## Matema´ticas I Presentaciones

Grado en Ingenier´ıa de Tecnolog´ıas Industriales

Marta Latorre Balado y Javier Mart´ınez Mart´ınez Material docente en abierto de la Universidad Rey Juan Carlos

BURJ Digital https://burjcdigital.urjc.es/

6 de septiembre de 2023

©2023 Marta Latorre Balado y Javier Mart´ınez Mart´ınez Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Atribucio´n-CompartirIgual 4.0 Internacional” de Creative Commons, disponible en

https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es



– 2 –

´Indice

1. [Ca´lculo en una variable](#_bookmark0) 5

[Tema 1. Nu´meros reales y complejos](#_bookmark1) 7

[Temas 2 y 3. L´ımites de funciones reales. Continuidad](#_bookmark2) 38

[Temas 4 y 5. Derivacio´n de funciones. Aplicaciones de la derivada](#_bookmark3) 102

[Tema 6. Ca´lculo integral](#_bookmark4) 150

1. [A´lgebra lineal](#_bookmark5) 205

[Tema 7. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales](#_bookmark6) 207

[Tema 8. Espacios vectoriales](#_bookmark7) 259

[Tema 9. Aplicaciones lineales](#_bookmark8) 314

[Tema 10. Diagonalizacio´n. Autovalores y autovectores](#_bookmark9) 349

[Tema 11. Espacios normados](#_bookmark10) 382

– 3 –

– 4 –

## Parte I. Ca´lculo en una variable

– 5 –

– 6 –

# Tema 1. Números reales y complejos

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales Curso 2023 – 2024

# Números complejos

2 / 31

### Números complejos

* Un número complejo es una expresión de la forma

*z* = *a* + *b* i con *a, b* ∈ R *,*

siendo

* + *a* la parte real de *z* (Re (*z* ) = *a*),
  + *b* la parte imaginaria de *z* (Im (*z* ) = *b*),
  + i la unidad imaginaria: √−1 = i.
* El conjunto de todos los números complejos se denota por C.

3 / 31

### Números complejos

Ejemplo. Calcula la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos.

•

1. *z* = 2 + 3 i
2. *z* = *π* − 2 i

*(Solución)*

1. *z* = −i
2. *z* = 2

* En particular, si *x* ∈ R entonces, *x* ∈ C.

Dos números complejos son iguales si tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

•

4 / 31

### Operaciones con números complejos

* Sean *z* = *a* + *b* i y *w* = *c* + *d* i ∈ C. Se define
  + la suma: *z* + *w* = (*a* + *c*) + (*b* + *d* ) i *,*
  + el producto: *z w* = (*ac* − *bd* ) + (*ad* + *cb*) i *.*
* En particular, i2 = i i = −1, es decir, √−1 = i *.*
* Ejemplo. Realiza las siguientes operaciones.

1. (1 + i) + (3 − 5 i)
2. (1 + i) (3 − 5 i)

*(Solución)*

5 / 31

### Conjugado de *z* ∈ C

* Sea *z* = *a* + *b* i ∈ C. Se define el conjugado de *z* como

*~~z~~* = *a* − *b* i *.*

* En particular, *z ~~z~~* = *a*2 + *b*2.
* Ejemplo. Realiza las siguientes operaciones.

1. 1 + i + 3 − 5 i
2. 1 + 2 i

2 − 3 i

*(Solución)*

6 / 31

# Módulo y argumento

7 / 31

### Representación en el plano de *z* ∈ C

* Si *z* = *a* + *b* i ∈ C con *a, b* ∈ R, podemos identificar

*a* + *b* i ≃ (*a, b*) ⇒ C ≃ R2 *.*

* Podemos representar *z* ∈ C en el plano complejo.

Im (*z*)



*b*

*z* = *a* + *b* i

*a*

Re (*z*)

8 / 31

### Representación en el plano de *z* ∈ C

* Ejemplo. Representa en el plano complejo los siguientes números.

1) *z* = 1 + 2 i 2) *z* = −i 3) *z* = −2 + 2 i 4) *z* = 2

*(Solución)*

Im (*z*)



2

1

*−*2

*−*1

1

2

*−*1

*−*2

Re (*z*)

9 / 31

### Módulo y argumento de *z* ∈ C

* Sea *z* = *a* + *b* i ∈ C. Se define:
  + el módulo de *z* : |*z* | = √*z ~~z~~* = √*a*2 + *b*2 ≥ 0;
  + el argumento de *z* (arg(*z* )) es el ángulo que forma el semieje positivo real con el vector que une el origen de coordenadas y el punto *z* ∈ C.
* Si arg(*z* ) ∈ (−*π, π*] se llama argumento principal: Arg (*z* ).

Im (*z*)



*b*

*z* = *a* +

|*z*|

arg(*z*)

*a*

*b* i

Re (*z*)

10 / 31

### Cálculo del argumento de *z* = *a* + *b* i ∈ C

* Si *a* = 0

Im (*z*)



*b* i

*b* i

Re (*z*)

*π*

Arg (*z* ) =  2



*π*

si *b >* 0 *,*

 − 2 si *b <* 0 *.*

11 / 31

### Cálculo del argumento de *z* = *a* + *b* i ∈ C

* Si *b* = 0

Im (*z*)



*a*

*a*

Re (*z*)

Arg (*z* ) = 0 si *a >* 0 *,*

*π* si *a <* 0 *.*

f

12 / 31

### Cálculo del argumento de *z* = *a* + *b* i ∈ C

* Si *a >* 0 y *b >* 0

Im (*z*)



*b*

*z* = *a* +

= Arg (*z*)

*a*

*α*

*b* i

Re (*z*)

*α* = arctan 3 |*b*| 4

Primer cuadrante: Arg (*z* ) = *α*

|*a*|

13 / 31

### Cálculo del argumento de *z* = *a* + *b* i ∈ C

* Si *a <* 0 y *b >* 0

Im (*z*)



*z* = *a* + *b* i

*b*

Arg (

*a*

*α*

*z*)

Re (*z*)

*α* = arctan |*b*|

Segundo cuadrante: Arg (*z* ) = *π* − *α*

|*a*|

14 / 31

### Cálculo del argumento de *z* = *a* + *b* i ∈ C

* Si *a <* 0 y *b <* 0

Im (*z*)



*a*

Arg (*z*)

*z* = *a* + *b* i

*b*

*α*

Re (*z*)

*α* = arctan |*b*|

Tercer cuadrante: Arg (*z* ) =

|*a*|

*α* − *π*

15 / 31

### Cálculo del argumento de *z* = *a* + *b* i ∈ C

* Si *a >* 0 y *b <* 0

Im (*z*)



*a*

(*z*)

*b*

*z* = *a* +

Arg

*α*

Re (*z*)

*α* = arctan |*b*|

Cuarto cuadrante: Arg (*z* ) =

|*a*|

−*α*

*b* i

16 / 31

### Módulo y argumento de *z* ∈ C

Ejemplo. Calcula el módulo y argumento de los siguientes números com- plejos.

•

1. *z* = 5 + 5 i
2. *z* = 2√3 − 2 i
3. *z* = 1 − √3 i
4. *z* = −2 − 2 i

*(Solución)*

17 / 31

### Formas de expresar un número complejo

* Sea *z* ∈ C. Se puede expresar en f forma binómica: *z* = *a* + *b* i

forma polar: *z* = |*z* |Arg (*z*)

* Para pasar de forma polar a forma binómica se utiliza la forma trigonométrica:

*z* = |*z* | (cos (Arg (*z* )) + i sen (Arg (*z* ))) *.*

* Ejemplo. Expresa en forma binómica los siguientes *z* ∈ C.

1. *z* = 2√2− *π*

4

1. *z* = 3 3*π*

4

*(Solución)*

18 / 31

1. *z* = 1 *π*
2. *z* = 70

2

### Operaciones en forma polar

* + Si *z*1 = *r*1*α*1 y *z*2 = *r*2*α*2 ∈ C, se puede calcular:
    - el producto: *z*1 *z*2 = (*r*1 *r*2)*α*1 +*α*2
    - el cociente: *z*2

*z*1

= ( *r*1 )

*α*1 −*α*2

si *r*2 ̸= 0

* + Ejemplo. Si *z*1 = 1*π* y *z*2 = 2 *π* , calcula:

*r*2

2

1) *z*1 *z*2 2) *z*1

*z*

2

3) *z*1 + *z*2

*(Solución)*

19 / 31

### Fórmula de DeMoivre

* Si *z* ∈ C con |*z* | = *r* y Arg (*z* ) = *α*, entonces

*zn* = *rn* = *rn* (cos(*n α*) + i sen(*n α*)) Fórmula de DeMoivre

*nα*

* Ejemplo. Comprueba que si *z* = 2 *π* , entonces *z* 3 ∈ R.

3

*(Solución)*

20 / 31

# Teorema fundamental del álgebra

21 / 31

### Teorema fundamental del álgebra

Teorema. Si *p*(*x* ) es un polinomio (con coeficientes reales o complejos) de grado *n* N, entonces *p*(*x* ) tiene *n* raíces complejas (no necesariamente distintas).

∈

•

* Ejemplos. Calcula las raíces de los siguientes polinomios.
  1. *x* 2 − 1
  2. *x* 2 − 4*x* + 4
  3. *x* 2 + 1

*(Solución)*

22 / 31

# Cálculo de raíces *n*-ésimas

23 / 31

### Cálculo de raíces *n*-ésimas

Sea *z* C con *z* = 0 y sea *n* N. Decimos que *w* C es una raíz

* ∈ ̸ ∈ ∈

*n*-ésima de *z* si *wn* = *z* .

* *z* ∈ C tiene *n* raíces *n*-ésimas.

Para *k* = 0*,* 1*,* 2*, . . . , n* 1, las raíces *n*-ésimas de *z* C, con *z* = *r* y Arg (*z* ) = *α*, son

* − ∈ | |

|*wk* | = √*n r* y arg(*wk* ) = *α* + 2*k π .*

*n*

* Ejemplo. Calcula las raíces cúbicas de *z* = −2 i.

*(Solución)*

24 / 31

# Exponencial compleja

25 / 31

### Exponencial compleja

* Sea *z* = *a* + *b* i ∈ C. Se define la exponencial compleja

*ez* = *ea*+*b* i = *ea* (cos(*b*) + i sen(*b*)) *.*

* Si *z* ∈ C con |*z* | = *r* y Arg (*z* ) = *α*, se puede expresar en forma exponencial como *z* = *r eα* i.
* Ejemplo. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos.

2

1) *e*

4

*π* i

− *π* i

3) *e*

1+i *π*

2) *e*

2*π*i

4) *eπ*i *e* 3

*(Solución)*

26 / 31

# Soluciones

27 / 31

Pág. 4

1. Re (*z*) = 2, Im (*z*) = 3.
2. Re (*z*) = *π*, Im (*z*) = −2.
3. Re (*z*) = 0, Im (*z*) = −1.
4. Re (*z*) = 2, Im (*z*) = 0.

Pág. 5

1. (1 + i) + (3 − 5 i) = (1 + 3) + (1 − 5) i = 4 − 4 i.
2. (1 + i)(3 − 5 i) = 1(3 − 5 i) + i (3 − 5 i) = 3 − 5 i + 3i + 5 = 8 − 2 i.

Pág. 6

1. (1 + i) + 3 − 5 i = (1 + i) + (3 + 5 i) = 4 + 6 i.
2. 1+2 i

= −

=

13

13

2−3 i

= 1+2 i 2+3 i 2−3 i 2+3 i

2 3 i+4 i+6

4+9

8 + 1 i.

28 / 31

Pág. 9

Im (*z*)



*z* = −2 + 2 i 2

*z* = 1 + 2 i

1

*−*2 *−*1

*−*1

*−*2

*z* = 2

1 2

*z* = −i

Re (*z*)

Pág. 17

1) |*z*| = √52 + 52 = 5√2 y como *z* está en el primer cuadrante: Arg (*z*) = *α* =

6

= arctan 5 ) = arctan(1) = *π* .

5

4

= − arctan

( )

2) |*z*| = J(2√3)2 + (−2)2 = 4 y como *z* está en el cuarto cuadrante: Arg (*z*) = −*α* =

29 / 31

2 2√3

= − *π* .

= *π* − arctan ( √3 ) = *π* − *π*

3) |*z*| = J12 + (−√3)2 = 2 y como *z* está en el segundo cuadrante Arg (*z*) =

1

3

4) |*z*| = J(−3)2 + (−3)2 = 3√2 y como *z* está en el tercer cuadrante: Arg (*z*) =

= 2*π* .

3

= arctan 3 ) − *π* = *π*

− *π* = − 3*π* .

Pág. 18

√

1) *z* = 2

− √2 +

√2 i

= − √2 +

√2 i.

3 4

−*π* )

2

cos

+ i sen

= 2

2

4

4

−*π* ))

4

= 3

4

√ ( 1 1 )

3*π* )

4

√2 −

√2 i

= 2 − 2 i.

2) *z* = 3

cos

+ i sen

3*π* )) ( 1 1 ) 3 3

1. *z* = 1 cos *π* ) + i sen *π* )) = 1 (0 + i) = i.

2

2

4) *z* = 7 (cos (0) + i sen (0)) = 7(1 + 0 i) = 7.

Pág. 19

1. *z*1 *z*2 = (1 · 2)*π*+ *π*

2

= 2 3*π*

2

= 2− *π* .

1. *z*1

2

*z*2

= 1 )

= 1 *π* .

1. *z*1 + *z*2 = 1(cos(*π*) +i sen(*π*)) + 2 cos *π* ) + i sen *π* )) = −1 + 0 i+ 0 + 2 i = −1 + 2 i.

2

2

*π*− *π*

2

2

2

2

30 / 31

Pág. 20

Como |*z*| = 2 y *θ* = Arg (*z*) = *π* , utilizamos la fórmula de DeMoivre con *n* = 3:

*z*3 = (|*z*|3

)3*θ* = (23

)3 *π*

3

= 8*π* = 8(cos(*π*) + i sen(*π*)) = 8(−1 + 0 i) = −8 ∈ R.

3

Pág. 22

1. *x* = 1 y *x* = −1.
2. *x* = 2.
3. *x* = i y *x* = −i.

Pág. 24

J

Como *r* = |*z*| = 02 + (−2)2 = 2 y *θ* = Arg (*z*) = − *π* , las raíces cúbicas son

2

√

*w*0 =

√3

*r θ*

3

=

√3

2− *π* , *w*1 =

√3

*r θ*+2*π*

3

=

√3

2

y *w*2 = 3 *r θ*+4*π*

3

=

√3

2 7*π*

6

=

√3

2 5*π* .

6

6

*π*

2

−

+ i sen

4

= 1

√2 −

√2 i

=

√2 −

√2 i.

Pág. 26

*−π* i

1) *e*

4

= *e*

0 −*π* )

4

−*π* )) ( 1

1 ) 1 1

1. *e*

2) *e*2*π*i = *e*0(cos(2*π*) + i sen(2*π*)) = 1(1 + 0 i) = 1.

1+ *π* i

cos

= *e*1

cos

*π* )

+ i sen

*π* ))

= *e*(0 + i) = *e* i.

1. *eπ*i *e* 3

2

2

2

*π* i

2

= *e*(*π*+ *π* )i

= *e*0

cos

4*π* )

+ i sen

4*π* ))

= − cos

*π* )

+ i sen

*π* ) =

= − 1

3

3

3

3

3

2

+ √3 i.

31 / 31

# Temas 2 y 3. Límites de funciones reales.

Continuidad

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales Curso 2023 – 2024

# Conceptos básicos sobre funciones

2 / 64

### Función

Sean *A, B* R. Una función (real de variable real) *f* : *A B* es una regla o ley que asigna a cada elemento *a A* un único elemento de *b B*. Se denota *f* (*a*) = *b*.

∈ ∈

* ⊆ −→

Decimos que el conjunto *A* es el dominio y el conjunto *B* el codominio

•

de *f* .

* Es usual escribir *f* : R −→ R sin especificar el dominio ni el codominio.

3 / 64

### Dominio e imagen

* Sea *f* : R −→ R.

El dominio de *f* , denotado por Dom (*f* ), es el subconjunto de R para el que la función *f* está bien definida.

◦

* + La imagen de *f* es Im (*f* ) = { *y* ∈ R ∃ *x* ∈ Dom (*f* ) con *f* (*x* ) = *y* }

* Ejemplo. Calcula el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

1. *f* : R −→ R con *f* (*x* ) = *x* 2
2. *f* : R −→ R con *f* (*x* ) = √*x*

*(Solución)*

4 / 64

# Límites de funciones

5 / 64

### Límites

* Sea *f* : R −→ R. Decimos que *x*lim*a f* (*x* ) = *L* ∈ R si

→

∀*ε >* 0 ∃ *δ >* 0 tal que si *x* ∈ Dom (*f* ) y 0 *<* |*x* − *a*| ≤ *δ ,*

entonces |*f* (*x* ) − *L*| ≤ *ε .*

* Al calcular *x*lim *f* (*x* ) observamos el comportamiento de *f* cerca de *a*, no

→*a*

en el punto *a*. Por lo tanto, los puntos cercanos a *a* deben pertenecer al Dom (*f* ) pero puede que *a* ̸∈ Dom (*f* ).

* Ejemplo. Comprueba el valor del siguiente límite utilizando la definición.

1) lim *f* (*x* ) = 2 con *f* (*x* ) = *x* + 3

6 / 64

*x* →1 2

*(Solución)*

### Cálculo de límites

* Funciones elementales

1. Polinomios.

lim (*b*0 + *b*1*x* + *b*2*x* 2 + · · · + *bnxn*) = *b*0 + *b*1*a* + *b*2*a*2 + · · · + *bnan*

*x* →*a*

1. Exponenciales. lim *ex* = *ea*

*x* →*a*

1. Logaritmos. lim log *x* = log *a* si *a >* 0

*x* →*a*

1. Trigonométricas. lim sen *x* = sen *a* y lim cos *x* = cos *a*

*x* →*a x* →*a*

7 / 64

### Cálculo de límites

* Ejemplo. Calcula los siguientes límites.

1. lim cos *x*

*x* →0

1. lim (*x* 2 + 2)

*x* →5

1. lim log *x*

*x* →1

1. lim

*x* →−1

(sen(*x π*) + *x* )

*(Solución)*

8 / 64

### Aritmética de límites

* Proposición.

Sean *f , g* : R −→ R dos funciones tales que

*x*lim*a f* (*x* ) = *L*1 ∈ R y *x*lim*a g* (*x* ) = *L*2 ∈ R *.*

→

→

Entonces,

1. lim (*αf* (*x* ) + *βg* (*x* )) = *αL*1 + *βL*2 para cualquier *α, β* R

∈

*x* →*a*

1. lim *f* (*x* )*g* (*x* ) = *L*1*L*2

*x* →*a*

1. lim

*f* (*x* )

= *L*1

si *L*2 ̸= 0

*x* →*a g* (*x* ) *L*2

1. lim |*f* (*x* )| = |*L*1|

*x* →*a*

1. lim (*f* (*x* ))*g*(*x*) = *LL*2 si *LL*2

̸= 0

0

*x* →*a* 1 1

1. Si *f* (*x* ) ≤ *g* (*x* ) cerca del punto *a* ∈ R, entonces *L*1 ≤ *L*2

9 / 64

### Aritmética de límites

* Ejemplo. Calcula los siguientes límites.

1. lim (cos(*πx* ) *x* log *x* )

−

*x* →1

1. lim

*x* →1

*x* 2 + 2

*x* + 1

1. *x* lim 1 |*x* − 5|

→−

1. lim 1

*x* →0 *x* 2

*(Solución)*

10 / 64

### Límites con valor ±∞

* Decimos que *x*lim*a f* (*x* ) = +∞ si

→

∀*M >* 0 ∃ *δ >* 0 tal que si *x* ∈ Dom (*f* ) y 0 *<* |*x* − *a*| ≤ *δ ,*

entonces *f* (*x* ) *> M .*

* Decimos que *x*lim*a f* (*x* ) = −∞ si

→

∀*M >* 0 ∃ *δ >* 0 tal que si *x* ∈ Dom (*f* ) y 0 *<* |*x* − *a*| ≤ *δ ,*

entonces *f* (*x* ) *<* −*M .*

11 / 64

### Límites laterales

* Límite por la derecha. Decimos que *x*lim+ *f* (*x* ) = *L* ∈ R si

→*a*

∀*ε >* 0 ∃ *δ >* 0 tal que si *x* ∈ Dom (*f* ) y 0 *<* |*x* − *a*| ≤ *δ*

con *x > a,* entonces |*f* (*x* ) − *L*| ≤ *ε .*

* Límite por la izquierda. Decimos que

lim

*x* →*a−*

*f* (*x* ) = *L* ∈ R si

∀*ε >* 0 ∃ *δ >* 0 tal que si *x* ∈ Dom (*f* ) y 0 *<* |*x* − *a*| ≤ *δ*

con *x < a,* entonces |*f* (*x* ) − *L*| ≤ *ε .*

12 / 64

### Límites laterales

* Proposición. Sea *f* : R −→ R. Entonces,
  + Si lim *f* (*x* ) ̸= lim+ *f* (*x* ), entonces no existe lim *f* (*x* ).

*x* →*a−*

*x* →*a*

*x* →*a*

* + Si lim

*f* (*x* ) = lim *f* (*x* ) = *L*, entonces lim *f* (*x* ) = *L*.

*x* →*a−*

+

*x* →*a*

*x* →*a*

* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.

1. lim *f* (*x* ) siendo *f* (*x* ) = *x*

f *x* 2 − 7 si *x* ≤ 4

*x* →4 2

si *x >* 4

1. lim 1

*x* →0 *x*

| |

*(Solución)*

13 / 64

### Criterio del Sándwich

* Decimos que *f* : R −→ R está acotada por *M >* 0 si

|*f* (*x* )| ≤ *M* para todo *x* ∈ Dom (*f* ) *.*

* Ejemplo.

1. *f* (*x* ) = sen *x* y *g* (*x* ) = cos *x* están acotadas en R por 1
2. *f* (*x* ) = *x* 2 está acotada en [−2*,* 1] por 4

*(Solución)*

14 / 64

### Criterio del Sándwich

* Teorema. Sean *f , g* : R −→ R tales que *x*lim *f* (*x* ) = 0 y *g* está acotada

→*a*

en un intervalo que contenga al punto *a* ∈ R. Entonces,

*x*lim

→*a*

*f* (*x* ) *g* (*x* ) = 0 *.*

* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.

1) lim sen ( 1 J

*x* →0

*x*

2) lim *x* sen ( 1 J

*x* →0 *x*

*(Solución)*

15 / 64

### Criterio del Sándwich

* Teorema. Sean *f , g, h* : R −→ R tales que *f* (*x* ) ≤ *g* (*x* ) ≤ *h*(*x* ) en un intervalo que contenga al punto *a* ∈ R.

Si *x*lim *f* (*x* ) = *x*lim *h*(*x* ) = *L*, entonces *x*lim *g* (*x* ) = *L*.

→*a*

→*a*

→*a*

* Ejemplo. Calcula, si existe, el siguiente límite.

*x* →0 *x*

1) lim *x* 2 cos ( 1 J

*(Solución)*

16 / 64

### Límites en el infinito

* Decimos que

lim

→

+

*x*

∞ *f* (*x* ) = *L* ∈ R si

∀*ε >* 0 ∃ *N >* 0 tal que si *x* ∈ Dom (*f* ) y *x > N ,*

entonces |*f* (*x* ) − *L*| ≤ *ε .*

* Decimos que

lim

→−∞

*x*

*f* (*x* ) = *L* ∈ R si

∀*ε >* 0 ∃ *N >* 0 tal que si *x* ∈ Dom (*f* ) y *x <* −*N ,*

entonces |*f* (*x* ) − *L*| ≤ *ε .*

17 / 64

### Límites en el infinito

* Para calcular

lim

→ ∞

+

*x*

*f* (*x* ) o lim

→−∞

*x*

*f* (*x* ) es necesario que un intervalo de la

forma [*a,* +∞) o (−∞*, b*] esté en el dominio de *f* .

* Se puede generalizar la definición para el caso *L* = ±∞.
* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.

