\{\begin{array}{l} a=\alpha+2\beta+\gamma\\ b=\quad-\ \beta\\ c=\qquad\ \beta+\gamma\\ d=0\end{array}\right.$ no tiene solución si $d\neq 0$.

**4)** $T$ no es sistema generador de $\mathbb{R}^3$ porque si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, el sistema

$(a,b,c)=\alpha\,(0,3,0)+\beta\,(1,0,0)$, es decir, $\left\{\begin{array}{l} a=\beta\\ b=3\alpha\\ c=0\end{array}\right.$ no tiene solución si $c\neq 0$.

**Pág.** 23

**1)** $\langle\,(1,0)\,\rangle = \{\,\alpha\,(1,0)\;\big|\;\alpha\in\mathbb{R}\,\}$.

**2)** $\langle\,(2,1,0),\,(0,1,1)\,\rangle = \{\,\alpha\,(2,1,0)+\beta\,(0,1,1)\;\big|\;\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,\}$.

**3)** $\langle\,x^2+1\,\rangle = \{\,\alpha\,(x^2+1)\;\big|\;\alpha\in\mathbb{R}\,\}$.

**Pág.** 29

**1)** Buscamos un sistema generador de $S$ resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-\;\;z=0\\ 2x-\;\;y+3z=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-t\\ y=t\,,\\ z=t\,,\end{array}\right. \quad \text{con } t\in\mathbb{R}.\ \text{Entonces, } S=\langle\,(-1,1,1)\,\rangle.$$

Como el sistema generador está formado por un único elemento no nulo, es linealmente independiente y, por lo tanto, una base de $S$ es $\{\,(-1,1,1)\,\}$.

**2)** Buscamos un sistema generador de $W$ resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-\;\;y+3z=0\\ 4x-2y+6z=0\\ -6x+3y-9z=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t\\ y=2t+3s\,,\\ z=s\,,\end{array}\right. \quad \text{con } t,s\in\mathbb{R}.\ \text{Entonces,}$$

$S=\langle\,(1,2,0),\,(0,3,1)\,\rangle$. Como además esos dos vectores son linealmente independientes (ya que tienen rango 2) una base de $W$ es $\{\,(1,2,0),\,(0,3,1)\,\}$.

**2)** Buscamos un sistema generador de $W$ resolviendo el sistema
$\begin{cases} 2x - \ \ y + 3z = 0 \\ 4x - 2y + 6z = 0 \\ -6x + 3y - 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3s\,, \\ z = s\,, \end{cases}$ con $t, s \in \mathbb{R}$. Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} W &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \alpha,\ y = 2\alpha + 3\beta,\ z = \beta \} = \\ &= \{ (\alpha,\ 2\alpha + 3\beta,\ \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ (\alpha,\ 2\alpha,\ 0) + (0,\ 3\beta,\ \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ \alpha(1,\ 2,\ 0) + \beta(0,\ 3,\ 1) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \langle (1,2,0),\ (0,3,1) \rangle\,. \end{aligned}$$

Como además esos dos vectores son linealmente independientes (ya que $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$), una base de $W$ es $\{ (1,2,0),\ (0,3,1) \}$.

**3)** Como ya tenemos un sistema generador de $T$, solo hay que comprobar que son linealmente independientes (pasando a coordenadas con respecto de la base estándar):

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1 \\ F_5 \to F_5 - 2F_1}}{=}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 - F_2 \\ F_5 \to F_5 - F_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_5}{=}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - F_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Entonces, una base de $T$ es $\{ x^3 - x,\ x^3 + x^2 + x,\ 2x^2 + x + 2 \}$.

**Pág.** 30

**1)** Buscamos un sistema generador de $S$. Para ello, resolvemos el sistema

$$x + y + z = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = -s - t\,, \\ y = s\,, \\ z = t\,. \end{cases}$$ Entonces, podemos escribir

$$S = \{ (-s-t, -s, -t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R} \} = \{ (-s, -s, 0) + (-t, 0, -t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ s(-1, -1, 0) + t(-1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R} \} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle\,.$$

Ya conocemos un sistema generador de $S+T = \langle\,(-1,1,0),\,(-1,0,1),\,(1,1,1),\,(1,1,0),\,(-1,-1,0)\,\rangle$. Eliminamos los vectores linealmente dependientes para obtener la base:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2+F_1 \\ F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to F_4-F_1 \\ F_5\to F_5+F_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Deducimos que una base de $S+T$ es $\{\,(1,1,0),\,(-1,0,1),\,(1,1,1)\,\}$.

**2)** Buscamos un sistema generador de $S$. Para ello, resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a \quad\; - c - d = 0 \\ \quad b + c \qquad = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \alpha+\beta\,, \\ b = -\alpha\,, \\ c = \alpha\,, \\ d = \beta\,. \end{array}\right.$$ Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} S &= \{\,(\alpha+\beta) - \beta x + \alpha x^2 + \beta x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\big|\; \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,\} = \\ &= \{\,(\alpha+\alpha x^2) + (\beta - \beta x + \beta x^3) \in \mathbb{R}_3[x] \;\big|\; s,t\in\mathbb{R}\,\} = \\ &= \{\,\alpha(1+x^2) + \beta(1 - x + x^3) \in \mathbb{R}_3[x] \;\big|\; s,t\in\mathbb{R}\,\} = \langle\, 1+x^2,\, 1-x+x^3\,\rangle\,. \end{aligned}$$

Ya conocemos un sistema generador de
$S+T=\langle\, 1+x^2,\, 1-x+x^3,\, 1+x^2+x^3,\, 1-x-x^2,\, x+2x^2+x^3\,\rangle$. Eliminamos los vectores linealmente dependientes para obtener la base. Para ello, trabajamos en coordenadas con respecto a la base $B=\{\,1,\, x,\, x^2,\, x^3\,\}$.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3-F_1\\ F_4\to F_4-F_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_4\to F_4-F_2\\ F_5\to F_5+F_2}}{=}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3\leftrightarrow F_4}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_5\to F_5+F_3}{=}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_5\to F_5-F_4}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

Deducimos que una base de $S+T$ es $\{\,1+x^2,\, 1-x+x^3,\, 1-x-x^2,\, 1+x^2+x^3\,\}$.

**Pág.** 33

**1)** **a)** Resolvemos el sistema: $(2,-4) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \alpha\,, \\ -4 = \beta\,. \end{cases}$ Entonces, $v = [2,-4]_B$.

**b)** Resolvemos el sistema: $(2,-4) = \alpha(1,1) + \beta(0,2) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \alpha \\ -4 = \alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\,, \\ \beta = 3\,. \end{cases}$ Entonces, $v = [2,-3]_{B'}$.

**2)** **a)** Resolvemos el sistema: $6x^2 - 2x + 3 = \alpha\cdot 1 + \beta\, x + \gamma\, x^2 \Rightarrow \begin{cases} 3 = \alpha\,, \\ -2 = \beta\,, \\ 6 = \gamma\,. \end{cases}$ Entonces, $p(x) = [3,-2,6]_B$.

**b)** Resolvemos el sistema: $6x^2 - 2x + 3 = \alpha\, x^2 + \beta\,(x+1) + \gamma\cdot(-5) \Rightarrow \begin{cases} 6 = \alpha \\ -2 = \beta \\ 3 = \beta - 5\gamma \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6\,, \\ \beta = -2\,, \\ \gamma = -1\,. \end{cases}$ Entonces, $p(x) = [6,-2,-1]_{B'}$.

**Pág.** 34

**1)** Calculamos las coordenadas de los vectores de $T$ con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$, la base $B = \{\, 1,\ x,\ x^2 \,\}$:

$$p(x) = 3x^2 + 2x + 1 = [1, 2, 3]_B\,, \qquad q(x) \qquad = 4x^2 + 3x + 2 = [2, 3, 4]_B\,,$$
$$r(x) = 6x^2 + 4x + 3 = [3, 4, 6]_B\,.$$

Como $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 =$ nº de vectores de $T$, deducimos que los vectores de $T$ son linealmente independientes.

**2)** Como $S \subset T$ y $T$ es linealmente independiente, $S$ también es linealmente independiente.

**Pág.** 37

**1)** **a)** Como $B$ es la base canónica, las coordenadas de los vectores de $B'$ con respecto a la base $B$ son:

$$(1, 1, 0) = [1, 1, 0]_B, \qquad (0, 1, 1) = [0, 1, 1]_B \qquad \text{y} \qquad (0, 1, 0) = [0, 1, 0]_B\,,$$

y entonces $P_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**b)** Como $v_B^T = P_{B\leftarrow B'}\ v_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $v = [1,-1,0]_B$.

**2) a)** Como $B$ es la base estándar, las coordenadas de los vectores de $B'$ con respecto a la base $B$ son:

$$x^2 - 2x + 1 = [1,-2,1]_B, \qquad 2x - 2 = [-2,2,0]_B \qquad \text{y} \qquad 2 = [2,0,0]_B\,,$$

y entonces $P_{B\leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**b)** Calculamos la inversa de $P_{B\leftarrow B'}$ para obtener $P_{B'\leftarrow B}$:

$$(P_{B\leftarrow B'} \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2+2F_1 \\ F_3\to F_3-F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3\to F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1\to F_1-F_3 \\ F_2\to F_2-2F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \underset{\substack{F_2 \to -F_2/2 \\ F_3 \to F_3/2}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) =$$

$= (I_3 \mid P_{B' \leftarrow B})$.

Entonces, $v_{B'}^T = P_{B' \leftarrow B}\ v_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ y por lo tanto, $p(x) = [-2, -1, \frac{1}{2}]_{B'}$.

# Tema 3. Aplicaciones lineales

Grado en Ingeniería Ambiental

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

# Aplicación lineal

# Aplicación

- Si $A$ y $B$ son dos conjuntos, llamamos **aplicación** de $A$ en $B$ (denotado por $f\colon A \longrightarrow B$) a una *ley* o *regla* que asigna a cada elemento $x \in A$ un *único* elemento de $B$, denotado por $f(x) \in B$.

- Decimos que $A$ es el conjunto **origen** y $B$ es el conjunto de **llegada** o **destino**.

- Llamamos **imagen** de $x \in A$ al valor $f(x) \in B$ y **antiimagen** de $f(x) \in B$ al valor $x \in A$.

- **Ejemplo.**

  **1)** $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $f(n) = -n$

  **2)** $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

# Aplicación lineal

- Si $V$ y $W$ son dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, decimos que $f\colon V \longrightarrow W$ es una **aplicación lineal** (o homomorfismo) si

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

para todo $u, v \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

O equivalentemente, si

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) & \text{para todo } u, v \in V\,, \\ f(\lambda u) = \lambda f(u) & \text{para todo } u \in V \text{ y para todo } \lambda \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

- Si $V = W$ decimos que la aplicación lineal es un **endomorfismo**.

# Aplicación lineal

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones son lineales.

**1)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = (x - y,\ z + x)$

**2)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = (y,\ x^2)$

**3)** $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ con $f(p(x)) = p'(x)$

**4)** $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_2$ con $f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} b & 2 \\ -c & a + b \end{pmatrix}$

*(Solución)*

# Aplicación lineal

- **Proposición.** Si $f: V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, se cumple:

  **1)** $f(0) = 0$

  **2)** $f(-v) = -f(v)$ para todo $v \in V$

  **3)** $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_k f(u_k)$ para todo $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$ y para todo $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

- **Ejemplo.** Determina si la siguiente aplicación es lineal.

  **1)** $f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ con $f(p(x)) = p(x) + 2$ para todo $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$

  *(Solución)*

# Núcleo e imagen

# Núcleo e imagen

- Si $f: V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, se define:
  - El **núcleo** de $f$ como
$$\ker(f) = \{\, v \in V \;\big|\; f(v) = 0 \,\}\,.$$
  - La **imagen** de $f$ como
$$\operatorname{Im}(f) = \{\, f(v) \in W \;\big|\; v \in V \,\}\,.$$

## Núcleo e imagen

- **Proposición.** Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces

**1)** $\ker(f)$ es un subespacio vectorial de $V$.

**2)** $\mathrm{Im}\,(f)$ es un subespacio vectorial de $W$ y el **rango** de $f$ es $\mathrm{rg}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$.

**3)** Si $\{\, u_1, u_2, \ldots, u_k \,\}$ es un sistema generador de $V$, entonces $\{\, f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k) \,\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Im}\,(f)$ (que puede ser distinto de $W$).

**4)** Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, se cumple

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(V)\,.$$

# Núcleo e imagen

- **Ejemplo.** Calcula el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales.

  **1)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = (x - y, z)$.

  **2)** $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ con $f(p(x)) = p'(x)$.

  **3)** $f : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ con $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d)x^3 + (b - 2c)x^2 + cx + a$.

  *(Solución)*

# Aplicaciones lineales inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

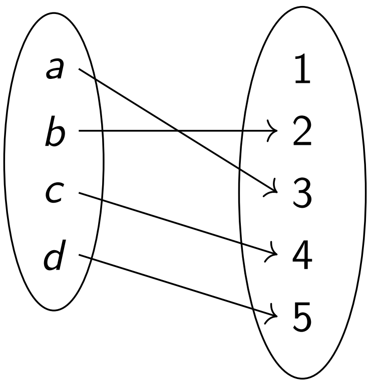
## Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

- Decimos que $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** si para $x, y \in \mathrm{Dom}\,(f)$ con

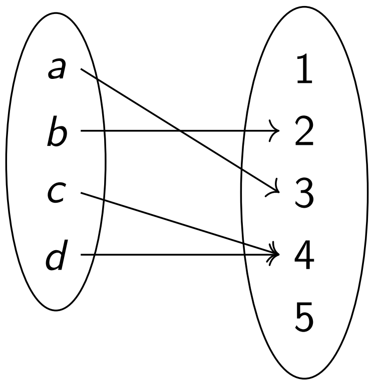
$$f(x) = f(y), \qquad \text{entonces } x = y\,.$$

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones son inyectivas.

**1)** $f: \quad A \longrightarrow B$




**2)** $g: \quad A \longrightarrow B$



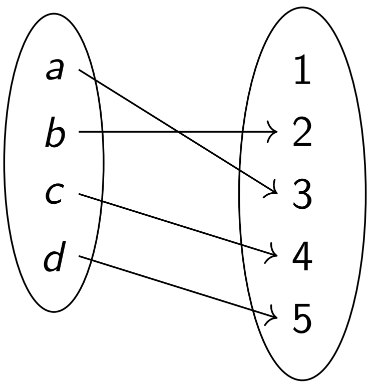

*(Solución)*

## Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

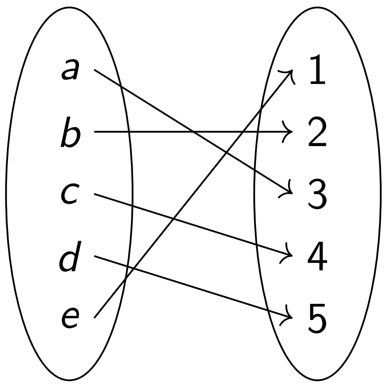
- Decimos que $f : A \longrightarrow B$ es **sobreyectiva** si para todo $y \in B$ existe $x \in A$ con $f(x) = y$, es decir, si
$$\mathrm{Im}\,(f) = B\,.$$

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones son sobreyectivas.

**1)** $f : \quad A \longrightarrow B$




**2)** $g : \quad A \longrightarrow B$




*(Solución)*

# Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

- Decimos que $f : A \longrightarrow B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

  **1)** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

  **2)** $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ con $f(x) = x^2$

  **3)** $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

  **4)** $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ con $f(x) = x^2$

  *(Solución)*

# Aplicación inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

- **Caracterización.** Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces,
  - $f$ es inyectiva si y solo si $\ker(f) = \{0\}$.
  - $f$ es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{Im}(f) = W$.

- **Proposición.** Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces,
  - $f$ es inyectiva si y solo si $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V)$.
  - $f$ es sobreyectiva si y solo si $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(W)$.

# Matriz asociada a una aplicación lineal

# Matriz asociada a una aplicación lineal

- Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y sean

$$B = \{\, u_1,\, u_2, \dots, u_n \,\} \quad \text{y} \quad B' = \{\, w_1,\, w_2, \dots, w_m \,\}$$

  bases de $V$ y de $W$ respectivamente.

- Podemos escribir

$$\begin{aligned}
f(u_1) &= \lambda_1^1 w_1 + \lambda_2^1 w_2 + \cdots + \lambda_m^1 w_m = [\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots, \lambda_m^1]_{B'}\ ,\\
f(u_2) &= \lambda_1^2 w_1 + \lambda_2^2 w_2 + \cdots + \lambda_m^2 w_m = [\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_m^2]_{B'}\ ,\\
&\ \vdots\\
f(u_n) &= \lambda_1^n w_1 + \lambda_2^n w_2 + \cdots + \lambda_m^n w_m = [\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_m^n]_{B'}\ .
\end{aligned}$$

# Matriz asociada a una aplicación lineal

- La **matriz asociada a $f$ respecto de las bases $B$ y $B'$** es

$$M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m^1 & \lambda_m^2 & \dots & \lambda_m^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n} \, .$$

- En la columna $j$ están las coordenadas del vector $f(u_j)$ con respecto a la base $B'$ (para $j = 1, 2, \dots, n$).

# Matriz asociada a una aplicación lineal

- Si $v \in V$ es un vector con coordenadas $v = [\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n]_B$ y $f(v) = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]_{B'}$, entonces se cumple

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = M_{B' \leftarrow B}(f) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

  o equivalentemente,

$$(f(v))^T_{B'} = M_{B' \leftarrow B}(f)\ v^T_B\ .$$

# Matriz asociada a una aplicación lineal

- Si $f\colon V \longrightarrow V$ es la identidad, es decir,

$$f(v) = v \qquad \text{para todo } v \in V\,,$$

y $B$ y $B'$ son dos bases de $V$, entonces

$$M_{B' \leftarrow B}(f) = P_{B' \leftarrow B}\,.$$

# Matriz asociada a una aplicación lineal

- **Ejemplo.** Calcula la matriz asociada de las siguientes aplicaciones lineales respecto a las bases indicadas.

  **1)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, -z)$

  $B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ y

  $B' = \{ (1, 0), (0, 1) \}$

  **2)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(a, b, c) = (a + b)x^2 + a + b + c$

  $B = \{ (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \}$ y

  $B' = \{ 1, x, x^2 \}$

  *(Solución)*

# Matriz asociada a una aplicación lineal

- **Ejemplo.**

**1)** Obtén una base del núcleo y de la imagen de $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ sabiendo que la matriz asociada a $f$ con respecto a las bases

$$B = \{ (1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,2,0),\ (0,0,0,1) \} \quad \text{y}$$
$$B' = \{ 1,\ x,\ x^2 \}$$

es

$$M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*(Solución)*

# Matriz asociada a una aplicación lineal

- **Proposición.** Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y sea $M$ la matriz asociada a $f$. Entonces,

  **1)** $f$ es inyectiva si y solo si $\operatorname{rg}(M) = \dim(V)$.

  **2)** $f$ es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{rg}(M) = \dim(W)$.

- **Corolario.** Sea $f\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces,

  **1)** Si $\dim(V) > \dim(W)$, entonces $f$ no es inyectiva.

  **2)** Si $\dim(W) > \dim(V)$, entonces $f$ no es sobreyectiva.

# Matriz asociada a una aplicación lineal

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones lineales son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

  **1)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ dada por $f(x, y, z) = (x,\ x + y,\ x - 2y,\ 3z\ , 2x + z)$

  **2)** $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(a\,x^2 + b\,x + c) = c\,x^2 + a\,x + b$

  *(Solución)*

# Soluciones

## Pág. 5

**1)** $f$ es una aplicación lineal porque

- Si $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. ¿$f((x, y, z) + (a, b, c)) = f(x, y, z) + f(a, b, c)$?. Cierto ya que

$$\left.\begin{array}{l} f((x,y,z)+(a,b,c)) = f(x+a, y+b, z+c) = \\ = (x+a-y-b, z+c+x+a) \\ f(x,y,z)+f(a,b,c) = (x-y, z+x)+(a-b,\ c+a) = \\ = (x+a-y-b, z+c+x+a) \end{array}\right\} \boxed{=}$$

- Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿$f(\lambda(x, y, z)) = \lambda f(x, y, z)$? Cierto ya que

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z) = (\lambda x - \lambda y,\ \lambda z + \lambda x) \\ \lambda f(x,y,z) = \lambda(x-y,\ z+x) = (\lambda x - \lambda y,\ \lambda z + \lambda x) \end{array}\right\} \boxed{=}$$

**2)** No es una aplicación lineal porque $f(2(1, 0)) = f(2, 0) = (0, 4)$ pero $2f(1, 0) =$
$= 2(0, 1) = (0, 2) \neq (0, 4)$.

**3)** $f$ es una aplicación lineal porque

- Si $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in \mathbb{R}_2[x]$. ¿$f(p(x) + q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$? Cierto ya que

$$\left.\begin{array}{l} f(p(x)+q(x)) = f((a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2) = \\ = 2(a_1+a_2)x + (b_1+b_2) \\ f(p(x)) + f(q(x)) = 2a_1x + b_1 + 2a_2x + b_2 \end{array}\right\} \boxed{=}$$

- Si $ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿$f(\lambda(ax^2+bx+c)) = \lambda f(ax^2+bx+c)$? Cierto ya que

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda(ax^2+bx+c)) = f(\lambda ax^2+\lambda bx+\lambda cz) = 2\lambda ax+\lambda b \\ \lambda f(ax^2+bx+c) = \lambda(2ax+b) \end{array}\right\} \boxed{=}$$

**4)** No es una aplicación lineal porque $f(0+0x+0x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Pág.** 6 No es una aplicación lineal porque $f(0) = 0+2 \neq 0$.

**Pág.** 10

**1)** - $\ker(f) = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; f(x,y,z) = (0,0) \,\} =$
$= \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; (x-y,z) = (0,0) \,\} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x-y=0,\ z=0 \,\}$.

Resolvemos el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x-y=0 \\ z=0 \end{array} \right. \Rightarrow$ SCI: $\left\{ \begin{array}{l} x=\lambda\,, \\ y=\lambda\,, \\ z=0\,, \end{array} \right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\ker(f) = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x=\lambda,\ y=\lambda,\ z=0 \ \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \,\} =$$
$$= \{\, (\lambda,\lambda,0) \;\big|\; \lambda \in \mathbb{R} \,\} = \{\, \lambda\,(1,1,0) \;\big|\; \lambda \in \mathbb{R} \,\} = \langle\, (1,1,0) \,\rangle\,.$$

Como el núcleo está generado por un único vector, es linealmente independiente y por lo tanto, una base del núcleo es $\{\, (1,1,0) \,\}$ y $\dim(\ker(f)) = 1$.

- Como $\{\,(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\,\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{Im}\,(f) = \langle\, f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1)\,\rangle = \langle\,(1,0),\ (-1,0),\ (0,1)\,\rangle\,.$$

Además, como $(-1,0) = -1(1,0)$:

$$\mathrm{Im}\,(f) = \langle\,(1,0),\ (-1,0),(0,1)\,\rangle = \langle\,(1,0),\ (0,1)\,\rangle = \mathbb{R}^2\,,$$

y una base de $\mathrm{Im}\,(f)$ es $\{\,(1,0),\ (0,1)\,\}$ y $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2$.

**2)**

- $\ker(f) = \{\, p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \;\big|\; f(p(x)) = 0\,\} = \{\, ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \;\big|\; 2ax + b = 0\,\}$.

Resolvemos el sistema $\left\{\begin{array}{r} 2a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\;$ SCI: $\left\{\begin{array}{l} a = 0\,, \\ b = 0\,, \\ c = \lambda\,, \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{\, ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \;\big|\; a = 0,\ b = 0,\ c = \lambda \ \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\,\} = \\ &= \{\,\lambda \;\big|\; \lambda \in \mathbb{R}\,\} = \langle\, 1\,\rangle\,. \end{aligned}$$

Como el núcleo está generado por un único vector, es linealmente independiente y por lo tanto, una base del núcleo es $\{\,1\,\}$ y $\dim(\ker(f)) = 1$.

- Como $\{\,1,\ x,\ x^2\,\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$,

$$\mathrm{Im}\,(f) = \langle\, f(1),\ f(x),\ f(x^2)\,\rangle = \langle\, 0,\ 1,\ 2x\,\rangle = \langle\, 1,\ 2x\,\rangle = \mathbb{R}_1[x]\,,$$

y una base de $\mathrm{Im}\,(f)$ es $\{\,1,\ 2x\,\}$ y $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2$.

**3)** $f : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ con $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d)x^3 + (b-2c)x^2 + cx + a.$

- $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \;\middle|\; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \right\} =$
  $= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \;\middle|\; a + cx + (b-2c)x^2 + (a+d)x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \right\}.$

  Resolvemos el sistema $\left\{ \begin{aligned} a &= 0 \\ c &= 0 \\ b - 2c &= 0 \\ a + d &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$ SCD: $a = b = c = d = 0$. Entonces,

  $$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \;\middle|\; a = b = c = d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

  Como el núcleo está generado por el vector nulo, no es linealmente independiente y por lo tanto el núcleo no tiene base y $\dim(\ker(f)) = 0$.

- Como $4 = \dim(\mathcal{M}_2) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = 0 + \dim(\operatorname{Im}(f))$, deducimos que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 4$ y como $\operatorname{Im}(f)$ es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$ que también tiene dimensión 4, deducimos que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_3[x]$ y una base es $\{1, x, x^2, x^3\}$.

**Pág.** 12

**1)** Es inyectiva.

**2)** No es inyectiva porque $f(c) = 4 = f(d)$.

**Pág.** 13

**1)** No es sobreyectiva porque no hay elementos del dominio cuya imagen sea $a$.

**2)** Es sobreyectiva.

**Pág.** 14

**1)**
- No es inyectiva porque $f(2) = f(-2) = 4$.
- No es sobreyectiva porque no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 = -5$.
- No es biyectiva porque no es inyectiva/sobreyectiva.

**2)**
- No es inyectiva porque $f(2) = f(-2) = 4$.
- Es sobreyectiva porque si $y \in [0, \infty)$, existe $\sqrt{y} \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tal que $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.
- No es biyectiva porque no es inyectiva.

**3)**
- Es inyectiva porque si $f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x^2 = y^2$ y deducimos que $x = y$.
- No es sobreyectiva porque no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 = -5$.
- No es biyectiva porque no es sobreyectiva.

**4)**
- Es inyectiva porque si $f(x) = f(y)$, es decir, si $x^2 = y^2$ deducimos que $x = y$.
- Es sobreyectiva porque si $y \in [0, \infty)$, existe $-\sqrt{y} \in \text{Dom}\,(f)$ tal que $f(\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 = y$.
- Es biyectiva porque es inyectiva y sobreyectiva.

**Pág.** 21

**1)** Calculamos $f(1,0,0) = (1,0) = [1,0]_{B'}$, $f(0,1,0) = (1,0) = [1,0]_{B'}$ y $f(0,0,1) = (0,-1) = [0,-1]_{B'}$, y obtenemos $M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$.

**2)** Calculamos $f(1,0,0) = x^2 + 1 = [1,0,1]_{B'}$, $f(1,1,0) = 2x^2 + 2 = [2,0,2]_{B'}$ y $f(1,1,1) = 2x^2 + 3 = [3,0,2]_{B'}$, y obtenemos $\mathcal{M}_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$.

**Pág.** 22

- $\ker(f) = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = 0 \} = \left\{ [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]_B \;\middle|\; M_{B' \leftarrow B}(f) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]_B \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]_B \;\middle|\; \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Resolvemos el sistema $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 0 \\ \qquad\;\; \alpha_2 + 2\alpha_3 + \;\alpha_4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = s \\ \alpha_3 = t \\ \alpha_4 = -s - 2t \end{array} \right.$ con $s, t \in \mathbb{R}$. Entonces, el núcleo es

$$\ker(f) = \{ [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]_B \mid \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = s,\ \alpha_3 = t,\ \alpha_4 = -s - 2t \text{ con } s, t \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ [0, s, t, -s - 2t]_B \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \langle [0, 1, 0, -1]_B,\ [0, 0, 1, -2]_B \rangle .$$

Pasamos de coordenadas a vectores:

$$[0, 1, 0, -1]_B = 0(1, 0, 0, 0) + 1(1, 1, 0, 0) + 0(1, 1, 2, 0) - 1(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 0, -1)\,,$$
$$[0, 0, 1, -2]_B = 0(1, 0, 0, 0) + 0(1, 1, 0, 0) + 1(1, 1, 2, 0) - 2(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 2, -2)\,.$$

Por lo tanto, $\ker(f) = \langle\, (1,1,0,-1)\,, (1,1,2,-2)\,\rangle$ y como
$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2,$
los vectores son independientes y una base de $\ker(f)$ es $\{\, (1,1,0,-1)\,, (1,1,2,-2)\,\}$ y $\dim(\ker(f)) = 2$.

- Como $B$ es base de $\mathbb{R}^4$, $\mathrm{Im}\,(f) = \langle\, f(1,0,0,0),\ f(1,1,0,0),\ f(1,1,2,0),\ f(0,0,0,1)\,\rangle$. Usamos la fórmula $f(v)^T = M_{B\leftarrow B'}(f)v^T$ para calcular

$$[f(1,0,0,0)]_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[f(1,1,0,0)]_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[f(1,1,2,0)]_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$[f(0,0,0,1)]_{B'}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $\mathrm{Im}\,(f) = \langle\, [1,1,0]_{B'},\ [2,0,1]_{B'},\ [4,0,2]_{B'},\ [2,0,1]_{B'}\,\rangle$. Además, como

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-4F_1 \\ F_4\to F_4-2F_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3\to F_3-2F_2 \\ F_4\to F_4-F_2}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

sabemos que $\mathrm{Im}\,(f) = \langle\, [1,1,0]_{B'},\ [2,0,1]_{B'}\,\rangle$ y al pasar de coordenadas a vectores obtenemos:

$$[1,1,0]_{B'} = 1 + x \quad \text{y} \quad [2,0,1]_{B'} = 2 + x^2\,.$$

Entonces, una base de $\mathrm{Im}\,(f)$ es $\{\,1+x,\ 2+x^2\,\}$ y $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2$.

**Pág.** 24

**1)** Si $B$ y $B'$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^5$ respectivamente, calculamos:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,1,1,0,2) = [1,1,1,0,2]_{B'}\,, \\ f(0,1,0) &= (0,1,-2,0,0) = [0,1,-2,0,0]_{B'}\,, \\ f(0,0,1) &= (0,0,0,3,1) = [0,0,0,3,1]_{B'}\,. \end{aligned}$$

Entonces $M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y como $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{=}$

$= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_5}{=} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 3F_3}{=} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

Al ser $\mathrm{rg}\,(A) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, la aplicación es inyectiva pero no es sobreyectiva (ni biyectiva) ya que $\mathrm{rg}\,(A) = 3 < 5 = \dim(\mathbb{R}^5)$.

**2)** Si $B$ es a base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$, calculamos:

$$f(1) = x^2 = [0,0,1]_B\,,\ f(x) = 1 = [1,0,0]_B\,,\ f(x^2) = x = [0,1,0]_B\,,$$

entonces $M_{B' \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\mathrm{rg}\,(A) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$, la aplicación es inyectiva y sobreyectiva y, por lo tanto, también biyectiva.

# Tema 4. Diagonalización

Grado en Ingeniería Ambiental

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

# Introducción

# Introducción

- **Ejemplo.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

  $$f(1,2,3) = (2,4,6)\,, \quad f(0,1,2) = (0,4,8) \quad \text{y} \quad f(0,-1,1) = (0,-5,5)\,.$$

  Calcula $M_{B \leftarrow B}(f)$ siendo $B = \{\,(1,2,3),\,(0,1,2)\,,(0,-1,1)\,\}$.

  *(Solución)*

# Valores y vectores propios

# Introducción

- Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f\colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal con $A = M_{B\leftarrow B}(f)$ para cierta base $B$ de $V$. Si $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, estudiaremos la ecuación
$$f(v) = \lambda v\,, \qquad \text{es decir,} \qquad Av^T = \lambda v^T\,.$$
- **Ejemplo.** Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene

**1)** para $\lambda = 1$, $u = (1,1)$ es solución de $Au^T = \lambda u^T$.

**2)** para $\lambda = 2$, $v = (2,1)$ es solución de $Av^T = \lambda v^T$.
*(Solución)*

# Valor propio

- Sea $f: V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio** o **autovalor** de $f$ si existe $v \in V$ no nulo tal que $f(v) = \lambda v$.

- **Ejemplo.** Dada $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con

  $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2y + z,\ 3z)$, se cumple:

  **1)** 2 es valor propio de $f$ con $v = (2, 2, 0)$

  **2)** 3 es valor propio de $f$ con $v = (1, 1, 1)$

  *(Solución)*

# Valor propio

- Si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz cuadrada, entonces

  **1)** La suma de los elementos de la diagonal de $A$ coincide con la suma de todos sus valores propios.

  **2)** El determinante de $A$ coincide con el producto de todos sus valores propios.

# Vector propio

- Sean $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Decimos que $v \in V$ es un **vector propio** o **autovector** de $f$ asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ si $f(v) = \lambda v$.

- El conjunto de todos los vectores propios asociados al mismo valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ se denota por

$$V_\lambda = \{\, v \in V \;\big|\; f(v) = \lambda v \,\}\,.$$

- **Ejemplo.** Dada $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con

  $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2y + z,\ 3z)$, se cumple:

  **1)** $(2, 2, 0)$ es un vector propio asociado al valor propio 2

  **2)** $(1, 1, 1)$ es un vector propio asociado al valor propio 3

  *(Solución)*

# Valores y vectores propios

- **Proposición.** Sea $f: V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.

  Si $A$ es la matriz asociada a $f$ respecto una base de $V$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica:

  **1)** $V_\lambda = \ker(f - \lambda Id)$.

  **2)** $V_\lambda$ es un subespacio vectorial de $V$ llamado **subespacio propio de $\lambda$**.

  **3)** $\dim(V_\lambda) = n - \mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n)$.

  **4)** Si $v \in V_\lambda$ y $u \in V_{\tilde{\lambda}}$, entonces $u$ y $v$ son linealmente independientes.

  **5)** $\lambda$ es valor propio de $f$ si y solo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

## Cálculo de los valores propios

- **Ejemplo.** Calcula los valores propios de la siguientes aplicaciones lineales.

**1)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y) = (5x + 3y,\, 2y)$

**2)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es

$$B = M_{B_C \leftarrow B_C}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*(Solución)*

# Cálculo del subespacio propio

- **Ejemplo.** Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$f(x, y, z) = (x + y + z,\, 2y + z,\, 3z)\,,$$

calcula el subespacio propio asociado a los valores propios

**(a)** $\lambda = 2$

**(b)** $\lambda = 3$
*(Solución)*

# Polinomio característico

- Sea $f: V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.
- Si $A$ es la matriz asociada a $f$ con respecto a una base de $V$, sabemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de $f$ si y solo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Si consideramos $\lambda$ como una incógnita, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ es un polinomio de grado $n$ llamado **polinomio característico**.
- Las raíces de $p(\lambda)$ son los valores propios de $f$.

# Multiplicidad algebraica y geométrica

- Sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.

  Si $\lambda$ es un valor propio de $f$, entonces

  - la **multiplicidad algebraica** de $\lambda$ ($m_a(\lambda)$) es la multiplicidad del valor $\lambda$ como raíz del polinomio característico;
  - la **multiplicidad geométrica** de $\lambda$ ($m_g(\lambda)$) es la dimensión del subespacio propio $V_\lambda$:
    $$m_g(\lambda) = \dim(V_\lambda) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n),$$
    siendo $A$ la matriz asociada a $f$ con respecto a una base de $V$.

- Si $\lambda$ es un valor propio de $f$, entonces
  $$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

# Multiplicidad algebraica y geométrica

- **Ejemplo.** Calcula $m_a(\lambda)$ y $m_g(\lambda)$ de los valores propios indicados.

  **1)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x - 3y,\ y)$ y $\lambda = 1$

  **2)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es

$$A = M_{B_C \leftarrow B_C}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda = 3$$

*(Solución)*

# Diagonalización

# Diagonalización

- Decimos que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$ son **semejantes** si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n$ invertible tal que

$$A = PBP^{-1}\,.$$

- Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n$.

## Aplicación diagonalizable

- Sea $f \colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Decimos que $f$ es **diagonalizable** si existe una base de $V$ respecto a la cual, la matriz asociada a $f$ es diagonal.

- **Proposición.** Sea $f \colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Entonces,

$$f \text{ es diagonalizable} \quad \text{si y solo si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{existe una base de } V \\ \text{formada por vectores} \\ \text{propios de } f \,. \end{array} \right.$$

## Criterio de diagonalizabilidad

- **Teorema.** Sea $f\colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.

  Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios distintos de $f$, entonces

$$f \text{ es diagonalizable} \quad \text{si y solo si} \quad \begin{cases} m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + \cdots + m_a(\lambda_k) = n\,, \\ m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, k\,. \end{cases}$$

- Si $A \in \mathcal{M}_n$ es diagonalizable, $A = PDP^{-1}$ siendo
  - $D$ una matriz diagonal cuyas entradas son los valores propios de $A$;
  - $P$ es una matriz cuyas columnas son vectores propios de $A$.

# Diagonalización

- **Teorema.** Sea $f: V \longrightarrow V$ una aplicación lineal y $\dim(V) = n$.

  Si $A \in \mathcal{M}_n$ es la matriz asociada a $f$ con respecto a una base de $V$, se cumple:

  **1)** Si $A \in \mathcal{M}_n$ tiene $n$ valores propios distintos, entonces $A$ es diagonalizable.

  **2)** Si $A \in \mathcal{M}_n$ es simétrica, entonces es diagonalizable.

# Diagonalización

- **Estudio de la diagonalizabilidad de una matriz $A \in \mathcal{M}_n$.**
  - Si $A$ es simétrica, entonces es diagonalizable.

**1º/** Calcular el polinomio característico $p(\lambda)$.

**2º/** Calcular las raíces de $p(\lambda)$ y sus multiplicidades algebraicas.

- Si hay $n$ raíces distintas, entonces $A$ es diagonalizable.

**3º/** Calcular las multiplicidades geométricas.

**4º/** Comprobar que se cumple el criterio de diagonalizabilidad.

**5º/** Si $A$ es diagonalizable, calcular los subespacios propios.

**6º/** Escribir la matriz de paso $P$ en función de la matriz diagonal $D$ elegida.

# Diagonalización

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes aplicaciones lineales son diagonalizables y calcula, en su caso, una base respecto a la cual la matriz asociada es diagonal.

**1)** $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ con $f(x, y, z, t) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 1 & -1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right]^T$

**2)** $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $f(x, y, z) = (3x + y + z,\ x + 3y + z,\ x + y + 3z)$

**3)** $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $f(x, y, z) = (x - y + 3z,\ 2y + z,\ 2z)$
*(Solución)*

- **Ejemplo.** Calcula $A^n$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. *(Solución)*

# Soluciones

**Pág.** 3

Calculamos las coordenadas:

$$f(1,2,3) = (2,4,6) = 2(1,2,3) + 0(0,1,2) + 0(0,-1,1) = [2,0,0]_B$$
$$f(0,1,2) = (0,4,8) = 0(1,2,3) + 4(0,1,2) + 0(0,-1,1) = [0,4,0]_B$$
$$f(0,-1,1) = (0,-5,5) = 0(1,2,3) + 0(0,1,2) + 5(0,-1,1) = [0,0,5]_B$$

y obtenemos la matriz $M_{B\leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

**Pág.** 5

**1)** Cierto porque $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**2** Cierto porque $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Pág.** 6

**1)** Cierto porque $f(2,2,0) = (4,4,0) = 2(2,2,0)$.

**2)** Cierto porque $f(1,1,1) = (3,3,3) = 3(1,1,1)$.

**Pág.** 8

**1)** Cierto porque $f(2,2,0) = (4,4,0) = 2(2,2,0)$.

**2)** Cierto porque $f(1,1,1) = (3,3,3) = 3(1,1,1)$.

**Pág.** 10

**1)** Como $f(1,0) = (5,0) = [5,0]_{B_c}$ y $f(0,1) = (3,2) = [3,2]_{B_c}$, deducimos que $A = M_{B_c \leftarrow B_c}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)$. Por lo tanto, los valores propios de $f$ son 5 y 2.

**2)** Como $\det(B - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$, deducimos que $f$ tiene dos valores propios: 2 y 3.

**Pág.** 11

Como $f(1,0,0) = (1,0,0) = [1,0,0]_{B_c}$, $f(0,1,0) = (1,2,0) = [1,2,0]_{B_c}$ y $f(0,0,1) = (1,1,3) = [1,1,3]_{B_c}$, deducimos que $A = M_{B_C \leftarrow B_C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**(a)** Como

$$V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A - 2I_3)X = 0$, es decir, $\left\{ \begin{array}{r} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ SCI: $\left\{ \begin{array}{l} x = \beta\,, \\ y = \beta\,, \\ z = 0\,, \end{array} \right.$

con $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces, $V_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \beta,\ y = \beta,\ z = 0 \text{ con } \beta \in \mathbb{R} \} =$
$= \{ (\beta, \beta, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta \in \mathbb{R} \} = \langle (1,1,0) \rangle$.

**(b)** Como

$$V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A - 3I_3)X = 0$, es decir, $\left\{ \begin{array}{r} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$

SCI: $x = y = z = \beta$ con $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces,
$V_3 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = \beta \text{ con } \beta \in \mathbb{R} \} = \{ (\beta, \beta, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta \in \mathbb{R} \} =$
$= \langle (1,1,1) \rangle$.

**Pág.** 14

**1)** Como $f(1,0) = (1,0) = [1,0]_{B_c}$ y $f(0,1) = (-3,1) = [-3,1]_{B_c}$, entonces $A = M_{B_c \leftarrow B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$ y deducimos que $m_a(1) = 2$.

Además, $m_g(1) = 2 - \mathrm{rg}\,(A - 1I_2) = 2 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$.

**2)** Calculamos $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 5 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (-2-\lambda)^2(3-\lambda)$ y deducimos que $m_a(3) = 1$.
Además, utilizamos la desigualdad $1 \leq m_g(3) \leq m_a(3) = 1$ para deducir que $m_g(3) = 1$.

**Pág.** 21

**1)** Calculamos $p(\lambda) = \det\,(M_{B_c \leftarrow B_c}(f) - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} & 1 & -1 \\ \sqrt{3} & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (-1-\lambda)(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2+3\right] = (-1-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+4)$. Como $\lambda^2-2\lambda+4$ es un polinomio sin raíces reales, los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$ con $m_a(-1) = m_a(1) = 1$. Como $m_a(-1)+m_a(1) = 1+1 = 2 \neq 4$, la aplicación no es diagonalizable.

**2)** Calculamos $f(1,0,0) = (3,1,1) = [3,1,1]_{B_c}$, $f(0,1,0) = (1,3,1) = [1,3,1]_{B_c}$ y $f(0,0,1) = (1,1,3) = [1,1,3]_{B_c}$, entonces, $A = M_{B_c \leftarrow B_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. El polinomio característico es $p(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$= -(\lambda-2)^2(\lambda-5)$ y deducimos que los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$ con $m_a(2) = 2$ y $m_a(5) = 1$.

Calculamos las multiplicidades geométricas:

$m_g(5) = 1$ porque $1 \leq m_g(5) \leq m_a(5) = 1$ y

$m_g(2) = 3 - \operatorname{rg}(A-2I_3) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3-1 = 2.$

Como se cumple el criterio de diagonalizabilidad: $\left\{\begin{array}{l} 3 = m_a(2)+m_a(5) = 2+1 \checkmark \\ m_a(2) = 2 = m_g(2) \checkmark \\ m_a(5) = 1 = m_g(5) \checkmark \end{array}\right.$

deducimos que $f$ es diagonalizable.

Para obtener la base que pide el enunciado, necesitamos los subespacios propios. Calculamos

$$V_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (A-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

resolvemos el sistema $(A-2I_3)X=0$, es decir, $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0\\ x+y+z=0\\ x+y+z=0\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ SCI con solución:

$\left\{\begin{array}{l} x=-\alpha-\beta\,,\\ y=\alpha\,,\\ z=\beta\,,\end{array}\right.$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Entonces,

$V_2=\{\,(-\alpha-\beta,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,\}=\{\,(-\alpha,\alpha,0)+(-\beta,0,\beta)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,\}=$
$=\langle\,(-1,1,0),\,(-1,0,1)\,\rangle$,

y como esos dos vectores son linealmente independientes porque

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=2$, una base de $V_2$ es $\{\,(-1,1,0),\,(-1,0,1)\,\}$.