1. lim *x* 2

*x* →+∞

1. lim *ex*

*x* →−∞

*(Solución)*

18 / 64

### Cálculo de límites en el infinito

* Funciones elementales

1. Polinomios. Si *f* (*x* ) = *a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2 + · · · + *anxn* :

*x* lim

+ si *an >* 0 *,*

−∞ si *an <* 0 *,*

→+∞

*f* (*x* ) = � ∞

lim

*x*

→−∞

*f* (*x* ) =





+ si *n* es par y *an >* 0 *,*

si *n* es par y *an <* 0 *,*

−∞

∞

si *n* es impar y *an >* 0 *,*

−+∞

∞ si *n* es impar y *an <* 0 *.*

19 / 64

### Cálculo de límites en el infinito

1. Exponenciales.

lim

*x* →+∞

*ex* = + y lim

*x* →−∞

∞

*ex* = 0 *.*

1. Logaritmos.

lim

*x* →+∞

log *x* = +∞ y

lim

*x* →−∞

log *x* no se puede calcular *.*

1. Trigonométricas.

̸ ∃ *x*

lim

→±∞

sen *x* y ̸ ∃ *x*

lim

→±∞

cos *x .*

20 / 64

### Aritmética de límites en el infinito

Se puede generalizar la aritmética de límites siempre que las operaciones tengan sentido.

•

* Si *a* ∈ R, entonces:
  + Suma:
    - *a* + ∞ → +∞
    - *a* − ∞ → −∞

• +∞ + ∞ → +∞

* + - −∞ − ∞ → −∞
  + Exponencial:
    - *a*+∞ → +∞ si *a >* 1
    - *a*−∞ → 0 si *a >* 1
    - 0*a* → 0 si *a >* 0
  + Producto:
    - *a* · (+∞) → +∞ si *a >* 0
    - *a* · (+∞) → −∞ si *a <* 0
    - *a* · (−∞) → −∞ si *a >* 0
    - *a* · (−∞) → +∞ si *a <* 0
    - (+∞) · (+∞) → +∞
    - (−∞) · (−∞) → +∞
    - (+∞) · (−∞) → −∞

Cociente:

◦

*a*

21 / 64

* ±∞ → 0

### Cálculo de límites

* + Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
    1. lim

(*x* 3 − log(*x* 2))

*x* →−∞

* + 1. lim

*x* →∞

(*x* − 1) log *x*

* + 1. lim

*x* →∞

1 + *e*−*x*

*x*

*(Solución)*

22 / 64

### Composición de funciones

* + Proposición.

Si *x*lim*a f* (*x* ) = *F* y lim

→

*x* →*F*

*g* (*x* ) = *L*, entonces

*x*lim*a*(*g* ◦ *f* )(*x* ) = *L*.

* + Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.

*x*

→

* + 1. lim

*x* →−∞

*e*− 1

* + 1. lim *e*− 1

*x*

*x* →0

*(Solución)*

23 / 64

# Indeterminaciones

24 / 64

### Indeterminaciones

* + Indeterminación: expresión que no tiene un valor fijo.
  + Se escribe entre corchetes: [ ].
  + Algunas indeterminaciones son:

⋄ [ ∞ − ∞ ] ⋄ [ 0 · ∞ ]

⋄ I *k* 1 con *k* ̸= 0

0

⋄ [ 1±∞ ]

⋄ I 0 1

0

⋄ I ∞ 1

∞

⋄ [ 00 ]

⋄ [ ∞0 ]

25 / 64

Indeterminación I *k* 1 con *k* ̸= 0

0

* + Estudio de los límites laterales para determinar el signo: ±∞.
  + Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
    1. lim

*x* − 1

*x* →0 *x* 2 + *x*

* + 1. lim

*x* + 2

*x* →1 (*x* 1)2

−

*(Solución)*

26 / 64

### Indeterminación [ ∞ − ∞ ]

* El límite es ±∞ y el signo lo determina el término de mayor orden.
* Comportamiento cerca de ∞:

log *x << xn << ax* con *a >* 1 *.*

* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
  1. lim

*x* →+∞

(√*x* 3 − *x* )

* 1. lim

*x* →+∞

* 1. lim

*x* →+∞

* 1. lim

*x* →+∞

(3*x* − 5*x* ) (3*x* − *x* 5)

(*x* 3 − log(*x* 4))

*(Solución)*

27 / 64

Indeterminación I 0 1

0

* Factorizar y simplificar.
* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
  1. lim

*x* 3 − 1

*x* →1 *x* 2 − *x*

*x*

* 1. lim

−

−

*x* →0 1

*(Solución)*

28 / 64

√ 1 *x*

Indeterminación I ∞ 1

∞

Se divide el numerador y el denominador por el término de mayor orden del denominador.

•

* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.

2*x* + 1

* 1. lim

*x* →∞

√*x* 2

+ 1 +

7

√*x* 2

− 2*x*

* 1. lim

−2*x*

*x* →−∞ 3 + *x* 2

* 1. lim

*x* →−∞

√3 *x* 2 + 5

*x* − 4

3 − *x*

* 1. lim

*x* →∞ 1 −

√7*x* 2

+ 4*x*

*(Solución)*

29 / 64

Indeterminación I ∞ 1

∞

* Caso particular: cociente de polinomios.

lim

*anxn* + · · · + *a*1*x* + *a*0

= lim

*an xn*−*m*

*x* →±∞ *bmxm* + · · · + *b*1*x* + *b*0

*x* →±∞ *bm*

* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
  1. lim

2*x* 3 + 1

*x* →∞ −3*x* + 7

* 1. lim

2*x* 2 + *x* − 8

*x* →∞ *x* 2 + 3*x* + 1

* 1. lim

3*x* + 2

*x* →−∞ 3*x* 2 + *x* 12

−

*(Solución)*

30 / 64

### Indeterminación [ 0 · ∞ ]

0 ∞

* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
* Se convierte en una indeterminación de tipo I 0 1 o I ∞ 1.
  1. lim

*x* →∞

* 1. lim

(*x* + 7)) 1

*x e*−*x*

4*x* 2 + 3

*x* →+∞

* 1. lim

*x* →∞

2 7

log(*x* )

*x* ( − 2

)

*(Solución)*

31 / 64

### Indeterminación [ 1∞ ]

* Se utiliza el límite del número *e*:

lim (1 + 1 )*f* (*x* ) = *e* si lim

*x* →*a*

*f* (*x* )

*x* →*a*

*f* (*x* ) =

∞ *.*

* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
  1. lim

*x* →∞

(1 + 1 J*x*

* 1. lim ( *x* J *x* 1 1

*x*

*−*

*x* →1 2*x* − 1

*(Solución)*

32 / 64

### Más indeterminaciones

* [ 1∞ ], [ ∞0 ], [ 00 ]
* Se resuelven tomando logaritmos y aplicando la regla de L’Hôpital

33 / 64

### Regla de L’Hôpital

* Regla de L’Hôpital.

Sea *x*0 ∈ (*a, b*) y sean *f , g* dos funciones derivables en (*a, b*) \ { *x*0 }. Si *g* ′(*x* ) ̸= 0 para *x* ∈ (*a, b*) \ { *x*0 } y

�

lim

*x*

→*x*0

*f* (*x* ) = lim

→*x*0

*x*

*g* (*x* ) = 0 *,*

±∞ *,*

con lim

→*x*0

*x*

*f* ′(*x* )

*g* ′(*x* )

= *L ,*

entonces lim

*x*

→*x*0

*f* (*x* )

*g* (*x* )

= *L .*

* Se puede extender el resultado si *x* → ±∞ o si *L* = ±∞.
* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
  1. lim

*x* →∞

log *x x*

* 1. lim

*x* →0

sen *x x*

*(Solución)*

34 / 64

### Ejercicios

* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
  1. lim

tan(*x* ) + *x* 2 + 1

1. lim *x* 3 cos ( 1 J

*x* →0 log(*x* 2 + 1) − *ex*

*x* 2 + 2

*x* →0

*x*

*x* 2 − 1

* 1. lim

sen

*x* →0 2

√*x*

(*x* )

+ 4 2

−

*x* 2

1. lim

*x* →1+

√*x* − 1

1

2

* 1. lim

*x* →0

1. lim

*x* →0

1 + 2 *x*

1 + 3 *x*

1

* 1. lim

3*e*2*x*

1. lim

1 − tan(*x* )

*x* →+∞ 7*e*2*x* + *ex*

*x* 3 + 4*x* − 7

*x* → *π*

sen *x* − cos *x*

4

* 1. lim

*x* →+∞ 7*x* 2

− √2*x* 6

+ *x* 5

*(Solución)*

35 / 64

# Continuidad

36 / 64

### Continuidad

* Decimos que *f* : R −→ R es continua en *a* ∈ Dom (*f* ) si

∀*ε >* 0 ∃ *δ >* 0 tal que si *x* ∈ Dom (*f* ) y |*x* − *a*| ≤ *δ ,*

entonces |*f* (*x* ) − *f* (*a*)| ≤ *ε .*

Si *a* Dom (*f* ) es un punto aislado del Dom (*f* ), entonces *f* siempre es continua en *a*.

* ∈
* Si *a* ∈ Dom (*f* ) no es un punto aislado del Dom (*f* ), entonces *f* es continua

en *a* si *x*lim *f* (*x* ) = *f* (*a*).

→*a*

37 / 64

### Continuidad

* Una función *f* : R −→ R no es continua en *a* ∈ R si
  + *a* ̸∈ Dom (*f* );

existe lim *f* (*x* ) pero tiene distinto valor que *f* (*a*);

◦

*x* →*a*

no existe lim *f* (*x* ).

◦

*x* →*a*

* En caso de que *f* : (*a, b*] −→ R:
  + *f* no es continua en *a*;
  + *f* es continua en *b* si

lim

*x* →*b−*

*f* (*x* ) = *f* (*b*).

38 / 64

### Continuidad

Ejemplo. Determina si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados.

•

1. *f* (*x* ) = � *x* si *x* ∈ (−5*,* 2] *,*

10 si *x* = 7 *,*

1. *f* (*x* ) = � *x* 2 si 0 ≤ *x* ≤ 2 *,*

*x* + 2 si *x >* 2 *,*

en *x* = 7

en *x* = 2

1. *f* (*x* ) = *x* 1

− 2

*(Solución)*

39 / 64

en *x* = 2

### Continuidad

* Funciones elementales.

1. Los polinomios son funciones continuas en R.
2. La función exponencial *ex* es continua en R.
3. La función logaritmo log *x* es continua si *x >* 0.
4. Las funciones sen *x* y cos *x* son continuas en R.

40 / 64

### Propiedades de las funciones continuas

* Proposición.

Sean *f , g* dos funciones continuas en *a* ∈ Dom (*f* ) ∩ Dom (*g* ).

1. *αf* + *βg* es continua en *a* ∈ R para cualquier *α, β* ∈ R.
2. *f g* es continua en *a* ∈ R.
3. *f* es continua en *a* ∈ R si *g* (*a*) ̸= 0.

*g*

1. |*f* | es continua en *a* ∈ R.
2. *f g* es continua en *a* ∈ R.

41 / 64

### Composición de funciones

* Proposición.

Sean *f , g* : R −→ R. Si *f* es continua en *a* ∈ Dom (*f* ) y *g* es continua en

*f* (*a*) ∈ Dom (*g* ), entonces la composición *g* ◦ *f* es continua en *a*.

* Ejemplo. Las siguientes funciones son continuas en R.

1. *f* (*x* ) = *x* − 3

*ex* + 2

1. *f* (*x* ) = *ex* 2 +1

(

J

1. *f* (*x* ) = cos

*(Solución)*

42 / 64

*x x* 2 + 1

# Tipos de discontinuidad

43 / 64

### Discontinuidad evitable

* *f* : R −→ R tiene una discontinuidad evitable en *a* ∈ R
  + si *a* ∈ Dom (*f* ) y existe lim *f* (*x* ) = *L* ∈ R pero *L* ̸= *f* (*a*);

*x* →*a*

* + si *a* ̸∈ Dom (*f* ) pero existe lim *f* (*x* ) ∈ R.

*x* →*a*

*y y*

*x* *x*



*a*



*a*

44 / 64

### Discontinuidad evitable

Ejemplo. Clasifica la discontinuidad de las siguientes funciones en el punto indicado.

•

1. *f* (*x* ) = *x* 3 − 8

*x* − 2

en *x* = 2

1. *f* (*x* ) = � *x* − 2 si *x* ̸= 0 *,*

10 si *x* = 0 *,*

en *x* = 0

*(Solución)*

45 / 64

### Discontinuidad de salto finito

*f* : R R tiene una discontinuidad de salto finito en *a* R si existen los límites laterales y son finitos, pero no coinciden.

* −→ ∈

*y*

*x*



*a*

Ejemplo. Clasifica la discontinuidad de la siguiente función en el punto indicado.

•

*x* 2 si *x* 0 *,*

1) *f* (*x* ) = � ≤

cos *x* si *x >* 0 *,*

en *x* = 0

*(Solución)*

46 / 64

### Discontinuidad de salto infinito

* *f* : R −→ R tiene una discontinuidad de salto infinito en *a* ∈ R si alguno

de los límites laterales es ±∞. *y*

*x*



*a*

Ejemplo. Clasifica la discontinuidad de las siguientes funciones en el punto indicado.

•

1. *f* (*x* ) = f

*x* 1 1 si *x >* 1 *,*

3 si *x* ≤ 1 *,*

−

en *x* = 1

1. *f* (*x* ) = *ex*

*(Solución) x* 3 − *x* 2 − 2*x*

47 / 64

en *x* = 0

# Estudio de la continuidad de una función

48 / 64

### Estudio de la continuidad de una función

* Ejemplo. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.
  1. *f* (*x* ) =

2*x* + 1 si *x* ∈ (2*,* +∞)

1

f *x* 2 si *x* ∈ (−∞*,* 2]

* 1. *f* (*x* ) = *e x* si *x* ̸= 0
  2. *f* (*x* ) = �

1

*e* si *x* ̸= 0

*x*

0 si *x* = 0

* 1. *f* (*x* ) = f |*x* + 1|

*x*

si *x* ̸= 0

*(Solución)*

49 / 64

−2 si *x* = 0

# Teorema de Bolzano

50 / 64

### Teorema de Bolzano

* Teorema de Bolzano. Sea *f* : [*a, b*] −→ R una función continua en [*a, b*] y tal que *f* (*a*)*f* (*b*) *<* 0. Entonces, existe *c* ∈ (*a, b*) con *f* (*c*) = 0.

*y*

*x*



*a*

*b*

* Ejemplo. Utiliza el teorema de Bolzano para probar que la ecuación

*x* 2 − 2 = 0 tiene al menos una solución real en el intervalo [1*,* 2].

*(Solución)*

51 / 64

# Soluciones

52 / 64

Pág. 4

1. Dom (*f* ) = R, Im (*f* ) = [0*,* +∞).
2. Dom (*f* ) = [0*,* +∞), Im (*f* ) = [0*,* +∞).

Pág. 6

Sea *ε >* 0 y tomamos *δ* = 2*ε >* 0 y *x* ∈ R con 0 *<* |*x* − 1| ≤ *δ*. Entonces,

*x* +3

− 2 = =

*δ*

|*f* (*x* ) − 2| =

*x*−1 |*x* −1| ≤

= *ε .*

Pág. 8

1. lim

*x* →0

2

cos *x* = cos 0 = 1.

2 2 2

1. lim (*x* 2 + 2) = 52 + 2 = 27.

*x* →5

1. lim

*x* →1

log *x* = log 1 = 0.

1. lim

*x* →−1

(sen(*x π*) + *x* ) = sen(−*π*) − 1 = 0 − 1 = −1.

Pág. 10

1. lim (cos(*πx* ) − *x* log *x* ) = cos *π* − log 1 = −1 + 0 = −1.

*x* →1

53 / 64

1. lim

*x* →1

*x* 2 +2

*x* +1

1+2

1+1

=

= 3 .

1. lim

2

*x* →−1

|*x* − 5| = | − 1 − 5| = 6.

1. lim 1

= [ 1

] = +∞.

*x* →0 *x* 2 0+

Pág. 13

1. Como *f* tiene dos expresiones distintas alrededor de *x* = 4, calculamos los límites

laterales: lim

*x* →4+

*f* (*x* ) = lim *x*

*x* →4+ 2

= 2 y lim

*x* →4*−*

*f* (*x* ) = lim

*x* →4*−*

(*x* 2 − 7) = 16 − 7 = 9. Al no

coincidir los límites laterales, no existe lim

*x* →4

*f* (*x* ).

1. Como *f* tiene dos expresiones distintas alrededor de *x* = 0, calculamos los límites

laterales: lim

*x* →0+

*f* (*x* ) = lim 1

*x* →0+ *x*

= + y lim

→0*−*

∞ *x*

*f* (*x* ) = lim 1

*x* →0*−* −*x*

= +∞. Al coincidir

los límites laterales, deducimos que lim 1

= +∞.

Pág. 14

1. | sen *x* | ≤ 1 y | cos *x* | ≤ 1.

*x* →0 |*x* |

1. Como −2 ≤ *x* ≤ 1, entonces 0 ≤ *x* 2 ≤ 4 y |*f* (*x* )| ≤ 4.

54 / 64

Pág. 15

1. No existe lim

*x* →0

sen ( 1 ).

1. lim *x* sen ( 1 ) = 0 por el Criterio del Sándwich: sen ( 1 ) ≤ 1 y lim

*x*

*x* = 0.

*x* →0 *x*

Pág. 16

*x* →0

*x*

*x*

*x* →0

*x* →0

y cos ( 1 ) ≤ 1.

*x x* →0

1. lim

*x* 2 cos ( 1 ) = 0 porque −*x* 2 ≤ *x* 2 cos ( 1 ) ≤ *x* 2 y además lim

*x*

−*x* 2 = lim

*x* 2 = 0

Pág. 18

1. lim

*x* →+∞

1. lim

*x* →−∞

Pág. 22

*x* 2 = +∞.

*ex* = 0.

1. lim

(*x* 3 − log(*x* 2)) = −∞ − ∞ = −∞.

*x* →−∞

1. lim

*x* →∞

(*x* − 1) log *x* = (+∞) · (+∞) = +∞.

55 / 64

1. lim

*x* →∞

Pág. 23

1+*e−x*

*x*

= [ 1+0 ] = 0.

+∞

1. lim *e x*

− 1

*x* →−∞

− 1

1

= [*e −∞*

*−*

] = *e*0 = 1.

1. lim *e*

*x* →0

*x* = [*e*

1

− 1

*−*01 ]. Calculamos los límites laterales: lim *e*

*x* →0+

∞ ̸ ∃

*x* = [ *e*−∞

] = 0 y

1

lim

*x* →0*−*

Pág. 26

*e*− *x* = [ *e*+∞ ] = + . Como los límites laterales no coinciden, lim

*x* →0

*e*− *x* .

1. lim

*x* −1

= lim

*x* −1

= [ −1 ]. Calculamos los límites laterales: lim

*x* −1 =

*x* →0 *x* 2 +*x*

*x* →0 *x* (*x* +1) 0

*x* →0*−*

*x* (*x* +1)

= [ −1

] = +∞ y lim

*x* −1

= [ −+ 1

] = −∞. Al no coincidir los límites laterales,

0*−* ·1

el límite no existe.

*x* →0*−*

*x* (*x* +1)

0 ·1

1. lim

*x* +2

= [ 3 ]. Calculamos los límites laterales: lim

*x* +2

= [ 3

] = +∞ y

*x* →1 (*x* −1)2 0

= [

*x* →1*−*

(*x* −1)2 0+

lim

*x* →1+

*x* +2 (*x* −1)2

3 ] = +∞. Como los límites laterales son iguales, deducimos que

lim *x* +2 2 = +∞.

0+

*x* →1 (*x* +1)

56 / 64

Pág. 27

→+∞

1. lim

*x* →+∞

(√*x* 3 − *x* ) = [+∞ − ∞] = *x* lim

√*x* 3 = +∞.

1. lim

*x* →+∞

1. lim

*x* →+∞

(3*x* 5*x* ) = [+ ] = lim

*x* →+∞

− ∞ − ∞

(3*x x* 5) = [+ ] = lim

− ∞ − ∞

*x* →+∞

−5*x* = −∞.

3*x* = +∞.

1. lim

*x* →+∞

Pág. 28

(*x* 3 log(*x* 4)) = [+ ] = lim

*x* →+∞

− ∞ − ∞

*x* 3 = +∞.

1. lim

*x* 3 −1

= [ 0 ] = lim

(*x* −1)(*x* 2 +*x* +1)

= lim

*x* 2 +*x* +1

= 3.

*x* →1 *x* 2 −*x* 0

*x*  0

*x* →1

*x* (*x* −1)

*x* (1+√1−*x* )

*x* →0

*x* →1

*x*

*x* (1+√1−*x* ) √

*x* →0

*x* →0

1. lim

*x* →0

Pág. 29

✓

✓

1−√1−*x* =[ 0 ] = lim

(1−√1−*x* )(1+√1−*x* ) = lim

1−(1−*x* ) = lim (1+

1 − *x* ) = 2.

1. lim √

*x* →∞

*x* 2 +1+√*x* 2 −2*x*

2*x* +1

= [ ∞ ] = lim

2+ 1

= 2 = 1.

1. lim

−2*x* 7

∞

*x*

1+ 1 + 1− 2

1+1

= [ ∞ ] = lim

−2*x* 5

*x* →∞

*x* 2 *x*

= [ +∞ ] = +∞.

+1

*x* →−∞ 3+*x* 2

∞ *x* →−∞ 3

0+1

57 / 64

*x* 2

1. lim

√3 2 = [

] = lim

+∞

−∞

✓3 1 + 5 =

= 0.

0

1

1. lim

*x*

+5

*x*

*x* 3

4

*x* →−∞

*x* −4

*x* →−∞

1− *x*

3−*x*

= [ ∞ ] = lim

3 −1

= −1 = 1 .

*x* →∞

−

*x*

*x*

*x*

Pág. 30

1−√7*x* 2 +4*x*

∞ *x* →∞ 1 ✓

7+ 4

−√7 √7

1. lim

2*x* 3 +1

= [ +∞ ] = lim

2 *x* 2 = +∞.

*x* →∞ −3*x* +7 −∞ *x* →∞ −3

1. lim

2*x* 2 +*x* −8

= [ +∞ ] = lim

2 *x* 0 = 2.

*x* →∞ *x* 2 +3*x* +1 +∞ *x* →∞ 1

1. lim

3*x* +2

= [ −∞ ] = lim

3 1 = 0.

*x* →−∞ 3*x* 2 +*x* −12 +∞ *x* →−∞ 3 *x*

Pág. 31

* + 1 *x* +7 +∞

1) lim

(*x* + 7)

4*x* 2 +3 = [∞ · 0] = lim

√4*x* 2 +3 = [ +∞ ] = lim

*x*

3

=

√4 =

2 .

4+ *x* 2

✓

*x* →∞

*x* →∞

1+ 7 1 1

*x* →∞

1. lim *x e*−*x* = [+∞ · 0] = lim

*x* = [ ∞ ] = 0 porque ”gana” el término de mayor

*x* +

→ ∞ *x*

orden: *e* .

∞

*x* →+∞ *ex* ∞

1. lim

*x* 2 ( −7 J = [∞ · 0] = lim

−7*x* 2

= [ ∞ ] = −∞ porque ”gana” el término de

mayor orden: *x* 2.

*x* →∞

log(*x* 2 )

*x* →∞ log(*x* 2 )

*, .*

58 / 64

Pág. 32

1. lim

*x* →∞

( *x* ) ∞

(1 + 1 )*x* = *e*.

1. lim

*x*

*x* →1

2*x* −1

1

*x* 1 = [1 ] = lim

(1 + *x*

1. 1 = lim

(1 + 1−*x* ) 1 =

*x* 1 1 2*x−*1 1*−x* 1 1 −1

*x* 1

*x* 1

)

)

*−*

*x* →1

2*x* −1 −

*−*

*x* →1

2*x* −1

*−*

= lim

1 + 1

*−*

= lim

1 + 1

1*−x*

2*x−*1 *x−*

lim

= *e*

2*x* −1 = *e*−1.

*x* →1

(

(

*x*

→

1

2*x* −1

1−*x*

*x*

→

1

2*x* −1

1−*x*

Pág. 34

* 1. lim

log *x*

= [ ∞ ] =

lim

1

*x* = 0.

*x* →∞ *x*

∞ L*↑*’H

*x* →∞ 1

* 1. lim

sen *x*

= [ 0 ] =

lim

cos(*x* )

= 1.

*x* →0 *x*

Pág. 35

0

L*↑*’H

*x* →0 1

1. lim

tan *x* +*x* 2 +1

= 1

= 1

= −1.

*x* →0 log(*x* 2 +1)−*ex*

log 1−*e*0 −1

1. lim

*x* 2 +2

= [ 2

] = +∞.

*x* →0 sen2 *x* 0+

59 / 64

√*x* 2 +4−2 0

√*x* 2 +4−2 √*x* 2 +4+2 *x* 2

1 1

*x* 0

1. lim

*x* →0

*x* 2 =[ 0 ] = lim

→

*x* 2 √*x* 2 +4+2 = lim *x* 2 (√*x* 2 +4+2) = lim

√*x* 2 +4+2 = 4 .

1. lim

*x* →0

*x* →0

3*e*2*x*

= [ ∞ ] = lim

3 = 3 .

*x* →+∞ 7*e*2*x* +*ex*

*e*

3

∞ *x* →+∞ 7+ 1*x*

7

1+ 4 − 7

1. lim

*x* +4*x* −7

= [ +∞ ] = lim

*x* 2 *x* 3

= 1 .

*x* →+∞ 7*x* 2 −√2*x* 6 +*x* 5

*x*

*x*

−∞ *x* →+∞

7 −✓2+ 1

−√2

1. lim

*x* 3 cos( 1 ) = 0 por el teorema del Sándwich ya que lim

*x* 3 = 0 y | cos( 1 )| ≤ 1.

*x* →0

*x*

*x* 2 −1 0

(*x* −1)(*x* +1)

→1+

*x* →0 *x*

√

→1+

1. lim

*x* →1+

√*x* −1 = [ 0 ] = *x* lim

√*x* −1 = *x* lim

*x* − 1(*x* + 1) = 0 · 2 = 0.

1. lim

*x* →0

1

1+2 *x*

1

= [ 1+2 0 ]. Calculamos los límites laterales: lim

1

1+2 *x*

= [ 1+2+*∞* ] =

1

1+3 *x*

1

1+3 0

*x* →0+

1

1+3 *x*

1+3+*∞*

1 1 2 1 1

= lim

( 3 ) *x* +( 3 ) *x*

= [ 0+0 ] = 0 y lim

1+2 *x*

= 1+0

= 1. Al no coincidir los

*x* →0+ 1 1

0+1

*x* →0*−* 1

1+0

( 3 ) *x* +1

límites laterales, no existe lim

*x* →0

1

1+2 *x*

.

1

1+3 *x*

1+3 *x*

1. lim

1−tan *x*

= [ 0 ] = lim

1− sen *x*

= lim

cos *x* −sen *x*

= lim

−1 = −√2.

*x* → *π*

4

4

4

4

cos *x*

sen *x* −cos *x*

0 *x* → *π*

sen *x* −cos *x*

*x* → *π*

cos *x* (sen *x* −cos *x* )

*x* → *π*

cos *x*

60 / 64

Pág. 39

1. *f* es continua en *x* = 7 por ser un punto aislado de Dom (*f* ).
2. Para comprobar que *f* es continua en *x* = 2 tenemos que calcular los límites laterales:

lim

*x* →2+

*f* (*x* ) = lim

*x* →2+

(*x* + 2) = 4 y lim

*x* →2*−*

*f* (*x* ) = lim

*x* →2*−*

*x* 2 = 4. Como los límites laterales

coinciden, lim

*x* →2

*f* (*x* ) = 4 y *f* es continua en *x* = 2 porque lim

*x* →2

*f* (*x* ) = *f* (2) = 2.

1. *f* no es continua en *x* = 2 porque 2 ̸∈ Dom (*f* ).

Pág. 42

1. *f* es continua en R por ser cociente de dos funciones continuas (polinomio y exponen- cial+constante)con el denominador no nulo.
2. *f* es continua en R por ser composición de dos funciones continuas: la exponencial

*g* (*x* ) = *ex* y el polinomio *h*(*x* ) = *x* 2 + 1 (*f* (*x* ) = (*g* ◦ *h*)(*x* )).

1. *f* es continua en R por ser composición de dos funciones continuas: *g* (*x* ) = cos *x* y

*h*(*x* ) = *x* (*f* = *g* ◦ *h*). Además, *h*(*x* ) es continua por ser cociente de dos polinomios

*x* 2 +1

con el denominador no nulo.

61 / 64

Pág. 45

1. Como 2 ̸∈ Dom (*f* ) = R \ { 2 }, calculamos lim

*x* →2

*f* (*x* ) = lim

*x* →2

*x* 3 −8

*x* −2

= [ 0 ] =

= lim

*x* →2

(*x* −2)(*x* 2 −2*x* +4)

*x* −2

0

= lim (*x* 2 2*x* + 4) = 4 R, deducimos que *f* tiene una

*x* →2

− ∈

discontinuidad evitable en *x* = 2.

1. Como lim

*x* →0

*f* (*x* ) = lim (*x* 2) = 2 = 10 = *f* (0), deducimos que *f* tiene una discon-

*x* →0

− − ̸

tinuidad evitable en *x* = 0.

Pág. 46

1. Como *f* tiene dos expresiones distintas alrededor de *x* = 0, calculamos los límites lat-

erales: lim

*x* →01

*f* (*x* ) = lim

*x* →0*−*

*x* 2 = 0 y lim

*x* →0+

*f* (*x* ) = lim

*x* →0+

cos *x* = 1. Al no coincidir los

límites laterales pero ser los dos números reales, deducimos que *f* tiene una discon- tinuidad de salto finito en *x* = 0.

Pág. 47

1. Al tener *f* dos expresiones distintas alrededor de *x* = 0, calculamos los límites late-

= [

rales: lim

*f* (*x* ) = lim

3 = 3 y lim

*f* (*x* ) = lim

1 1

*x* 1

] = +∞. Como

*x* →1*−*

*x* →1*−*

*x* →1+

*x* →1+ − 0+

lim

*x* →1+

*f* (*x* ) = +∞, la función tiene una discontinuidad de salto infinito en *x* = 1.

62 / 64

1. Calculamos: lim

*ex* = [ 1 ] y para resolver la indeterminación calculamos

*x* →0*− x* 3 − *x* 2 − 2*x* 0

los límites laterales: lim

*ex* = [ 1 ] = lim

*ex* = [ 1

] = +∞.

*x* →0*−*

*x* 3 −*x* 2 −2*x*

0 *x* →0*−*

*x* (*x* −2)(*x* +1)

0*−* ·(−2)·1

Como un límite lateral no es finito, la función tiene una discontinuidad de salto infinito en *x* = 1.

Pág. 49

1. *f* es continua en ( *,* 2) y (2*,* + ) porque los polinomios son funciones continuas. Como *f* está definida de dos maneras distintas alrededor de *x* = 2, necesitamos calcular

−∞ ∞

los límites laterales: lim *f* (*x* ) = lim *x* 2 = 4 y lim *f* (*x* ) = lim (2*x* + 1) = 5. Al

*x* →2*−*

*x* →2*−*

*x* →2+

*x* →2+

no coincidir los límites laterales, no existe lim

*x* →2

*f* (*x* ) y por lo tanto *f* no es continua en

*x* = 2. La función tiene una discontinuidad de salto finito en *x* = 2.

1. *f* es continua en Dom (*f* ) = R 0 por estar definida como composición de funciones continuas (la exponencial y un cociente de polinomios con denominador no nulo).

\ { }

1. *f* es continua si *x* = 0 por estar definida como composición de funciones continuas (la exponencial y un cociente de polinomios con denominador no nulo). Calculamos

̸

1 1

lim *f* (*x* ) = lim *e x* = [*e* 0 ]. Para resolver la indeterminación, calculamos los límites

*x* →0 *x* →0 1 1

laterales: lim *f* (*x* ) = lim *e x* = [*e*−∞] = 0 y lim *f* (*x* ) = lim *e x* = [*e*+∞] = +∞.

*x* →0*−*

*x* →0*−*

*x* →0+

*x* →0+

63 / 64

Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite lim

*x* →0

*f* (*x* ) y *f* no puede ser

continua en *x* = 0. La función tiene una discontinuidad de salto infinito en *x* = 0.

1. *f* es continua en R 0 por estar definida como un cociente de funciones continuas (el valor absoluto de un polinomio es continuo) con denominador no nulo. Calculamos

\ { }

*x*

lim

*x* →0

*f* (*x* ) = lim

*x* →0

0

*x*

|*x* +1|

= [ 1 ]. Para resolver la indeterminación calculamos los límites

laterales: lim

0*−*

*x* →0*−*

|*x* +1|

1 ] = + y lim

→0+

= [

∞ *x*

*x*

= [

0+

|*x* +1|

1 ] = −∞. Como los límites

laterales no coinciden, no existe lim

*x* →0

*f* (*x* ) y *f* no puede ser continua en *x* = 0. La

función tiene una discontinuidad de salto infinito en *x* = 0.

Pág. 51

Definimos la función *f* (*x* ) = *x* 2 − 2, que es continua en el intervalo [1*,* 2] por ser un polinomio. Además, como *f* (1) = −1 y *f* (2) = 2, se cumple que *f* (1)*f* (2) *<* 0, por lo tanto, utilizando el teorema de Bolzano deducimos que existe *c* ∈ (1*,* 2) tal que *f* (*c*) = 0, es decir, existe un número real en el intervalo (1*,* 2) que es solución de la ecuación *c*2 − 2 = 0.

64 / 64

# Temas 4 y 5. Derivación de funciones.

Aplicaciones de la derivada

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales Curso 2023 – 2024

# Derivada

2 / 48

### La derivada

* Ejemplo. Conocemos los siguientes datos de una determinada población:

Nº individuos

170*.*000



Nº individuos

Año

|  |  |
| --- | --- |
| 10 | 20*.*000 |
| 20 | 40*.*000 |
| 40 | 170*.*000 |

40*.*000

20*.*000

10 20 40

Año

* Queremos conocer cuánto ha crecido la población en un tiempo *t*.

3 / 48

### La derivada

* ¿Cuánto ha variado la población en el tiempo *t* = 10?
  + Utilizamos los datos de los años 10 y 20:

Variación = 40*.*000 − 20*.*000

20 − 10

* + Utilizamos los datos de los años 10 y 40: Variación = 170*.*000 − 20*.*000

40 − 10

= 2*.*000 individuos*/*año *.*

= 5*.*000 individuos*/*año *.*

* Cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo, mejor será el valor obtenido:

lim

*t*

→*t*0

*f* (*t*) − *f* (*t*0) *.*

*t* − *t*0

4 / 48

### Derivada

* Sea *f* : (*a, b*) −→ R. Decimos que *f* es derivable en *x*0 ∈ (*a, b*) si existe

lim

*x*

→*x*0

*f* (*x* ) − *f* (*x*0) *x* − *x*0

∈ R *.*

* En ese caso, el valor de la derivada de *f* en el punto *x*0 es

*f* ′(*x* ) = lim

0

*x* →*x*0

*f* (*x* ) − *f* (*x*0) *.*

*x* − *x*0

* Existen otras formas de denotar la derivada de *f* en *x*0:

*f* ′(*x*0) = *df*

*dx*

(*x*0) = *df*

(*x* )

1

*x* =*x*0 *.*

5 / 48

*dx*

### Derivada

Ejemplo. Calcula, si existe, la derivada de las siguientes funciones en el punto indicado.

•

1. *f* ′(*a*) para cualquier *a* ∈ R con *f* (*x* ) = 3*x* − 2
2. *f* ′(*a*) para cualquier *a* ∈ R con *f* (*x* ) = *x* 2
3. *f* ′(0) con *f* (*x* ) = |*x* |
4. *f* ′(0) con *f* (*x* ) = √3 *x*

5) *f* ′(0) con *f* (*x* ) = f *x* sen ( 1 J si *x* ̸= 0

*(Solución)*

0 *x* si *x* = 0

6 / 48

### Derivada de funciones elementales

Derivada

Función

|  |  |
| --- | --- |
| *f* (*x* ) = *C* , constante | *f ′*(*x* ) = 0 |
| *f* (*x* ) = *xn* | *f ′*(*x* ) = *n xn−*1 |
| *f* (*x* ) = *ex* | *f ′*(*x* ) = *ex* |
| *f* (*x* ) = log *x* | *f ′*(*x* ) = 1  *x* |
| *f* (*x* ) = sen *x* | *f ′*(*x* ) = cos *x* |
| *f* (*x* ) = cos *x* | *f ′*(*x* ) = − sen *x* |
| *f* (*x* ) = tan *x* | *f ′*(*x* ) = 1 = 1 + tan2 *x*  cos2 *x* |
| *f* (*x* ) = arcsen *x* | *f ′*(*x* ) = 1  ð1 − *x* 2 |
| *f* (*x* ) = arccos *x* | *f ′*(*x* ) = −1  ð1 − *x* 2 |
| *f* (*x* ) = arctan *x* | *f ′*(*x* ) = 1  1 + *x* 2 |

7 / 48

### Propiedades

* Proposición.

Sean *f , g* : (*a, b*) −→ R derivables en *x*0 ∈ (*a, b*). Entonces,

* + *αf* + *βg* es derivable en *x*0 ∈ (*a, b*) para cualquier *α, β* ∈ R y

(*αf* + *βg* )′(*x*0) = *αf* ′(*x*0) + *βg* ′(*x*0) *.*

* + *fg* es derivable en *x*0 ∈ (*a, b*) y

(*fg* )′(*x*0) = *f* ′(*x*0) *g* (*x*0) + *f* (*x*0) *g* ′(*x*0) *.*

* + *f* es derivable en *x*0 si *g* (*x*0) ̸= 0 y

*g*

( *f* )′ (*x*

) = *f* ′(*x*0) *g* (*x*0) − *f* (*x*0) *g* ′(*x*0) *.*

8 / 48

*g* 0 (*g* (*x*0))2

### Propiedades

* Ejemplo. Calcula la derivada de las siguientes funciones.
  + *f* (*x* ) = *x* 2 − 6*x* + cos *x*
  + *f* (*x* ) = *x* 3 *ex*
  + *f* (*x* ) = cos *x*

*x* 2 + 1

*(Solución)*

9 / 48

### Propiedades

* Regla de la cadena.

Sea *f* : (*a, b*) −→ R derivable en *x*0 ∈ (*a, b*) y sea *g* : (*c, d* ) −→ R derivable en *f* (*x*0) ∈ (*c, d* ). Entonces, *g* ◦ *f* es derivable en *x*0 y

(*g* ◦ *f* )′(*x*0) = *g* ′(*f* (*x*0)) *f* ′(*x*0) *.*

* Ejemplo. Calcula la derivada de las siguientes funciones.
  + *f* (*x* ) = log(*x* 4 + 4*x* + 4)
  + *f* (*x* ) = sen3(2*x* + 5)

*(Solución)*

10 / 48

### Derivada de funciones elementales

Derivada

Función

|  |  |
| --- | --- |
| *f* (*x* ) = *C* , constante | *f ′*(*x* ) = 0 |
| *f* (*x* ) = (*u*(*x* ))*n* | *f ′*(*x* ) = *n* (*u*(*x* ))*n−*1 *u′*(*x* ) |
| *f* (*x* ) = *eu*(*x* ) | *f ′*(*x* ) = *u′*(*x* )*eu*(*x* ) |
| *f* (*x* ) = log(*u*(*x* )) | *f ′*(*x* ) = *u′*(*x* )  *u*(*x* ) |
| *f* (*x* ) = sen(*u*(*x* )) | *f ′*(*x* ) = *u′*(*x* ) cos(*u*(*x* )) |
| *f* (*x* ) = cos(*u*(*x* )) | *f ′*(*x* ) = −*u′*(*x* ) sen(*u*(*x* )) |
| *f* (*x* ) = tan(*u*(*x* )) | *f ′*(*x* ) = *u′*(*x* ) = (1 + tan2 (*u*(*x* ))) *u′*(*x* ) cos2 (*u*(*x* )) |
| *f* (*x* ) = arcsen(*u*(*x* )) | *f ′*(*x* ) = *u′*(*x* )  ð1 − (*u*(*x* ))2 |
| *f* (*x* ) = arccos(*u*(*x* )) | *f ′*(*x* ) = −*u′*(*x* )  ð1 − (*u*(*x* ))2 |
| *f* (*x* ) = arctan(*u*(*x* )) | *f ′*(*x* ) = *u′*(*x* )  1 + (*u*(*x* ))2 |

11 / 48

### Representación gráfica

*y*

*x*



*f* (*x* )

*f* (*x*0)

*x*0

*x*

12 / 48

### Ecuación de la recta tangente

* Sea *f* : (*a, b*) −→ R derivable en *x*0 ∈ (*a, b*). La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto *x*0 ∈ (*a, b*) es

*y* − *f* (*x*0) = *f* ′(*x*0)(*x* − *x*0) *.*

* Ejemplo. Calcula, si existe, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* (*x* ) = 3*x* 2 − sen(*π x* ) en *x* = 1. *(Solución)*
* Ejemplo. Sean *f , g* : R −→ R dos funciones derivables tales que (*f* ◦ *g* )(*x* ) = *x* 2 *, g* (3) = 1 y *g* ′(3) = 7 *.*

Calcula, si existe, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en

*x* = 1. *(Solución)*

13 / 48

### Derivada de la función inversa

* Teorema. Sea *f* : (*a, b*) −→ (*c, d* ) una función continua y biyectiva. Si *f*

es derivable en *x*0 ∈ (*a, b*) con *f* ′(*x*0) ̸= 0, entonces la función inversa

*f* −1 : (*c, d* ) −→ (*a, b*) es derivable en *y*0 = *f* (*x*0) y además

!*f* −1"′

(*y*0) =

1

*f* ′(*x*0) *.*

Ejemplo. Utiliza el teorema de la función inversa para calcular las siguientes derivadas.

•

1. Derivada de *g* (*y* ) = log *y* sabiendo que *f* (*x* ) = *ex* y *f* ′(*x* ) = *ex*
2. Derivada de *g* (*y* ) = arcsen *y* sabiendo que *f* (*x* ) = sen *x* y *f* ′(*x* ) = cos *x*

*(Solución)*

14 / 48

### Relación entre continuidad y derivabilidad

* Teorema. Sea *f* : (*a, b*) −→ R. Si *f* es derivable en *x*0 ∈ (*a, b*), entonces

*f* es continua en *x*0 ∈ (*a, b*).

* El recíproco no es cierto.

Ejemplo. Determina si las siguientes funciones son continuas y/o derivables en el punto indicado.

•

* 1. *f* (*x* ) = |*x* | en *x* = 0
  2. *f* (*x* ) = � *x* 2 si *x* ≤ 1

3*x* si *x >* 1

en *x* = 1

*(Solución)*

15 / 48

### Regla de L’Hôpital

* Regla de L’Hôpital.

Sea *x*0 ∈ (*a, b*) y sean *f , g* dos funciones derivables en (*a, b*) \ { *x*0 }. Si *g* ′(*x* ) ̸= 0 para *x* ∈ (*a, b*) \ { *x*0 } y

�

lim

*x*

→*x*0

*f* (*x* ) = lim

→*x*0

*x*

*g* (*x* ) = 0 *,*

±∞ *,*

con lim

→*x*0

*x*

*f* ′(*x* )

*g* ′(*x* )

= *L ,*

entonces lim

*x*

→*x*0

*f* (*x* )

*g* (*x* )

= *L .*

* Se puede extender el resultado si *x* → ±∞ o si *L* = ±∞.
* Ejemplo. Calcula, si existen, los siguientes límites.
  1. lim

*x* →∞

log *x x*

* 1. lim

*x* →0

sen *x x*

*(Solución)*

16 / 48

# Estudio de la derivabilidad de una función

17 / 48

### Estudio de la derivabilidad de una función

* Sea *f* : [*a, b*] −→ R.
* Si *x*0 ∈ (*a, b*), calculamos *f* ′(*x*0) con las reglas de derivación.
* Si *x*0 = *a* o *x*0 = *b*, calculamos *f* ′(*x*0) con la definición:

*f* ′(*x*0) = lim

*x* →*x*0

*f* (*x* ) − *f* (*x*0) *x* − *x*0

∈ R *.*

18 / 48

### Estudio de la derivabilidad de una función

* Si queremos utilizar las "derivadas laterales":

Sea *f* : (*a b*) con *f* continua en (*a, b*) *,*

* Teorema. *,* −→ R f

*f* derivable en (*a, b*) \ { *x*0 } *,*

se cumple:

* 1. si lim

*x* →*x*0*−*

* 1. si lim

*x* →*x*0*−*

*f* ′(*x* ) = lim *f* ′(*x* ) = *L* R, entonces *f* es derivable en *x*0 y *f* ′(*x*0) = *L*;

→*x*0

*x* + ∈

*f* ′(*x* ) = lim *f* ′(*x* ), entonces *f* no es derivable en *x*0;

̸ *x* +

→*x*0

* 1. si lim

*x* →*x*0*−*

*f* ′(*x* ) = ±∞ o

*x* lim+ *f* ′(*x* ) = ±∞, entonces *f* no es derivable en *x*0.

19 / 48

→*x*0

### Estudio de la derivabilidad de una función

* Ejemplo. Estudia derivabilidad de las siguientes funciones.

 *e x*

1

si *x <* 0 *,*

* 1. *f* (*x* ) =



*e*

2) *f* (*x* ) = f *x* 2 cos ( 1 J si *x* ̸= 0 *,*

0 si *x* = 0 *,*

− 1

*x* si *x >* 0 *.*

0

*(Solución)*

20 / 48

*x* si *x* = 0 *.*

# Teorema de Rolle

21 / 48

### Teorema de Rolle

Teorema de Rolle. Sea *f* : [*a, b*] R una función continua en [*a, b*] y derivable en (*a, b*). Si *f* (*a*) = *f* (*b*), entonces existe *c* (*a, b*) con

∈

* −→

*f* ′(*c*) = 0.

*y*

*f* (*a*) = *f* (*b*)



*a c b* *x*

Ejemplo. Demuestra que la ecuación *x* 3 + *x* 1 = 0 tiene una única solución real. *(Solución)*

* −

22 / 48

# Derivadas de orden superior

23 / 48

### Derivadas de orden superior

* Si *f* (*x* ) es derivable, *f* ′(*x* ) es la derivada primera de *f* (*x* ).
* Si *f* ′(*x* ) es derivable, *f* ′′(*x* ) es la derivada segunda de *f* (*x* ).
* Si *f* ′′(*x* ) es derivable, *f* ′′′(*x* ) es la derivada tercera de *f* (*x* ).
* *. . .*
* Si *f* (*x* ) es derivable *n* veces, *f* (*n*)(*x* ) es la derivada *n*-ésima de *f* (*x* ).
* Ejemplo. Calcula la derivada tercera de las siguientes funciones.

1) *f* (*x* ) = *ex* 2) *g* (*x* ) = *x* 3 − 2*x* 2 + 5*x* − 7

*(Solución)*

24 / 48

# Desarrollo de Taylor

25 / 48

### Desarrollo de Taylor

Sea *f* : (*a, b*) R una función *n* + 1 veces derivable. Se define el polinomio de Taylor de orden (o grado) *n* centrado en el punto *x*0 ∈ (*a, b*) como

* −→

*Pn,x*0

(*x* ) = *f* (*x*0

) + *f* ′(*x*0

)(*x*

− *x*0

) + *f* ′′(*x*0)(*x*

− *x*0

)2 +

· · ·

+ *f* (*n*)(*x*0)(*x*

− *x*0)*n .*

* Se define el resto de Taylor como

2!

*n*!

*Rn,x*0

(*x* ) = (*x*

*f* (*n*+1)(*ξ*)

(*n* + 1)!

− *x*0

)*n*+1

para cierto valor *ξ* entre *x*0 y *x* .

* Se cumple *f* (*x* ) = *Pn,x*0 (*x* ) + *Rn,x*0 (*x* ).