Además,

$$V_5=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (A-5I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

resolvemos el sistema $(A-5I_3)X=0$, es decir, $\left\{\begin{array}{r} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right. \Rightarrow$ SCI con solución: $\left\{\begin{array}{l} x=\alpha\,, \\ y=\alpha\,, \\ z=\alpha\,, \end{array}\right.$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$V_5 = \{\, (\alpha,\alpha,\alpha) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \alpha \in \mathbb{R} \,\} = \langle\, (1,1,1)\,\rangle$, y como $V_5$ está generado por un único vector no nulo, una base de $V_5$ es $\{\,(1,1,1)\,\}$.

Acabamos deduciendo que, si $B=\{\,(-1,1,0),\ (-1,0,1),\ (1,1,1)\,\}$, entonces $M_{B\leftarrow B}(f)$ es diagonal.

**3)** Calculamos $f(1,0,0)=(1,0,0)=[1,0,0]_{B_c}$, $f(0,1,0)=(-1,2,0)=[-1,2,0]_{B_c}$ y $f(0,0,1)=(3,1,2)=[3,1,2]_{B_c}$, entonces $A=M_{B_C\leftarrow B_C}(f)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. El polinomio característico es $p(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}=$

$=(1-\lambda)(2-\lambda)^2$ y deducimos que los valores propios son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=2$ con $m_a(1)=1$ y $m_a(2)=2$.

Calculamos las multiplicidades geométricas:

$m_g(1) = 1$ porque $1 \leq m_g(1) \leq m_a(1) = 1$ y

$$m_g(2) = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Como no se cumple el criterio de diagonalizablidad (porque $m_a(2) = 2 \neq 1 = m_g(2)$, deducimos que $f$ no es diagonalizable.

**Pág.** 21

Comprobamos primero si $A$ es diagonalizable. Como el polinomio característico es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)$, deducimos que los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 5$. Al ser $A \in \mathcal{M}_3$ y tener 3 valores propios distintos, $A$ es diagonalizable con $A = PDP^{-1}$ siendo $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calculamos la matriz de paso $P \in \mathcal{M}_3$:

$$V_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A - I_3)X = 0$, es decir, $\left\{ \begin{array}{r} y + z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \\ 4z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ SCI con solución:

$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha\,, \\ y = 0\,, \\ z = 0\,, \end{array} \right.$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, $V_1 = \{\,(\alpha, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \alpha \in \mathbb{R}\,\} = \langle\,(1, 0, 0)\,\rangle$, y como $V_1$ está generado por un único vector no nulo, una base de $V_1$ es $\{\,(1, 0, 0)\,\}$.

$$V_3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A - 3I_3)X = 0$, es decir, $\left\{ \begin{array}{r} -2x + y + z = 0 \\ 3z = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ SCI con solución:

$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha\,, \\ y = 2\alpha\,, \\ z = 0\,, \end{array} \right.$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, $V_3 = \{\,(\alpha, 2\alpha, 0) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \alpha \in \mathbb{R}\,\} = \langle\,(1, 2, 0)\,\rangle$, y como $V_3$ está generado por un único vector no nulo, una base de $V_3$ es $\{\,(1, 2, 0)\,\}$.

$$V_5 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (A - 5I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

resolvemos el sistema $(A - 5I_3)X = 0$, es decir, $\left\{ \begin{array}{r} -4x + y + z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ SCI con solución:

$\left\{ \begin{array}{l} x = 5\alpha\,, \\ y = 12\alpha\,, \\ z = 8\alpha\,, \end{array} \right.$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$V_5 = \{\, (5\alpha, 12\alpha, 8\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\} = \langle\, (5, 12, 8) \,\rangle$, y como $V_5$ está generado por un único vector no nulo, una base de $V_5$ es $\{\, (5, 12, 8) \,\}$.

Concluimos que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ y calculamos $P^{-1}$:

$$\left( P \mid I_3 \right) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\substack{F_2 \to F_2/12 \\ F_3 \to F_3/8}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/8 \end{array} \right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 6F_3 \\ F_1 \to F_1 - 5F_3}}{\sim}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/8 \end{array} \right) \underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/8 \end{array} \right) = \left( I_3 \mid P^{-1} \right).$$

Entonces, $A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD \cdot D \cdots DP^{-1} = PD^n P^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -5/8 \\ 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

# Tema 5. Espacio euclídeo

Grado en Ingeniería Ambiental

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

# Producto escalar

# Producto escalar

- Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Decimos que la aplicación $\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es un **producto escalar** si verifica:

  **1)** $u \cdot v = v \cdot u$ para todo $u, v \in V$ (simetría).

  **2)** $u \cdot u > 0$ para todo $u \in V$ con $u \neq 0$ (positividad).

  **3)** $(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha(u \cdot w) + \beta(v \cdot w)$ para todo $u, v, w \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (bilinealidad).

- En particular, $u \cdot 0 = 0$ para todo $u \in V$.

# Espacio euclídeo

- Un **espacio euclídeo** es un espacio vectorial sobre el que se ha definido un producto escalar.

- **Ejemplos.**

**1)** $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = xa + yb + zc$
(Producto escalar estándar sobre $\mathbb{R}^3$)

**2)** $\cdot : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por
$(a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$
(Producto escalar estándar sobre $\mathbb{R}_2[x]$)

*(Solución)*

# Matriz de Gram

# Matriz de Gram

- Sea $B = \{\, e_1,\, e_2, \ldots, e_n \,\}$ una base de un espacio euclídeo $V$. Llamamos **matriz de Gram** con respecto a la base $B$ a

$$G_B = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & \ldots & e_1 \cdot e_n \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & \ldots & e_2 \cdot e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n \cdot e_1 & e_n \cdot e_2 & \ldots & e_n \cdot e_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n \,.$$

- La matriz de Gram siempre es simétrica y definida positiva.
- Una matriz $G \in \mathcal{M}_n$ simétrica es definida positiva si

$$\det(G_i) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{con} \quad G_i = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{22} & \cdots & g_{1i} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i1} & g_{22} & \cdots & g_{ii} \end{pmatrix} .$$

# Matriz de Gram

- **Ejemplo.** Calcula la matriz de Gram de:

  **1)** el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la base canónica $B = \{\,(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\,\}$

  **2)** el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la base $B' = \{\,(2,3,1),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\,\}$

  *(Solución)*

# Coordenadas y matriz de Gram

- Sea $V$ un espacio euclídeo y $G_B$ la matriz de Gram del producto escalar con respecto a una base $B$ de $V$. Si $u, v \in V$ tienen como coordenadas $u = [\alpha_1,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_B$ y $v = [\beta_1,\, \beta_2, \ldots, \beta_n]_B$, entonces,

$$u \cdot v = (\alpha_1,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\ G_B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

- **Ejemplo.**

**1)** Si $B = \{\, (0,1),\, (2,1) \,\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y $G_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, calcula $u \cdot v$ con $u = [1,1]_B$ y $v = [0,1]_B$.

*(Solución)*

# Norma de un vector

# Norma de un vector

- Sea $V$ un espacio euclídeo. Se define la **norma** de $u \in V$ como
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}\,.$$
- Decimos que $u \in V$ es **unitario** si $\|u\| = 1$.
- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $\|v\|$ si $v = (1, 1, 1)$ con el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$

**2)** $\|p(x)\|$ si $p(x) = x + 2$ con el producto escalar $\cdot : \mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $(a_0 + a_1 x) \cdot (b_0 + b_1 x) = a_0 b_0 + 2a_1 b_1$

*(Solución)*

# Norma de un vector

- **Propiedades.** Sea $V$ un espacio euclídeo. Se cumple:

  **1)** $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in V$.

  **2)** $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$.

  **3)** $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $u \in V$.

  **4)** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in V$ (Desigualdad triangular).

  **5)** $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$ para todo $u, v \in V$ (Desigualdad de Cauchy–Schwarz).

# Distancia y ángulo

- Sean $V$ un espacio euclídeo y $u, v \in V$. Se define
  - la **distancia** entre $u$ y $v$ como
  $$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v) \cdot (u - v)}\,;$$
  - el **ángulo** entre $u$ y $v$ al único $\alpha \in [0, \pi]$ tal que
  $$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\,.$$
- **Ejemplo.** Calcula el ángulo formado por los vectores $u = (1, 1)$ y $v = (1, 0)$ con los siguientes productos escalares:

  **1)** Producto escalar estándar de $\mathbb{R}^2$

  **2)** $\cdot : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \cdot (a, b) = 3ax + yb$

  *(Solución)*

# Bases ortogonales y ortonormales

# Vectores ortogonales

- Sea $V$ un espacio euclídeo. Decimos que $u, v \in V$ son **ortogonales** si $u \cdot v = 0$. Se denota por $u \perp v$.

- **Ejemplo.** Comprueba si los siguientes vectores son ortogonales.

**1)** $u = (2, -1)$ y $v = (1, -2)$ con el producto estándar

**2)** $u = (2, -1)$ y $v = (1, -2)$ con el producto escalar definido por
$$G_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*(Solución)*

# Base ortogonal

- Sea $V$ un espacio euclídeo. Decimos que $B = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ es una **base ortogonal** de $V$ si

$$e_i \perp e_j \qquad \text{para todo } i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ con } i \neq j\,.$$

- **Ejemplo.**

  **1)** La base $B = \{ (1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 2) \}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar

  **2)** La base $B = \{ 1, 2x, 3x^2 \}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar $\cdot : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por
  $(a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$

  *(Solución)*

# Base ortonormal

- Sea $V$ un espacio euclídeo. Decimos que $B = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ es una **base ortonormal** de $V$ si

  **1)** $B$ es una base ortogonal;

  **2)** $\|e_i\| = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Si $B = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ es una base ortogonal, entonces

$$B' = \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}$$

  es una base ortonormal.

# Vector ortogonal a un subespacio vectorial

- Sea $V$ un espacio euclídeo y sea $W$ un subespacio vectorial de $V$. Decimos que $u \in V$ es **ortogonal** a $W$ ($u \perp W$) si es ortogonal a todo elemento de $W$.

- Basta probar que $u \in V$ es ortogonal a todos los elementos de un sistema generador de $W$.

- **Ejemplo.**

  **1)** El vector $u = (5, 1, -2)$ es ortogonal al subespacio $W = \langle (1, -1, 2), (0, 2, 1) \rangle$ con el producto escalar estándar

  *(Solución)*

# Proyección ortogonal

- Sea $V$ un espacio euclídeo y $W$ un subespacio vectorial de $V$. Si $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ es una base *ortonormal* de $W$, se define la **proyección ortogonal** de $u \in V$ sobre $W$ como

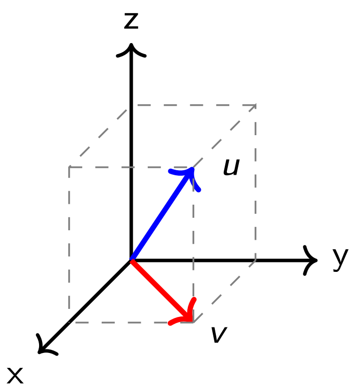
$$Pr\big|_W(u) = (u \cdot c_1)c_1 + (u \cdot c_2)c_2 + \cdots + (u \cdot c_k)c_k \in W\,.$$

- El vector $z = u - Pr\big|_W(u)$ es ortogonal a $W$: $z \perp W$.

# Proyección ortogonal

- **Ejemplo.**

  **1)** En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar, consideramos el subespacio vectorial $W = \langle\, (1,0,0),\ (0,1,0)\,\rangle$.




$$v = Pr\big|_W(u)$$

El vector $v$ es la proyección ortogonal de $u \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano horizontal $z = 0$ (sobre $W$)

# Método de ortonormalización de Gram–Schmidt

- Si $V$ es un espacio euclídeo y $W$ es un subespacio vectorial de $V$, el **método de ortonormalización de Gram–Schmidt** permite pasar de una base cualquiera $B = \{ w_1, w_2, \ldots, w_k \}$ de $W$ a una base *ortonormal* $B' = \{ c_1, c_2, \ldots, c_k \}$.

  **1.** Cálculo de $c_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|}$.

  **2.** Cálculo de $c_2 = \dfrac{z_2}{\|z_2\|}$ con $z_2 = w_2 - Pr\big|_{\langle c_1 \rangle}(w_2) = w_2 - (w_2 \cdot c_1)c_1$.

  **3.** Cálculo de $c_3 = \dfrac{z_3}{\|z_3\|}$ con
  $$z_3 = w_3 - Pr\big|_{\langle c_1, c_2 \rangle}(w_3) = w_3 - \Big[(w_3 \cdot c_1)c_1 + (w_3 \cdot c_2)c_2\Big].$$

  **4.** Se continua de igual modo hasta calcular el último vector $c_k$.

- **Ejemplos.**

**1)** Sea $B = \{ (3,4,0), (1,0,0), (3,0,-4) \}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula, a partir de esta, una base ortonormal con el método de ortonormalización de Gram-Schmidt

**2)** Sea $B = \{ (1,1,-1,0), (1,-1,1,0), (-1,1,1,0) \}$ una base de $W$. Calcula, a partir de esta, una base ortonormal con el método de ortonormalización de Gram-Schmidt

*(Solución)*

# Soluciones

**Pág.** 4

**1)** Es un producto escalar porque si $(x, y, z), (a, b, c), (r, s, t) \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

- $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = ax + yb + zc = ax + by + cz = (a, b, c) \cdot (x, y, z)$.
- $(x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 > 0$ si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
- $(\alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c)) \cdot (r, s, t) = (\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c) \cdot (r, s, t) =$
  $= \alpha(xr + ys + zt) + \beta(ar + bs + ct) = \alpha((x, y, z) \cdot (r, s, t)) + \beta((a, b, c) \cdot (r, s, t))$.

**2)** Es un producto escalar porque si $a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2, c_0+c_1x+c_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

- $(a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 =$
  $= b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 = (b_0 + b_1x + b_2x^2) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2)$.
- $(a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 > 0$ si $a_0 + a_1x + a_2x^2 \neq 0$.
- $(\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2) + \beta(b_0 + b_1x + b_2x^2)) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2) =$
  $= (\alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_2 + \beta b_2)x^2) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2) =$
  $= \alpha(a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2) + \beta(b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2) =$
  $= \alpha((a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2)) + \beta((b_0 + b_1x + b_2x^2) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2))$.

**Pág. 7**

**1)** Calculamos

$$G_B = \begin{pmatrix} (1,0,0)\cdot(1,0,0) & (1,0,0)\cdot(0,1,0) & (1,0,0)\cdot(0,0,1) \\ (0,1,0)\cdot(1,0,0) & (0,1,0)\cdot(0,1,0) & (0,1,0)\cdot(0,0,1) \\ (0,0,1)\cdot(1,0,0) & (0,0,1)\cdot(0,1,0) & (0,0,1)\cdot(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2)** Calculamos

$$G_{B'} = \begin{pmatrix} (2,3,1)\cdot(2,3,1) & (2,3,1)\cdot(0,1,1) & (2,3,1)\cdot(0,0,2) \\ (0,1,1)\cdot(2,3,1) & (0,1,1)\cdot(0,1,1) & (0,1,1)\cdot(0,0,2) \\ (0,0,2)\cdot(2,3,1) & (0,0,2)\cdot(0,0,2) & (0,0,2)\cdot(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Pág. 8**

**1)** $u \cdot v = (1,1) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2.$

**Pág. 10**

**1)** $\|(1,1,1)\| = \sqrt{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$

**2)** $\|p(x)\| = \sqrt{(x+2)\cdot(x+2)} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}.$

**Pág.** 12

**1)** $\cos\alpha = \dfrac{(1,1)\cdot(1,0)}{\|(1,1)\|\|(1,0)\|} = \dfrac{1+0}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}.$

**2)** $\cos\alpha = \dfrac{(1,1)\cdot(1,0)}{\|(1,1)\|\|(1,0)\|} = \dfrac{3+0}{\sqrt{3+1}\sqrt{3+0}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}.$

**Pág.** 14

**1)** No son ortogonales porque $(2,-1)\cdot(1,-2) = 4 \neq 0$.

**2)** Son ortogonales porque $u \cdot v = (2,-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$

**Pág.** 15

**1)** Cierto porque $(1,0,0)\cdot(0,-1,0) = 0$, $(1,0,0)\cdot(0,0,2) = 0$ y $(0,-1,0)\cdot(0,0,2) = 0$.

**2)** Cierto porque $1 \cdot 2x = 0$, $1 \cdot 3x^2 = 0$ y $2x \cdot 3x^2 = 0$.

**Pág.** 17

**1)** Cierto porque $(5,1,-2)\cdot(1,-1,2) = 5-1-4 = 0$ y $(5,1,-2)\cdot(0,2,1) = 2-2 = 0$.

**Pág.** 21

**1)** Si denotamos $w_1 = (3,4,0)$, $w_2 = (1,0,0)$ y $w_3 = (3,0,-4)$, calculamos:

$$c_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(3,4,0)}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = \left(\tfrac{3}{5},\, \tfrac{4}{5},\, 0\right);$$

$$z_2 = w_2 - Pr\big|_{\langle\, c_1\,\rangle}(w_2) = w_2 - (w_2\cdot c_1)c_1 = (1,0,0) - \Big((1,0,0)\cdot\left(\tfrac{3}{5},\, \tfrac{4}{5},\, 0\right)\Big)\left(\tfrac{3}{5},\, \tfrac{4}{5},\, 0\right) =$$

$$= (1,0,0) - \tfrac{3}{5}\left(\tfrac{3}{5},\, \tfrac{4}{5},\, 0\right) = (1,0,0) - \left(\tfrac{9}{25},\, \tfrac{12}{25},\, 0\right) = \left(\tfrac{16}{25},\, \tfrac{-12}{25},\, 0\right),$$

$$c_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{\left(\tfrac{16}{25},\, \tfrac{-12}{25},\, 0\right)}{\tfrac{1}{25}\sqrt{16^2+12^2}} = \frac{5}{4}\left(\tfrac{16}{25},\, \tfrac{-12}{25},\, 0\right) = \left(\tfrac{4}{5},\, \tfrac{-3}{5},\, 0\right);$$

$$z_3 = w_3 - Pr\big|_{\langle\, c_1,\, c_2\,\rangle}(w_3) = w_3 - \Big[(w_3\cdot c_1)c_1 + (w_3\cdot c_2)c_2\Big] =$$

$$= (3,0,-4) - \Big[\Big((3,0,-4)\cdot\left(\tfrac{3}{5},\, \tfrac{4}{5},\, 0\right)\Big)\left(\tfrac{3}{5},\, \tfrac{4}{5},\, 0\right) + \Big((3,0,-4)\cdot\left(\tfrac{4}{5},\, \tfrac{-3}{5},\, 0\right)\Big)\left(\tfrac{4}{5},\, \tfrac{-3}{5},\, 0\right)\Big] =$$

$$= (3,0,-4) - \Big[\tfrac{9}{5}\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0\right) + \tfrac{12}{5}\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{-3}{5}, 0\right)\Big] = (3,0,-4) - \Big[\left(\tfrac{27}{25}, \tfrac{36}{25}, 0\right) + \left(\tfrac{48}{25}, \tfrac{-36}{25}, 0\right)\Big] =$$

$$= (3,0,-4) - \left(\tfrac{75}{52}, 0, 0\right) = (0,0,-4),$$

$$c_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \frac{(0,0,-4)}{\sqrt{4^2}} = (0,0,-1);$$

entonces la base ortonormal es $\{\, c_1,\ c_2,\ c_3 \,\}$.

**2)** Si denotamos $w_1 = (1,1,-1,0)$, $w_2 = (1,-1,1,0)$ y $w_3 = (-1,1,1,0)$, calculamos:

$$c_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(1,1,-1,0)}{\sqrt{3}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right);$$

$$z_2 = w_2 - Pr\Big|_{\langle\, c_1 \,\rangle}(w_2) = w_2 - (w_2 \cdot c_1)c_1 =$$

$$= (1,-1,1,0) - \left((1,-1,1,0) \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) =$$

$$= (1,-1,1,0) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{-2}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right),$$

$$c_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{\left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)}{\frac{1}{3}\sqrt{16+4+4}} = \tfrac{3}{2\sqrt{6}}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{-2}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right) = \left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right);$$

$$z_3 = w_3 - Pr\Big|_{\langle\, c_1,\, c_2 \,\rangle}(w_3) = w_3 - \Big[(w_3 \cdot c_1)c_1 + (w_3 \cdot c_2)c_2\Big] =$$

$$= (-1,1,1,0) - \Big[\left((-1,1,1,0) \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) +$$

$$+ \left((-1,1,1,0) \cdot \left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right)\left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\Big] =$$

$$= (-1,1,1,0) - \left[\tfrac{-1}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) - \tfrac{2}{\sqrt{6}}\left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right] =$$

$$= (-1,1,1,0) - (-1,0,0,0) = (0,1,1,0),$$

$$c_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right);$$

entonces la base ortonormal es $\{\, c_1,\ c_2,\ c_3 \,\}$.

# Parte II. Cálculo en una variable

# Tema 6. Números complejos

Grado en Ingeniería Ambiental

Curso 2023 – 2024

Universidad
Rey Juan Carlos

# Números complejos

# Números complejos

- Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$z = a + b\,\mathbf{i} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}\,,$$

  siendo

  - $a$ la **parte real** de $z$ ($\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = a$),
  - $b$ la **parte imaginaria** de $z$ ($\mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = b$),
  - $\mathbf{i}$ la **unidad imaginaria**: $\sqrt{-1} = \mathbf{i}$.

- El conjunto de **todos** los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.

# Números complejos

- **Ejemplo.** Calcula la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos.

  **1)** $z = 2 + 3\,\mathbf{i}$

  **2)** $z = \pi - 2\,\mathbf{i}$

  **3)** $z = -\mathbf{i}$

  **4)** $z = 2$

  *(Solución)*

- En particular, si $x \in \mathbb{R}$ entonces, $x \in \mathbb{C}$.

- Dos números complejos son iguales si tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

## Operaciones con números complejos

- Sean $z = a + b\,\mathbf{i}$ y $w = c + d\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Se define
    - la **suma**: $z + w = (a + c) + (b + d)\,\mathbf{i}$,
    - el **producto**: $z\,w = (ac - bd) + (ad + cb)\,\mathbf{i}$.
- En particular, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{i}\,\mathbf{i} = -1$, es decir, $\sqrt{-1} = \mathbf{i}$.
- **Ejemplo.** Realiza las siguientes operaciones.