26 / 48

### Desarrollo de Taylor

*y*

*f* (*x* ) = sen(*x* )



*x P*3*,*0

*P*5*,*0

(*x* ) = *x* − *x*

(*x* ) = *x* − *x*

+

3

6

3

6

*x* 5

120

27 / 48

### Desarrollo de Taylor

* Ejemplo.
  1. Calcula el polinomio de Taylor de *f* (*x* ) = log *x* centrado en *x* = 1 de grado 3.
  2. Aproxima el valor del número *e* con un error menor de 10−2 utilizando un polinomio de Taylor.
  3. Calcula el polinomio de Taylor de *f* (*x* ) = cos(2*x* ) centrado en el origen y de orden 3. Utiliza ese polinomio para obtener una aproximación a cos 1 y acota dicho error.

*(Solución)*

28 / 48

### Desarrollo de Taylor

Proposición. Sea *Pn x* (*x* ; *f* ) el polinomio de Taylor de orden *n* centrado de *x*0 de *f* . Se cumple:

* *,* 0

1. *Pn,x*0 (*x* ; *αf* ) = *αPn,x*0 (*x* ; *f* ) para todo *α* ∈ R.
2. *Pn,x*0 (*x* ; *f* + *g* ) = *Pn,x*0 (*x* ; *f* ) + *Pn,x*0 (*x* ; *g* )
3. *Pn,x*0 (*x* ; *fg* ) = *Pn,x*0 (*x* ; *f* ) · *Pn,x*0 (*x* ; *g* ) truncado hasta grado *n*.
4. *Pnm,x*0 (*x* ; *f* (*xm* )) = *Pn,x*0 (*xm* ; *f* ).

29 / 48

### Desarrollo de Taylor

* Ejemplo. Sean *f*1(*x* ) = *e*−*x* 2 y *f*2(*x* ) = cos *x* . Sabiendo que

2

calcula

2

*P*3*,*0

(*x* ; *f*1

) = 1

− *x* 2 y *P*3*,*0

(*x* ; *f*2

) = 1 − *x ,*

1. *P*3 (*x , g* ) siendo *g* (*x* ) = *e*−*x* 2 cos *x*

*,*0

1. *P*6*,*0(*x , h*) siendo *h*(*x* ) = cos *x* 2

*(Solución)*

30 / 48

# Monotonía y extremos

31 / 48

### Monotonía

* Sea *f* : R −→ R.
* *f* es creciente en (*a, b*) ⊆ Dom (*f* ) si para *x < y* con *x , y* ∈ (*a, b*), entonces *f* (*x* ) ≤ *f* (*y* ).
* *f* es estrictamente creciente en (*a, b*) ⊆ Dom (*f* ) si para *x < y* con

*x , y* ∈ (*a, b*), entonces *f* (*x* ) *< f* (*y* ).

* *f* es decreciente en (*a, b*) ⊆ Dom (*f* ) si para *x < y* con *x , y* ∈ (*a, b*), entonces *f* (*x* ) ≥ *f* (*y* ).
* *f* es estrictamente decreciente en (*a, b*) ⊆ Dom (*f* ) si para *x < y* con

*x , y* ∈ (*a, b*), entonces *f* (*x* ) *> f* (*y* ).

* Ejemplo. Estudia la monotonía de la siguiente función.
  1. *f* (*x* ) = *x* − 7 *(Solución)*

32 / 48

### Monotonía

* Teorema. Sea *f* : (*a, b*) −→ R derivable.
  1. Si *f* ′(*x* ) *>* 0 para todo *x* (*a, b*), entonces *f* es estrictamente creciente en (*a, b*).

∈

* 1. Si *f* ′(*x* ) ≥ 0 para todo *x* ∈ (*a, b*), entonces *f* es creciente en (*a, b*).
  2. Si *f* ′(*x* ) *<* 0 para todo *x* (*a, b*), entonces *f* es estrictamente decreciente en (*a, b*).

∈

* 1. Si *f* ′(*x* ) ≤ 0 para todo *x* ∈ (*a, b*), entonces *f* es decreciente en (*a, b*).
* Ejemplo. Estudia la monotonía de las siguientes funciones.
  1. *f* (*x* ) = *e*−*x* 2) *f* (*x* ) = *x* 2

*(Solución)*

33 / 48

### Extremos locales

* Sea *f* : R −→ R.
* *f* tiene un máximo local o relativo en *x*0 ∈ Dom (*f* ) si existe *δ >* 0 tal que

*f* (*x*0) ≥ *f* (*x* ) para todo *x* ∈ Dom (*f* ) ∩ (*x*0 − *δ, x*0 + *δ*).

* *f* tiene un mínimo local o relativo en *x*0 ∈ Dom (*f* ) si existe *δ >* 0 tal que

*f* (*x*0) ≤ *f* (*x* ) para todo *x* ∈ Dom (*f* ) ∩ (*x*0 − *δ, x*0 + *δ*).

*f* tiene un extremo local o relativo en *x*0 Dom (*f* ) si *x*0 es máximo o mínimo local.

* ∈

Todos los puntos de la función constante *f* (*x* ) = *C* son máximos y mínimos relativos.

•

* Ejemplo.
  1. La función *f* (*x* ) = *x* 2 tiene un mínimo local en *x* = 0 *(Solución)*

34 / 48

### Extremos absolutos

* Sea *f* : R −→ R.
* *f* tiene un máximo absoluto en *x*0 ∈ Dom (*f* ) si *f* (*x*0) ≥ *f* (*x* ) para todo

*x* ∈ Dom (*f* ).

* *f* tiene un mínimo absoluto en *x*0 ∈ Dom (*f* ) si *f* (*x*0) ≤ *f* (*x* ) para todo

*x* ∈ Dom (*f* ).

*f* tiene un extremo absoluto en *x*0 Dom (*f* ) si *x*0 es máximo o mínimo absoluto.

* ∈

Todo extremo absoluto es extremo relativo, pero un extremo relativo puede no ser extremo absoluto.

•

* Ejemplo.
  1. La función *f* (*x* ) = *x* 2 tiene un mínimo absoluto en *x* = 0 *(Solución)*

35 / 48

*y*

*x*



*a*

*c*

*b*

Extremos relativos *f* tiene un mínimo local en *x* = *a* y en *x* = *c*

* f

*f* tiene un máximo local en *x* = *b*

Extremos absolutos *f* tiene un mínimo absoluto en *x* = *c*

* f

*f* no tiene ningún máximo absoluto

36 / 48

### Extremos

* Teorema. Sea *f* : (*a, b*) −→ R derivable. Si *f* tiene un extremo relativo en *x*0 ∈ (*a, b*), entonces *f* ′(*x*0) = 0.
* El recíproco no es cierto.
* Ejemplo.
  1. *f* (*x* ) = *x* 4 − 4*x* 3 cumple
     + *f* ′(0) = 0,
     + *x* = 0 no es extremo local.

*(Solución)*

37 / 48

### Punto crítico

Sea *f* : R R. Decimos que *a* Dom (*f* ) es un punto crítico de *f* si existe *f* ′(*a*) = 0 o si no existe *f* ′(*a*).

* −→ ∈
* Un punto crítico puede ser o no extremo relativo.
* Teorema. Sea *f* : R −→ R una función dos veces derivable y sea

*a* ∈ Dom (*f* ) un punto crítico de *f* . Se cumple:

* 1. Si *f* ′′(*a*) *>* 0, entonces *f* tiene un mínimo local en *a*.
  2. Si *f* ′′(*a*) *<* 0, entonces *f* tiene un máximo local en *a*.
* Ejemplo. Estudia la monotonía y extremos de la siguiente función.
  1. *f* (*x* ) = *x* 3 − 9*x* 2 + 15*x* en [0*,* +∞) *(Solución)*

38 / 48

# Soluciones

39 / 48

Pág. 6

1. *f* ′(*a*) = lim

*x* →*a*

*f* (*x* )−*f* (*a*) *x* −*a*

= lim

*x* →*a*

(3*x* −2)−(3*a*−2)

*x* −*a*

= lim

*x* →*a*

3(*x* −*a*)

*x* −*a*

= 3.

1. *f* ′(*a*) = lim

*x* →*a*

*f* (*x* )−*f* (*a*) *x* −*a*

= lim

*x* →*a*

*x* 2 −*a*2 *x* −*a*

= lim

*x* →*a*

(*x* −*a*)(*x* +*a*)

*x* −*a*

= lim (*x* + *a*) = 2*a*.

*x* →*a*

1. *f* ′(0) = lim

*x* →0

*f* (*x* )−*f* (0) *x* −0

= lim

*x* →0

|*x* |−0

*x* −0

= lim

*x* →0

*x*

0

*x*

|*x* |

= [ 0 ]. Resolvemos la indeterminación

calculando los límites laterales: lim

*x* →0+

|*x* |

= lim *x x* →0+ *x*

= lim

*x* →0+

1 = 1 y

lim

*x*

−

*x* →0*−*

|*x* |

= lim

*x* →0*−*

*x* = lim

*x x* →0*−*

−1 = −1. Al no coincidir los límites laterales, no existe

lim

*x* →0

*f* (*x* )−*f* (0) *x* −0

y por lo tanto *f* no es derivable en *x* = 0.

1. Como lim

*x* →0

1

*f* (*x* )−*f* (0) = lim

*x* −0 *x* →0

√3 *x* −0 = lim

*x* −0 *x* →0

√3 *x* 2 = +∞ no es un número real, deducimos

que *f* no es derivable en *x* = 0.

*x*

1. lim

*x* →0

*f* (*x* )−*f* (0) *x* −0

= lim

*x* →0

*x* sen( 1 )−0

*x* −0

*x*

= lim

*x* →0

sen( 1 ). Como este límite no existe, deducimos

que *f* no es derivable en *x* = 0.

40 / 48

Pág. 9

1. *f* ′(*x* ) = 2*x* − 6 − sen *x* .
2. *f* ′(*x* ) = 3*x* 2 *ex* + *x* 3 *ex* .
3. *f* ′(*x* ) = − sen *x* (*x* 2 +1)−2*x* cos *x* .

(*x* 2 +1)2

Pág. 10

1. *f* ′(*x* ) = 4*x* 3 +4 .

*x* 4 +4*x* +4

1. *f* ′(*x* ) = 3 sen2(2*x* + 5) cos(2*x* + 5)2.

Pág. 13

Calculamos *f* ′(*x* ) = 6*x* − *π* cos(*π x* ) y como *f* ′(1) = 6 − *π* cos *π* = 6 + *π* y

*f* (1) = 3 − sen *π* = 3, la ecuación de la recta tangente es *y* − 3 = (6 + *π*)(*x* − 1), es decir,

*y* = (6 − *π*)*x* + *π* − 3.

Pág. 13

Sabemos que *f* (1) = *f* (*g* (3)) = 32 = 9 y como 2*x* = (*f* ◦ *g* )′(*x* ) = *f* ′(*g* (*x* ))*g* ′(*x* ), entonces 6 = 2 · 3 = *f* ′(*g* (3))*g* ′(3) = *f* ′(1) · 7 ⇒ *f* ′(1) = 6 . Por tanto, la ecuación de la recta

tangente es *y*

7

− 9 = 6 (*x*

− 1), es decir, 7*y*

7

− 6*x* = 57.

41 / 48

Pág. 14

1. La inversa de *f* (*x* ) = *ex* es *g* (*y* ) = log *y* . Entonces *g* ′(*y* ) =

1 1 1

=

*y*

= .

*f ′*(*x* ) *ex*

=

1

1. La inversa de *f* (*x* ) = sen *x* es *g* (*y* ) = arcsen *y* . Entonces *g* ′(*y* ) =

1

*f ′*(*x* )

cos *x* =

1−sen2 *x* = 1−*y* 2 .

√

√

= 1

1

Pág. 15

1. ◦ *f* es continua en *x* = 0 por ser el valor absoluto de un polinomio.
   * *f* no es derivable en *x* = 1 (probado en Pág. 6, apartado (3)).
2. ◦ *f* no es continua en *x* = 1 porque no existe lim *f* (*x* ) al no coincidir los límites

laterales: lim

*x* →1*−*

*f* (*x* ) = lim *x* 2

*x* →1*−*

= 1 y lim

*x* →1+

*x* →1

*f* (*x* ) = lim

*x* →1+

3*x* = 3.

* *f* no es derivable en *x* = 1 porque no es continua en dicho punto.

Pág. 16

1. lim

log *x*

= [ ∞ ] =

lim

1*/x*

= 0.

*x* →∞ *x*

∞ L*↑*’H

*x* →∞ 1

1. lim

sen *x*

= [ 0 ] =

lim

cos(*x* )

= 1.

*x* →0 *x*

0

L*↑*’H

*x* →0 1

42 / 48

Pág. 20

1. *f* es derivable si *x* = 0 por ser composición de funciones derivables (exponencial y cociente de polinomio con denominador no nulo). Además,

̸

� −*x* 1 *e*1*/x* si *x <* 0 *,*

*x* 2

*f* ′(*x* ) =

2

1 *e −* 1*/x* si *x >* 0 *.*

Por otro lado, *f* ′(0) = lim

*x* →0

*f* (*x* )−*f* (0) *x* −0

pero como *f* tiene dos expresiones distintas alrede-

dor de *x* = 0, tenemos que calcular los límites laterales:

1*/x*

+∞

lim

*f* (*x* )−*f* (0) = lim

*e*1*/x* −0 =[ 0 ] = lim

1*/x* =[ −∞ ] =

lim

*−* 1*/x* 2 = lim

−*e* = 0 *,*

*x* →0*−*

*x* −0

*x* →0*−*

*x* −0

0 *x* →0*−*

*e−*1*/x*

L*↑*’H*x* →0*−*

1*/x* 2 *e−*1*/x*

*x* →0*−*

lim

*f* (*x* )−*f* (0) = lim

*e−*1*/x* −0 =[ 0 ] = lim

1*/x*

= [ −∞ ] =

lim

*−* 1*/x* 2 = lim

*e*−1*/x* = 0 *.*

*x* →0+

*x* −0

*x* →0+

*x* −0

0 *x* →0+

*e*1*/x*

L*↑*’H*x* →0+

−1*/x* 2 *e*1*/x*

*x* →0+

Como los límites laterales coinciden, existe *f* ′(0) = 0.

+∞

1. *f* es derivable si *x* = 0 por ser producto y composición de funciones derivables (poli- nomio, coseno y un cociente de polinomios con denominador no nulo). Además, *f* ′(*x* ) = 2*x* cos( 1 ) + sen( 1 ) si *x* ̸= 0.

̸

*x*

*x*

Por otro lado, *f* ′(0) = lim

*x* →0

*x*

*f* (*x* )−*f* (0) *x* −0

= lim

*x* →0

1

*x* 2 cos( 1 )−0

*x* −0

*x*

= lim

*x* →0

*x* cos( 1 ) = 0 por el

criterio del sándwich ( lim

*x* →0

*x* = 0 y 1cos( *x* )1 ≤ 1). Concluimos que *f* es derivable en

*x* = 0 y *f* ′(0) = 0.

43 / 48

Pág. 22

* *Existencia de solución.* Definimos *f* (*x* ) = *x* 3 + *x* − 1, que es continua en el intervalo [0*,* 1] y además cumple *f* (0) = −1 y *f* (1) = 1. Entonces, por el teorema de Bolzano, existe *c* ∈ (0*,* 1) con *f* (*c*) = 0, es decir, *c*3 + *c* − 1 = 0.

*Unicidad de solución.* Razonamos por reducción al absurdo. Suponemos que existen dos soluciones distintas: *c* y *d* . Es decir, *f* (*c*) = *f* (*d* ) = 0 con *c* = *d* (por ejemplo, *c < d* ). Como *f* es continua y derivable en R, en particular es continua en [*c, d* ] y derivable en (*c, d* ). Además, como *f* (*c*) = *f* (*d* ), el teorema de Rolle indica que existe *e* (*c, d* ) con *f* ′(*e*) = 0. Pero esto no es posible ya que *f* ′(*x* ) = 3*x* 2 + 1 *>* 0. Por lo tanto, la solución es única.

̸

•

∈

Pág. 24

1. *f* (*x* ) = *ex* ⇒ *f* ′(*x* ) = *f* ′′(*x* ) = *f* ′′′(*x* ) = *ex* .
2. *g* (*x* ) = *x* 3 − 2*x* 2 + 5*x* − 7 ⇒ *f* ′(*x* ) = 3*x* 2 − 4*x* + 5 ⇒ *f* ′′(*x* ) = 6*x* − 4 ⇒ *f* ′′′(*x* ) = 6.

Pág. 28

1. Calculamos *f* (*x* ) = log *x* ⇒ *f* (1) = log 1 = 0, *f* ′(*x* ) = 1 ⇒ *f* ′(1) = 1, *f* ′′(*x* ) = −*x* 1 ⇒

*f* ′′(1) = −1 y *f* ′′′(*x* ) =

*x* 2

2 ⇒ *f* ′′′(1) = 2. Entonces:

*x* 3

*P*3*,*1(*x* ) = *f* (1)+*f* ′(1)(*x* −1)+ *f ′′*(1) (*x* −1)2+ *f ′′′*(1) (*x* −1)3 = (*x* −1)− 1 (*x* −1)2+ 1 (*x* −1)3 *.*

2!

3!

2

3

44 / 48

1. Utilizaremos la función *f* (*x* ) = *ex* para aproximar el valor *f* (1) = *e* utilizando un polinomio de Taylor centrado en *x* = 0 y calculamos y acotamos el término del error.

Como *f* (*x* ) = *f* ′(*x* ) = *f* ′′(*x* ) = = *f* (*n*)(*x* ) = *ex* , para cualquier *n* N, el término del error es

· · · ∈

*Rn* 0(*x* ) = *f* (*n*+1)(*ξ*) (*x* − 0)*n*+1 = *eξ*

*,*

(*n*+1)!

(*n*+1)!

*xn*+1 *,* con *ξ* entre 0 y *x .*

Evaluamos en el punto *x* = 1 (para aproximar *e* y no *ex* ) y acotamos:

3

3

(*n*+1)!

(*n*+1)!

1

1 (*n*+1)! 1

(*n*+1)!

(*n*+1)!

(*n*+1)!

Queremos averiguar el valor *n* ∈ N tal que 3

≤ 10−2 ⇔ 300 *<* (*n* +1)!. Probamos

|*R* (1)| = 1 *eξ*

*n,*0

1*n*+11 = 1 *eξ*

1 ≤ 1 *e*

1 ≤ 1 1 = *.*

con distintos valores de *n*:

*n* = 1 ⇒ (*n* + 1)! = 2! = 2 *, n* = 4 ⇒ (*n* + 1)! = 5! = 120 *,*

*n* = 2 ⇒ (*n* + 1)! = 3! = 6 *, n* = 5 ⇒ (*n* + 1)! = 6! = 720 *.*

*n* = 3 ⇒ (*n* + 1)! = 4! = 24 *,*

Por lo tanto, el error cometido al aproximar *e* con *P*5*,*0(1) es menor que 10−2 siendo

2

+

+

+

2

+

6

*P*5*,*0

(*x* ) = 1 + *x* + *x* 2

*x* 3 *x* 4

6 24

*x* 5

120

y *P*5*,*0

(1) = 1 + 1 + 1 1

1 1

24 120

+

+ .

45 / 48

1. Calculamos *f* (*x* ) = cos(2*x* ) ⇒ *f* (0) = 1, *f* ′(*x* ) = −2 sen(2*x* ) ⇒ *f* ′(0) = 0,

*f* ′′(*x* ) = −4 cos(2*x* ) ⇒ *f* ′′(0) = −4, *f* ′′′(*x* ) = 8 sen(2*x* ) ⇒ *f* ′′′(0) = 0. Entonces:

*P*3*,*0(*x* ) = *f* (0) + *f* ′(0)*x* + *f* ′′(0) *x* 2 + *f* ′′′(0) *x* 3 = 1 − 2*x* 2

2! 3!

y cos 1 ≈ *P*3*,*0( 1 ) = 1 − 1 = 1 . Además, como *f* (*iv* )(*x* )) = 16 cos(2*x* ), entonces

2 2 2 1

acotamos el error (para cierto *c* ∈ (0*,* 2 ):

1*R* ( 1 J1 = 1 *f* (*iv* )(*c*)

1 =

1 24| cos(2*c*)| 1 1

Pág. 30

2

1 3*,*0 2 1

1 4!

24 1

3 · 23

24 ≤

24 *.*

1. Como *P*3 0(*x , f*1) · *P*3 0(*x , f*2) = (1 − *x* 2)(1 − *x* 2 ) = 1 − 3*x* 2

*,*

*,*

2

2

+ *x* 4 , entonces

*P*3 0(*x , g* ) = 1 − 3*x* 2 .

*,*

2

1. *P*6 0(*x , h*) = *P*3 0(*x* 2 *, f*2) = 1 − *x* 4 .

*, ,* 2

Pág. 32

1. *f* es estrictamente creciente en R ya que si *x < y* , entonces *f* (*x* ) = *x* −7 *< y* −7 = *f* (*y* ).

46 / 48

Pág. 33

1. Como *f* es derivable en R, calculamos *f* ′(*x* ) = *e*−*x <* 0 para todo *x* R. Por lo tanto, *f* es decreciente en R.

− ∈

1. Como *f* es derivable en R, calculamos *f* ′(*x* ) = 2*x* :
   * Si *x >* 0, entonces *f* ′(*x* ) = 2*x >* 0. Por lo tanto *f* es estrictamente creciente en (0*,* +∞).
   * Si *x <* 0, entonces *f* ′(*x* ) = 2*x <* 0. Por lo tanto *f* es estrictamente decreciente en (−∞*,* 0).

Pág. 34

1) Cierto ya que *f* (0) = 0 ≤ *x* 2 = *f* (*x* ) para todo *x* ∈ R.

Pág. 35

1) Cierto ya que *f* (0) = 0 ≤ *x* 2 = *f* (*x* ) para todo *x* ∈ R.

Pág. 37

1. Cierto porque *f* ′(*x* ) = 4*x* 3 − 12*x* 2 = 4*x* 2(*x* − 3) y entonces *f* ′(0) = 0. Además, *f* ′(*x* ) ≥ 0 si *x* ≥ 3 y *f* ′(*x* ) ≤ 0 si *x* ≤ 3; entonces *f* es decreciente en (−∞*,* 3) y creciente en (3*,* +∞) y concluimos que *x* = 0 no es extremo local.

47 / 48

Pág. 38

1. Como *f* es un polinomio, está definida en [0*,* +∞) y es infinitas veces derivable.
   * Calculamos los puntos críticos: Como *f* ′(*x* ) = 3*x* 2 − 18*x* + 15 = 3(*x* − 1)(*x* − 5),

f *x* = 0

*,*

entonces *f* ′(*x* ) = 0 ⇒

*x* = 1 *,*

*x* = 5

Estudiamos la monotonía: Como *f* ′(*x* ) es continua, solo puede cambiar de signo en los puntos críticos.

◦

Monotonía de *f* (*x* ) ***↗ ↘ ↗***

Signo de *f ′*(*x* ) + ***−***



0 1

+

5 +∞

Deducimos que *f* es creciente en (0*,* 1) (5*,* + ) y decreciente en (1*,* 5). Extremos locales: *f* tiene mínimos locales en *x* = 0 y *x* = 5 y un máximo local en *x* = 1.

◦

∩ ∞

* + Extremos absolutos.

▶ Candidatos a mínimo absoluto:

*x* = 0 *f* (0) = 0 *,*

*x* = 5 ⇒ *f* (5) = −25 *.*

{ ⇒ Como *f* (5) *<*

*f* (0), el mínimo absoluto se alcanza en *x* = 5.

�

▶ Candidatos a máximo absoluto: *x* = 1 ⇒ *f* (1) = 7 *,*

Como lim

*f* (*x* ) = +

*x* → +∞ ⇒

lim

*x* →+∞

*f* (*x* ) = +∞ *.*

48 / 48

*x* →+∞

∞, *f* no tiene máximo absoluto.

# Tema 6. Cálculo Integral

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales Curso 2023 – 2024

# Primitivas

2 / 55

### Primitivas

* Sea *f* : (*a, b*) −→ R. Decimos que *F* : (*a, b*) −→ R es una primitiva de *f*

si *F* es derivable en (*a, b*) y *F* ′(*x* ) = *f* (*x* ) para todo *x* ∈ (*a, b*).