**1)** $(1 + \mathbf{i}) + (3 - 5\,\mathbf{i})$

**2)** $(1 + \mathbf{i})\,(3 - 5\,\mathbf{i})$

*(Solución)*

## Conjugado de $z \in \mathbb{C}$

- Sea $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Se define el **conjugado** de $z$ como
$$\overline{z} = a - b\,\mathbf{i}\,.$$
- En particular, $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$.
- **Ejemplo.** Realiza las siguientes operaciones.

**1)** $1 + \mathbf{i} + \overline{3 - 5\,\mathbf{i}}$

**2)** $\dfrac{1 + 2\,\mathbf{i}}{2 - 3\,\mathbf{i}}$

*(Solución)*

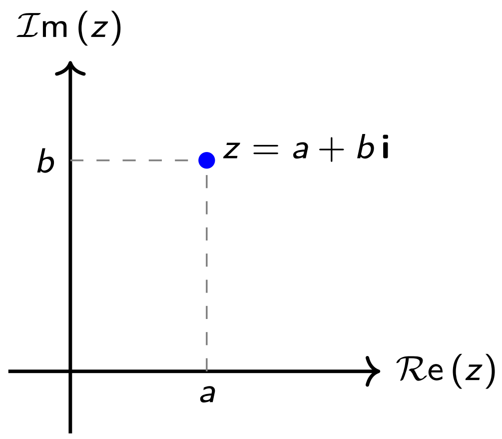
# Módulo y argumento

# Representación en el plano de $z \in \mathbb{C}$

- Si $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, podemos identificar

$$a + b\,\mathbf{i} \simeq (a, b) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 .$$

- Podemos representar $z \in \mathbb{C}$ en el plano complejo.

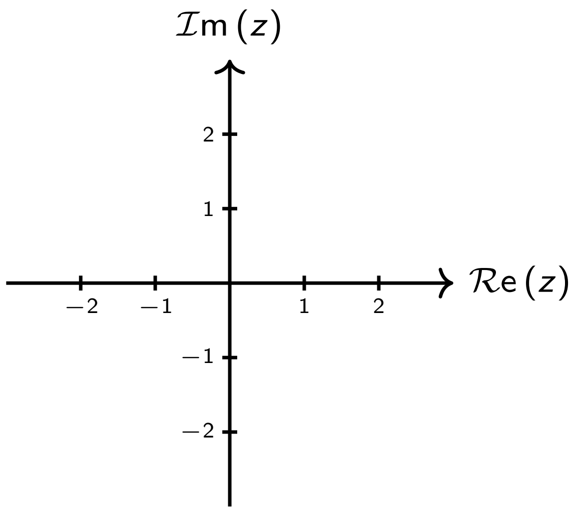


## Representación en el plano de $z \in \mathbb{C}$

- **Ejemplo.** Representa en el plano complejo los siguientes números.

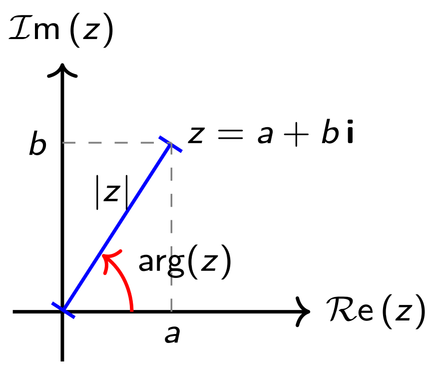
**1)** $z = 1 + 2\,\mathbf{i}$ **2)** $z = -\mathbf{i}$ **3)** $z = -2 + 2\,\mathbf{i}$ **4)** $z = 2$

*(Solución)*



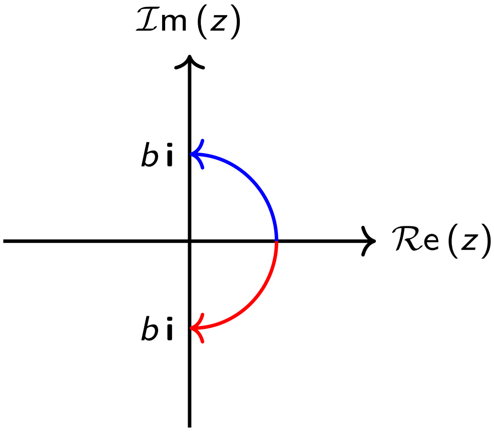
# Módulo y argumento de $z \in \mathbb{C}$

- Sea $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Se define:
  - el **módulo** de $z$: $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$;
  - el **argumento** de $z$ ($\arg(z)$) es el ángulo que forma el semieje positivo real con el vector que une el origen de coordenadas y el punto $z \in \mathbb{C}$.
- Si $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ se llama **argumento principal**: $\operatorname{Arg}(z)$.



## Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

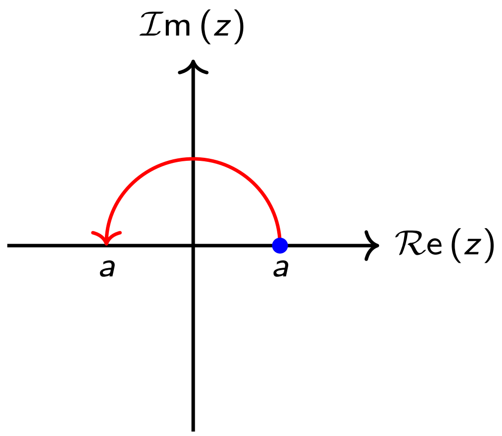
- Si $a = 0$




$$\mathrm{Arg}\,(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad b > 0\,, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad b < 0\,. \end{cases}$$

# Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

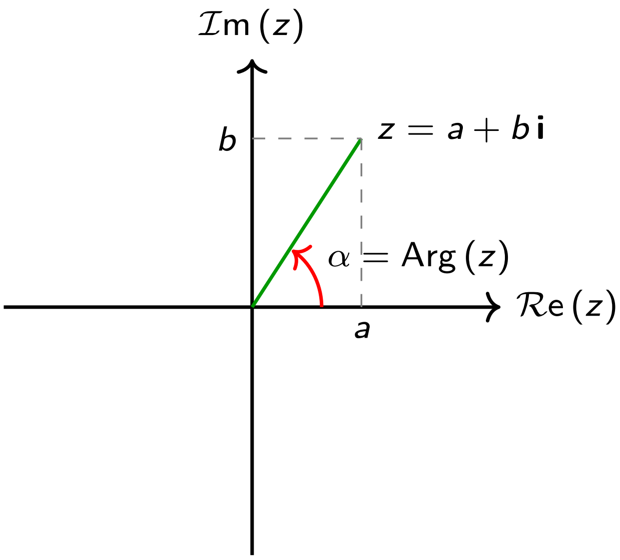
- Si $b = 0$




$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > 0\,, \\ \pi & \text{si} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

# Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

- Si $a > 0$ y $b > 0$



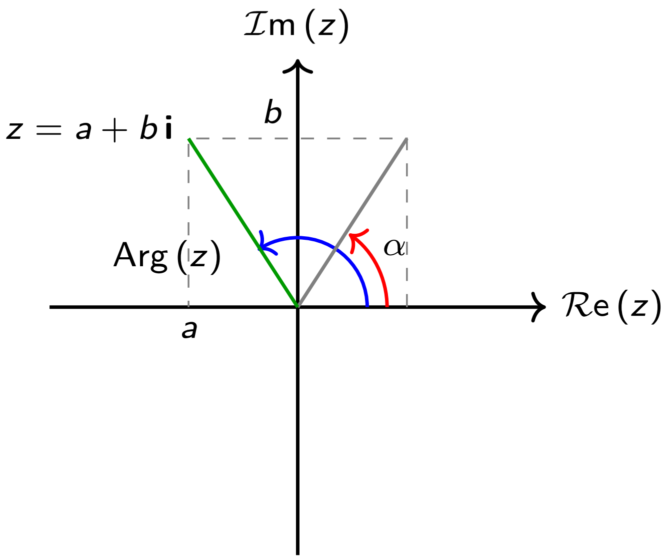

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Primer cuadrante:

$\mathrm{Arg}\,(z) = \alpha$

# Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

- Si $a < 0$ y $b > 0$



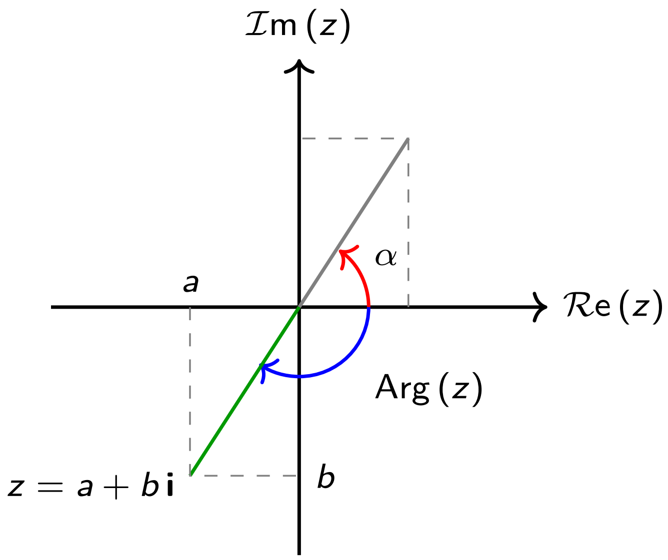

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Segundo cuadrante:

$$\mathrm{Arg}\,(z) = \pi - \alpha$$

# Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

- Si $a < 0$ y $b < 0$



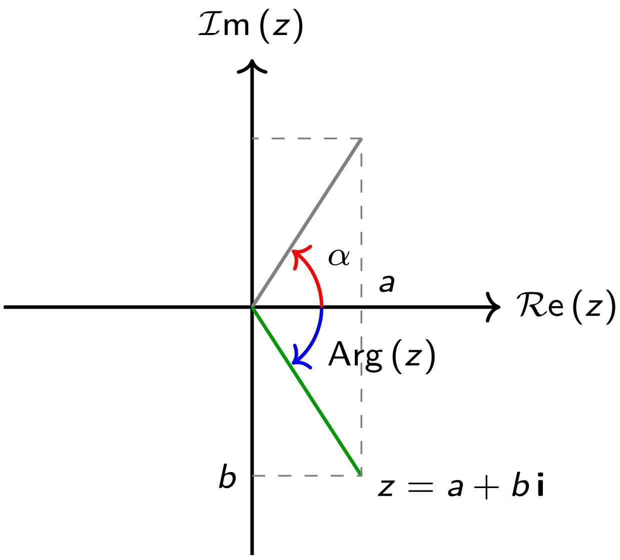

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Tercer cuadrante:

$\mathrm{Arg}\,(z) = \alpha - \pi$

# Cálculo del argumento de $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$

- Si $a > 0$ y $b < 0$




$$\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Cuarto cuadrante:

$\mathrm{Arg}\,(z) = -\alpha$

# Módulo y argumento de $z \in \mathbb{C}$

- **Ejemplo.** Calcula el módulo y argumento de los siguientes números complejos.

**1)** $z = 5 + 5\,\mathbf{i}$

**2)** $z = 2\sqrt{3} - 2\,\mathbf{i}$

**3)** $z = 1 - \sqrt{3}\,\mathbf{i}$

**4)** $z = -2 - 2\,\mathbf{i}$

*(Solución)*

# Formas de expresar un número complejo

- Sea $z \in \mathbb{C}$. Se puede expresar en $\begin{cases} \textbf{forma binómica}: \ z = a + b\,\mathbf{i} \\ \textbf{forma polar}: \ z = |z|_{\text{Arg}\,(z)} \end{cases}$

- Para pasar de forma polar a forma binómica se utiliza la forma **trigonométrica**:

$$z = |z|\left(\cos\left(\text{Arg}\,(z)\right) + \mathbf{i}\,\text{sen}\left(\text{Arg}\,(z)\right)\right) .$$

- **Ejemplo.** Expresa en forma binómica los siguientes $z \in \mathbb{C}$.

**1)** $z = 2\sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}}$

**2)** $z = 3_{\frac{3\pi}{4}}$

**3)** $z = 1_{\frac{\pi}{2}}$

**4)** $z = 7_0$

*(Solución)*

# Operaciones en forma polar

- Si $z_1 = r_{1\alpha_1}$ y $z_2 = r_{2\alpha_2} \in \mathbb{C}$, se puede calcular:
  - el **producto:** $z_1\, z_2 = (r_1\, r_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$
  - el **cociente:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}$ si $r_2 \neq 0$

- **Ejemplo.** Si $z_1 = 1_\pi$ y $z_2 = 2_{\frac{\pi}{2}}$, calcula:

**1)** $z_1\, z_2$ **2)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **3)** $z_1 + z_2$

*(Solución)*

## Fórmula de DeMoivre

- Si $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = r$ y $\operatorname{Arg}(z) = \alpha$, entonces

$$z^n = r^n_{n\alpha} = r^n\left(\cos(n\,\alpha) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\,\alpha)\right) \quad \textbf{Fórmula de DeMoivre}$$

- **Ejemplo.** Comprueba que si $z = 2_{\frac{\pi}{3}}$, entonces $z^3 \in \mathbb{R}$.

*(Solución)*

# Teorema fundamental del álgebra

# Teorema fundamental del álgebra

- **Teorema.** Si $p(x)$ es un polinomio (con coeficientes reales o complejos) de grado $n \in \mathbb{N}$, entonces $p(x)$ tiene $n$ raíces complejas (no necesariamente distintas).

- **Ejemplos.** Calcula las raíces de los siguientes polinomios.

  **1)** $x^2 - 1$

  **2)** $x^2 - 4x + 4$

  **3)** $x^2 + 1$
  *(Solución)*

# Cálculo de raíces $n$-ésimas

# Cálculo de raíces $n$-ésimas

- Sea $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $w \in \mathbb{C}$ es una **raíz** ***n*-ésima** de $z$ si $w^n = z$.

- $z \in \mathbb{C}$ tiene $n$ raíces $n$-ésimas.

- Para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, las raíces $n$-ésimas de $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = r$ y $\mathrm{Arg}\,(z) = \alpha$, son

$$|w_k| = \sqrt[n]{r} \quad \text{y} \quad \arg(w_k) = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}.$$

- **Ejemplo.** Calcula las raíces cúbicas de $z = -2\,\mathbf{i}$.

*(Solución)*

# Exponencial compleja

# Exponencial compleja

- Sea $z = a + b\,\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Se define la **exponencial compleja**

$$e^z = e^{a+b\,\mathbf{i}} = e^a\,(\cos(b) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(b))\ .$$

- Si $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = r$ y $\mathrm{Arg}\,(z) = \alpha$, se puede expresar en forma **exponencial** como $z = r\,e^{\alpha\,\mathbf{i}}$.

- **Ejemplo.** Expresa en forma binómica los siguientes números complejos.

**1)** $e^{-\frac{\pi}{4}\mathbf{i}}$

**2)** $e^{2\pi\mathbf{i}}$

**3)** $e^{1+\mathbf{i}\,\frac{\pi}{2}}$

**4)** $e^{\pi\mathbf{i}}\,e^{\frac{\pi}{3}\mathbf{i}}$

*(Solución)*

# Soluciones

**Pág.** 4

**1)** $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = 2, \;\; \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = 3.$

**2)** $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = \pi, \;\; \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = -2.$

**3)** $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = 0, \;\; \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = -1.$

**4)** $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = 2, \;\; \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = 0.$

**Pág.** 5

**1)** $(1 + \mathbf{i}) + (3 - 5\,\mathbf{i}) = (1 + 3) + (1 - 5)\,\mathbf{i} = 4 - 4\,\mathbf{i}.$

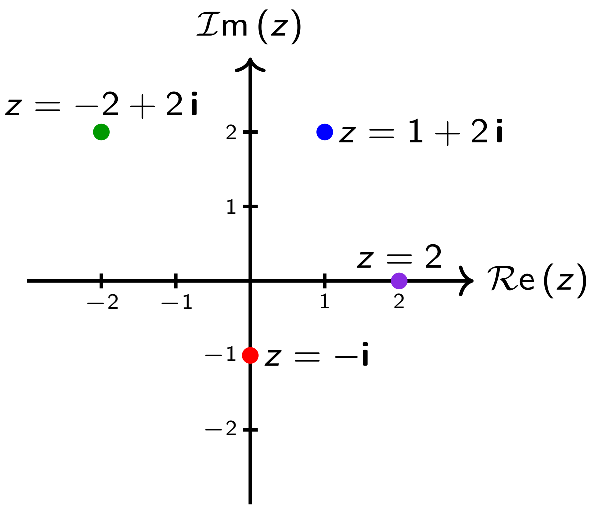
**2)** $(1 + \mathbf{i})(3 - 5\,\mathbf{i}) = 1(3 - 5\,\mathbf{i}) + \mathbf{i}\,(3 - 5\,\mathbf{i}) = 3 - 5\,\mathbf{i} + 3\mathbf{i} + 5 = 8 - 2\,\mathbf{i}.$

**Pág.** 6

**1)** $(1 + \mathbf{i}) + \overline{3 - 5\,\mathbf{i}} = (1 + \mathbf{i}) + (3 + 5\,\mathbf{i}) = 4 + 6\,\mathbf{i}.$

**2)** $\frac{1+2\,\mathbf{i}}{2-3\,\mathbf{i}} = \frac{1+2\,\mathbf{i}}{2-3\,\mathbf{i}}\frac{2+3\,\mathbf{i}}{2+3\,\mathbf{i}} = \frac{2-3\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{i}+6}{4+9} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}\,\mathbf{i}.$

**Pág.** 9




**Pág.** 17

**1)** $|z| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ y como $z$ está en el primer cuadrante: $\operatorname{Arg}(z) = \alpha =$
$= \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

**2)** $|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$ y como $z$ está en el cuarto cuadrante: $\operatorname{Arg}(z) = -\alpha =$
$= -\arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

**3)** $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ y como $z$ está en el segundo cuadrante $\mathrm{Arg}\,(z) =$
$= \pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

**4)** $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$ y como $z$ está en el tercer cuadrante: $\mathrm{Arg}\,(z) =$
$= \arctan\left(\frac{3}{3}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$.

**Pág.** 18

**1)** $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}\right) = 2 - 2\,\mathbf{i}$.

**2)** $z = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{i}$.

**3)** $z = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1\,(0 + \mathbf{i}) = \mathbf{i}$.

**4)** $z = 7\,(\cos(0) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,(0)) = 7(1 + 0\,\mathbf{i}) = 7$.

**Pág.** 19

**1)** $z_1\,z_2 = (1 \cdot 2)_{\pi + \frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{3\pi}{2}} = 2_{-\frac{\pi}{2}}$.

**2)** $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{1}{2}\right)_{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}_{\frac{\pi}{2}}$.

**3)** $z_1 + z_2 = 1(\cos(\pi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\pi)) + 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -1 + 0\,\mathbf{i} + 0 + 2\,\mathbf{i} = -1 + 2\,\mathbf{i}$.

**Pág.** 20

Como $|z| = 2$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, utilizamos la fórmula de DeMoivre con $n = 3$:
$z^3 = (|z|^3)_{3\theta} = (2^3)_{3\frac{\pi}{3}} = 8_\pi = 8(\cos(\pi) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\pi)) = 8(-1 + 0\,\mathbf{i}) = -8 \in \mathbb{R}$.

**Pág.** 22

**1)** $x = 1$ y $x = -1$.

**2)** $x = 2$.

**3)** $x = \mathbf{i}$ y $x = -\mathbf{i}$.

**Pág.** 24

Como $r = |z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$, las raíces cúbicas son
$w_0 = \sqrt[3]{r}_{\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{2}_{-\frac{\pi}{6}}$, $w_1 = \sqrt[3]{r}_{\frac{\theta+2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}_{\frac{\pi}{2}}$ y $w_2 = \sqrt[3]{r}_{\frac{\theta+4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}_{\frac{7\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}_{-\frac{5\pi}{6}}$.

**Pág.** 26

**1)** $e^{\frac{-\pi}{4}\mathbf{i}} = e^0\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = 1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}$.

**2)** $e^{2\pi\mathbf{i}} = e^0(\cos(2\pi) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(2\pi)) = 1(1 + 0\,\mathbf{i}) = 1$.

**3)** $e^{1+\frac{\pi}{2}\mathbf{i}} = e^1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e(0 + \mathbf{i}) = e\,\mathbf{i}$.

**4)** $e^{\pi\mathbf{i}}\,e^{\frac{\pi}{3}\mathbf{i}} = e^{(\pi+\frac{\pi}{3})\mathbf{i}} = e^0\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{i}$.

# Tema 7. Límites y continuidad

Grado en Ingeniería Ambiental

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

# Conceptos básicos sobre funciones

# Función

- Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Una **función** (real de variable real) $f : A \longrightarrow B$ es una regla o ley que asigna a cada elemento $a \in A$ un único elemento de $b \in B$. Se denota $f(a) = b$.
- Decimos que el conjunto $A$ es el **dominio** y el conjunto $B$ el **codominio** de $f$.
- Es usual escribir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sin especificar el dominio ni el codominio.

# Dominio e imagen

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - El **dominio** de $f$, denotado por $\mathrm{Dom}\,(f)$, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ para el que la función $f$ está bien definida.
  - La **imagen** de $f$ es $\mathrm{Im}\,(f) = \{\, y \in \mathbb{R} \;\big|\; \exists x \in \mathrm{Dom}\,(f) \text{ con } f(x) = y \,\}$

- **Ejemplo.** Calcula el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

**1)** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

**2)** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x}$

*(Solución)*

# Límites de funciones

# Límites

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ 0 < |x - a| \leq \delta\,,$$

$$\text{entonces } \ |f(x) - L| \leq \varepsilon\,.$$

- Al calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ observamos el comportamiento de $f$ **cerca** de $a$, no en el punto $a$. Por lo tanto, los puntos cercanos a $a$ deben pertenecer al $\mathrm{Dom}\,(f)$ pero puede que $a \notin \mathrm{Dom}\,(f)$.

- **Ejemplo.** Comprueba el valor del siguiente límite utilizando la definición.

**1)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ con $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$

*(Solución)*

# Cálculo de límites

- **Funciones elementales**

**1)** Polinomios.

$$\lim_{x \to a} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) = b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \cdots + b_n a^n$$

**2)** Exponenciales. $\lim_{x \to a} e^x = e^a$

**3)** Logaritmos. $\lim_{x \to a} \log x = \log a$ si $a > 0$

**4)** Trigonométricas. $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ y $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

# Cálculo de límites

- **Ejemplo.** Calcula los siguientes límites.