* Ejemplo. Calcula una primitiva de las siguientes funciones.
  1. *f* (*x* ) = *ex* 2) *g* (*x* ) = 2*x* 3) *h*(*x* ) = cos *x*

*(Solución)*

* La primitiva de una función no es única.
* Denotamos por  *f* (*x* ) *dx* el conjunto de todas las primitivas de *f* (*x* ):

 *f* (*x* ) *dx* = *F* (*x* ) + *C .*

3 / 55

### Primitivas

Toda función continua tiene primitiva, aunque no siempre se puede calcular explícitamente.

•

* Ejemplo.
  1. *f* (*x* ) = *ex* 2 no tiene una primitiva que se pueda expresar como combinación de funciones elementales.
* La variable de integración se puede cambiar por cualquier otro símbolo:

 *f* (*x* ) *dx* =  *f* (*y* ) *dy* =  *f* (*t*) *dt* =  *f* (*σ*) *dσ .*

4 / 55

# Integrales inmediatas

5 / 55

### Integrales inmediatas

Primitiva

Función

*f* (*x* ) *dx* = *xn*+1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *f* (*x* ) | = *xn* | *n*+1 | | | |
| *f* (*x* ) | = 1  *x* |    | *f* (*x* ) *dx* | = | log |*x* | + *C* |
| *f* (*x* ) | = *ex* |  | *f* (*x* ) *dx* | = | *ex* + *C* |
| *f* (*x* ) | = sen *x* |  | *f* (*x* ) *dx* | = | − cos *x* + *C* |
| *f* (*x* ) | = cos *x* |  | *f* (*x* ) *dx* | = | sen *x* + *C* |
| *f* (*x* ) | = 1  cos2 *x* |  | *f* (*x* ) *dx* | = | tan *x* + *C* |
| *f* (*x* ) | = 1  1 + *x* 2 |  | *f* (*x* ) *dx* | = | arctan *x* + *C* |
| *f* (*x* ) | = 1  J1 − *x* 2 |  | *f* (*x* ) *dx* | = | arcsen *x* + *C* = − arccos *x* + *C* |

+ *C* si *n* = −1

6 / 55

### Integrales inmediatas

* Ejemplo. Calcula:
  1.  *ex dx*
  2.  *x* 5 *dx*
  3.  1 *dx*

*x*

2*x x* 2 + 7

4)  *dx*

*(Solución)*

7 / 55

### Integrales inmediatas

Primitiva

Función

*f* (*x* ) *dx* = (*u*(*x* ))*n*+1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *f* (*x* ) | = | *u′*(*x* )(*u*(*x* ))*n* | *n*+1 | | | |
| *f* (*x* ) | = | *u′*(*x* )  *u*(*x* ) |    | *f* (*x* ) *dx* | = | log |*u*(*x* )| + *C* |
| *f* (*x* ) | = | *u′*(*x* ) *eu*(*x* ) |  | *f* (*x* ) *dx* | = | *eu*(*x* ) + *C* |
| *f* (*x* ) | = | *u′*(*x* ) sen(*u*(*x* )) |  | *f* (*x* ) *dx* | = | − cos(*u*(*x* )) + *C* |
| *f* (*x* ) | = | *u′*(*x* ) cos(*u*(*x* )) |  | *f* (*x* ) *dx* | = | sen(*u*(*x* )) + *C* |
| *f* (*x* ) | = | *u′*(*x* )  cos2 (*u*(*x* )) |  | *f* (*x* ) *dx* | = | tan(*u*(*x* )) + *C* |
| *f* (*x* ) | = | *u′*(*x* )  1 + (*u*(*x* ))2 |  | *f* (*x* ) *dx* | = | arctan(*u*(*x* )) + *C* |
| *f* (*x* ) | = | *u′*(*x* )  J1 − (*u*(*x* ))2 |  | *f* (*x* ) *dx* | = | arcsen(*u*(*x* )) + *C* = − arccos(*u*(*x* )) + *C* |

+ *C* si *n* = −1

8 / 55

### Integrales inmediatas

* Ejemplo. Calcula:
  1.  3*e*3*x dx*
  2.  (*x* − 3)5 *dx*

3) 

3

4*x*

*x* 4 + 1 *dx*

*(Solución)*

9 / 55

### Propiedades

* Proposición.

Sean *f , g* : R −→ R integrables. Entonces,

* 1.  *αf* (*x* ) *dx* = *α*  *f* (*x* ) *dx* para todo *α* ∈ R.
  2.  (*f* (*x* ) + *g* (*x* )) *dx* =  *f* (*x* ) *dx* +  *g* (*x* ) *dx* .

10 / 55

### Cálculo de primitivas

* Ejemplo. Calcula:
  1.  (4*x* 2 − 1) *x dx*

6) 

√3 − 4*x* 2 *dx*

1

* 1.  J*x* √*x dx*

cos *x* sen *x*

7) 

*dx*

* 1.  *x* 4 − 3*x* 3 + *x* − 2 *dx*

3*x*

4) 

√

1. √1 − *x dx*

 1 + *x*

2

4 + 5*x*

2 *dx*

1. 

tan *x dx*

5)  (*e*3*x* − *ex* ) *dx*

1. 

tan2 *x dx*

11 / 55

*(Solución)*

# Métodos de integración

12 / 55

# Métodos de integración Cambio de variable

13 / 55

### Cambio de variable

* Se deduce de la regla de la cadena. Si *F* es una primitiva de *f* se cumple:

 *f* (*x* ) *dx* = *F* (*x* ) + *C* = *F* (*g* (*t*)) + *C* =  (*F* ◦ *g* )′(*t*) *dt*

=  *F* ′(*g* (*t*))*g* ′(*t*) *dt* =  *f* (*g* (*t*))*g* ′(*t*) *dt .*

* Una vez resuelta la integral hay que deshacer el cambio de variable.

14 / 55

### Cambio de variable

* Ejemplo. Calcula:

1. 

1) 

*x* log *x dx*

√*x* (1 + *x* ) *dx*

1

1

* 1.  *x* √1 − *x dx*
  2.  *x* 3J2 + 7*x* 2 *dx*

1. 

cos *x*

*dx*

sen2 *x* + 4 sen *x* + 5

*(Solución)*

15 / 55

# Métodos de integración Integración por partes

16 / 55

### Integración por partes

* Se deduce de la fórmula de la derivada de un producto:

*f* (*x* )*g* (*x* ) =  (*f* (*x* )*g* (*x* ))′ *dx* =  *f* ′(*x* )*g* (*x* ) *dx* +  *f* (*x* )*g* ′(*x* ) *dx .*

* Usualmente escribimos  *u dv* = *u v* −  *v du*.
* En general, es útil para integrar productos de funciones del tipo:





Derivar

↓

Integrar







Arco Logaritmos Polinomios Exponenciales Senos y cosenos

17 / 55

### Integración por partes

* Ejemplo. Calcula:
  1.  *x ex dx*
  2.  log *x dx*
  3.  *x* cos *x dx*

*(Solución)*

18 / 55

* 1.  *x* 3 cos(*x* 2) *dx*
  2.  arcsen ( *x* } *dx*

2

### Integración por partes

* + - Ejemplo. Integrales cíclicas
      1.  sen *x ex dx*
      2.  sen2 *x dx*

*(Solución)*

* + - Otra manera de resolver  sen2 *x dx* : usando la trigonometría

19 / 55

# Métodos de integración Descomposición en fracciones simples

20 / 55

### Descomposición en fracciones simples

*P*(*x* )

* 

*Q*(*x* )

*dx* con *P*(*x* ) y *Q*(*x* ) polinomios

1. Si grado(*P*(*x* )) grado(*Q*(*x* )), se dividen los polinomios utilizando el algo- ritmo de la división.

≥

1. Si grado(*P*(*x* )) *<* grado(*Q*(*x* )), se comprueba si la primitiva es un logaritmo y si no es así, se factoriza el denominador.
2. Descomposición en fracciones simples. A cada uno de los factores del deno- minador le asignamos una fracción.

21 / 55

### Descomposición en fracciones simples

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Factor | Fracción | Integral |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (*x* − *a*) | *A*  *x* − *a* | Logaritmo |
| (*x* − *b*)*n* | *B*1 + *B*2 *Bn*  *x* − *b* (*x* − *b*)2 + · · · + (*x* − *b*)*n* | Logaritmo + Potencias |
| *c x* 2 + *d x* + *e* | *M x* + *N c x* 2 + *d x* + *e* | Logaritmo + Arcotangente |

22 / 55

### Descomposición en fracciones simples

* Ejemplo. Calcula:

1) 

1

*x* 3 − 5*x* 2

*dx*

+ 6*x dx*

4) 

*x* + 2

*x* 2 + *x* −

1

2 *dx*

2) 

*x* + 1

*x* 2 + *x* + 1

6)  *dx*

*x* (1 + 2*x* 2) *dx*

4

5) 

3) 

*x*

*x* 3 − 2*x* 2 − 2*x* − 3 *dx*

*(Solución)*

23 / 55

1 (*x* 2 − 1)(*x* − 1)

# Métodos de integración Integrales trigonométricas

24 / 55

### Integrales trigonométricas

* Seno de la suma y diferencia de ángulos

sen(*a* + *b*) = sen *a* cos *b* + sen *b* cos *a* sen(*a* − *b*) = sen *a* cos *b* − sen *b* cos *a*

* Coseno de la suma y diferencia de ángulos

cos(*a* + *b*) = cos *a* cos *b* − sen *a* sen *b*

cos(*a* − *b*) = cos *a* cos *b* + sen *a* sen *b*

* Seno y coseno del ángulo mitad

sen2 ( *α* } = 1 − cos *α* y cos2 ( *α* } = 1 + cos *α*

2

2

2

2

25 / 55

### Integrales trigonométricas

* Ejemplo. Calcula:
  1.  sen(2*x* ) cos *x dx*
  2.  cos *x* cos(3*x* )*dx*
  3.  sen3 *x* cos2 *x dx*

*(Solución)*

26 / 55

* 1.  sen4 *x* cos5 *x dx*
  2.  cos2 *x dx*

# Integral definida

27 / 55

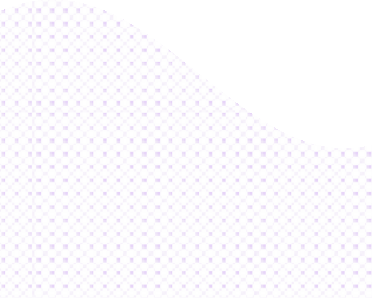
### Integral definida

Si *f* : [*a, b*] R es una función continua con *f* (*x* ) 0 para todo *x* R, vamos a calcular el área comprendida entre la gráfica de *f* y las rectas *y* = 0, *x* = *a* y *x* = *b*.

* −→ ≥ ∈

*y*

*f* (*x* )



*a*

*b*

*x*

28 / 55

### Integral definida

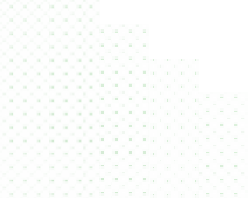
Para calcular el área, dividimos el intervalo [*a, b*] en *n* subintervalos de extremos

•

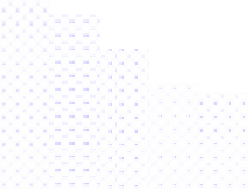
*a* = *x*0 *< x*1 *<* · · · *< xn* = *b .*

*y y*

*f* (*x* ) *f* (*x* )



*x*0 *x*1 *x*2 *x*3 *x*4 *x*5



*x*0 *x*1 *x*2 *x*3 *x*4 *x*5

*x*

Aproximación del área por exceso

y calculamos el máximo y mínimo:

*x*

Aproximación del área por defecto

29 / 55

*Mi* = max{*f* (*x* ) *x* ∈ [*xi*−1*, xi* ]} para *i* = 1*,* 2*, . . . , n ,*

*mi* = min{*f* (*x* ) 1 *x* ∈ [*xi*−1*, xi* ]} para *i* = 1*,* 2*, . . . , n .*

1

Entonces, podemos aproximar el valor del área (por exceso y por defecto) calculando el área de los rectángulos:

•

Área (por exceso) = *M*1(*x*1 − *x*0) + *M*2(*x*2 − *x*1) + · · · + *Mn*(*xn* − *xn*−1) *,*

Área (por defecto) = *m*1(*x*1 − *x*0) + *m*2(*x*2 − *x*1) + · · · + *mn*(*xn* − *xn*−1) *.*

1



* Ejemplo. Calcula 0 *f* (*x* ) *dx* siendo *f* (*x* ) = *C >* 0 constante.

30 / 55

### Integral definida

Regla de Barrow. Si *F* : (*a, b*) R es una primitiva de *f* : (*a, b*) R, entonces

* −→ −→

 *b f* (*x* ) *dx* = 5*F* (*x* )6*x* =*b* = *F* (*b*) *F* (*a*)

*a*

* Ejemplo. Calcula:
  1.  *π* sen *x dx (Solución)*

0 −

31 / 55

*x* =*a* − *.*

### Integral definida

* Propiedades. Sean *f , g* : (*a, b*) −→ R integrables. Entonces,
  1. *b*



*a*

*αf* (*x* ) *dx* = *α*

*b f* (*x* ) *dx* para todo

*a*



*α* ∈ R.

* 1. *b* (*f* (*x* ) + *g* (*x* )) *dx* = *b f* (*x* ) *dx* + *b g* (*x* ) *dx* .

  

*a a a*

* 1.  *b f* (*x* ) *dx* =  *c f* (*x* ) *dx* +  *b f* (*x* ) *dx* si *a c*

*<*

*< b*.

*a a c*

32 / 55

### Integral definida

* Ejemplo. Calcula:
  1. 4 (*x*



−2

− 1)(*x* + 2) *dx*

* 1.  2 J4

−

0

*x* 2 *dx*

* 1. *π x* sen *x dx*



0

4)  2 *f* (*x* ) *dx* con *f* (*x* ) = *x* 2 si *x* ≤ 1

0

*(Solución)*

33 / 55

2 − *x* si *x >* 1

# Teorema fundamental del cálculo

34 / 55

### Teorema fundamental del cálculo

* Teorema. Si *f* : [*a, b*] −→ R es continua, entonces la función

*F* (*x* ) = *x f* (*t*) *dt*



*a*

es derivable para todo *x* ∈ (*a, b*) y además,

*F* ′(*x* ) = *f* (*x* ) *.*

* Ejemplo. Calcula la derivada de la siguiente función.
  1. *F* (*x* ) = *x et*2 *dt*



1

*(Solución)*

35 / 55

### Teorema fundamental del cálculo

* Teorema (general) Si *f* : [*a, b*] −→ R es continua y *g* y *h* son dos fun- ciones derivables en *x* y tales que *g* (*x* )*, h*(*x* ) ∈ [*a, b*], entonces la función

*F* (*x* ) = *g* (*x* ) *f* (*t*) *dt h*(*x* )



es derivable para todo *x* ∈ (*a, b*) y además,

*F* ′(*x* ) = *f* (*g* (*x* )) *g* ′(*x* ) − *f* (*h*(*x* )) *h*′(*x* ) *.*

36 / 55

### Teorema fundamental del cálculo

* Ejemplo. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

− *dt*

* 1. *F* (*x* ) = *x*



0

3*t*2 1

log *t*

* 1. *F* (*x* ) = *x* +1 *t*2 cos(2*t*) *dt*



−*x* 2

*(Solución)*

37 / 55

# Cálculo de áreas

38 / 55

### Cálculo de áreas

* El área encerrada entre las gráficas de dos funciones continuas

*f , g* : [*a, b*] −→ R viene dada por

área =  *b f* (*x* ) *g* (*x* ) *dx*

*a* |

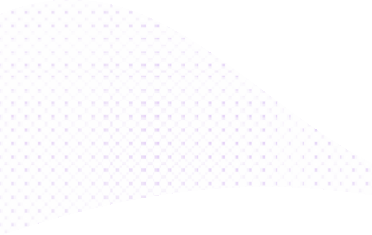
−

|

*.*

*y*

*f* (*x* )



*a*

*b*

39 / 55

*g* (*x* ) *x*

### Cálculo de áreas

1 *b* 1

* área ̸=

1

−

(*f* (*x* ) *g* (*x* )) *dx* .

*a* 1

* Ejemplo. Calcula:
  1. área encerrada entre la gráfica de

entre *x* = −1 y *x* = 2

*(Solución)*

40 / 55

*f* (*x* ) = *x*

*g* (*x* ) = 0

### Cálculo de áreas

Ejemplo. Calcula el área encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones.

•

1. *f* (*x* ) = *x* 2 y *g* (*x* ) = 2 − *x*
2. *f* (*x* ) = *x* 2 y *g* (*x* ) = √*x*
3. *f* (*x* ) = sen *x* y *g* (*x* ) = cos *x* entre *x* = 0 y *x* = *π*

2

1. *y* = *ex* , *y* = 2 y *x* = 0

*(Solución)*

41 / 55

# Soluciones

42 / 55

Pág. 3

1. *F* (*x* ) = *ex* .
2. *G* (*x* ) = *x* 2.
3. *H*(*x* ) = sen *x* .

Pág. 7

1)  *ex dx* = *ex* + *C* .

* 1.  *x* 5 *dx* = *x* 6 + *C* .

6

3)  *dx* = log |*x* | + *C* .

1

*x*

1.  2*x dx* = log(*x* 2 + 7) + *C* .

*x* 2 +7

Pág. 9

1)  3*e*3*x dx* = *e*3*x* + *C* .

2)  (*x* − 3)5 *dx* = (*x*−3)6

6

3) 

+ *C* .

4*x* 3

*x* 4 +1

*dx* = log |*x* 4 + 1| + *C* .

43 / 55

Pág. 11

1.  (4*x* 2 − 1) *x dx* = 1  8*x* (4*x* 2 − 1)2 *dx* = (4*x*2 −1)3

8

3

+ *C* .

1.  J*x* √*x dx* =  (*x x* 1*/*2 )1*/*2 *dx* =  *x* 3*/*4 *dx* = *x* 3*/*4+1

3*/*4+1

3)  *x* 4 −3*x* 3 +*x* −2 *dx* = 1  *x* 3 *dx* − *x* 2 *dx* + 1  *dx* − 2  1 *dx* = 1 *x* 4 − *x* 3 + *x* − 2 log |*x* |+*C* .

+ *C* = 4 *x* 7*/*4 + *C* .

3*x*

7

 2

4)

4+5*x* 2 *dx* =

3

1  2

4

1+( *√*5 *x* )2 *dx* =

3 3 *x* 3 4

2 2  *√*5*/*2 1

4 √5

1+( *√*5 *x* )2 *dx* =

√5 arctan(

3 3 3

√5

2 *x* ) + *C* .

1.  (*e*3*x* − *ex* ) *dx* =  *e*3*x dx* −  *ex dx* = 1 *e*3*x* − *ex* + *C* .

2

2

3

 1 1  J 1

2 2

7) 

6)

√3−4*x* 2 *dx* =

√3

*dx* =

1−( *√*3 *x* )

√3

2

*dx* =

1−( *√*3 *x* )

2 arcsen( √2 *x* ) +*C* .

1 √3  J

2*/√*3 1 2

2 2

 √1+*x*  √1+*x* √1+*x*  1+*x*

cos *x* sen *x*

*dx* = log | sen *x* | + *C* .

8)

√1−*x dx* =

√1−*x* √1+*x dx* =

√1−*x* 2 *dx* =

 1 

2 *−* 1*/*2

*x* (1 − *x*

)

*dx* =

= arcsen *x* − 1 *x* 1*/*2 + *C* = arcsen *x* − √*x* + *C* .

√1−*x* 2 *dx* +

2

1*/*2

44 / 55

Pág. 15

1.  1 *dx* =  1 *dt* = log |*t*| + *C* = log | log |*x* || + *C* .

*x* log *x*

CV:

*t*

*↑*

1

Deshac*↑*er el CV

1.  √ 1 *dx* =  2 2 *dt* = 2 arctan(*t*) + *C* = 2 arctan(√*x* ) + *C* .

log *x* =*t* ⇒

*x dx* =*dt*

*x* (1+*x* )

CV: √

1+*t*

1

*x* =*t* ⇒

2√*x dx* =*dt*

*↑*

Deshac*↑*er el CV

1. 

*dt* = 



sen2

cos *x*

*x* +4 sen *x* +5

*dx* =

*↑*

1

*t*2 +4*t*+5

1

1+(*t*+2)

2 *dt* = arctan(*t* + 2) + *C* =

*↑*

CV: sen *x* =*t* ⇒ cos *x dx* =*dt*

= arctan(sen *x* + 2) + *C* .

1.  *x* √1 − *x dx* = −  2*t*(1 − *t*2)*t dt* = −2  (*t*2 − *t*4) *dt* = −2( *t*3

3

Deshacer el CV

− *t*5 ) + *C* =

5

CV: √1*−*

*x* =*t*

1

*↑*

2 ⇒ − *dx* =2*t dt*

Deshac*↑*er el CV

*−x* =*t*

= −2( (√1−*x* )3 − (√1−*x* )5 ) + *C* .

3

5

1.  *x* 3√2 + 7*x* 2 *dx* =

√

2+7*x* 2 =*t*

3

Deshac*↑*er el CV

*↑*

 *t*2 −2 *t t*

*dt* = 1  (*t*4 − 2*t*2) *dt* = 1 ( *t*5

− 2*t*3 ) + *C* =

2+7*x* 2 =*t*2 ⇒ 14*x dx* =2*t dt*

CV:

7

7

49

49

5

= 1 ( 1 (2 + 7*x* 2)5*/*2 − 2 (2 + 7*x* 2)3*/*2 ) + *C* .

49

5

3

45 / 55

Pág. 18



1. *x ex dx* =

*↑*

*x ex* −  *ex dx* = *x ex* − *ex* + *C* .

*u*=*x* ⇒ *du*=*dx*

*x*   *x* *x*

*dv* =*e dx* ⇒ *v* = *dv* = *e dx* =*e*

1.  log *x dx* = *x* log *x* −  *x* 1 *dx* = *x* log *x* −  *dx* = *x* log *x* − *x* + *C* .

*x*

*↑*

*u*=log *x du*= 1 *dx*

*x* 

⇒

*dv* =*dx* ⇒ *v* = *dv* = *dx* =*x*



1. *x* cos *x dx* =

*↑*

*x* sen *x* −  sen *x dx* = *x* sen *x* + cos *x* + *C* .

*u*=*x* ⇒ *du*=*dx*

 

*dv* =cos *x dx* ⇒ *v* = *dv* = cos *x dx* =sen *x*

1.  *x* 3 cos(*x* 2) *dx* = 1 *x* 2 sen(*x* 2) −  2*x* 1 sen(*x* 2) *dx* = 1 *x* 2 sen(*x* 2) + 1 cos(*x* 2) + *C* .

*↑*

2

*du*=2*x dx*

2

2

2

*dv* =*x* cos(*x* 2 ) *dx* ⇒ *v* = *dv* = *x* cos(*x* 2 ) *dx* = 1 sen(*x* 2 )

2

*u*=*x* 2

⇒

1.  arcsen( *x* ) *dx* = *x* arcsen( *x* )− 1 √ *x dx* = *x* arcsen( *x* )− 1  *x* (1− *x* 2 ) *−* 1*/*2 *dx* =

2

2

2

1−*x* 2*/*4

2

2

4

*u*=arcsen( *x* ) ⇒ *du*= √ 1*/*2

*↑*

2 1*−x* 2*/*4

 

*dx*

*dv* =*dx* ⇒ *v* = *dv* = *dx* =*x*

= *x* arcsen( *x* ) + 2J1 − *x* 2*/*4 + *C* .

2

46 / 55

Pág. 19



1. sen *x ex dx* =

*↑*

sen *x ex* − cos *x ex dx* =

sen *x ex* −(cos *x ex* − sen *x ex dx* ) =

*u*=sen *x* ⇒ *du*=cos *x dx*

*↑*

*x*   *x* *x*

*x*   *x* *x*

*dv* =*e dx* ⇒ *v* = *dv* = *e dx* =*e*

−  ⇒

*u*=cos *x* ⇒ *du*=− sen *x dx*

*dv* =*e dx* ⇒ *v* = *dv* = *e dx* =*e*

= (sen *x* cos *x* ) *ex* + sen *x ex dx*

⇒  sen *x ex dx* = 1 (sen *x* − cos *x* ) *ex* + *C* .