**1)** $\lim_{x \to 0} \cos x$

**2)** $\lim_{x \to 5} (x^2 + 2)$

**3)** $\lim_{x \to 1} \log x$

**4)** $\lim_{x \to -1} (\operatorname{sen}(x\pi) + x)$

*(Solución)*

# Aritmética de límites

- **Proposición.**

  Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}\,.$$

  Entonces,

**1)** $\lim\limits_{x \to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha L_1 + \beta L_2$ para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**2)** $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = L_1 L_2$

**3)** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

**4)** $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |L_1|$

**5)** $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$ si $L_1^{L_2} \neq 0^0$

**6)** Si $f(x) \leq g(x)$ cerca del punto $a \in \mathbb{R}$, entonces $L_1 \leq L_2$

# Aritmética de límites

- **Ejemplo.** Calcula los siguientes límites.

**1)** $\lim_{x \to 1} (\cos(\pi x) - x \log x)$

**2)** $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2}{x + 1}$

**3)** $\lim_{x \to -1} |x - 5|$

**4)** $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

*(Solución)*

# Límites con valor $\pm\infty$

- Decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \;\; \text{tal que si} \;\; x \in \mathrm{Dom}\,(f) \;\; \text{y} \;\; 0 < |x-a| \leq \delta\,,$$

$$\text{entonces} \;\; f(x) > M\,.$$

- Decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si

$$\forall M > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \;\; \text{tal que si} \;\; x \in \mathrm{Dom}\,(f) \;\; \text{y} \;\; 0 < |x-a| \leq \delta\,,$$

$$\text{entonces} \;\; f(x) < -M\,.$$

# Límites laterales

- **Límite por la derecha.** Decimos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ 0 < |x - a| \leq \delta$$

$$\text{con } x > a, \ \text{ entonces } \ |f(x) - L| \leq \varepsilon\,.$$

- **Límite por la izquierda.** Decimos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ 0 < |x - a| \leq \delta$$

$$\text{con } x < a, \ \text{ entonces } \ |f(x) - L| \leq \varepsilon\,.$$

## Límites laterales

- **Proposición.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces,
  - Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, entonces no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
  - Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{si} \quad x \leq 4 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

**2)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|}$

*(Solución)*

## Criterio del Sándwich

- Decimos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está **acotada** por $M > 0$ si

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{para todo } x \in \operatorname{Dom}(f)\,.$$

- **Ejemplo.**

  **1)** $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ están acotadas en $\mathbb{R}$ por 1

  **2)** $f(x) = x^2$ está acotada en $[-2, 1]$ por 4
  *(Solución)*

# Criterio del Sándwich

- **Teorema.** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $g$ está acotada en un intervalo que contenga al punto $a \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

**2)** $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

*(Solución)*

# Criterio del Sándwich

- **Teorema.** Sean $f, g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en un intervalo que contenga al punto $a \in \mathbb{R}$.

  Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} h(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = L$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existe, el siguiente límite.

  **1)** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
  *(Solución)*

# Límites en el infinito

- Decimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, N > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ x > N\,,$$

$$\text{entonces } \ |f(x) - L| \le \varepsilon\,.$$

- Decimos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, N > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ x < -N\,,$$

$$\text{entonces } \ |f(x) - L| \le \varepsilon\,.$$

# Límites en el infinito

- Para calcular $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ es necesario que un intervalo de la forma $[a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$ esté en el dominio de $f$.

- Se puede generalizar la definición para el caso $L = \pm\infty$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\lim_{x \to +\infty} x^2$

**2)** $\lim_{x \to -\infty} e^x$

*(Solución)*

# Cálculo de límites en el infinito

- **Funciones elementales**

**1)** Polinomios. Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0\,, \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0\,, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ es par} \;\; \text{y} \;\; a_n > 0\,, \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ es par} \;\; \text{y} \;\; a_n < 0\,, \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ es impar} \;\; \text{y} \;\; a_n > 0\,, \\ +\infty & \text{si} \quad n \text{ es impar} \;\; \text{y} \;\; a_n < 0\,. \end{cases}$$

# Cálculo de límites en el infinito

**2)** Exponenciales.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0\,.$$

**3)** Logaritmos.

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \log x \ \text{ no se puede calcular}\,.$$

**4)** Trigonométricas.

$$\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \nexists \lim_{x \to \pm\infty} \cos x\,.$$

# Aritmética de límites en el infinito

- Se puede generalizar la aritmética de límites siempre que las operaciones tengan sentido.
- Si $a \in \mathbb{R}$, entonces:
  - Suma:
    - $a + \infty \ \to \ +\infty$
    - $a - \infty \ \to \ -\infty$
    - $+\infty + \infty \ \to \ +\infty$
    - $-\infty - \infty \ \to \ -\infty$
  - Exponencial:
    - $a^{+\infty} \ \to \ +\infty$ si $a > 1$
    - $a^{-\infty} \ \to \ 0$ si $a > 1$
    - $0^{a} \ \to \ 0$ si $a > 0$
  - Producto:
    - $a \cdot (+\infty) \ \to \ +\infty$ si $a > 0$
    - $a \cdot (+\infty) \ \to \ -\infty$ si $a < 0$
    - $a \cdot (-\infty) \ \to \ -\infty$ si $a > 0$
    - $a \cdot (-\infty) \ \to \ +\infty$ si $a < 0$
    - $(+\infty) \cdot (+\infty) \ \to \ +\infty$
    - $(-\infty) \cdot (-\infty) \ \to \ +\infty$
    - $(+\infty) \cdot (-\infty) \ \to \ -\infty$
  - Cociente:
    - $\dfrac{a}{\pm\infty} \ \to \ 0$

# Cálculo de límites

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - \log(x^2))$

**2)** $\lim_{x \to \infty} (x - 1) \log x$

**3)** $\lim_{x \to \infty} \frac{1 + e^{-x}}{x}$

*(Solución)*

# Composición de funciones

- **Proposición.**

  Si $\lim_{x \to a} f(x) = F$ y $\lim_{x \to F} g(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = L$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\lim_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{x}}$

**2)** $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}}$

*(Solución)*

# Indeterminaciones

# Indeterminaciones

- **Indeterminación**: expresión que no tiene un valor fijo.
- Se escribe entre corchetes: [ ].
- Algunas indeterminaciones son:
  - $[\infty - \infty]$
  - $\left[\dfrac{k}{0}\right]$ con $k \neq 0$
  - $\left[\dfrac{0}{0}\right]$
  - $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$
  - $[0 \cdot \infty]$
  - $\left[1^{\pm\infty}\right]$
  - $\left[0^{0}\right]$
  - $\left[\infty^{0}\right]$

# Indeterminación $\left[\frac{k}{0}\right]$ con $k \neq 0$

- Estudio de los límites laterales para determinar el signo: $\pm\infty$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

  **1)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2+x}$

  **2)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$

  *(Solución)*

# Indeterminación $[\infty - \infty]$

- El límite es $\pm\infty$ y el signo lo determina el término de mayor orden.
- Comportamiento cerca de $\infty$:

$$\log x \;<<\; x^n \;<<\; a^x \qquad \text{con } a > 1\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^3} - x)$

**2)** $\lim_{x\to+\infty} (3^x - 5^x)$

**3)** $\lim_{x\to+\infty} (3^x - x^5)$

**4)** $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - \log(x^4))$

*(Solución)*

# Indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$

- Factorizar y simplificar.
- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-x}$

**2)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

*(Solución)*

## Indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

- Se divide el numerador y el denominador por el término de mayor orden del denominador.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}$

**2)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^7}{3+x^2}$

**3)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+5}}{x-4}$

**4)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3-x}{1-\sqrt{7x^2+4x}}$

*(Solución)*

## Indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

- Caso particular: cociente de polinomios.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{-3x+7}$

**2)** $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-8}{x^2+3x+1}$

**3)** $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{3x^2+x-12}$

*(Solución)*

# Indeterminación $[\,0\cdot\infty\,]$

- Se convierte en una indeterminación de tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ o $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty} (x+7)\sqrt{\dfrac{1}{4x^2+3}}$

**2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x}$

**3)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\dfrac{-7}{\log(x^2)}\right)$

*(Solución)*

# Indeterminación $[\,1^{\infty}\,]$

- Se utiliza el límite del número $e$:

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad \text{si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

**2)** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

*(Solución)*

# Más indeterminaciones

- $[1^\infty]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[0^0\right]$
- Se resuelven tomando logaritmos y aplicando la regla de L'Hôpital

# Regla de L'Hôpital

- **Regla de L'Hôpital.**

  Sea $x_0 \in (a, b)$ y sean $f, g$ dos funciones derivables en $(a, b) \setminus \{ x_0 \}$.

  Si $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b) \setminus \{ x_0 \}$ y

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{cases} 0\,, \\ \pm\infty\,, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,,$$

  entonces $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$

- Se puede extender el resultado si $x \to \pm\infty$ o si $L = \pm\infty$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

  **1)** $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x}$ **2)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

  *(Solución)*

## Ejercicios

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

**1)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) + x^2 + 1}{\log(x^2+1) - e^x}$

**2)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2}{\operatorname{sen}^2(x)}$

**3)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2}$

**4)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^{2x}}{7e^{2x} + e^x}$

**5)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 4x - 7}{7x^2 - \sqrt{2x^6 + x^5}}$

**6)** $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

**7)** $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x-1}}$

**8)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}$

**9)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan(x)}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

*(Solución)*

# Continuidad

# Continuidad

- Decimos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **continua** en $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \text{ y } \ |x - a| \leq \delta\,,$$

$$\text{entonces } \ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon\,.$$

- Si $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ es un punto aislado del $\mathrm{Dom}\,(f)$, entonces $f$ siempre es continua en $a$.

- Si $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ no es un punto aislado del $\mathrm{Dom}\,(f)$, entonces $f$ es continua en $a$ si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

# Continuidad

- Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **no** es continua en $a \in \mathbb{R}$ si
  - $a \notin \mathrm{Dom}\,(f)$;
  - existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ pero tiene distinto valor que $f(a)$;
  - no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- En caso de que $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
  - $f$ no es continua en $a$;
  - $f$ es continua en $b$ si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

# Continuidad

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados.

**1)** $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (-5, 2]\,, \\ 10 & \text{si} \quad x = 7\,, \end{cases}$ en $x = 7$

**2)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2\,, \\ x + 2 & \text{si} \quad x > 2\,, \end{cases}$ en $x = 2$

**3)** $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $x = 2$

*(Solución)*

# Continuidad

- **Funciones elementales.**

**1)** Los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

**2)** La función exponencial $e^x$ es continua en $\mathbb{R}$.

**3)** La función logaritmo $\log x$ es continua si $x > 0$.

**4)** Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$.

# Propiedades de las funciones continuas

- **Proposición.**

  Sean $f, g$ dos funciones continuas en $a \in \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)$.

**1)** $\alpha f + \beta g$ es continua en $a \in \mathbb{R}$ para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**2)** $f\,g$ es continua en $a \in \mathbb{R}$.

**3)** $\dfrac{f}{g}$ es continua en $a \in \mathbb{R}$ si $g(a) \neq 0$.

**4)** $|f|$ es continua en $a \in \mathbb{R}$.

**5)** $f^g$ es continua en $a \in \mathbb{R}$.

# Composición de funciones

- **Proposición.**

  Sean $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f$ es continua en $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ y $g$ es continua en $f(a) \in \mathrm{Dom}\,(g)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en $a$.

- **Ejemplo.** Las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

**1)** $f(x) = \dfrac{x-3}{e^x+2}$

**2)** $f(x) = e^{x^2+1}$

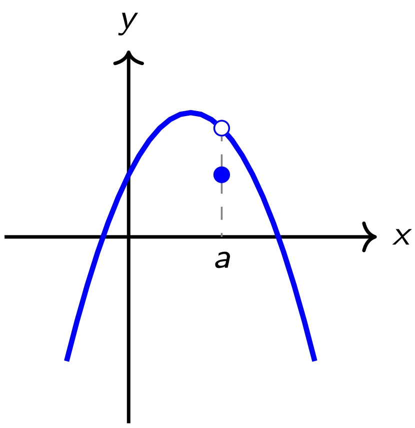
**3)** $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

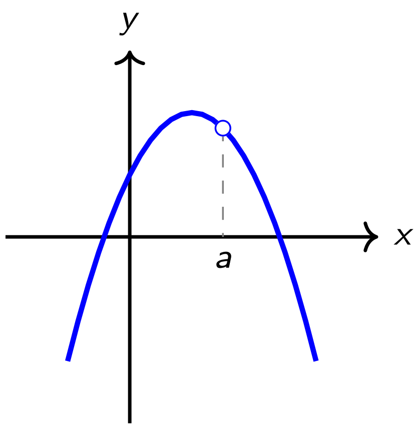
*(Solución)*

# Tipos de discontinuidad

# Discontinuidad evitable

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad **evitable** en $a \in \mathbb{R}$
  - si $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ y existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ pero $L \neq f(a)$;
  - si $a \notin \mathrm{Dom}\,(f)$ pero existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$.



# Discontinuidad evitable

- **Ejemplo.** Clasifica la discontinuidad de las siguientes funciones en el punto indicado.

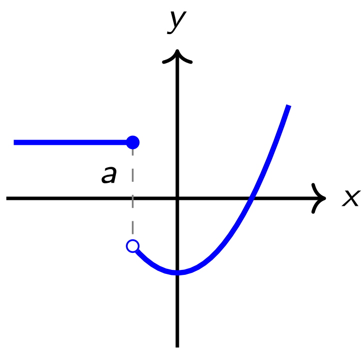
**1)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} \quad \text{en} \quad x = 2$

**2)** $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 10 & \text{si} \quad x = 0\,, \end{cases} \quad \text{en} \quad x = 0$

*(Solución)*

# Discontinuidad de salto finito

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad de **salto finito** en $a \in \mathbb{R}$ si existen los límites laterales y son finitos, pero no coinciden.



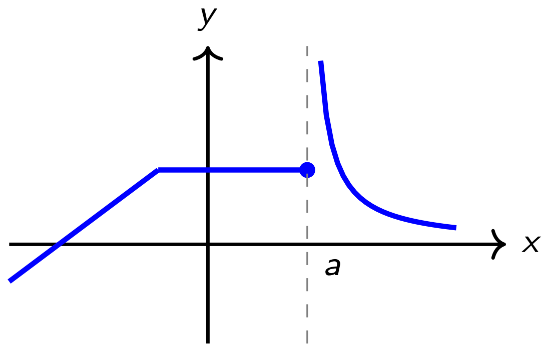

- **Ejemplo.** Clasifica la discontinuidad de la siguiente función en el punto indicado.

**1)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0\,, \\ \cos x & \text{si} \quad x > 0\,, \end{cases}$ en $x = 0$

*(Solución)*

# Discontinuidad de salto infinito

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad de **salto infinito** en $a \in \mathbb{R}$ si alguno de los límites laterales es $\pm\infty$.




- **Ejemplo.** Clasifica la discontinuidad de las siguientes funciones en el punto indicado.

**1)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x > 1\,, \\ 3 & \text{si} \quad x \leq 1\,, \end{cases} \qquad \text{en} \qquad x = 1$

**2)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3 - x^2 - 2x} \qquad \text{en} \qquad x = 0$

*(Solución)*

# Estudio de la continuidad de una función

# Estudio de la continuidad de una función

- **Ejemplo.** Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

**1)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in (-\infty, 2] \\ 2x+1 & \text{si} \quad x \in (2, +\infty) \end{cases}$

**2)** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$

**3)** $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

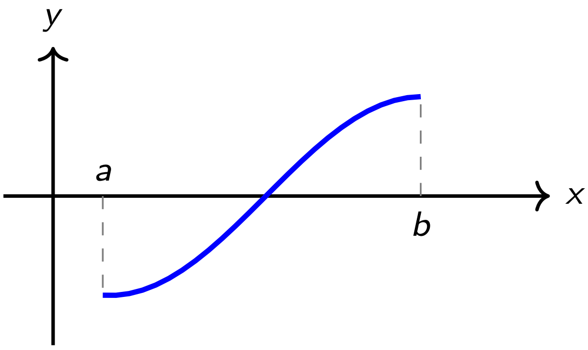
**4)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

*(Solución)*

# Teorema de Bolzano

# Teorema de Bolzano

- **Teorema de Bolzano.** Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.




- **Ejemplo.** Utiliza el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $x^2 - 2 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[1, 2]$.

*(Solución)*

# Soluciones

**Pág.** 4

**1)** $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}, \quad \text{Im}\,(f) = [0, +\infty).$

**2)** $\text{Dom}\,(f) = [0, +\infty), \quad \text{Im}\,(f) = [0, +\infty).$

**Pág.** 6

Sea $\varepsilon > 0$ y tomamos $\delta = 2\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - 1| \leq \delta$. Entonces,

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{x+3}{2} - 2\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{2} \leq \frac{\delta}{2} = \varepsilon\,.$$

**Pág.** 8

**1)** $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$

**2)** $\lim\limits_{x\to 5} (x^2 + 2) = 5^2 + 2 = 27.$

**3)** $\lim\limits_{x\to 1} \log x = \log 1 = 0.$

**4)** $\lim\limits_{x\to -1} (\text{sen}(x\pi) + x) = \text{sen}(-\pi) - 1 = 0 - 1 = -1.$

**Pág.** 10

**1)** $\lim\limits_{x\to 1} (\cos(\pi x) - x \log x) = \cos\pi - \log 1 = -1 + 0 = -1.$

**2)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$.

**3)** $\lim\limits_{x \to -1} |x-5| = |-1-5| = 6$.

**4)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$.

**Pág.** 13

**1)** Como $f$ tiene dos expresiones distintas alrededor de $x = 4$, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \frac{x}{2} = 2$ y $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (x^2 - 7) = 16 - 7 = 9$. Al no coincidir los límites laterales, no existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

**2)** Como $f$ tiene dos expresiones distintas alrededor de $x = 0$, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{-x} = +\infty$. Al coincidir los límites laterales, deducimos que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

**Pág.** 14

**1)** $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$.

**2)** Como $-2 \leq x \leq 1$, entonces $0 \leq x^2 \leq 4$ y $|f(x)| \leq 4$.

**Pág.** 15

**1)** No existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

**2)** $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ por el Criterio del Sándwich: $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ y $\lim_{x\to 0} x = 0$.

**Pág.** 16

**1)** $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ porque $-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ y además $\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ y $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$.

**Pág.** 18

**1)** $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$.

**2)** $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$.

**Pág.** 22

**1)** $\lim_{x\to -\infty} (x^3 - \log(x^2)) = -\infty - \infty = -\infty$.

**2)** $\lim_{x\to \infty} (x-1)\log x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$.

**3)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} = [\frac{1+0}{+\infty}] = 0.$

**Pág.** 23

**1)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = [e^{\frac{-1}{-\infty}}] = e^0 = 1.$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}} = [e^{\frac{-1}{0}}]$. Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = [\, e^{-\infty}\,] = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = [\, e^{+\infty}\,] = +\infty$. Como los límites laterales no coinciden, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$.

**Pág.** 26

**1)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x\,(x+1)} = [\frac{-1}{0}]$. Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x\,(x+1)} = = [\frac{-1}{0^-\cdot 1}] = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x\,(x+1)} = [\frac{-1}{0^+\cdot 1}] = -\infty$. Al no coincidir los límites laterales, el límite no existe.

**2)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = [\frac{3}{0}]$. Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+2}{(x-1)^2} = [\frac{3}{0^+}] = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+2}{(x-1)^2} = [\frac{3}{0^+}] = +\infty$. Como los límites laterales son iguales, deducimos que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty.$

**Pág.** 27

**1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^3} - x) = [+\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3} = +\infty.$

**2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (3^x - 5^x) = [+\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to+\infty} -5^x = -\infty.$

**3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (3^x - x^5) = [+\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = +\infty.$

**4)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - \log(x^4)) = [+\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$

**Pág.** 28

**1)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-x} = [\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x} = 3.$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = [\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\,(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\,(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0} (1+\sqrt{1-x}) = 2.$

**Pág.** 29

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{2}{1+1} = 1.$

**2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^7}{3+x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^5}{\frac{3}{x^2}+1} = [\frac{+\infty}{0+1}] = +\infty.$

**3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+5}}{x-4} = [\frac{+\infty}{-\infty}] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}}{1-\frac{4}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-x}{1-\sqrt{7x^2+4x}} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}-1}{\frac{1}{x}-\sqrt{7+\frac{4}{x}}} = \frac{-1}{-\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$

**Pág. 30**

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{-3x+7} = [\frac{+\infty}{-\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{-3}x^2 = +\infty.$

**2)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-8}{x^2+3x+1} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{1}x^0 = 2.$

**3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{3x^2+x-12} = [\frac{-\infty}{+\infty}] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{3}\frac{1}{x} = 0.$

**Pág. 31**

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty} (x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}} = [\infty\cdot 0] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+7}{\sqrt{4x^2+3}} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{7}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$

**2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = [+\infty\cdot 0] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = [\frac{\infty}{\infty}] = 0$ porque "gana" el término de mayor orden: $e^x$.

**3)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\frac{-7}{\log(x^2)}\right) = [\infty\cdot 0] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-7x^2}{\log(x^2)} = [\frac{\infty}{\infty}] = -\infty$ porque "gana" el término de mayor orden: $x^2$.

**Pág.** 32

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

**2)** $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to1}\left(1+\frac{x}{2x-1}-1\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to1}\left(1+\frac{1-x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}} =$

$$= \lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{1-x}}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{1-x}}\right)^{\frac{2x-1}{1-x}\frac{1-x}{2x-1}\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{2x-1}} = e^{-1}.$$

**Pág.** 34

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] \underset{\text{L'H}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$

**2)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = [\frac{0}{0}] \underset{\text{L'H}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)}{1} = 1.$

**Pág.** 35

**1)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x+x^2+1}{\log(x^2+1)-e^x} = \frac{1}{\log 1-e^0} = \frac{1}{-1} = -1.$

**2)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+2}{\operatorname{sen}^2 x} = [\frac{2}{0^+}] = +\infty.$

**3)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=[\frac{0}{0}]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{1}{4}.$

**4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{2x}}{7e^{2x}+e^x}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{7+\frac{1}{e^x}}=\frac{3}{7}.$

**5)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}}=[\frac{+\infty}{-\infty}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^3}}{\frac{7}{x}-\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{-\sqrt{2}}.$

**6)** $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cos(\frac{1}{x})=0$ por el teorema del Sándwich ya que $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$ y $|\cos(\frac{1}{x})|\leq 1.$

**7)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=[\frac{0}{0}]=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}(x+1)=0\cdot 2=0.$

**8)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}=[\frac{1+2^{\frac{1}{0}}}{1+3^{\frac{1}{0}}}]$. Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}=[\frac{1+2^{+\infty}}{1+3^{+\infty}}]=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\frac{1}{3})^{\frac{1}{x}}+(\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}}}{(\frac{1}{3})^{\frac{1}{x}}+1}=[\frac{0+0}{0+1}]=0$ y $\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}=\frac{1+0}{1+0}=1.$ Al no coincidir los límites laterales, no existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}$.

**9)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\operatorname{sen}x-\cos x}=[\frac{0}{0}]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{\operatorname{sen}x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x(\operatorname{sen}x-\cos x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}=-\sqrt{2}.$

**Pág.** 39

**1)** $f$ es continua en $x = 7$ por ser un punto aislado de $\mathrm{Dom}\,(f)$.

**2)** Para comprobar que $f$ es continua en $x = 2$ tenemos que calcular los límites laterales: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+2) = 4$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$. Como los límites laterales coinciden, $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ y $f$ es continua en $x = 2$ porque $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2$.

**3)** $f$ no es continua en $x = 2$ porque $2 \notin \mathrm{Dom}\,(f)$.

**Pág.** 42

**1)** $f$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser cociente de dos funciones continuas (polinomio y exponencial+constante)con el denominador no nulo.

**2)** $f$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de dos funciones continuas: la exponencial $g(x) = e^x$ y el polinomio $h(x) = x^2 + 1$ ($f(x) = (g \circ h)(x)$).

**3)** $f$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de dos funciones continuas: $g(x) = \cos x$ y $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ($f = g \circ h$). Además, $h(x)$ es continua por ser cociente de dos polinomios con el denominador no nulo.

**Pág.** 45

**1)** Como $2 \notin \mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{\,2\,\}$, calculamos $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = [\frac{0}{0}] =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-2x+4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 2x + 4) = 4 \in \mathbb{R}$, deducimos que $f$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

**2)** Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x - 2) = -2 \neq 10 = f(0)$, deducimos que $f$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

**Pág.** 46

**1)** Como $f$ tiene dos expresiones distintas alrededor de $x = 0$, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0^1} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$. Al no coincidir los límites laterales pero ser los dos números reales, deducimos que $f$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

**Pág.** 47

**1)** Al tener $f$ dos expresiones distintas alrededor de $x = 0$, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3 = 3$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = [\frac{1}{0^+}] = +\infty$. Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, la función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

**2)** Calculamos: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x}{x^3 - x^2 - 2x} = [\frac{1}{0}]$ y para resolver la indeterminación calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x^3-x^2-2x} = [\frac{1}{0}] = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x(x-2)(x+1)} = [\frac{1}{0^- \cdot (-2) \cdot 1}] = +\infty$. Como un límite lateral no es finito, la función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

**Pág.** 49

**1)** $f$ es continua en $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$ porque los polinomios son funciones continuas. Como $f$ está definida de dos maneras distintas alrededor de $x = 2$, necesitamos calcular los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5$. Al no coincidir los límites laterales, no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y por lo tanto $f$ no es continua en $x = 2$. La función tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

**2)** $f$ es continua en $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$ por estar definida como composición de funciones continuas (la exponencial y un cociente de polinomios con denominador no nulo).

**3)** $f$ es continua si $x \neq 0$ por estar definida como composición de funciones continuas (la exponencial y un cociente de polinomios con denominador no nulo). Calculamos $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = [e^{\frac{1}{0}}]$. Para resolver la indeterminación, calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = [e^{-\infty}] = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = [e^{+\infty}] = +\infty$.

Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $f$ no puede ser continua en $x = 0$. La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

**4)** $f$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por estar definida como un cociente de funciones continuas (el valor absoluto de un polinomio es continuo) con denominador no nulo. Calculamos $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{|x+1|}{x} = [\frac{1}{0}]$. Para resolver la indeterminación calculamos los límites laterales: $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x+1|}{x} = [\frac{1}{0^+}] = +\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x+1|}{x} = [\frac{1}{0^-}] = -\infty$. Como los límites laterales no coinciden, no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $f$ no puede ser continua en $x = 0$. La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

**Pág.** 51

Definimos la función $f(x) = x^2 - 2$, que es continua en el intervalo $[1, 2]$ por ser un polinomio. Además, como $f(1) = -1$ y $f(2) = 2$, se cumple que $f(1)f(2) < 0$, por lo tanto, utilizando el teorema de Bolzano deducimos que existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, existe un número real en el intervalo $(1, 2)$ que es solución de la ecuación $c^2 - 2 = 0$.

# Tema 8. Derivación de funciones

Grado en Ingeniería Ambiental

Curso 2023 – 2024

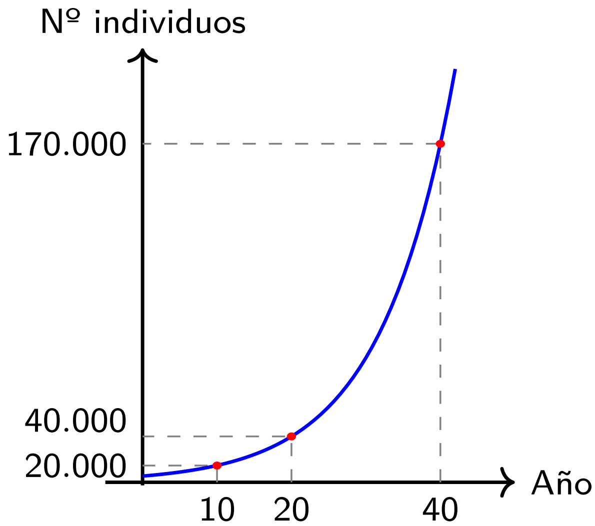
Universidad Rey Juan Carlos

# Derivada

# La derivada

- **Ejemplo.** Conocemos los siguientes datos de una determinada población:

| Año | Nº individuos |
|---|---|
| 10 | 20.000 |
| 20 | 40.000 |
| 40 | 170.000 |




- Queremos conocer cuánto ha crecido la población en un tiempo $t$.

# La derivada

- ¿Cuánto ha variado la población en el tiempo $t = 10$?
  - Utilizamos los datos de los años 10 y 20:

$$\text{Variación} = \frac{40.000 - 20.000}{20 - 10} = 2.000 \text{ individuos/año}.$$

  - Utilizamos los datos de los años 10 y 40:

$$\text{Variación} = \frac{170.000 - 20.000}{40 - 10} = 5.000 \text{ individuos/año}.$$

- Cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo, mejor será el valor obtenido:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

## Derivada

- Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $f$ es **derivable** en $x_0 \in (a, b)$ si existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}\,.$$

- En ese caso, el valor de la derivada de $f$ en el punto $x_0$ es

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

- Existen otras formas de denotar la derivada de $f$ en $x_0$:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x)\Big|_{x=x_0}\,.$$

# Derivada

- **Ejemplo.** Calcula, si existe, la derivada de las siguientes funciones en el punto indicado.

**1)** $f'(a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x - 2$

**2)** $f'(a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

**3)** $f'(0)$ con $f(x) = |x|$

**4)** $f'(0)$ con $f(x) = \sqrt[3]{x}$

**5)** $f'(0)$ con $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

*(Solución)*

# Derivada de funciones elementales

| Función | Derivada |
|---|---|
| $f(x) = C$, constante | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = x^n$ | $f'(x) = n\,x^{n-1}$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = \log x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ |
| $f(x) = \operatorname{sen} x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ |
| $f(x) = \tan x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ |
| $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $f(x) = \arccos x$ | $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $f(x) = \arctan x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ |

# Propiedades

- **Proposición.**

  Sean $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en $x_0 \in (a,b)$. Entonces,

  **1)** $\alpha f + \beta g$ es derivable en $x_0 \in (a,b)$ para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y

  $$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)\,.$$

  **2)** $fg$ es derivable en $x_0 \in (a,b)$ y

  $$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)\,.$$

  **3)** $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $x_0$ si $g(x_0) \neq 0$ y

  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,.$$

# Propiedades

- **Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

**1)** $f(x) = x^2 - 6x + \cos x$

**2)** $f(x) = x^3 e^x$

**3)** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$

*(Solución)*

# Propiedades

- **Regla de la cadena.**

  Sea $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a,b)$ y sea $g\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $f(x_0) \in (c,d)$. Entonces, $g \circ f$ es derivable en $x_0$ y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

  **1)** $f(x) = \log(x^4 + 4x + 4)$

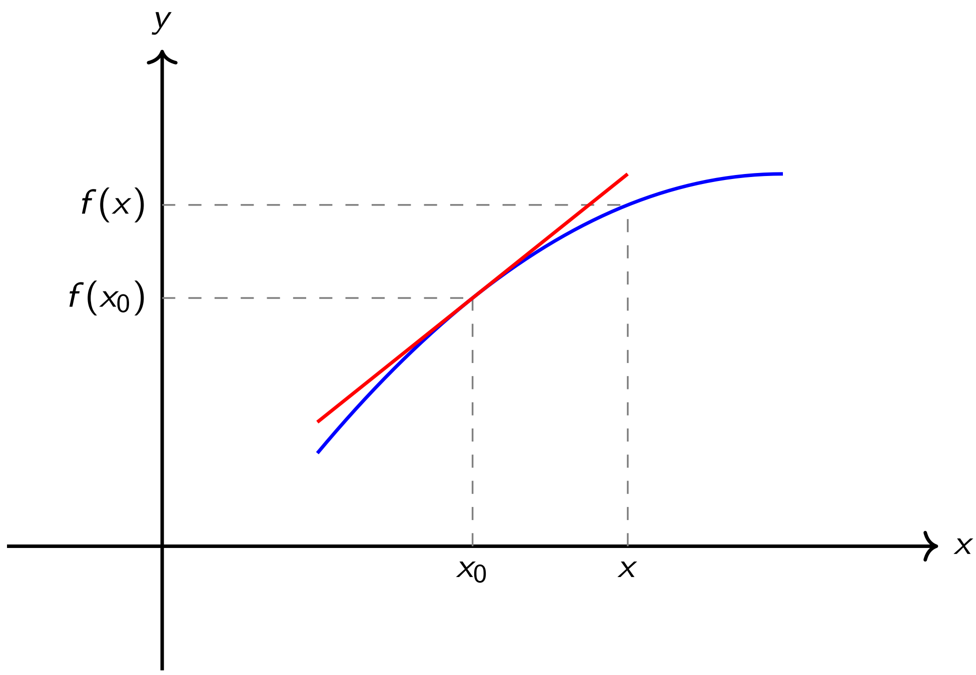
  **2)** $f(x) = \operatorname{sen}^3(2x + 5)$

  *(Solución)*

# Derivada de funciones elementales

| Función | Derivada |
|---|---|
| $f(x) = C$, constante | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = (u(x))^n$ | $f'(x) = n\,(u(x))^{n-1}u'(x)$ |
| $f(x) = e^{u(x)}$ | $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ |
| $f(x) = \log(u(x))$ | $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ |
| $f(x) = \operatorname{sen}(u(x))$ | $f'(x) = u'(x)\cos(u(x))$ |
| $f(x) = \cos(u(x))$ | $f'(x) = -u'(x)\operatorname{sen}(u(x))$ |
| $f(x) = \tan(u(x))$ | $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = (1 + \tan^2(u(x)))\,u'(x)$ |
| $f(x) = \operatorname{arcsen}(u(x))$ | $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$ |
| $f(x) = \arccos(u(x))$ | $f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$ |
| $f(x) = \arctan(u(x))$ | $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ |

# Representación gráfica



# Ecuación de la recta tangente

- Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable en $x_0\in(a,b)$. La ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de $f$ en el punto $x_0\in(a,b)$ es

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula, si existe, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=3x^2-\operatorname{sen}(\pi\,x)$ en $x=1$. *(Solución)*

- **Ejemplo.** Sean $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que

$$(f\circ g)(x)=x^2\,,\quad g(3)=1\ \text{ y }\ g'(3)=7\,.$$

Calcula, si existe, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en $x=1$. *(Solución)*

# Derivada de la función inversa

- **Teorema.** Sea $f\colon (a,b) \longrightarrow (c,d)$ una función continua y biyectiva. Si $f$ es derivable en $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y además

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \,.$$

- **Ejemplo.** Utiliza el teorema de la función inversa para calcular las siguientes derivadas.

**1)** Derivada de $g(y) = \log y$ sabiendo que $f(x) = e^x$ y $f'(x) = e^x$

**2)** Derivada de $g(y) = \operatorname{arcsen} y$ sabiendo que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f'(x) = \cos x$

*(Solución)*

# Relación entre continuidad y derivabilidad

- **Teorema.** Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f$ es derivable en $x_0 \in (a, b)$, entonces $f$ es continua en $x_0 \in (a, b)$.

- El recíproco no es cierto.

- **Ejemplo.** Determina si las siguientes funciones son continuas y/o derivables en el punto indicado.

  **1)** $f(x) = |x|$ en $x = 0$

  **2)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

  *(Solución)*

# Regla de L'Hôpital

- **Regla de L'Hôpital.**

  Sea $x_0 \in (a, b)$ y sean $f, g$ dos funciones derivables en $(a, b) \setminus \{ x_0 \}$.

  Si $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b) \setminus \{ x_0 \}$ y

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{cases} 0\,, \\ \pm\infty\,, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,,$$

  entonces $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$

- Se puede extender el resultado si $x \to \pm\infty$ o si $L = \pm\infty$.

- **Ejemplo.** Calcula, si existen, los siguientes límites.

  **1)** $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x}$   **2)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

  *(Solución)*

# Estudio de la derivabilidad de una función

# Estudio de la derivabilidad de una función

- Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - Si $x_0 \in (a, b)$, calculamos $f'(x_0)$ con las reglas de derivación.
  - Si $x_0 = a$ o $x_0 = b$, calculamos $f'(x_0)$ con la definición:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}\,.$$

# Estudio de la derivabilidad de una función

- Si queremos utilizar las "derivadas laterales":

- **Teorema.** Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\begin{cases} f \text{ continua en } (a, b)\,, \\ f \text{ derivable en } (a, b) \setminus \{\, x_0 \,\}\,, \end{cases}$

  se cumple:

  **1)** si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, entonces $f$ es derivable en $x_0$ y $f'(x_0) = L$;

  **2)** si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$, entonces $f$ **no** es derivable en $x_0$;

  **3)** si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$, entonces $f$ **no** es derivable en $x_0$.

# Estudio de la derivabilidad de una función

- **Ejemplo.** Estudia derivabilidad de las siguientes funciones.

**1)** $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x < 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0\,. \end{cases}$

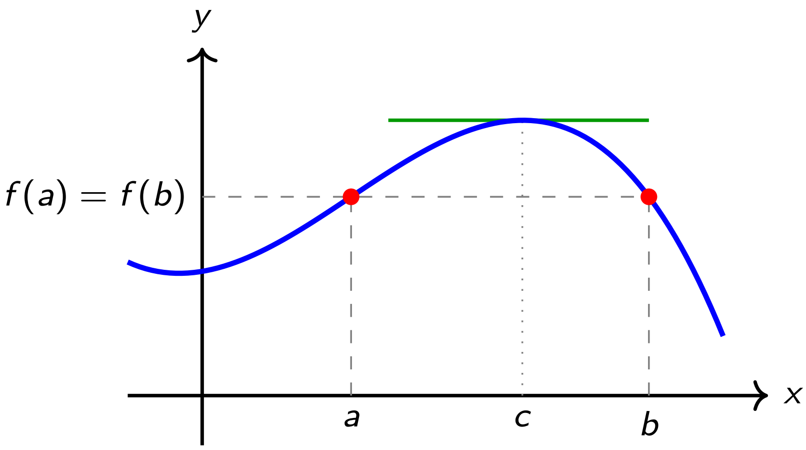
**2)** $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,. \end{cases}$

*(Solución)*

# Teorema de Rolle

# Teorema de Rolle

- **Teorema de Rolle.** Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$.




- **Ejemplo.** Demuestra que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real. *(Solución)*

# Derivadas de orden superior

# Derivadas de orden superior

- Si $f(x)$ es derivable, $f'(x)$ es la derivada primera de $f(x)$.
- Si $f'(x)$ es derivable, $f''(x)$ es la derivada segunda de $f(x)$.
- Si $f''(x)$ es derivable, $f'''(x)$ es la derivada tercera de $f(x)$.
- ...
- Si $f(x)$ es derivable $n$ veces, $f^{(n)}(x)$ es la derivada $n$-ésima de $f(x)$.
- **Ejemplo.** Calcula la derivada tercera de las siguientes funciones.

  **1)** $f(x) = e^x$ **2)** $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$

  *(Solución)*

# Desarrollo de Taylor

# Desarrollo de Taylor

- Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable. Se define el **polinomio de Taylor** de orden (o grado) $n$ centrado en el punto $x_0 \in (a, b)$ como

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

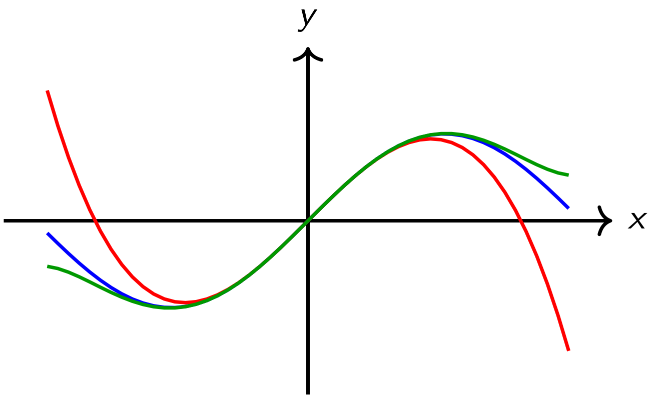
- Se define el **resto de Taylor** como

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

para cierto valor $\xi$ entre $x_0$ y $x$.

- Se cumple $f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$.

# Desarrollo de Taylor




$$f(x) = \mathrm{sen}(x)$$

$$P_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_{5,0}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

# Desarrollo de Taylor

- **Ejemplo.**

  **1)** Calcula el polinomio de Taylor de $f(x) = \log x$ centrado en $x = 1$ de grado 3.

  **2)** Aproxima el valor del número $e$ con un error menor de $10^{-2}$ utilizando un polinomio de Taylor.

  **3)** Calcula el polinomio de Taylor de $f(x) = \cos(2x)$ centrado en el origen y de orden 3. Utiliza ese polinomio para obtener una aproximación a $\cos 1$ y acota dicho error.

  *(Solución)*

# Desarrollo de Taylor

- **Proposición.** Sea $P_{n,x_0}(x; f)$ el polinomio de Taylor de orden $n$ centrado de $x_0$ de $f$. Se cumple:

  **1)** $P_{n,x_0}(x; \alpha f) = \alpha P_{n,x_0}(x; f)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

  **2)** $P_{n,x_0}(x; f + g) = P_{n,x_0}(x; f) + P_{n,x_0}(x; g)$

  **3)** $P_{n,x_0}(x; fg) = P_{n,x_0}(x; f) \cdot P_{n,x_0}(x; g)$ truncado hasta grado $n$.

  **4)** $P_{nm,x_0}(x; f(x^m)) = P_{n,x_0}(x^m; f)$.

# Desarrollo de Taylor

- **Ejemplo.** Sean $f_1(x) = e^{-x^2}$ y $f_2(x) = \cos x$. Sabiendo que

$$P_{3,0}(x; f_1) = 1 - x^2 \quad \text{y} \quad P_{3,0}(x; f_2) = 1 - \frac{x^2}{2},$$

calcula

**1)** $P_{3,0}(x, g)$ siendo $g(x) = e^{-x^2} \cos x$

**2)** $P_{6,0}(x, h)$ siendo $h(x) = \cos x^2$

*(Solución)*

# Monotonía y extremos

# Monotonía

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - $f$ es **creciente** en $(a, b) \subseteq \text{Dom}(f)$ si para $x < y$ con $x, y \in (a, b)$, entonces $f(x) \leq f(y)$.
  - $f$ es **estrictamente creciente** en $(a, b) \subseteq \text{Dom}(f)$ si para $x < y$ con $x, y \in (a, b)$, entonces $f(x) < f(y)$.
  - $f$ es **decreciente** en $(a, b) \subseteq \text{Dom}(f)$ si para $x < y$ con $x, y \in (a, b)$, entonces $f(x) \geq f(y)$.
  - $f$ es **estrictamente decreciente** en $(a, b) \subseteq \text{Dom}(f)$ si para $x < y$ con $x, y \in (a, b)$, entonces $f(x) > f(y)$.

- **Ejemplo.** Estudia la monotonía de la siguiente función.

**1)** $f(x) = x - 7$ *(Solución)*

# Monotonía

- **Teorema.** Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable.

  **1)** Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f$ es estrictamente creciente en $(a,b)$.

  **2)** Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f$ es creciente en $(a,b)$.

  **3)** Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f$ es estrictamente decreciente en $(a,b)$.

  **4)** Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f$ es decreciente en $(a,b)$.

- **Ejemplo.** Estudia la monotonía de las siguientes funciones.

  **1)** $f(x) = e^{-x}$ **2)** $f(x) = x^2$

  *(Solución)*

# Extremos locales

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

  - $f$ tiene un **máximo local o relativo** en $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

  - $f$ tiene un **mínimo local o relativo** en $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

  - $f$ tiene un **extremo local o relativo** en $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si $x_0$ es máximo o mínimo local.

- Todos los puntos de la función constante $f(x) = C$ son máximos y mínimos relativos.