2



1. sen2 *x dx* =

*↑*

− sen *x* cos *x* −  − cos *x* cos *x dx* = − sen *x* cos *x* +  cos2 *x dx* =

*u*=sen *x* ⇒ *du*=cos *x dx*

⇒   −

*dv* =sen *x dx v* = *dv* = sen *x dx* = cos *x*

−  − − −  ⇒

= sen *x* cos *x* + (1 sen2 *x* ) *dx* = sen *x* cos *x* + *x* sen2 *x dx*

⇒  sen2 *x dx* = 1 (*x* − sen *x* cos *x* ) + *C* .

2

47 / 55

Pág. 23

1. 

1

*x* 3 −5*x* 2

+6*x*

*dx* = 

*x* (*x*

1

−2)(*x* −

1. *dx* =

*↑*

1

=

*x* (*x* −2)(*x* −3)

*A* + *B*

*x x* −2

+ *C*

*x* −3

f *x* =0 ⇒ 1=6*A* ⇒ *A*=1*/*6

1=*A*(*x* −2)(*x* −3)+*Bx* (*x* −3)+*Cx* (*x* −2)⇒

*x* =2 ⇒ 1=−2*B* ⇒ *B*= *−* 1*/*2

*x* =3 ⇒ 1=3*C* ⇒ *C* =1*/*3

=  [ 1*/*6

*x*

+ *−* 1*/*2

+ 1*/*3 ] *dx* = 1 log |*x* | − 1 log |*x* − 2| + 1 log |*x* − 3| + *C* .

1.  *x* +1 *dx* = 1  2*x* +2 *dx* = 1 ( 2*x* +1 *dx* +  1

*x* −2

*x* −3

6

2

3

*dx* ) =

*x* 2 +*x* +1 2 *x* 2 +*x* +1 2 *x* 2 +*x* +1 *x* 2 +*x* +1

1 2 1  2 1 1 2 √3

=

2 log |*x*

+ *x* + 1| + 2

*x*

+*x* +1 *dx* =

2 log |*x*

+ *x* + 1| +

3 arctan(

2*x* +1

√3 ) + *C* porque

 1 *dx* ø  1

=

*dx* = 1  1

*dx* = 4  1 1

*dx* =

*x* 2 +*x* +1

1+

3*/*4+(*x* +1*/*2)2



3*/*4

f

(*x* +1*/*2)2

3*/*4

*x* + */*2

3 1+( *√*3*/*2 )2

*x* 2 +*x* +1=*a*+(*bx* +*c*)2 =*a*+*b*2 *x* 2 +2*bc x* +*c*2 ⇒

Coef. *x* 2 : 1=*b*2 ⇒ *b*=1 *,*

Coef. *x* : 1=2*bc* ⇒ *c*=1*/*2 *,*

T. indep.: 1=*a*+*c*2 ⇒ *a*=3*/*4 *.*

3

2

1+(2*x/√*3+1*/√*3)2 *dx* =

3 arctan(

√3 ).

4  1

=

3

1+(2*x/√*3+1*/√*3)2 *dx* =

4 √3  2*/√*3

2√3

2*x* +1

48 / 55

1.  *x* 4

*dx* =  [*x* +2+ 6*x* 2 +7*x* +6

] *dx* = *x* 2 +2*x* + 6*x* 2 +7*x* +6 *dx* ø

*x* 3 −2*x* 2 −2*x* −3

Div*↑*isión

2

6*x*

+7*x* +6

= *A*

+ *Mx* +*N*

*x* 3 −2*x* 2 −2*x* +3 2

(*x* 3)(*x* 2 +*x* +1)



=

−

(*x* −3)(*x* 2 +*x* +1) *x* −3 *x* 2 +*x* +1

f *x* =3 ⇒ 81=13*A* ⇒ *A*=81*/*13

6*x* 2 +7*x* +6=*A*(*x* 2 +*x* +1)+(*Mx* +*N*)(*x* −3) ⇒

*x* 2 +*x* +1

*x* =0 ⇒ 6=*A*−3*N* ⇒ *N*=1*/*13 *x* =−1 ⇒ 5=*A*+4*M*−4*N* ⇒ *M*= *−* 3*/*13

= *x* 2

2

+ 2*x* + 1  [ 81

+ −3*x* +1 ] *dx* = *x* 2

+ 2*x* + 81 log |*x* − 3| + 1  −3*x* +1

*dx* =

= *x* 2

2

+ 2*x* + 81 log |*x* − 3| − 3 1 [ 2*x* +1 *dx* +  −2*/*3−1 *dx* ] =

= *x* 2 + 2*x* + 81 log |*x* − 3| − 3 log |*x* 2 + *x* + 1| − 3  −5*/*3 *dx* =

13

*x* −3

2

13

13

*x* 2 +*x* +1

13

2 13

*x* 2 +*x* +1

*x* 2 +*x* +1

2

13

26

26

3*/*4+(*x* +1*/*2)2

26 log |*x*

*x* 2 81

=

2 + 2*x* +

13 log |*x* − 3| −

+ *x* + 1| +

26 3

1+(2*x/√*3+1*/√*3)2 *dx* =

3 2

5 4  1

5 √3

*x* 2 81

=

2 + 2*x* +

13 log |*x* − 3| −

3 2

5 2 √3  2*/√*3

= 2 + 2*x* + 13 log |*x* − 3| −

*x* 2

81

3

(*x* +2)(*x* −1)

*x* −1

26 log |*x*

26 log |*x*

+ *x* + 1| +

13 3

2

1+(2*x/√*3+1*/√*3)2 *dx* =

+ *x* + 1| + 13 3 arctan( √3 ) + *C* .

2

2*x* + 1

1. 

+*x* −2

*x* +2

*x*

2

*dx* =  *x* +2 *dx* =  1 *dx* = log |*x* − 1| + *C* .

49 / 55

1.  1

*x* (1+2*x*

2 *dx* = [ 1

+ −2*x*2 ] *dx* = log |*x* |− 1  4*x*

2 *dx* = log |*x* |− 1 log |1+2*x* 2|+*C* .

1

=

)

*x*

1+2*x*

2

1+2*x*

2

*A*

*x* (1+2*x* 2 )

*x* 1+2*x* 2 f T. indep.: ⇒ 1=*A* ⇒ *A*=1

1=*A*(1+2*x* 2 )+(*Mx* +*N*)*x* ⇒

+ *Mx* +*N*

*↑*

Coef.*x* : ⇒ 0=*N* ⇒ *N*=0 Coef.*x* 2 ⇒ 0=2*A*+*M* ⇒ *M*=−2

1.  1 *dx* =  1 *dx* =

(*x* 2 −1)(*x* −1)

(*x* −1)2 (*x* +1)

*↑*

 [ *−* 1*/*4

+ 1*/*2

+ 1*/*4 ] *dx* =

1 (*x* −1)2 (*x* +1)

+

+ *C*

*x* +1

*x* +1

= *A*

*x* −1

*B*

(*x* −1)2

*x* +1f *x* =−1 ⇒ 1=4*C* ⇒ *C* =1*/*4

1=*A*(*x* −1)(*x* +1)+*B*(*x* +1)+*C* (*x* −1)2 ⇒

(*x* −1)2

*x* =1 ⇒ 1=2*B* ⇒ *B*=1*/*2 *x* =0 ⇒ 1=−*A*+*B*+*C* ⇒ *A*= *−* 1*/*4

= − 1 log |*x* − 1| − 1 1 + 1 log |*x* + 1| + *C* .

4 2 *x* −1 4

50 / 55

Pág. 26

1.  sen(2*x* ) cos *x dx* =

1  (sen(2*x* +*x* )+sen(2*x* −*x* )) *dx* = 1  3 sen(3*x* ) *dx* + 1  sen *x dx* =

2 6 2

*↑* }

sen(*a*+*b*)=sen *a* cos *b*+sen *b* cos *a* sen(*a*−*b*)=sen *a* cos *b*−sen *b* cos *a*

= −1 cos(3*x* ) + 1 cos *x* + *C* .

⇒ sen(*a*+*b*)+sen(*a*−*b*)=2 sen *a* cos *b*

6 2

1.  cos *x* cos(3*x* )*dx* = 1  (cos(*x* +3*x* )+cos(*x* −3*x* )) *dx* = 1  (cos(4*x* )+cos(−2*x* )) *dx* =

2 2

*↑* }

⇒ cos(*a*+*b*)+cos(*a*−*b*)=2 cos *a* cos *b*

cos(*a*+*b*)=cos *a* cos *b*+sen *a* sen *b* cos(*a*−*b*)=cos *a* cos *b*−sen *a* sen *b*

8

4

8

4

= 1  4 cos(4*x* ) *dx* − 1  −2 cos(−2*x* ) *dx* = 1 sen(4*x* ) − 1 sen(−2*x* ) + *C* .

1.  sen3 *x* cos2 *x dx* =  sen *x* (1−cos2 *x* ) cos2 *x dx* =  sen *x* cos2 *x dx* − sen *x* cos4 *x dx* =

3

+

cos5 *x*

5

+ *C* .

= − cos3 *x*

1.  sen4 *x* cos5 *x dx* = sen4 *x* cos *x* (1−sen2 *x* )2 *dx* = sen4 *x* cos *x* (1−2 sen2 *x* +sen4 *x* ) *dx* =

=  sen4 *x* cos *x dx* −2  sen6 *x* cos *x dx* + sen8 *x* cos *x dx* = sen5 *x* − 2 sen7 *x* + sen9 *x* +*C* .

5

7

9

1.  cos2 *x dx* =  1+cos(2*x* ) *dx* =  1 *dx* + 1  cos(2*x* ) *dx* = *x* − 1 sen(2*x* ) + *C* .

2

2

2

2

4

51 / 55

Pág. 31

1.  *π* − sen *x dx* = [cos *x* ]*π*

= cos *π* − cos 0 = −1 − 1 = −2.

0 0

Pág. 33



− 

+

−2

1) 4

−2

(*x* 1)(*x* + 2) *dx* = 4

−2

(*x* 2 + *x* − 2) *dx* = [ *x* 3

*x* 2 − 2*x* ]4 =

= ( 43

3

3

+

3

2

2

42 − 8) − ( (−2)3

+ (−2)2

− 4) = 18.

1.  2 √4 − *x* 2 *dx* =  2 2J1 − (*x/*2)2 *dx* = 2  *π/*2 √1 − sen2 *t* 2 cos *t dt* = 4  *π/*2 cos2 *t dt* =

2

0

0

0

0

CV: *x* =sen *t* ⇒ 1 *dx* =cos *t dt*

*↑*

2 2

*x* =0 ⇒ *t*=arcsen(0*/*2)=0

*x* =2 ⇒ *t*=arcsen(2*/*2)=*π/*2

= 4  *π/*2

0

2

2

0

2

2

1+cos(2*t*) *dt* = 2[*t* + sen2 (2*t*) ]*π/*2 = 2( *π*

+ sen2 *π* ) = *π*.

1.  *π x* sen *x dx* = [−*x* cos *x* ]*π* −  *π* − cos *x dx* = −*π* cos *π* + 0 + [sen *x* ]*π* =

 

0

*↑*

*u*=*x* ⇒ *du*=*dx*

0

0

0

*dv* =sen *x dx* ⇒ *v* = *dv* = sen *x dx* =− cos *x*

= −(−*π*) + sen *π* − sen 0 = *π*.

52 / 55

1.  2 *f* (*x* ) *dx* =  1 *f* (*x* ) *dx* + 2 *f* (*x* ) *dx* =  1 *x* 2 *dx* + 2(2−*x* ) *dx* = [ *x* 3 ]1 +[2*x* − *x* 2 ]2 =

0

0

1

0

1

3

0

2

1

= ( 1

− 0) + (4 − 2) − (2 − 1 ) = 5 .

3 2 6

Pág. 35

1. Utilizando el teorema fundamental del cálculo: *F* ′(*x* ) = *ex* 2 .

Pág. 37

1. Utilizando el teorema fundamental del cálculo: *F* ′(*x* ) = 3*x* 2 −1 .

log *x*

1. Utilizando el teorema fundamental del cálculo:

*F* ′(*x* ) = (*x* + 1)2 cos(2(*x* + 1)) − (*x* 2)2 cos(−2*x* 2) · (−2*x* ) =

= (*x* + 1)2 cos(2(*x* + 1)) + 2*x* 5 cos(−2*x* 2)).

Pág. 40

1. área =  2 |*f* (*x* ) − 0| *dx* =  0 −*x dx* +  2 *x dx* = [− *x* 2 ]0

−1

−1

0

2

−1

2

0

2

2

2

+ [ *x* 2 ]2 = 1 + 4

= 5 .

53 / 55

Pág. 41

1. 1º Puntos de corte: *f* (*x* ) = *g* (*x* ) ⇔ *x* 2 = *x* − 2 ⇔ *x* = {

1−2 *,*

2º Como *f* y *g* son continuas y *f* (0) = 0 y *g* (0) = 2, deducimos que *f* (*x* ) ≤ *g* (*x* ) si

*.*

*x* ∈ (−2*,* 1).



− 

3º área= 1

−2

|*f* (*x* ) − *g* (*x* )| *dx* =  1

(*g* (*x* ) *f* (*x* )) *dx* = 1

−2

(2 − *x* − *x* 2) *dx* =

= [2*x x* 2

*x* 3 1 1 1 8 9

− 2 −

−2

3 ]−2 = (2 − 2 − 3 ) − (−4 − 2 + 3 ) = 2 *>* 0.

1. 1º Puntos de corte:

{

*f* (*x* ) = *g* (*x* ) ⇔ *x* 2 = √*x* ⇔ *x* 4 = *x* ⇔ *x* (*x* 3 − 1) = 0 ⇔ *x* = 0 *,*

1 *.*

2º Como *f* y *g* son continuas y *f* (1*/*4) = 1 y *g* (1*/*4) = 1 , deducimos que *f* (*x* ) ≤ *g* (*x* )

si *x* ∈ (0*,* 1).

3º área =  1 |*f* (*x* ) − *g* (*x* )| *dx* =  1(*g* (*x* ) − *f* (*x* )) *dx* =  1(√*x* − *x* 2) *dx* =

16 2

= [ *x* 3*/*2

3*/*2

0

− *x* 3 ]1 = ( 2

3

0

3

0

− 1 ) − 0 = 1

3

3

0

*>* 0.

1. 1º Puntos de corte: *f* (*x* ) = *g* (*x* ) sen *x* = cos *x x* = *π/*4, si *x* (0*, π/*2).

⇔ ⇔ ∈

2º Hemos de estudiar lo que ocurre en dos intervalos: (0*, π/*4) y (*π/*4*, π/*2).

* + Como *f* y *g* son continuas y *f* (0) = 0 y *g* (0) = 1, deducimos que *f* (*x* ) *g* (*x* ) si *x* (0*, π/*4).

∈

≤

* + Como *f* y *g* son continuas y *f* (*π/*2) = 1 y *g* (*π/*2) = 0, deducimos que

*f* (*x* ) ≤ *g* (*x* ) si *x* ∈ (*π/*4*, π/*2).

54 / 55

3º área =  *π/*2 |*f* (*x* ) − *g* (*x* )| *dx* =  *π/*4 (*g* (*x* ) − *f* (*x* )) *dx* +  *π/*2 (*f* (*x* ) − *g* (*x* )) *dx* =

= [sen *x* + cos *x* ]*π/*4 + [− cos *x* − sen *x* ]*π/*2 =

0

0

*π/*4

0

*π/*4

=  *π/*4 (cos *x* − sen *x* ) *dx* +  *π/*2 (sen *x* − cos *x* ) *dx* =

0

*π/*4

= (sen *π/*4 + cos *π/*4) − (sen 0 + cos 0) + (− cos *π/*2 − sen *π/*2) −(− cos *π/*4 − sen *π/*4) =

√2 √2

=

+

2

+

2

2 2

− 0 − 1 + 0 − 1 + √2

√2 = 2(√2 − 1) *>* 0.

1. 1º Puntos de corte: *ex* = 2 *x* = log 2.

⇔

2º Como las dos funciones son continuas y *e*0 = 1 *<* 2, deducimos que *ex* 2 si

≤

*x* (0 log 2).

∈ *,*

3º área =  log 2 |2 − *ex* | *dx* = [2*x* − *ex* ]log 2 = 2 log 2 − 2 − (0 − 1) = 2 log 2 − 1 *>* 0.

0

0

55 / 55

## Parte II.

A´lgebra lineal

– 205 –

– 206 –

# Tema 7. Matrices y sistemas de ecuaciones

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales Curso 2023 – 2024

# Matrices

2 / 52

### Matrices

Una matriz de dimensión (orden o tamaño) *m n* es una *tabla* ordenada de *mn* elementos.

* ×

*A* = (*aij* ) = 



*a*11 *a*12 · · · *a*1*n*

*a*21 *a*22 ·.· · *a*2*n*

 ∈ M*m n .*

. . . . . ×



*a a a*

*m*1

*m*2 · · ·

*mn*

* La matriz *A* tiene *m* filas y *n* columnas.
* *aij* denota el elemento (o entrada) situado en la fila *i* y columna *j*.

Dos matrices son iguales si son del mismo tamaño y todos sus elementos son iguales.

•

Si *m* = 1 decimos que *A* es una matriz fila y si *n* = 1 decimos que *A* es una matriz columna.

•

3 / 52

### Matrices

* Si *m* = *n* decimos que la matriz es cuadrada: *A* ∈ M*n*.
* Si *A* es cuadrada y *aij* = 0 si *i* ̸= *j*, decimos que la matriz es diagonal.

Llamamos matriz identidad *In n* a la matriz diagonal con *aii* = 1 para todo *i* = 1*,* 2*, . . . , n*.

* ∈ M

*In* = 

1 0 · · · 0

0 1 ·.· · 0

 ∈ M*n .*

 . .

. . . 

0 0 · · · 1

* La matriz nula 0 ∈ M*m*×*n* tiene todos sus elementos iguales a cero.
* Decimos que *A n* es triangular inferior si *aij* = 0 para *i > j* y *A* es

∈ M

triangular superior *aij* = 0 para *i > j*.

4 / 52

### Operaciones con matrices

Suma de matrices. Si *A* = (*aij* ) y *B* = (*bij* ) *m*×*n*, se define la suma de matrices como

* ∈ M

*A* + *B* = (*aij* + *bij* ) ∈ M*m*×*n .*

* Producto de una matriz por un escalar. Si *A* = (*aij* ) ∈ M*m*×*n*, se define el producto por un escalar *λ* ∈ R como

*λA* = (*λaij* ) ∈ M*m*×*n .*

* Ejemplo. Si *A* = calcula:

1 2 3

3

0 1 2

4, *B* =

0 1 1

3

1 1 1

4, *C* =

1 2 3

2 3 4



0 0 0

,

5 / 52

*(Solución)*

1. *A* + *B* 2) *A* + *C* 3) 2*B*

### Operaciones con matrices

Producto de matrices. Si *A* = (*aij* ) *m*×*n* y *B* = (*bij* ) *n*×*k* , se define el producto de matrices como

* ∈ M ∈ M

*AB* = *C* = (*cij* ) ∈ M*m*×*k* con *cij* = *ai*1*b*1*j* + *ai*2*b*2*j* + · · · + *ainbnj ,*

para todo *i* = 1*,* 2*, . . . , m* y para todo *j* = 1*,* 2*, . . . , k*.

1 −2 3

* + Ejemplo. Si *A* = ( 2 3

1 −5

1, *B* = ( 4 3 6

1, calcula:

* + 1. *AB*

*(Solución)*

6 / 52

### Propiedades de las operaciones con matrices

* + La suma de matrices es asociativa: si *A, B, C* ∈ M*m*×*n*, entonces

(*A* + *B*) + *C* = *A* + (*B* + *C* ) *.*

* + La suma de matrices es conmutativa: si *A, B* ∈ M*m*×*n*, entonces

*A* + *B* = *B* + *A .*

* + El producto de matrices es asociativo: si *A* ∈ M*m*×*n*, *B* ∈ M*n*×*k* y

*C* ∈ M*k*×*s* , entonces (*AB*)*C* = *A*(*BC* )

*.*

* + El producto de matrices es distributivo con respecto a la suma: si *A, B* ∈ M*m*×*n* y *C* ∈ M*n*×*k* , entonces

(*A* + *B*)*C* = *AC* + *BC .*

7 / 52

### Propiedades de las operaciones con matrices

* + El producto de matrices NO es conmutativo.
  + Ejemplo.
    1. Si *A* = ( 1 2

3 4

* + 1. Si *A* = ( 1 2

3 4

1 y *B* = ( 1 −1

1 y *C* = ( 1 1 0

−2 0

2 0 2

1, calcula *AB* y *BA*.

1, calcula *AC* y *CA*.

*(Solución)*

8 / 52

### Propiedades de las operaciones con matrices

No se puede trabajar con matrices del mismo modo que trabajamos con números reales.

•

* + Ejemplo. Comprueba las siguientes igualdades.
    1. *AB* = 0 pero *A* ̸= 0 y *B* ̸= 0 siendo

−1 0

*A* = ( −1 1

0 0

* + 1. *AB* = *AC* pero *B* ̸= *C* siendo

5 5

) y *B* = ( −1 0 ) *.*

*A* = ( 2 −3

−4 6

3 1

) *, B* = ( 8 4

) y *C* = ( 5 −2 ) *.*

* + 1. (*A* ± *B*)2 ̸= *A*2 ± 2*AB* + *B*2 siendo

0 0

2 2

9 / 52

*(Solución)*

*A* = ( 0 1

) y *B* = ( −1 1 ) *.*

### Propiedades de las operaciones con matrices

Ejemplo. Sea *A n* y sea *In* la matriz identidad de tamaño *n n*. Comprueba que las siguientes igualdades son ciertas.

* ∈ M ×

1. (*A* + *In*)2 = *A*2 + 2*A* + *In*.
2. (*A* − *In*)2 = *A*2 − 2*A* + *In*.
3. (*A* + *In*)(*A* − *In*) = *A*2 − *In*.

*(Solución)*

10 / 52

### Matriz traspuesta

Si *A m*×*n*, llamamos matriz traspuesta de *A* y se denota por *AT* o

* ∈ M

*At* , a la matriz obtenida al colocar las filas de *A* en las columnas de *AT* .

* + *AT* ∈ M*n*×*m*.
  + Propiedades de la matriz traspuesta
    1. Si *A* ∈ M*m*×*n*, entonces (*AT* )*T* = *A*.
    2. Si *A, B* ∈ M*m*×*n*, entonces (*A* + *B*)*T* = *AT* + *BT* .
    3. Si *A* ∈ M*m*×*n* y *λ* ∈ R, entonces (*λA*)*T* = *λAT* .
    4. Si *A* ∈ M*m*×*n* y *B* ∈ M*n*×*k* , entonces (*AB*)*T* = *BT AT* .
  + Si *A* ∈ M*n*, decimos que es simétrica si *A* = *AT* y decimos que es

antisimétrica si *A* = −*AT* .

11 / 52

### Matriz invertible (solo para matrices cuadradas)

* + Decimos que una matriz cuadrada *A* ∈ M*n* es invertible si existe una matriz *B* ∈ M*n* tal que

*AB* = *In* y *BA* = *In .*

* + En ese caso, decimos que *B* es la inversa de *A* y se denota por *A*−1 = *B*.
  + Si existe la inversa, es única.
  + Propiedades de la matriz inversa
    1. Si *A, B* ∈ M*n*, entonces (*AB*)−1 = *B*−1 *A*−1.
    2. Si *A* ∈ M*n*, entonces (*AT* )−1 = (*A*−1)*T* .

12 / 52

### Determinante (solo para matrices cuadradas)

* + Sea *A* ∈ M2, se define el determinante de *A* como

|*A*| = det (A) = det ( *a b* 1 = ad − bc *.*

*c d*

* + Sea *A* ∈ M3, se puede usar la regla de Sarrus:



det (A) = det

*a b c*

*d e f*

*g h i*

 = aei + bfg + dhc − ceg − bdi − fha *.*

* + Ejemplo. Calcula:
    1. det 1 2

(

1

3 4

*(Solución)*

13 / 52

* + 1. det

1 2 3

2 0 1



−





2 1 1

### Determinante (solo para matrices cuadradas)

Si *A n*, se calcula el determinante de *A* utilizando los determinantes de submatrices de tamaño inferior.