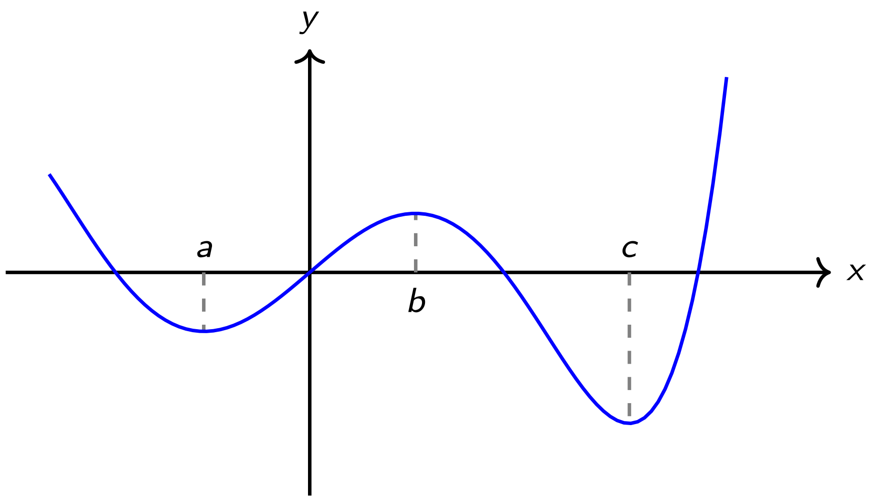
- **Ejemplo.**

  **1)** La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo local en $x = 0$ *(Solución)*

# Extremos absolutos

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - $f$ tiene un **máximo absoluto** en $x_0 \in \text{Dom}(f)$ si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$.
  - $f$ tiene un **mínimo absoluto** en $x_0 \in \text{Dom}(f)$ si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$.
  - $f$ tiene un **extremo absoluto** en $x_0 \in \text{Dom}(f)$ si $x_0$ es máximo o mínimo absoluto.
- Todo extremo absoluto es extremo relativo, pero un extremo relativo puede no ser extremo absoluto.
- **Ejemplo.**

  **1)** La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ *(Solución)*




- Extremos relativos $\begin{cases} f \text{ tiene un mínimo local en } x = a \text{ y en } x = c \\ f \text{ tiene un máximo local en } x = b \end{cases}$

- Extremos absolutos $\begin{cases} f \text{ tiene un mínimo absoluto en } x = c \\ f \text{ no tiene ningún máximo absoluto} \end{cases}$

# Extremos

- **Teorema.** Sea $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Si $f$ tiene un extremo relativo en $x_0 \in (a,b)$, entonces $f'(x_0) = 0$.
- El recíproco no es cierto.
- **Ejemplo.**

**1)** $f(x) = x^4 - 4x^3$ cumple

- $f'(0) = 0$,
- $x = 0$ no es extremo local.

*(Solución)*

# Punto crítico

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $a \in \operatorname{Dom}(f)$ es un **punto crítico** de $f$ si existe $f'(a) = 0$ o si no existe $f'(a)$.

- Un punto crítico puede ser o no extremo relativo.

- **Teorema.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y sea $a \in \operatorname{Dom}(f)$ un punto crítico de $f$. Se cumple:

  **1)** Si $f''(a) > 0$, entonces $f$ tiene un mínimo local en $a$.

  **2)** Si $f''(a) < 0$, entonces $f$ tiene un máximo local en $a$.

- **Ejemplo.** Estudia la monotonía y extremos de la siguiente función.

  **1)** $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$ en $[0, +\infty)$ *(Solución)*

# Soluciones

**Pág. 6**

**1)** $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{(3x-2)-(3a-2)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{3(x-a)}{x-a} = 3.$

**2)** $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} (x+a) = 2a.$

**3)** $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = [\frac{0}{0}]$. Resolvemos la indeterminación calculando los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1$. Al no coincidir los límites laterales, no existe $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ y por lo tanto $f$ no es derivable en $x=0$.

**4)** Como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$ no es un número real, deducimos que $f$ no es derivable en $x=0$.

**5)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$. Como este límite no existe, deducimos que $f$ no es derivable en $x=0$.

**Pág.** 9

**1)** $f'(x) = 2x - 6 - \operatorname{sen} x$.

**2)** $f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x$.

**3)** $f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x(x^2+1)-2x\cos x}{(x^2+1)^2}$.

**Pág.** 10

**1)** $f'(x) = \frac{4x^3+4}{x^4+4x+4}$.

**2)** $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(2x+5)\cos(2x+5)2$.

**Pág.** 13

Calculamos $f'(x) = 6x - \pi\cos(\pi x)$ y como $f'(1) = 6 - \pi\cos\pi = 6 + \pi$ y $f(1) = 3 - \operatorname{sen}\pi = 3$, la ecuación de la recta tangente es $y - 3 = (6+\pi)(x-1)$, es decir, $y = (6-\pi)x + \pi - 3$.

**Pág.** 13

Sabemos que $f(1) = f(g(3)) = 3^2 = 9$ y como $2x = (f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$, entonces $6 = 2\cdot 3 = f'(g(3))g'(3) = f'(1)\cdot 7 \;\Rightarrow\; f'(1) = \frac{6}{7}$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y - 9 = \frac{6}{7}(x-1)$, es decir, $7y - 6x = 57$.

**Pág.** 14

**1)** La inversa de $f(x) = e^x$ es $g(y) = \log y$. Entonces $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$.

**2)** La inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $g(y) = \operatorname{arcsen} y$. Entonces $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

**Pág.** 15

**1)**
- $f$ es continua en $x = 0$ por ser el valor absoluto de un polinomio.
- $f$ no es derivable en $x = 1$ (probado en Pág. 6, apartado (3)).

**2)**
- $f$ no es continua en $x = 1$ porque no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ al no coincidir los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3x = 3$.
- $f$ no es derivable en $x = 1$ porque no es continua en dicho punto.

**Pág.** 16

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'H}}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = [\frac{0}{0}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'H}}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$

**Pág.** 20

**1)** $f$ es derivable si $x \neq 0$ por ser composición de funciones derivables (exponencial y cociente de polinomio con denominador no nulo). Además,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} e^{1/x} & \text{si} \quad x < 0\,, \\ \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Por otro lado, $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ pero como $f$ tiene dos expresiones distintas alrededor de $x = 0$, tenemos que calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}-0}{x-0} = [\tfrac{0}{0}] = \lim_{x \to 0^-} \frac{1/x}{e^{-1/x}} = [\tfrac{-\infty}{+\infty}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'H}}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{-1/x^2}{1/x^2 e^{-1/x}} = \lim_{x \to 0^-} -e^{1/x} = 0\,,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}-0}{x-0} = [\tfrac{0}{0}] = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{e^{1/x}} = [\tfrac{-\infty}{+\infty}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'H}}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-1/x^2}{-1/x^2 e^{1/x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0\,.$$

Como los límites laterales coinciden, existe $f'(0) = 0$.

**2)** $f$ es derivable si $x \neq 0$ por ser producto y composición de funciones derivables (polinomio, coseno y un cociente de polinomios con denominador no nulo). Además, $f'(x) = 2x\cos(\frac{1}{x}) + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$.

Por otro lado, $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2\cos(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} x\cos(\frac{1}{x}) = 0$ por el criterio del sándwich ($\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ y $\left|\cos(\frac{1}{x})\right| \leq 1$). Concluimos que $f$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

**Pág.** 22

- *Existencia de solución.* Definimos $f(x) = x^3 + x - 1$, que es continua en el intervalo $[0,1]$ y además cumple $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$. Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)$ con $f(c) = 0$, es decir, $c^3 + c - 1 = 0$.
- *Unicidad de solución.* Razonamos por reducción al absurdo. Suponemos que existen dos soluciones distintas: $c$ y $d$. Es decir, $f(c) = f(d) = 0$ con $c \neq d$ (por ejemplo, $c < d$). Como $f$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[c,d]$ y derivable en $(c,d)$. Además, como $f(c) = f(d)$, el teorema de Rolle indica que existe $e \in (c,d)$ con $f'(e) = 0$. Pero esto no es posible ya que $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Por lo tanto, la solución es única.

**Pág.** 24

**1)** $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$.

**2)** $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x - 4 \;\Rightarrow\; f'''(x) = 6$.

**Pág.** 28

**1)** Calculamos $f(x) = \log x \Rightarrow f(1) = \log 1 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$ y $f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$. Entonces:

$$P_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 .$$

**2)** Utilizaremos la función $f(x) = e^x$ para aproximar el valor $f(1) = e$ utilizando un polinomio de Taylor centrado en $x = 0$ y calculamos y acotamos el término del error.

Como $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el término del error es

$$R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,, \qquad \text{con } \xi \text{ entre } 0 \text{ y } x\,.$$

Evaluamos en el punto $x = 1$ (para aproximar $e$ y no $e^x$) y acotamos:

$$|R_{n,0}(1)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}1^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\right| \le \left|\frac{e}{(n+1)!}\right| \le \left|\frac{3}{(n+1)!}\right| = \frac{3}{(n+1)!}\,.$$

Queremos averiguar el valor $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{(n+1)!} \le 10^{-2} \;\Leftrightarrow\; 300 < (n+1)!$. Probamos con distintos valores de $n$:

$$\begin{array}{ll} n=1 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 2! = 2\,, & \quad n=4 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 5! = 120\,,\\ n=2 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 3! = 6\,, & \quad n=5 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 6! = 720\,.\\ n=3 \;\Rightarrow\; (n+1)! = 4! = 24\,, & \end{array}$$

Por lo tanto, el error cometido al aproximar $e$ con $P_{5,0}(1)$ es menor que $10^{-2}$ siendo $P_{5,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$ y $P_{5,0}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$.

**3)** Calculamos $f(x) = \cos(2x) \Rightarrow f(0) = 1$, $f'(x) = -2\,\mathrm{sen}(2x) \Rightarrow f'(0) = 0$, $f''(x) = -4\cos(2x) \Rightarrow f''(0) = -4$, $f'''(x) = 8\,\mathrm{sen}(2x) \Rightarrow f'''(0) = 0$. Entonces:

$$P_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - 2x^2$$

y $\cos 1 \approx P_{3,0}(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Además, como $f^{(iv)}(x)) = 16\cos(2x)$, entonces acotamos el error (para cierto $c \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\left|R_{3,0}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{f^{(iv)}(c)}{4!}\frac{1}{2^4}\right| = \frac{2^4|\cos(2c)|}{3 \cdot 2^3}\frac{1}{2^4} \leq \frac{1}{24}\,.$$

**Pág. 30**

**1)** Como $P_{3,0}(x, f_1) \cdot P_{3,0}(x, f_2) = (1 - x^2)(1 - \frac{x^2}{2}) = 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{2}$, entonces $P_{3,0}(x, g) = 1 - \frac{3x^2}{2}$.

**2)** $P_{6,0}(x, h) = P_{3,0}(x^2, f_2) = 1 - \frac{x^4}{2}$.

**Pág. 32**

**1)** $f$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ ya que si $x < y$, entonces $f(x) = x-7 < y-7 = f(y)$.

**Pág.** 33

**1)** Como $f$ es derivable en $\mathbb{R}$, calculamos $f'(x) = -e^{-x} < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $f$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

**2)** Como $f$ es derivable en $\mathbb{R}$, calculamos $f'(x) = 2x$:

- Si $x > 0$, entonces $f'(x) = 2x > 0$. Por lo tanto $f$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.
- Si $x < 0$, entonces $f'(x) = 2x < 0$. Por lo tanto $f$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$.

**Pág.** 34

**1)** Cierto ya que $f(0) = 0 \leq x^2 = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**Pág.** 35

**1)** Cierto ya que $f(0) = 0 \leq x^2 = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

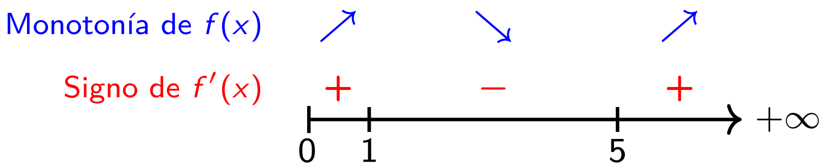
**Pág.** 37

**1)** Cierto porque $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ y entonces $f'(0) = 0$. Además, $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 3$ y $f'(x) \leq 0$ si $x \leq 3$; entonces $f$ es decreciente en $(-\infty, 3)$ y creciente en $(3, +\infty)$ y concluimos que $x = 0$ no es extremo local.

## Pág. 38

**1)** Como $f$ es un polinomio, está definida en $[0, +\infty)$ y es infinitas veces derivable.

- Calculamos los puntos críticos: Como $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$, entonces $f'(x) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0\,, \\ x = 1\,, \\ x = 5 \end{cases}$
- Estudiamos la monotonía: Como $f'(x)$ es continua, solo puede cambiar de signo en los puntos críticos.




  Deducimos que $f$ es creciente en $(0,1) \cap (5, +\infty)$ y decreciente en $(1,5)$.
- Extremos locales: $f$ tiene mínimos locales en $x = 0$ y $x = 5$ y un máximo local en $x = 1$.
- Extremos absolutos.
  - Candidatos a mínimo absoluto: $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow & f(0) = 0\,, \\ x = 5 & \Rightarrow & f(5) = -25\,. \end{cases}$ Como $f(5) < f(0)$, el mínimo absoluto se alcanza en $x = 5$.
  - Candidatos a máximo absoluto: $\begin{cases} x = 1 & \Rightarrow & f(1) = 7\,, \\ x \to +\infty & \Rightarrow & \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,. \end{cases}$

    Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $f$ no tiene máximo absoluto.

# Tema 9. Integración

Grado en Ingeniería Ambiental

Curso 2023 – 2024

Universidad Rey Juan Carlos

# Primitivas

# Primitivas

- Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$. Decimos que $F:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una **primitiva** de $f$ si $F$ es derivable en $(a,b)$ y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in(a,b)$.

- **Ejemplo.** Calcula una primitiva de las siguientes funciones.

  **1)** $f(x)=e^x$ **2)** $g(x)=2x$ **3)** $h(x)=\cos x$

  *(Solución)*

- La primitiva de una función no es única.

- Denotamos por $\displaystyle\int f(x)\,dx$ el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C\,.$$

# Primitivas

- Toda función continua tiene primitiva, aunque no siempre se puede calcular explícitamente.

- **Ejemplo.**

  **1)** $f(x) = e^{x^2}$ no tiene una primitiva que se pueda expresar como combinación de funciones elementales.

- La variable de integración se puede cambiar por cualquier otro símbolo:

$$\int f(x)\,dx = \int f(y)\,dy = \int f(t)\,dt = \int f(\sigma)\,d\sigma\,.$$

# Integrales inmediatas

# Integrales inmediatas

| Función | Primitiva |
|---|---|
| $f(x) = x^n$ | $\int f(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\int f(x)\,dx = \log\lvert x\rvert + C$ |
| $f(x) = e^x$ | $\int f(x)\,dx = e^x + C$ |
| $f(x) = \operatorname{sen} x$ | $\int f(x)\,dx = -\cos x + C$ |
| $f(x) = \cos x$ | $\int f(x)\,dx = \operatorname{sen} x + C$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\int f(x)\,dx = \tan x + C$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ | $\int f(x)\,dx = \arctan x + C$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\int f(x)\,dx = \operatorname{arcsen} x + C = -\arccos x + C$ |

# Integrales inmediatas

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $$\int e^x \, dx$$

**2)** $$\int x^5 \, dx$$

**3)** $$\int \frac{1}{x} \, dx$$

**4)** $$\int \frac{2x}{x^2+7} \, dx$$

*(Solución)*

# Integrales inmediatas

| Función | Primitiva |
|---|---|
| $f(x) = u'(x)(u(x))^n$ | $\int f(x)\, dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$ |
| $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ | $\int f(x)\, dx = \log\lvert u(x)\rvert + C$ |
| $f(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$ | $\int f(x)\, dx = e^{u(x)} + C$ |
| $f(x) = u'(x)\,\mathrm{sen}(u(x))$ | $\int f(x)\, dx = -\cos(u(x)) + C$ |
| $f(x) = u'(x)\cos(u(x))$ | $\int f(x)\, dx = \mathrm{sen}(u(x)) + C$ |
| $f(x) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$ | $\int f(x)\, dx = \tan(u(x)) + C$ |
| $f(x) = \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ | $\int f(x)\, dx = \arctan(u(x)) + C$ |
| $f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$ | $\int f(x)\, dx = \mathrm{arcsen}(u(x)) + C = -\arccos(u(x)) + C$ |

## Integrales inmediatas

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $\displaystyle\int 3e^{3x}\,dx$

**2)** $\displaystyle\int (x-3)^5\,dx$

**3)** $\displaystyle\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx$

*(Solución)*

# Propiedades

- **Proposición.**

  Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces,

**1)** $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

**2)** $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

## Cálculo de primitivas

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $\displaystyle\int (4x^2 - 1)\, x\, dx$

**2)** $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$

**3)** $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^3 + x - 2}{3x}\, dx$

**4)** $\displaystyle\int \frac{2}{4 + 5x^2}\, dx$

**5)** $\displaystyle\int (e^{3x} - e^x)\, dx$

**6)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3 - 4x^2}}\, dx$

**7)** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

**8)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}}\, dx$

**9)** $\displaystyle\int \tan x\, dx$

**10)** $\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$

*(Solución)*

# Métodos de integración

# Métodos de integración

## Cambio de variable

# Cambio de variable

- Se deduce de la regla de la cadena. Si $F$ es una primitiva de $f$ se cumple:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx = F(x) + C = F(g(t)) + C = \int (F\circ g)'(t)\,dt \\ = \int F'(g(t))g'(t)\,dt = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

- Una vez resuelta la integral hay que **deshacer** el cambio de variable.

# Cambio de variable

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x}\, dx$

**2)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$

**3)** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x + 5}\, dx$

**4)** $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\, dx$

**5)** $\displaystyle\int x^3\sqrt{2+7x^2}\, dx$

*(Solución)*

# Métodos de integración

## Integración por partes

# Integración por partes

- Se deduce de la fórmula de la derivada de un producto:

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))' \, dx = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x) \, dx \, .$$

- Usualmente escribimos $\displaystyle\int u \, dv = u \, v - \int v \, du.$

- En general, es útil para integrar productos de funciones del tipo:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Derivar} \\ \downarrow \\ \text{Integrar} \end{array} \right]$$

**A**rco
**L**ogaritmos
**P**olinomios
**E**xponenciales
**S**enos y cosenos

## Integración por partes

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $\displaystyle\int x\, e^x\, dx$

**2)** $\displaystyle\int \log x\, dx$

**3)** $\displaystyle\int x \cos x\, dx$

**4)** $\displaystyle\int x^3 \cos(x^2)\, dx$

**5)** $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$

*(Solución)*

# Integración por partes

- **Ejemplo.** Integrales cíclicas

**1)** $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \, e^x \, dx$

**2)** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

*(Solución)*

- Otra manera de resolver $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$: usando la trigonometría

# Métodos de integración

## Descomposición en fracciones simples

# Descomposición en fracciones simples

- $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios

1. Si grado$(P(x)) \geq$ grado$(Q(x))$, se dividen los polinomios utilizando el algoritmo de la división.

2. Si grado$(P(x)) <$ grado$(Q(x))$, se comprueba si la primitiva es un logaritmo y si no es así, se factoriza el denominador.

3. Descomposición en fracciones simples. A cada uno de los factores del denominador le asignamos una fracción.

# Descomposición en fracciones simples

| Factor | Fracción | Integral |
|---|---|---|
| $(x-a)$ | $\dfrac{A}{x-a}$ | Logaritmo |
| $(x-b)^n$ | $\dfrac{B_1}{x-b}+\dfrac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\dfrac{B_n}{(x-b)^n}$ | Logaritmo + Potencias |
| $c\,x^2+d\,x+e$ | $\dfrac{M\,x+N}{c\,x^2+d\,x+e}$ | Logaritmo + Arcotangente |

# Descomposición en fracciones simples

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $$\int \frac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,dx$$

**2)** $$\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1}\,dx$$

**3)** $$\int \frac{x^4}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}\,dx$$

**4)** $$\int \frac{x+2}{x^2 + x - 2}\,dx$$

**5)** $$\int \frac{1}{x(1 + 2x^2)}\,dx$$

**6)** $$\int \frac{1}{(x^2 - 1)(x - 1)}\,dx$$

*(Solución)*

# Métodos de integración

## Integrales trigonométricas

# Integrales trigonométricas

- Seno de la suma y diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

- Coseno de la suma y diferencia de ángulos

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

- Seno y coseno del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

# Integrales trigonométricas

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\cos x\, dx$

**2)** $\displaystyle\int \cos x \cos(3x) dx$

**3)** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$

**4)** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x\, dx$

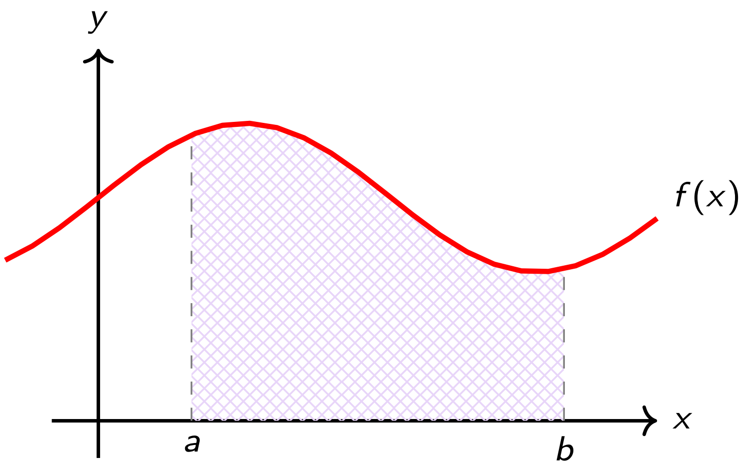
**5)** $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx$

*(Solución)*

# Integral definida

# Integral definida

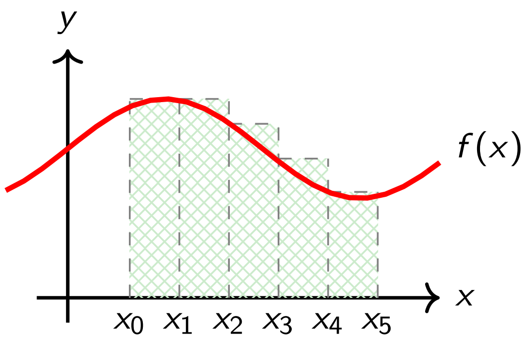
- Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vamos a calcular el área comprendida entre la gráfica de $f$ y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$.



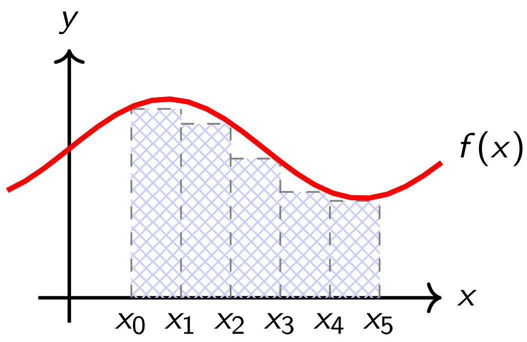
# Integral definida

- Para calcular el área, dividimos el intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos de extremos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,.$$




Aproximación del área por exceso




Aproximación del área por defecto

y calculamos el máximo y mínimo:

$$M_i = \max\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n\,,$$
$$m_i = \min\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

- Entonces, podemos aproximar el valor del área (por exceso y por defecto) calculando el área de los rectángulos:

$$\text{Área (por exceso)} = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1})\,,$$
$$\text{Área (por defecto)} = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1})\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ siendo $f(x) = C > 0$ constante.