* ∈ M
  + - * Necesitamos las siguientes definiciones:

Llamamos menor complementario de *aij* y lo denotamos por *αij* al determi- nante de la matriz de tamaño (*n* 1) (*n* 1) obtenida al eliminar la fila *i* y al columna *j* de la matriz *A*.

− × −

◦

* + - * + Llamamos adjunto de *aij* al valor *Aij* = (−1)*i*+*j αij* .
      * Ejemplo. Si *A* =

*(Solución)*

14 / 52

1 2 3

4 5 6



7 8 9

, calcula *A*3 1.

### Determinante (solo para matrices cuadradas)

* + - * Desarrollo por adjuntos de la fila *i* (para cualquier *i* = 1*,* 2*, . . . , n*): det (A) = ai1Ai1 + ai2Ai2 + · · · + ainAin *.*
      * Desarrollo por adjuntos de la columna *j* (para cualquier *j* = 1*,* 2*, . . . , n*): det (A) = a1jA1j + a2jA2j + · · · + anjAnj *.*
      * Ejemplo. Calcula el determinante de la matriz *A* =



1 0 2 1

0 1 0 6

−

1 3 1 0

0 1 2 1



desarrollando por adjuntos de la primera columna. *(Solución)*

15 / 52

### Propiedades del determinante

* + - * Sean *A, B* ∈ M*n*.

1. det (A) = det (AT).









*a*11 *a*12 *. . . a*1*n*

*. . . . . . . . . . . .*

 

*a*11 *a*12 *. . . a*1*n*

*. . . . . . . . . . . .*

 

.





1. det







*. . . . . . . . . . . .*

*an*1 *an*2 *. . . an,n*

*λai*1

*λai*2

*. . . λain*

= *λ* det

 

*. . . . . . . . . . . .*

*an*1 *an*2 *. . . ann*

*ai*1

*ai*2

*. . . ain*



1. El determinante de *A* cambia de signo al intercambiar dos filas (o columnas).
2. El determinante de *A* no cambia al sumar a una fila (o columna) un múltiplo de otra.
3. det (AB) = det (A) det (B).
4. Si *A* es invertible, det (A−1) = 1 .

det (A)

1. Si *A* es diagonal, triangular inferior o superior, det (A) = a11 · a22 · *. . .* · ann.

16 / 52

### Determinante (solo para matrices cuadradas)

* + - * Teorema. Sea *A* ∈ M*n* una matriz cuadrada. Entonces,

*A* es invertible si y solo si det (A) ̸= 0.

17 / 52

# Sistemas de ecuaciones lineales

18 / 52

### Ecuación lineal

* + - * Llamamos ecuación lineal de *n* incógnitas a una expresión de la forma

*a*1*x*1 + *a*2*x*2 + · · · + *anxn* = *b*

donde

* + - * + *a*1*, a*2*, . . . , an* son los coeficientes,
        + *x*1*, x*2*, . . . , xn* son las incógnitas,
        + *b* es el término independiente.
      * Ejemplo.

1. log(*x*1) + *ex*2 + *x* 4 − sen(*x*4) + 1 + √*x*6 = 8 no es una ecuación lineal.

√ 3 *x*5

1. log(2)*x* + 5 *y* + 7 = *e*5 sí es una ecuación lineal.

19 / 52

### Ecuación lineal

Llamamos solución de la ecuación lineal *a*1*x*1 + *a*2*x*2 + + *anxn* = *b*

* · · ·

a un conjunto de valores





*x*1 = *c*1 *,*

*x*2 = *c*2 *,*

.

*xn* = *cn ,*

que verifican la ecuación, es decir, se cumple

*a*1*c*1 + *a*2*c*2 + · · · + *ancn* = *b .*

* + - * La solución de una ecuación lineal no es necesariamente única.
      * Ejemplo. Calcula una solución de la ecuación *x* + *y* = 0. *(Solución)*

20 / 52

### Sistema de ecuaciones lineales

Llamamos sistema de ecuaciones lineales de *m* ecuaciones y *n* incógnitas a una expresión de la forma

•

donde





*a*11*x*1 + *a*12*x*2 + · · · + *a*1*nxn* = *b*1 *a*21*x*1 + *a*22*x*2 + .· · · + *a*2*nxn* = *b*2

.

*am*1*x*1 + *am*2*x*2 + · · · + *amnxn* = *bm*

* + - * + *aij* con *i* = 1*,* 2*, . . . , m* y *j* = 1*,* 2*, . . . , n* son los coeficientes,
        + *xj* con *j* = 1*,* 2*, . . . , n* son las incógnitas,
        + *bi* con *i* = 1*,* 2*, . . . , m* son los términos independientes.

21 / 52

### Sistema de ecuaciones lineales

Llamamos solución del sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de valores

•





*x*1 = *c*1 *,*

*x*2 = *c*2 *,*

.

*xn* = *cn ,*

que verifican todas las ecuaciones del sistema.

22 / 52

### Discusión de un sistema

* + - * Según el tipo de solución, un sistema lineal puede ser:
        + compatible determinado, si existe una única solución del sistema;
        + compatible indeterminado, si existe más de una solución del sistema;
        + incompatible, si no existe ninguna solución del sistema.
      * Ejemplo. Discute los siguientes sistemas lineales.

*x* + *y* = 1 2*x* + 2*y* = 2

1) f

*(Solución)*

23 / 52

*x* + *y* = 1

*x* + *y* = 0

2) f

*x* + *y* = 1

*x* − *y* = 0

3) f

# Resolución de un sistema lineal Método de Gauss

24 / 52

### Sistemas equivalentes

Un método para resolver sistemas de ecuaciones consiste en reemplazar el sistema original por otro más sencillo con las mismas soluciones.

•

* Ejemplo. Los sistemas



*x* + *y* + 2*z* = 9 2*x* + 4*y* − 3*z* = 1 3*x* + 6*y* − 5*z* = 0

y 

*x* + *y* + 2*z* = 9 2*y* 7*z* = 17

*z* = 3

− −

tienen la misma solución: *x* = 1, *y* = 2, *z* = 3.

25 / 52

### Sistemas equivalentes

Decimos que dos sistemas lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

•

Teorema. Un sistema lineal es equivalente a cualquiera obtenido al realizar sobre él alguna de las siguientes operaciones elementales:

•

1. intercambiar el orden de dos ecuaciones del sistema;
2. multiplicar una ecuación por un escalar no nulo;
3. sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

26 / 52

### Método de Gauss

* Ejemplo. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss.
  1. 2*x* + 4*y* − 3*z* = 1 3*x* + 6*y* − 5*z* = 0

f *x* + *y* + 2*z* = 9

*x* + 2*y* + *z* = 0

2) f

−*x* − 2*y* − *z* = 3

3) *x y* + *z* = 1 2*y* + *z* = 4

− −

f *x* + *y* + 2*z* = 3

*(Solución)*

27 / 52

# Forma matricial de un sistema lineal

28 / 52

### Forma matricial de un sistema lineal

El sistema de ecuaciones lineales de *m* ecuaciones y *n* incógnitas





*a*11*x*1 + *a*12*x*2 + · · · + *a*1*nxn* = *b*1 *a*21*x*1 + *a*22*x*2 + .· · · + *a*2*nxn* = *b*2

.

*am*1*x*1 + *am*2*x*2 + · · · + *amnxn* = *bm*

se puede expresar de forma matricial como *AX* = *B* siendo

* *A* = 



*a*11 *a*12 · · · *a*1*n*

*a*21 *a*22 ·.· · *a*2*n*

 ∈ M*m*

*n* la matriz de coeficientes,

. . . . . ×



*a a a*

*m*1

*m*2 · · ·

*mn*

29 / 52

### Forma matricial de un sistema lineal

* *X* =  *x*2 



*x*1

∈ M



. 

la matriz de incógnitas,

*xn* 

 *b*1 

*n*×1

* *B* =  *b*2  ∈ M





la matriz de términos independientes.

. *m*×1

*bm*



* La matriz (*A* | *B*) = 

matriz ampliada

*m*1

del sistema.



*a*11 *a*12 · · · *a*1*n a*21 *a*22 · · · *a*2*n*

*b*1 *b*2

 ∈ M

es la

. . . . . . .

*bm*



*a a a*

*m*2 · · ·

*mn*

*m*×(*n*+1)

30 / 52

### Método de Gauss

Método de Gauss: es un método de resolución de sistemas *AX* = *B* que consiste en hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada (*A*|*B*) hasta obtener una matriz escalonada equivalente.

•

Teorema. El sistema lineal *AX* = *B* es equivalente a cualquiera obtenido al realizar sobre la matriz ampliada (*A B*) cualquiera de las siguientes operaciones elementales:

|

•

1. intercambiar dos filas de la matriz;
2. multiplicar una fila por un escalar no nulo;
3. sumar a una fila un múltiplo de otra.

31 / 52

### Método de Gauss

Decimos que una matriz *A m n* es escalonada si se cumplen las siguientes condiciones:

* ∈ M ×

1. las filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz;
2. debajo del primer elemento no nulo de cada fila (llamado pivote) solo hay ceros;
3. el pivote de una fila está situado más a la derecha que el pivote de las filas superiores.

* Ejemplo. Determina si las siguientes matrices son escalonadas.

(

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ( 7 | 0  0  0 | 0  2  0 | 0 )  3  4 |
|  | 0 | 6 |  |
| 0 0 0 8 | | | |

*A* = 0

0

*, B* =

0 0 3 4

4 0 0 0

0 0 0 5

(

)

) *, C* = (

0 2 3 ) *,*

*D* = ( 0

4 ) *, E* =

0 5 2

0 0 0 *.*

0 0 0

*(Solución)*

32 / 52

### Teorema de Rouché–Frobenius

El rango de una matriz *A m*×*n*, rg (A), es el número de filas no nulas de una matriz escalonada equivalente.

* ∈ M
* Si *A* ∈ M*m*×*n*, entonces rg (A) = rg (AT).
* Si *A* ∈ M*m*×*n*, entonces rg (A) ≤ m´ın{ m*,* n }.
* Teorema de Rouché–Frobenius. Si *AX* = *B* es un sistema lineal con

*A* ∈ M*m*×*n*, *X* ∈ M*n*×1 y *B* ∈ M*m*×1, se cumple:

* si rg (A) = rg (A|B) = n, entonces el sistema es compatible determinado;
* si rg (A) = rg (A|B) *<* n, entonces el sistema es compatible indeterminado;
* si rg (A) ̸= rg (A|B), entonces el sistema es incompatible.

33 / 52

### Ejemplos

* Ejemplo. Discute los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss.
  1. 



f −

*y* − *z* + *t* = −1 2*x* + 2*y* − 3*z* + 4*t* = −6

4*x* + 2*y* − 4*z* + 6*t* = −10

2*x* + 3*y* − 4*z* + 5*t* = −7

2*x y* + *z* = 1

* 1. 3*y* − 3*z* = 2

−4*x* + *αy* + 4*z* = 2

*αx* + 2*y* 3*z* = 3

f − −

* 1. −*x* − 4*y* + 3*z* = −2

−2*x* − 2*y* = *β*

*(Solución)*

34 / 52

# Cálculo de la matriz inversa Método de Gauss–Jordan

35 / 52

### Método de Gauss–Jordan

Método de Gauss: es un método de resolución de sistemas *AX* = *B* que consiste en hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada (*A*|*B*) hasta obtener una matriz escalonada equivalente.

•

Método de Gauss–Jordan: es un método de resolución de sistemas *AX* = *B* que consiste en hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada (*A B*) hasta obtener una matriz escalonada reducida equiva- lente.

•

|

36 / 52

### Método de Gauss–Jordan

Decimos que una matriz *A m n* es escalonada reducida si se cumplen las siguientes condiciones:

* ∈ M ×

1. es escalonada;
2. todos los pivotes son 1;
3. todos los pivotes tienen encima y debajo 0.

* Ejemplo. Determina si las siguientes matrices son escalonadas reducidas.

(

(

)

1 0 0 0

*A* = 0 0 1 0

0 0 0 1

) *, B* =

1 2 0 0 1

0 0 1 0 0 *,*

0 0 0 1 2

(

)

*C* =

*(Solución)*

37 / 52

0 0 1 0

0 0 0 −1

(

) *, D* =

0 1 2

0 0 0 *.*

0 0 0

### Cálculo de la matriz inversa

Si *A n* es invertible, se puede obtener *A*−1 realizando transformaciones elementales:

* ∈ M

(*A* - *In*) −→ (*In* - *A*−1) *.*

Ejemplo. Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss–Jordan.

•

(

1

1. *A* = 2 5

(

1

1 3

1. *B* = 2 2
2. *C* =

2 1 2

6 1 1

 − −

− 

8 −2 −3

*(Solución)*

1 1

38 / 52

### Cálculo de la matriz inversa

Si *A* es una matriz invertible, entonces el sistema *AX* = *B* es compatible determinado y además se cumple:

•

*AX* = *B* ⇔ *A*−1*AX* = *A*−1*B* ⇔ *X* = *A*−1*B .*

Si *A* es una matriz invertible, entonces el sistema *AX* = 0 es compatible determinado y la única solución es *X* = 0.

•

39 / 52

# Soluciones

40 / 52

### Soluciones

Pág. 5

1. *A* + *B* = ( 1 3 4 ).

1 2 3

1. No se puede calcular porque las matrices son de distinto tamaño: *A* ∈ M2×3 y

*C* ∈ M3×3.

1. 2*B* = ( 0 2 2 ).

2 2 2

Pág. 6

1) *AB* = (

).

11 0 21

−1 13 −9

Pág. 8

1. *AB* = ( −3 −1

−5 −3

) y *BA* = ( −2 −2 ).

1. *AC* = ( 5 1 4 ) y *CA* no se puede calcular porque las matrices no tienen el

−2 −4

11 3 8

tamaño adecuado: *C* ∈ M2×3 y *A* ∈ M2×2.

41 / 52

### Soluciones

Pág. 9

1. *AB* = ( 0 0 ).

0 0

1. *AB* = *AC* = ( 1 −7 ).

−2 14

1. (*A* + *B*)2 = ( 5 0 ) y *A*2 + 2*AB* + *B*2 = ( 7 5 )

0 8

0 6

(*A* − *B*)2 = ( 1 0 ) y *A*2 − 2*AB* + *B*2 = ( −1 −3 ).

2 4

0 6

Pág. 10

1. (*A* + *In*)2 = (*A* + *In*)(*A* + *In*) = *AA* + *AIn* + *InA* + *InIn* = *A*2 + 2*A* + *In*.
2. (*A* − *In*)2 = (*A* − *In*)(*A* − *In*) = *AA* − *AIn* − *InA* + *InIn* = *A*2 − 2*A* + *In*.
3. (*A* + *In*)(*A* − *In*) = *AA* − *AIn* + *InA* − *InIn* = *A*2 − *In*.

42 / 52

### Soluciones

Pág. 13

1. det ( 1 2

3 4

(

) = 4 − 6 = −2.

1. det (A) = det

1 2 3

2 0 1

−

2 1 1

) = 0 + 4 − 6 − 0 − 1 + 4 = 1.

Pág. 14

1. *α*3*,*1 = det ( 2 3

5 6

) = 12 − 15 = −3 y *A*3*,*1 = (−1)4(−3) = −3.

Pág. 15

1. det (A) = 1 · (−1)2

det

1 0 6

3 1 0

( −

1 2 1

) + 1 · (−1)4

det

0 2 1

1 0 6 =

(

−

)

1 2 1

= (−1 + 36 − 6) + (12 − 2 + 2) = 41.

43 / 52

### Soluciones

Pág. 20

1. *x* = −*π*, *y* = *π*.

Pág. 23

1. Es un sistema compatible indeterminado porque { *x* = 2 *,*

*y* = −2 *,*

dos soluciones.

y { *x* = −5 *,*

son

1. Es un sistema incompatible porque la expresión *x* + *y* no puede tener dos valores distintos.

*y* = 5 *,*

1. Es un sistema compatible determinado porque la única solución es *x* = *y* = 1 .

2

2*y* − 7*z* = −17

*E*3 →2*E*3 −3*E*2

Pág. 27

f *x* + *y* + 2*z* = 9

1)

2*x* + 4*y* − 3*z* = 1

∼

1. 2*E*

2 →*E*2 −

f *x* + *y* + 2*z* = 9 ∼

3*x* + 6*y* − 5*z* = 0

f

*x* + *y* + 2*z* = 9 2*y* − 7*z* = −17

− *z* = −3

*E*3 →*E*3 −3*E*1

−→ SCD:

*y* − 11*z* = −27

*x* = 1 *,*

1

*y* = 2 *,*

*z* = 3 *.*

44 / 52

f

### Soluciones

*x* + 2*y* + *z* = 0

2) {

−*x* − 2*y* − *z* = 3

f

∼

*E*2 →*E*2 +*E*1

*x* + 2*y* + *z* = 0

0 = 3

{

f

−→ SI

*x* + *y* + 2*z* = 3

− − −

3) *x y* + *z* = 1

− −

2*y* + *z* = 4

f

∼

*E*2 →*E*2 −*E*1

*x* + *y* + 2*z* = 3 2*y z* = 4 2*y* + *z* = 4

∼

*E*3 →*E*3 +*E*2

*x* + *y* + 2*z* = 3 2*y z* = 4 0 = 0

− − −

−→ SCI:

*x* = 3*α* 5 *,*

*y* = *α ,*

*z* = 4 − 2*α ,*

con *α* ∈ R*.*

Pág. 32

f −

1. Sí es escalonada.
2. No es escalonada porque el pivote de la segunda fila está más hacia la izquierda que el pivote de la primera fila.
3. Sí es escalonada.
4. Sí es escalonada.
5. Sí es escalonada.

45 / 52

### Soluciones

Pág. 34

− 

 −

− 

1. (*A* I *B*)

= 

0 1 −1 1

2 2 −3 4

4 2 −4 6

2 3 −4 5

 −

1

−6

−10 

−7

∼

*F*1 ↔*F*2

2 2 3 4

0 1 −1 1

 4 2 −4 6

2 3 −4 5



6

−1

−10 

−7



∼

3 →*F*3 −

1. 2*F*

2 2 3 4

 0 −2 2 −2

1

0 1 −1 1

0 1 −1 1

6

2  *F* ∼

−

−

−1

3 →*F*3 +2*F*2

*F*4 →*F*4 −*F*2



1

2 2 3 4 6

0 1 1 1

−

−

−

−



1



0 0 0 0 0

0 0 0 0

0

Como rg (A|B) = rg (A) = 2 *<* 4 = nº incógnitas, es SCI y con solución:

*F*4 →*F*4 −*F*1



*x* = *α/*2 *β* 2 *,*

*y* = *α β* 1 *,*

− −

− − −

*z* = *α ,*

*t* = *β ,*

con *α, β* ∈ R.

46 / 52

### Soluciones

1. (*A* I *B*) =

2 1 1 1

0 3 −3 2

( −

−4 *α* 4 2

( −

∼

3 →*F*3 +2*F*1

) *F*

2 1 1 1

0 3 −3 2

( −

)

0 *α* − 2 6 4

)

* Si

2 1 1

*α* = 2: la matriz es 0 3 3

−

0 0 6

1

2 y como rg (A B) = rg (A) = 3 = 4

f

|

= nº incógnitas, es SCD con solución

*x* = 2*/*3 *,*

*y* = 4*/*3 *,*

*z* = 2*/*3 *.*

* Si *α* ̸= 2: )

(

2 −1 1

0 3 −3

1

2

( 2 1 1 1 )

0 *α* − 2 6 4

*F*3 →*F*3 − *α−*3 2 *F*2 0 0

( 2 −1 1 1 1

−

*α*−

∼

0

−3

3

*α*+4

2

2 8 *α*

*α*−2

3 −2

* + Si *α* = −4, la matriz es es SI.

0 3 −3

0 0 0

2

−4*/*3

y como rg (A|B) = 3 ̸= 2 = rg (A),

47 / 52

### Soluciones

Si =

4, la matriz es ( 2 −1 1

1. 1 y como rg (A B) = rg (A) =
   * *α* ̸ −

0 0

0 3 −3

*α*+4

*α−*2

f *x* = 2 *,*

2 |

2 8*−α*

3 *α−*2

3

3

= 3 = nº de incógnitas, es SCD con solución:

*y* = 4 *,* .

1. 8 *α*

*z* = *− .*

1. *α*+4

( −

)

1. (*A* I *B*) =

*α* 2 3

−1 −4 3

( −

−2 −2 0

( −

3

2

−

−

)

∼

*β F*2 ↔−*F*1

1 4 3 2

*α* 2 −3 3

−

−2 −2 0 *β*

)

∼

*F*2 →*F*2 −*αF*1

1 4 3

0 2 − 4*α* −3 + 3*α*

2

) ∼

−3 − 2*α* ∼

*F*3 →*F*3 +2*F*1

(

0 6 −6

4 + *β F*2 ↔ 1 *F*3

1 4 −3

6

0 1 −1

2

4+*β*

6

0 2 − 4*α* −3 + 3*α*

−3 − 2*α*

*F*3 →*F*3 +(4*α*−2)*F*2

48 / 52

### Soluciones

1 4 −3

(

0 1 −1

0 0 −1 − *α*

2

4+*β* 6

)

−3 − 2*α* + 2*α*−1 (4 + *β*)

3

).

* Si

*α* = −1, la matriz es (

1 4 −3

0 0 0

0 1 −1

2

4+*β*

6

−5 − *β*

1

Si =

5, la matriz es ( 1 4 −3

1. 1 y como rg (A B) = rg (A) = 2 3 =
   * *β* −

0 1 −1

0 0 0

f

−

3

60 | *<*

*x* = 2 *,*

= nº incógnitas, es SCI con solución:

*y* = 4 *,* .

2 8 *α*

3

*z* = *− .*

3 *α*+4

Si = 5, la matriz es ( 1 4 −3

2 1 y como rg (A B) = 3 = 2 = rg (A)

* + *β* ̸ −

es SI.

0 1 −1

0 0 0

4+*β* | ̸

−5 − *β*

6

49 / 52

### Soluciones

* Si *α* ̸= −1 la matriz es

1 4 −3

0 1 −1

(

0 0 −1 − *α*

2

4+*β* 6

−3 − 2*α* + 2*α*−1 (4 + *β*)

3

3

) y como

rg (A|B) = 3 = rg (A) = nº incógnitas, es SCD con solución:

Pág. 37

1. Sí es escalonada reducida.
2. Sí es escalonada reducida.



*x* = 2 *,*

*y* = 4 *,* .

3

1. 8 *α*

*z* = − *.*

1. *α*+4
2. No es escalonada reducida porque el pivote de la segunda fila no es 1.
3. Sí es escalonada reducida.

50 / 52

### Soluciones

Pág. 38

1. (*A* I *I*2) = ( 2 5 1 0

1 3 0 1

∼

) *F*

1 ↔*F*2

(

1 3 0 1

2 5 1 0

(

∼

2 →*F*2 − 1

) *F* 2*F*

) *F* 3*F*

1 3

(

) *F*

0 −1

( −

0 1

1 −2

∼

2 ↔−*F*2

1 3 0 1

0 1 −1 2

∼

1 ↔*F*2 − 1

1 0 3 4

0 1 −1 2

) = (*I*2 I *A*−1).

1. (*B* I *I*2) = ( 2 2 1 0

1 1 0 1

) *F*

(

) *F* 2*F*

(

).

∼

1 ↔*F*2

1 1 0 1

2 2 1 0

∼

2 →*F*2 − 1

1 1 0 1

0 0 1 −2

Como en la primera submatriz no podremos tener nunca la identidad porque hay menos pivotes que filas, *B* no es invertible.

51 / 52

### Soluciones

1. (*C*

I *I*3) =

2 1 2

6 1 −1

( − −

8 −2 −3

( − −

4 0 1 )

1 0 0

0 1 0

0 0 1

∼

2 →*F*2 − 1

) *F* 3*F*

*F*3 →*F*3 −4*F*1

( − −

3 1 0 )

2 1 2

0 4 5

0 2 5

1 0 0

−3 1 0

−

) *F* 2*F*

∼

*F*2 ↔*F*3

2 1 2

0 2 5

0 4 5

1 0 0

−4 0 1

−

( −

5 1 2 )

∼

*F*3 →*F*3 −2*F*2

2 1 2

( − −

0 2 5

0 0 −5

(

1 0 0

−4 0 1

5 1 −2

∼

1 →5*F*1 − 3

*F*2 →*F*2 +*F*3

) *F F*

10 5 0

0 2 0

0 0 −5

−5 −2 4

1 1 −1

−

∼

*F*1 →2*F*1 +5*F*2

(

20 0 0

0 2 0

0 0 −5

−5 1 3

1 1 −1

5 1 −2

∼

*F*1 → 1*/*20*, F*2 →*F*2*/*2*, F*3 → *−* 3*/*5

1 0 0

0 1 0

0 0 1

− 5*/*20 1*/*20 3*/*20

1*/*2 1*/*2 − 1*/*2

−1 − 1*/*5 2*/*5

) = (

*I*3 I *C* −1).