# Integral definida

- **Regla de Barrow.** Si $F\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $\displaystyle\int_0^{\pi} -\operatorname{sen} x\,dx$ *(Solución)*

# Integral definida

- **Propiedades.** Sean $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces,

**1)** $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

**2)** $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

**3)** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ si $a < c < b$.

# Integral definida

- **Ejemplo.** Calcula:

**1)** $$\int_{-2}^{4} (x-1)(x+2)\,dx$$

**2)** $$\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$$

**3)** $$\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$$

**4)** $$\int_{0}^{2} f(x)\,dx \quad \text{con} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2-x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

*(Solución)*

# Teorema fundamental del cálculo

## Teorema fundamental del cálculo

- **Teorema.** Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es derivable para todo $x \in (a, b)$ y además,

$$F'(x) = f(x)\,.$$

- **Ejemplo.** Calcula la derivada de la siguiente función.

**1)** $F(x) = \int_1^x e^{t^2}\,dt$

*(Solución)*

# Teorema fundamental del cálculo

- **Teorema (general)** Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $g$ y $h$ son dos funciones derivables en $x$ y tales que $g(x), h(x) \in [a, b]$, entonces la función

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\, dt$$

es derivable para todo $x \in (a, b)$ y además,

$$F'(x) = f(g(x))\, g'(x) - f(h(x))\, h'(x)\,.$$

# Teorema fundamental del cálculo

- **Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

**1)** $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{3t^2 - 1}{\log t}\, dt$

**2)** $F(x) = \displaystyle\int_{-x^2}^{x+1} t^2 \cos(2t)\, dt$

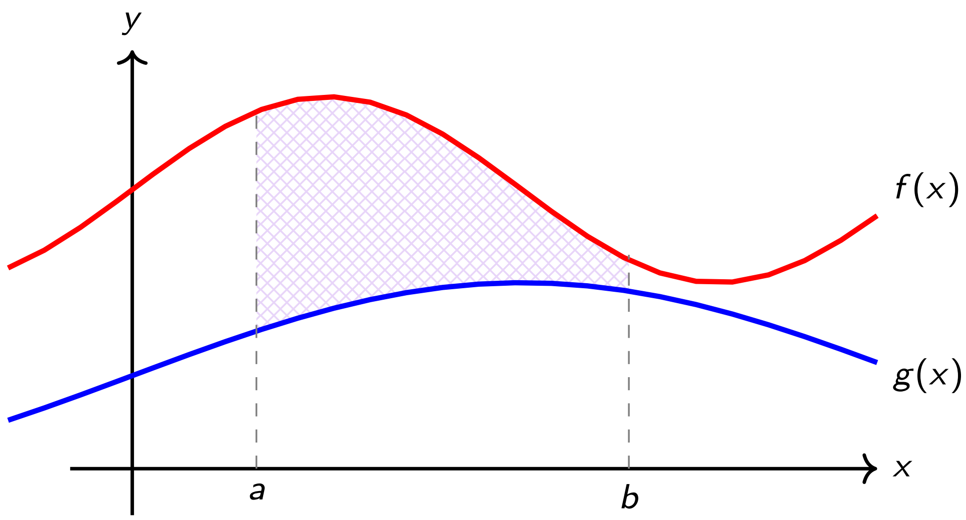
*(Solución)*

# Cálculo de áreas

# Cálculo de áreas

- El **área** encerrada entre las gráficas de dos funciones continuas $f, g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$\text{área} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx\,.$$



# Cálculo de áreas

- área $\neq \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \right|$.

- **Ejemplo.** Calcula:

  **1)** área encerrada entre la gráfica de

$$f(x) = x$$

$$g(x) = 0$$

  entre $x = -1$ y $x = 2$

*(Solución)*

# Cálculo de áreas

- **Ejemplo.** Calcula el área encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones.

**1)** $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2 - x$

**2)** $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$

**3)** $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

**4)** $y = e^x$, $y = 2$ y $x = 0$

*(Solución)*

# Soluciones

**Pág.** 3

**1)** $F(x) = e^x$.

**2)** $G(x) = x^2$.

**3)** $H(x) = \operatorname{sen} x$.

**Pág.** 7

**1)** $\int e^x \, dx = e^x + C$.

**2)** $\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + C$.

**3)** $\int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + C$.

**4)** $\int \frac{2x}{x^2+7} \, dx = \log(x^2 + 7) + C$.

**Pág.** 9

**1)** $\int 3e^{3x} \, dx = e^{3x} + C$.

**2)** $\int (x-3)^5 \, dx = \frac{(x-3)^6}{6} + C$.

**3)** $\displaystyle\int \frac{4x^3}{x^4+1} \, dx = \log |x^4 + 1| + C$.

## Pág. 11

**1)** $\int (4x^2-1)\,x\,dx = \frac{1}{8}\int 8x(4x^2-1)^2\,dx = \frac{(4x^2-1)^3}{3} + C.$

**2)** $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int (x\,x^{1/2})^{1/2}\,dx = \int x^{3/4}\,dx = \frac{x^{3/4+1}}{3/4+1} + C = \frac{4}{7}x^{7/4} + C.$

**3)** $\int \frac{x^4-3x^3+x-2}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx - \int x^2\,dx + \frac{1}{3}\int dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\log|x| + C.$

**4)** $\int \frac{2}{4+5x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{1+(\frac{\sqrt{5}}{2}x)^2}\,dx = \frac{2}{4}\frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}/2}{1+(\frac{\sqrt{5}}{2}x)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2}x) + C.$

**5)** $\int (e^{3x}-e^x)\,dx = \int e^{3x}\,dx - \int e^x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} - e^x + C.$

**6)** $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{2}{\sqrt{2}}x) + C.$

**7)** $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \log|\operatorname{sen} x| + C.$

**8)** $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int x(1-x^2)^{-1/2}\,dx =$

$= \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \operatorname{arcsen} x - \sqrt{x} + C.$

## Pág. 15

**1)** $$\int \frac{1}{x\log x}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CV: } \log x = t \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}\,dx = dt}}{=} \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Deshacer el CV}}}{=} \log|\log|x|| + C.$$

**2)** $$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CV: } \sqrt{x} = t \;\Rightarrow\; \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt}}{=} \int \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\arctan(t) + C \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Deshacer el CV}}}{=} 2\arctan(\sqrt{x}) + C.$$

**3)** $$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 5}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CV: } \operatorname{sen} x = t \;\Rightarrow\; \cos x\,dx = dt}}{=} \int \frac{1}{t^2+4t+5}\,dt = \int \frac{1}{1+(t+2)^2}\,dt = \arctan(t+2) + C \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Deshacer el CV}}}{=}$$
$$= \arctan(\operatorname{sen} x + 2) + C.$$

**4)** $$\int x\sqrt{1-x}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CV: } \sqrt{1-x} = t,\ 1-x = t^2 \;\Rightarrow\; -\,dx = 2t\,dt}}{=} -\int 2t(1-t^2)t\,dt = -2\int (t^2 - t^4)\,dt = -2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Deshacer el CV}}}{=}$$
$$= -2\left(\frac{(\sqrt{1-x})^3}{3} - \frac{(\sqrt{1-x})^5}{5}\right) + C.$$

**5)** $$\int x^3\sqrt{2+7x^2}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CV: } \sqrt{2+7x^2} = t,\ 2+7x^2 = t^2 \;\Rightarrow\; 14x\,dx = 2t\,dt}}{=} \int \frac{t^2-2}{7}\,t\,\frac{t}{7}\,dt = \frac{1}{49}\int (t^4 - 2t^2)\,dt = \frac{1}{49}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right) + C \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Deshacer el CV}}}{=}$$
$$= \frac{1}{49}\left(\frac{1}{5}(2+7x^2)^{5/2} - \frac{2}{3}(2+7x^2)^{3/2}\right) + C.$$

**Pág.** 18

**1)** $\displaystyle\int x\,e^x\,dx \underset{\uparrow}{=} x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C.$

$$\begin{array}{lcl} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=e^x\,dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int e^x\,dx=e^x \end{array}$$

**2)** $\displaystyle\int \log x\,dx \underset{\uparrow}{=} x\log x - \int x\,\tfrac{1}{x}\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C.$

$$\begin{array}{lcl} u=\log x & \Rightarrow & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int dx=x \end{array}$$

**3)** $\displaystyle\int x\cos x\,dx \underset{\uparrow}{=} x\,\mathrm{sen}\,x - \int \mathrm{sen}\,x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C.$

$$\begin{array}{lcl} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\cos x\,dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int \cos x\,dx=\mathrm{sen}\,x \end{array}$$

**4)** $\displaystyle\int x^3\cos(x^2)\,dx \underset{\uparrow}{=} \tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{sen}(x^2) - \int 2x\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{sen}(x^2) + \tfrac{1}{2}\cos(x^2) + C.$

$$\begin{array}{lcl} u=x^2 & \Rightarrow & du=2x\,dx \\ dv=x\cos(x^2)\,dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int x\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(x^2) \end{array}$$

**5)** $\displaystyle\int \mathrm{arcsen}(\tfrac{x}{2})\,dx \underset{\uparrow}{=} x\,\mathrm{arcsen}(\tfrac{x}{2}) - \int \tfrac{1}{2}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2/4}}\,dx = x\,\mathrm{arcsen}(\tfrac{x}{2}) - \tfrac{1}{2}\int x(1-\tfrac{x^2}{4})^{-1/2}\,dx =$

$$\begin{array}{lcl} u=\mathrm{arcsen}(\frac{x}{2}) & \Rightarrow & du=\frac{1/2}{\sqrt{1-x^2/4}}\,dx \\ dv=dx & \Rightarrow & v=\int dv=\int dx=x \end{array}$$

$= x\,\mathrm{arcsen}(\tfrac{x}{2}) + 2\sqrt{1-x^2/4} + C.$

**Pág.** 19

**1)** $$\int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ u=\operatorname{sen} x \ \Rightarrow\ du=\cos x\, dx \\ dv=e^x\, dx \ \Rightarrow\ v=\int dv=\int e^x\, dx=e^x}}{=} \operatorname{sen} x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ u=\cos x \ \Rightarrow\ du=-\operatorname{sen} x\, dx \\ dv=e^x\, dx \ \Rightarrow\ v=\int dv=\int e^x\, dx=e^x}}{=} \operatorname{sen} x\, e^x - (\cos x\, e^x - \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx) =$$

$$= (\operatorname{sen} x - \cos x)\, e^x + \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)\, e^x + C.$$

**2)** $$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ u=\operatorname{sen} x \ \Rightarrow\ du=\cos x\, dx \\ dv=\operatorname{sen} x\, dx \ \Rightarrow\ v=\int dv=\int \operatorname{sen} x\, dx=-\cos x}}{=} -\operatorname{sen} x \cos x - \int -\cos x \cos x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + C.$$

**Pág.** 23

**1)** $\int \frac{1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \int \frac{1}{x\,(x-2)(x-3)}\,dx \underset{\uparrow}{=}$

$$\frac{1}{x\,(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow 1=6A \Rightarrow A={}^1\!/_6 \\ x=2 \Rightarrow 1=-2B \Rightarrow B=-{}^1\!/_2 \\ x=3 \Rightarrow 1=3C \Rightarrow C={}^1\!/_3 \end{cases}$$

$$= \int \Big[\frac{{}^1\!/_6}{x} + \frac{-{}^1\!/_2}{x-2} + \frac{{}^1\!/_3}{x-3}\Big]\,dx = \tfrac{1}{6}\log|x| - \tfrac{1}{2}\log|x-2| + \tfrac{1}{3}\log|x-3| + C.$$

**2)** $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\Big) =$

$= \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\big) + C$ porque

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{{}^3\!/_4+(x+{}^1\!/_2)^2}\,dx = \frac{1}{{}^3\!/_4}\int \frac{1}{1+\frac{(x+{}^1\!/_2)^2}{{}^3\!/_4}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\big(\frac{x+{}^1\!/_2}{\sqrt{3}/2}\big)^2}\,dx =$$

$$x^2+x+1=a+(bx+c)^2=a+b^2x^2+2bc\,x+c^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Coef. } x^2\text{:} & 1=b^2 \Rightarrow b=1\,, \\ \text{Coef. } x\text{:} & 1=2bc \Rightarrow c={}^1\!/_2\,, \\ \text{T. indep.:} & 1=a+c^2 \Rightarrow a={}^3\!/_4\,. \end{cases}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+({}^{2x}\!/_{\sqrt{3}}+{}^1\!/_{\sqrt{3}})^2}\,dx = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{{}^2\!/_{\sqrt{3}}}{1+({}^{2x}\!/_{\sqrt{3}}+{}^1\!/_{\sqrt{3}})^2}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big).$$

**3)** $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{División}}}{=} \int [x+2+\frac{6x^2+7x+6}{x^3-2x^2-2x+3}]\,dx = \frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{6x^2+7x+6}{(x-3)(x^2+x+1)}\,dx \underset{\uparrow}{=}$

$$\frac{6x^2+7x+6}{(x-3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

$$6x^2+7x+6=A(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-3) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \;\Rightarrow\; 81=13A \;\Rightarrow\; A={}^{81}/_{13} \\ x=0 \;\Rightarrow\; 6=A-3N \;\Rightarrow\; N={}^{1}/_{13} \\ x=-1 \;\Rightarrow\; 5=A+4M-4N \;\Rightarrow\; M=-\,{}^{3}/_{13} \end{cases}$$

$$= \frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{13}\int[\frac{81}{x-3}+\frac{-3x+1}{x^2+x+1}]\,dx = \frac{x^2}{2}+2x+\frac{81}{13}\log|x-3|+\frac{1}{13}\int\frac{-3x+1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+2x+\frac{81}{13}\log|x-3|-\frac{3}{2}\frac{1}{13}[\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+\int\frac{-{}^{2}/_{3}-1}{x^2+x+1}\,dx] =$$

$$= \frac{x^2}{2}+2x+\frac{81}{13}\log|x-3|-\frac{3}{26}\log|x^2+x+1|-\frac{3}{26}\int\frac{-{}^{5}/_{3}}{{}^{3}/_{4}+(x+{}^{1}/_{2})^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+2x+\frac{81}{13}\log|x-3|-\frac{3}{26}\log|x^2+x+1|+\frac{5}{26}\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+({}^{2x}/_{\sqrt{3}}+{}^{1}/_{\sqrt{3}})^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+2x+\frac{81}{13}\log|x-3|-\frac{3}{26}\log|x^2+x+1|+\frac{5}{13}\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{{}^{2}/_{\sqrt{3}}}{1+({}^{2x}/_{\sqrt{3}}+{}^{1}/_{\sqrt{3}})^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+2x+\frac{81}{13}\log|x-3|-\frac{3}{26}\log|x^2+x+1|+\frac{5}{13}\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+C.$$

**4)** $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^2+x-2}\,dx = \int\frac{x+2}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int\frac{1}{x-1}\,dx = \log|x-1|+C.$

**5)** $\int \frac{1}{x(1+2x^2)}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-2x}{1+2x^2}\right]\,dx = \log|x| - \frac{1}{2}\int \frac{4x}{1+2x^2}\,dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log|1+2x^2| + C.$

$$\frac{1}{x(1+2x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{1+2x^2}$$

$$1=A(1+2x^2)+(Mx+N)x \Rightarrow \begin{cases} \text{T. indep.:} \Rightarrow & 1=A & \Rightarrow A=1 \\ \text{Coef.}x\text{:} \Rightarrow & 0=N & \Rightarrow N=0 \\ \text{Coef.}x^2 \Rightarrow & 0=2A+M & \Rightarrow M=-2 \end{cases}$$

**6)** $\int \frac{1}{(x^2-1)(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int [\frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{1/4}{x+1}]\,dx =$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$1=A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow & 1=4C & \Rightarrow C=1/4 \\ x=1 \Rightarrow & 1=2B & \Rightarrow B=1/2 \\ x=0 \Rightarrow & 1=-A+B+C & \Rightarrow A=-1/4 \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\log|x+1| + C.$$

## Pág. 26

**1)** $\int \operatorname{sen}(2x)\cos x\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int(\operatorname{sen}(2x+x)+\operatorname{sen}(2x-x))\,dx = \frac{1}{6}\int 3\operatorname{sen}(3x)\,dx+\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx =$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a\\ \operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a\cos b-\operatorname{sen} b\cos a\end{array}\right\}\Rightarrow \operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen} a\cos b$$

$$= \frac{-1}{6}\cos(3x)+\frac{1}{2}\cos x + C.$$

**2)** $\int \cos x\cos(3x)dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int(\cos(x+3x)+\cos(x-3x))\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos(4x)+\cos(-2x))\,dx =$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(a+b)=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\\ \cos(a-b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\end{array}\right\}\Rightarrow \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$$

$$= \frac{1}{8}\int 4\cos(4x)\,dx - \frac{1}{4}\int -2\cos(-2x)\,dx = \frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(-2x) + C.$$

**3)** $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx = \int \operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)\cos^2 x\,dx = \int \operatorname{sen} x\cos^2 x\,dx - \int \operatorname{sen} x\cos^4 x\,dx =$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

**4)** $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^5 x\,dx = \int \operatorname{sen}^4 x\cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\,dx = \int \operatorname{sen}^4 x\cos x(1-2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^4 x)\,dx =$

$$= \int \operatorname{sen}^4 x\cos x\,dx - 2\int \operatorname{sen}^6 x\cos x\,dx + \int \operatorname{sen}^8 x\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{2\operatorname{sen}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{sen}^9 x}{9} + C.$$

**5)** $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C.$

**Pág.** 31

**1)** $\int_0^\pi -\operatorname{sen} x\, dx = [\cos x]_0^\pi = \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$

**Pág.** 33

**1)** $\int_{-2}^4 (x-1)(x+2)\, dx = \int_{-2}^4 (x^2+x-2)\, dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x]_{-2}^4 =$

$= (\frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} - 8) - (\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 4) = 18.$

**2)** $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_0^2 2\sqrt{1-(x/2)^2}\, dx \underset{\uparrow}{=} 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\, 2\cos t\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$

CV: $\frac{x}{2} = \operatorname{sen} t \Rightarrow \frac{1}{2}\, dx = \cos t\, dt$

$x=0 \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}(0/2) = 0$

$x=2 \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}(2/2) = \pi/2$

$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = 2[t + \frac{\operatorname{sen}^2(2t)}{2}]_0^{\pi/2} = 2(\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2\pi}{2}) = \pi.$

**3)** $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\, dx \underset{\uparrow}{=} [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x\, dx = -\pi\cos\pi + 0 + [\operatorname{sen} x]_0^\pi =$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow v = \int dv = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$

$= -(-\pi) + \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = \pi.$

**4)** $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 + [2x - \frac{x^2}{2}]_1^2 =$
$= (\frac{1}{3} - 0) + (4-2) - (2 - \frac{1}{2}) = \frac{5}{6}$.

**Pág.** 35

**1)** Utilizando el teorema fundamental del cálculo: $F'(x) = e^{x^2}$.

**Pág.** 37

**1)** Utilizando el teorema fundamental del cálculo: $F'(x) = \frac{3x^2-1}{\log x}$.

**2)** Utilizando el teorema fundamental del cálculo:
$F'(x) = (x+1)^2 \cos(2(x+1)) - (x^2)^2 \cos(-2x^2) \cdot (-2x) =$
$= (x+1)^2 \cos(2(x+1)) + 2x^5 \cos(-2x^2))$.

**Pág.** 40

**1)** área $= \int_{-1}^2 |f(x) - 0|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^2 x\,dx = [-\frac{x^2}{2}]_{-1}^0 + [\frac{x^2}{2}]_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$.

## Pág. 41

**1)** **1º** Puntos de corte: $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; x^2 = x - 2 \;\Leftrightarrow\; x = \begin{cases} -2\,, \\ 1\,. \end{cases}$

**2º** Como $f$ y $g$ son continuas y $f(0) = 0$ y $g(0) = 2$, deducimos que $f(x) \leq g(x)$ si $x \in (-2, 1)$.

**3º** área$= \int_{-2}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx =$
$= [2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{1} = (2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (-4 - 2 + \frac{8}{3}) = \frac{9}{2} > 0.$

**2)** **1º** Puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; x^2 = \sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; x^4 = x \;\Leftrightarrow\; x(x^3 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \begin{cases} 0\,, \\ 1\,. \end{cases}$$

**2º** Como $f$ y $g$ son continuas y $f(1/4) = \frac{1}{16}$ y $g(1/4) = \frac{1}{2}$, deducimos que $f(x) \leq g(x)$ si $x \in (0, 1)$.

**3º** área $= \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{0}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)\, dx =$
$= [\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}]_{0}^{1} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) - 0 = \frac{1}{3} > 0.$

**3)** **1º** Puntos de corte: $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} x = \cos x \;\Leftrightarrow\; x = \pi/4$, si $x \in (0, \pi/2)$.

**2º** Hemos de estudiar lo que ocurre en dos intervalos: $(0, \pi/4)$ y $(\pi/4, \pi/2)$.

- Como $f$ y $g$ son continuas y $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$, deducimos que $f(x) \leq g(x)$ si $x \in (0, \pi/4)$.
- Como $f$ y $g$ son continuas y $f(\pi/2) = 1$ y $g(\pi/2) = 0$, deducimos que $f(x) \leq g(x)$ si $x \in (\pi/4, \pi/2)$.

**3º** área $= \int_0^{\pi/2} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^{\pi/4} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (f(x) - g(x))\, dx =$

$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx =$

$= [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\pi/4}^{\pi/2} =$

$= (\operatorname{sen} \pi/4 + \cos \pi/4) - (\operatorname{sen} 0 + \cos 0) + (-\cos \pi/2 - \operatorname{sen} \pi/2) - (-\cos \pi/4 - \operatorname{sen} \pi/4) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2(\sqrt{2} - 1) > 0.$

**4)** **1º** Puntos de corte: $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \log 2$.

**2º** Como las dos funciones son continuas y $e^0 = 1 < 2$, deducimos que $e^x \leq 2$ si $x \in (0, \log 2)$.

**3º** área $= \int_0^{\log 2} |2 - e^x|\, dx = [2x - e^x]_0^{\log 2} = 2 \log 2 - 2 - (0 - 1) = 2 \log 2 - 1 > 0.$