52 / 52

# Tema 8. Espacios vectoriales

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales Curso 2023 – 2024

# Espacio vectorial

2 / 55

### Espacio vectorial

Si R es el conjunto de todos los números reales y *V* es un conjunto no vacío, decimos que *V* es un espacio vectorial sobre R (o R-espacio vectorial) si

•

1. En *V* hay definida una operación interna, llamada suma y denotada por +, que verifica las siguientes propiedades:
   1. Asociatividad: (*u* + *v* ) + *w* = *u* + (*v* + *w* ) para todo *u, v , w* ∈ *V* .
   2. Conmutatividad: *u* + *v* = *v* + *u* para todo *u, v* ∈ *V* .
   3. Existencia del elemento neutro: existe 0 ∈ *V* tal que *v* +0 = *v* para todo *v* ∈ *V* .
   4. Existencia del elemento opuesto: para cada *u* ∈ *V* existe *w* ∈ *V* tal que *u* + *w* =

0. Se denota por *w* = −*u*.

3 / 55

### Espacio vectorial

1. En *V* hay definida una operación externa, llamada producto por escalar, que verifica las siguientes propiedades:
   1. *λ*(*u* + *v* ) = *λu* + *λv* para todo *λ* ∈ R y para todo *u, v* ∈ *V* .
   2. (*λ* + *β*)*u* = *λu* + *βu* para todo *λ, β* ∈ R y para todo *u* ∈ *V* .
   3. (*λβ*)*u* = *λ*(*βu*) para todo *λ, β* ∈ R y para todo *u* ∈ *V* .
   4. 1 *u* = *u* para todo *u* ∈ *V* (1 es el elemento neutro del producto por escalar).

Llamamos vectores a los elementos de *V* y escalares a los elementos de

•

R.

1. / 55

### Espacio vectorial

* + Ejemplo. Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales.
    1. R*n*: las *n*-tuplas de números reales
    2. M*m*×*n*: las matrices de tamaño *m* × *n*
    3. R[*x* ]: los polinomios con coeficientes reales
    4. R*n*[*x* ]: los polinomios de grado ≤ *n* con coeficientes reales
  + Ejemplo. Los siguientes conjuntos NO son espacios vectoriales.
    1. El conjunto formado por un único elemento (no nulo), *V* = { −7 }

2

2) *V* = { (*x, y* ) ∈ R I *y* = 3*x* + 1 }

*(Solución)*

1. / 55

# Subespacio vectorial

1. / 55

### Subespacio vectorial

Si *V* es un R-espacio vectorial y *W* es un subconjunto no vacío de *V* , decimos que *W* es un subespacio vectorial de *V* si es un espacio vectorial utilizando las mismas operaciones de suma y producto por escalar.

•

* + Caracterización (I)

*W* es subespacio vectorial de *V*

si y solo si � *u* + *v* ∈ *W*

para todo *u, v* ∈ *W ,*

para todo *λ* ∈ R *.*

* + Caracterización (II)

*λu* ∈ *W*

para todo *λ, β* ∈ R *.*

*W* es subespacio vectorial de *V*

si y solo si �*λu* + *βv* ∈ *W* para todo *u, v* ∈ *W ,*

1. / 55

### Subespacio vectorial

Si *V* es un espacio vectorial, entonces *V* y 0 son dos subespacios vec- toriales de *V* .

* { }
  + Ejemplo. Justifica si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.
    1. *W* = { (*x, y* ) ∈ R I *y* = 2*x* }

2

* + 1. *S* = { (*x, y* ) ∈ R I *x* + *y* = 1 }

2

* + 1. *T* = { (2*t,* 4*t,* −*t*) ∈ R I *t* ∈ R }

3

4) *P* = { *p*(*x* ) ∈ R2[*x* ] I *p*(3) = 0 } es un subespacio vectorial de R2[*x* ]

1. *N* = � ( *a* 2*a* ) I *a* ∈ R

0 −*a*

1. Sea *A n* invertible. *V* = *X n* 1 *AX* = 0 es un subespacio vectorial de M*n*×1

∈ M { ∈ M × I }

*(Solución)*

1. / 55

### Subespacio vectorial

* + Sea *V* un R-espacio vectorial y *W* un subconjunto de *V* .

Si 0 ̸∈ *W* , entonces *W* NO es un subespacio vectorial de *V* .

* + Ejemplo. Justifica si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.
    1. *S* = { (*x, y* ) ∈ R I *x* = *y* + 1 }

2

* + 1. *T* = { 1 + *ax* + *bx* ∈ R2[*x* ] I *a, b* ∈ R }

2

* + 1. *N* = � ( *a a* + 1

2*a* −*a*

) ∈ M2 I *a* ∈ R

2 3

4) *W* = { (*t, t ,* 0) ∈ R I *t* ∈ R }

*(Solución)*

1. / 55

### Unión e intersección de conjuntos

* + Sean *A* y *B* dos conjuntos.
* La unión de *A* y *B* es

*A* ∪ *B* = { *x* I *x* ∈ *A* o bien *x* ∈ *B* } *.*

* La intersección de *A* y *B* es

*A* ∩ *B* = { *x* I *x* ∈ *A* y *x* ∈ *B* } *.*

1. / 55

### Unión, intersección y suma de subespacios

* + Intersección de subespacios.
* Teorema. Si *V* es un R-espacio vectorial y *W* y *S* son dos subespacios vectoriales de *V* , entonces *W* ∩ *S* es subespacio vectorial de *V* .
  + Unión de subespacios.
* En general, *W* ∪ *S* NO es un subespacio vectorial de *V* .
  + Suma de subespacios.

Si *V* es un R-espacio vectorial y *W* y *S* son dos subespacios vectoriales de *V* , se define el subespacio vectorial suma de *W* y *S* como el menor subespacio vectorial que contiene a *W* y a *S*.

◦

1. / 55

### Unión, intersección y suma de subespacios

* + Ejemplo.
    1. Sabiendo que *S* = { (*x, y* ) ∈ R *y* = 0 } y *T* = { (*x, y* ) ∈ R *x* = 0 } son dos subespacios vectoriales de R , determina si

2 2

I 2 I

* + - 1. *S* ∩ *T* es un subespacio vectorial de R2.
      2. *S* ∪ *T* es un subespacio vectorial de R2.
    1. Sabiendo que *S* = (*x, y* ) R *y* = 2*x* y *T* = (*x, y* ) R *y* = 3*x* son dos subespacios vectoriales de R2, determina si

2 2

{ ∈ I } { ∈ I }

* + - 1. *S* ∩ *T* es un subespacio vectorial de R2.
      2. *S* ∪ *T* es un subespacio vectorial de R2.

*(Solución)*

1. / 55

# Dependencia e independencia lineal

1. / 55

### Combinación lineal

* + Si *V* un R-espacio vectorial y *u*1*, u*2*, . . . , uk V* , llamamos combinación lineal de *u*1*, u*2*, . . . , uk* a cualquier vector de la forma

∈

*λ*1*u*1 + *λ*2*u*2 + · · · + *λk uk* ∈ *V ,*

con *λ*1*, λ*2*, . . . , λk* ∈ R.

1. / 55

### Combinación lineal

* + Ejemplo.
    1. Sean los vectores *u* = (1*,* 0*,* 0) y *v* = (0*,* 2*,* 0) de R3.
       1. El vector (2*,* −2*,* 0) es combinación lineal de *u* y *v* .
       2. El vector (0*,* 0*,* 1) no es combinación lineal de *u* y *v* .
    2. Sean los polinomios *p*(*x* ) = 1 + *x* y *q*(*x* ) = 1 + *x* 2 de R2[*x* ].
       1. El polinomio *r* (*x* ) = 2 no es combinación lineal de *p*(*x* ) y *q*(*x* ).
       2. El polinomio *s*(*x* ) = 2 + *x* + *x* 2 es combinación lineal de *p*(*x* ) y *q*(*x* ).

*(Solución)*

1. / 55

### Dependencia e independencia lineal

* + Si *V* es un R-espacio vectorial y *u*1*, u*2*, . . . , uk* ∈ *V* , decimos que el con- junto de vectores { *u*1*, u*2*, . . . , uk* } es linealmente dependiente si existen *λ*1*, λ*2*, . . . , λk* ∈ R no todos nulos tales que

0 = *λ*1*u*1 + *λ*2*u*2 + · · · + *λk uk .*

En caso contrario decimos que el conjunto de vectores *u*1*, u*2*, . . . , uk* es

* { }

linealmente independiente.

1. / 55

### Dependencia e independencia lineal

Ejemplo. Justifica si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes.

•

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1) *u* | = | (1*,* 0*,* 1) *,* | 2) | *p*(*x* ) = *x* 2 + *x* + 1 *,* |
| *v* | = | (1*,* 1*,* 0) *,* |  | *q*(*x* ) = 2*x* + 1 *,* |
| *w* | = | (1*,* 1*,* 1) *,* |  | *r* (*x* ) = *x* 2 + 1 *.* |
| *t* | = | (1*,* 2*,* 1) *.* |  |  |

*(Solución)*

1. / 55

### Dependencia e independencia lineal

* + Proposición. Si *V* es un R-espacio vectorial y tenemos los vectores

*u*1*, u*2*, . . . , uk , uk*+1*, . . . , uk*+*r* ∈ *V* , entonces se cumple:

* + 1. Si 0 *u*1*, u*2*, . . . , uk* , entonces *u*1*, u*2*, . . . , uk* son linealmente dependi- entes.

∈ { } { }

* + 1. *v* ∈ *V* es linealmente independiente si y solo si *v* ̸= 0*.*
    2. Si { *u*1*, u*2*, . . . , uk* } son linealmente dependientes, entonces

{ *u*1*, u*2*, . . . , uk , uk*+1*, . . . , uk*+*r* } también son linealmente dependientes.

* + 1. Si { *u*1*, u*2*, . . . , uk , uk*+1*, . . . , uk*+*r* } son linealmente independientes, entonces

{ *u*1*, u*2*, . . . , uk* } también son linealmente independientes.

* + 1. *u*1*, u*2*, . . . , uk* son linealmente dependientes si y solo si al menos uno de los vectores es combinación lineal del resto.

{ }

1. / 55

### Rango

Proposición. Un conjunto de vectores *u*1*, u*2*, . . . , uk* R*n* es lineal- mente independiente si y solo si la matriz cuyas filas son los vectores

* { } ⊆

{ *u*1*, u*2*, . . . , uk* } tiene rango *k*.

Ejemplo. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes.

•

1. *T* = { (1*,* 1*,* 2*,* 2)*,* (0*,* 1*,* 1*,* 1)*,* (2*,* 0*,* 2*,* 2) }.
2. *S* = { (1*,* 1*,* 2*,* 2)*,* (0*,* 1*,* 1*,* 1)*,* (2*,* 0*,* 2*,* 2)*,* (1*,* 1*,* 1*,* 1) }.

*(Solución)*

1. / 55

# Sistema generador

1. / 55

### Sistema generador

Si *W* es un subespacio vectorial de *V* , decimos que *u*1*, u*2*, . . . , uk W* es un sistema generador de *W* si todo elemento de *W* se puede expresar como combinación lineal del conjunto de vectores { *u*1*, u*2*, . . . , uk* }.

* { } ⊂

1. / 55

### Sistema generador

Ejemplo. Determina si los siguientes conjuntos son sistemas generadores de los espacios indicados.

•

1. *S* = { (0*,* 1)*,* (1*,* 0)*,* (1*,* −1) } de R2.
2. *P* = { 1*, x, x* 2 } de R2[*x* ].
3. *R* = � ( 1 0

0 0

1 0

1 0

) *,* ( 2 −1

) *,* ( 1 0

) de M2.

1. *T* = { (0*,* 3*,* 0)*,* (1*,* 0*,* 0) } de R3.

*(Solución)*

1. / 55

### Subespacio generado

Si *S* = *u*1*, u*2*, . . . , uk V* , con *V* un R-espacio vectorial, llamamos subespacio vectorial generado por *S* (es decir, *S* ) al conjunto de todos los vectores obtenidos como combinación lineal de los elementos de *S*.

⟨ ⟩

* { } ⊂

*S* es el subespacio vectorial de *V* más pequeño (con menor cantidad de elementos) que contiene a *S*.

* ⟨ ⟩
* Ejemplo. Describe los siguientes subespacios vectoriales.
  1. ⟨ (1*,* 0) ⟩
  2. ⟨ (2*,* 1*,* 0)*,* (0*,* 1*,* 1) ⟩
  3. ⟨ *x* 2 + 1 ⟩

*(Solución)*

1. / 55

# Bases y dimensión

1. / 55

### Base y dimensión

* Si *V* es un R-espacio vectorial, decimos que el conjunto de vectores

*B* = { *v*1*, v*2 *. . . , vn* } ⊂ *V* es una base de *V* si

* 1. *B* es un conjunto linealmente independiente,
  2. *B* es un sistema generador de *V* .
* Si *B* tiene *n* elementos, entonces todas las bases de *V* tienen *n* elementos.

Si cambiamos el orden de los elementos de *B* obtenemos una base *B*′

•

distinta.

* Llamamos dimensión de *V* , dim(*V* ), al número de elementos de *B*.

1. / 55

### Base y dimensión

* Ejemplo.
  1. *B* = { (1*,* 0)*,* (0*,* 1) } es una base de R2.
  2. *B* = (1*,* 0*, . . . ,* 0)*,* (0*,* 1*,* 0*, . . . ,* 0)*, . . . ,* (0*, . . . ,* 0*,* 1) es una base de R*n*. Se

{ }

llama base canónica de R*n*.

* 1. *B* = 1*, x, x* 2 *, . . . , xn* es una base de R*n*[*x* ]. Sea llama base estándar de

{ }

R*n*[*x* ].

* 1. El espacio vectorial trivial *V* = 0 tiene dimensión 0 ya que 0 es un sistema generador de *V* pero no es linealmente independiente.

{ } { }

* 1. *B* = { 1*, x, x* 2 *, . . .* } es una base de R[*x* ].

1. / 55

### Base y dimensión

* Teorema. Si *V* es un R-espacio vectorial, entonces
  1. dim(*V* ) es el número mínimo de vectores que forman un sistema generador de *V* .
  2. dim(*V* ) es el número máximo de vectores de *V* linealmente independientes.
  3. Si *W* es subespacio vectorial de *V* , entonces dim(*W* ) ≤ dim(*V* ).
  4. Si *W* es subespacio vectorial de *V* , entonces dim(*W* ) = dim(*V* ) si y solo si *W* = *V* .
  5. Si *W* y *S* son dos subespacios vectoriales de *V* , entonces dim(*W* + *S*) = dim(*W* ) + dim(*S*) − dim(*W* ∩ *S*).

1. / 55

### Base y dimensión

* 1. Si *S* = *u*1*, u*2*, . . . , um* es un sistema generador de *V* (*m* dim(*V* )), entonces existe un subconjunto de *S* linealmente independiente.

{ } ≥

* 1. Si *u*1*, u*2*, . . . , ur V* son linealmente independientes (*r* dim(*V* )), existen vectores *ur*+1*, ur*+2*, . . . , un V* tales que *u*1*, u*2*, . . . , ur , ur*+1*, . . . , un* es una base de *V* .

∈ { }

∈ ≤

Teorema. Si *V* es un R-espacio vectorial con dim(*V* ) = *n* y *S* = *u*1*, . . . , un* es un conjunto de *n* vectores de *V* , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

* { }

1. *S* es una base de *V* .
2. *S* es un sistema generador de *V* .
3. *S* es linealmente independiente.
4. / 55

### Base y dimensión

Ejemplo. Encuentra una base y determina la dimensión de los siguientes subespacios.

•

1. *S* = { (*x, y, z* ) ∈ R *x* + 2*y* − *z* = 0*,* 2*x* − *y* + 3*z* = 0 }

3

I

1. *W* ={ (*x, y, z* ) ∈ R 2*x* −*y* +3*z* = 0*,* 4*x* −2*y* +6*z* = 0*,* −6*x* +3*y* −9*z* = 0 }

3

I

1. *T* = ⟨ *x* 3 + *x* 2 + *x, x* 3 − 1*, x* 2 + *x* + 1*, x* 2 + 1*,* 2*x* 2 + *x* + 2 ⟩

*(Solución)*

1. / 55

### Unión, intersección y suma de subespacios

* Ejemplo. Calcula una base de *S* + *T* siendo
  1. *S* = { (*x, y, z* ) ∈ R3 *x* + *y* + *z* = 0 } y

I

*T* = ⟨ (1*,* 1*,* 1)*,* (1*,* 1*,* 0)*,* (−1*,* −1*,* 0) ⟩ *.*

* 1. *S* = { *a* + *b x* + *c x* 2 + *d x* 3 ∈ R3[*x* ] *a* − *c* − *d* = 0*, b* + *c* = 0 } y

I

*T* = ⟨ 1 + *x* 2 + *x* 3 *,* 1 − *x* − *x* 2 *, x* + 2*x* 2 + *x* 3 ⟩ *.*

*(Solución)*

1. / 55

# Coordenadas y cambio de base

1. / 55

### Coordenadas

Todo elemento de *V* se puede expresar de forma única como combinación lineal de los elementos de una base.

•

* Si *v* ∈ *V* y *B* = { *u*1*, u*2*, . . . , un* } es un base de *V* , entonces existen unos únicos valores *λ*1*, λ*2*, . . . , λn* ∈ R tales que

*v* = *λ*1*u*1 + *λ*2*u*2 + · · · + *λnun .*

Decimos que los escalares *λ*1*, λ*2*, . . . , λn* son las coordenadas de *v V*

* ∈

con respecto de la base *B* y lo denotamos por

*v* = [*λ*1*, λ*2*, . . . , λn*]*B .*

1. / 55

### Coordenadas

* Ejemplo.
  1. En R2, calcula las coordenadas de *v* = (2*,* −4) con respecto a las bases:
     1. *B* = { (1*,* 0)*,* (0*,* 1) } (base canónica de R2).
     2. *B*′ = { (1*,* 1)*,* (0*,* 2) }.
  2. En R2[*x* ], calcula las coordenadas de *p*(*x* ) = 6*x* 2 2*x* + 3 con respecto a las bases:

−

* + 1. *B* = { 1*, x , x* 2 } (base estándar de R2[*x* ]).
    2. *B*′ = { *x* 2 *, x* + 1*,* −5 }

*(Solución)*

1. / 55

### Vectores linealmente independientes y coordenadas

Proposición. Un conjunto de vectores *u*1*, u*2*, . . . , uk V* es lineal- mente independiente si y solo si la matriz cuyas columnas (o filas) son las coordenadas de los vectores { *u*1*, u*2*, . . . , uk* } tiene rango *k*.

* { } ⊆

Ejemplo. Si *p*(*x* ) = 3*x* 2 +2*x* +1, *q*(*x* ) = 4*x* 2 +3*x* +2 y *r* (*x* ) = 6*x* 2 +4*x* +3.

•

¿Los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o independientes?

1. *T* = { *p*(*x* )*, q*(*x* )*, r* (*x* ) }
2. *S* = { *p*(*x* )*, q*(*x* ) }

*(Solución)*

1. / 55

### Matriz de cambio de base

* + Sea *V* un R-espacio vectorial de dimensión *n* y sean *B* = { *u*1*, u*2*, . . . , un* }

y *B*′ = { *w*1*, w*2*, . . . , wn* } dos bases de *V* .

* + Podemos escribir

1 1 1 1 1 1

*u*1 = *λ*1*w*1 + *λ*2*w*2 + · · · + *λnwn* = [*λ*1*, λ*2*, . . . , λn*]*B′ ,*

2 2 2 2 2 2

*u*2 = *λ*1*w*1 + *λ*2*w*2 + · · · + *λnwn* = [*λ*1*, λ*2*, . . . , λn*]*B′ ,*

.

. *n n*

*n n n n*

*un* = *λ*1 *w*1 + *λ*2 *w*2 + · · · + *λnwn* = [*λ*1 *, λ*2 *, . . . , λn*]*B′ .*

* + La matriz de cambio de base de *B* a *B*′ es



1. / 55

1

1

*λ*

1

*λ*

2

*PB′*←*B* =  .

1

*λ*

*n*

2 *. . . λn*

2 *. . . λn*

*λ*

*λ*

1

2

1

2

. . . . .

2 *. . . λn*

*λ*

*n*

*n*



 ∈ *Mn .*

### Matriz de cambio de base

En la columna *j* están las coordenadas del vector *uj* con respecto a la base

•

*B*′ (para *j* = 1*,* 2*, . . . , n*).

La matriz de cambio de base de *B*′ a *B* es la inversa de *PB′*←*B* :

•

−1

*PB*←*B′* = (*PB′*←*B* ) .

* + Si *v V* es un vector con coordenadas *v* = [*α*1*, α*2*, . . . , αn*]*B* y

∈

*v* = [*β*1*, β*2*, . . . , βn*]*B′* , se cumple

*β*1 







*β*2

.

*α*1 

 *T T*





*α*2

. = *PB′*←*B* .







.



*βn αn*

*,* o equivalentemente, *vB′* = *PB′*←*B vB .*



1. / 55

### Matriz de cambio de base

* + Ejemplo.
    1. Si *B* = (1*,* 0*,* 0)*,* (0*,* 1*,* 0)*,* (0*,* 0*,* 1) y *B*′ = (1*,* 1*,* 0)*,* (0*,* 1*,* 1)*,* (0*,* 1*,* 0) son

{ } { }

dos bases de R3, calcula:

* + - 1. La matriz de cambio de base de *B*′ a *B*.
      2. Las coordenadas con respecto a la base canónica del vector *v* ∈ R3 sabiendo que *v* = [1*,* 0*,* −2]*B′* .
    1. Si *B* = 1*, x, x* 2 y *B*′ = *x* 2 2*x* + 1*,* 2*x* 2*,* 2 son dos bases de R2[*x* ], calcula:

{ } { − − }

* + - 1. La matriz de cambio de base de *B*′ a *B*.
      2. Las coordenadas del vector *p*(*x* ) = 1 + 2*x* − 2*x* 2 con respecto a la base *B*′.

*(Solución)*

1. / 55

# Soluciones

1. / 55

Pág. 5

1. Utilizando las operaciones suma de vectores y producto de un vector por un escalar y el elemento neutro es el (0*,* 0*, . . . ,* 0).
2. Utilizando las operaciones suma de matrices y producto de una matriz por un escalar y

 0 0 *. . .* 0 

el elemento neutro es el . .



. . .

. .

0 0 *. . .* 0

1. Utilizando las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar y el elemento neutro es el 0 + 0*x* + 0*x* 2 + · · · + 0*xn* + *. . .*
2. Utilizando las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar y el elemento neutro es el 0 + 0*x* + 0*x* 2 + · · · + 0*xn* .

Pág. 5

1. No es un subespacio vectorial porque −7 ∈ *V* pero 4 · (−7) ̸∈ *W* .
2. No es un subespacio vectorial porque no contiene al neutro: (0*,* 0) ̸∈ *V* ya que 0 ̸= 3 · 0 + 1.
3. / 55

Pág. 8

1. *W* sí es un subespacio vectorial de R2 porque:
   * Si (*x , y* )*,* (*z, t*) ∈ *W* , ¿(*x , y*}) + (*z, t*) = (*x* + *z, y* + *t*) ∈ *W* ? Cierto ya que

(*x , y* ) ∈ *W* ⇒ *y* = 2*x* (*z, t*) ∈ *W* ⇒ *t* = 2*z*

+ ⇒ *y* + *t* = 2*x* + 2*z* = (2*x* + *z*).

Si (*x , y* ) ∈ *W* y *λ* ∈ R, ¿*λ*(*x , y* ) = (*λx , λy* ) ∈ *W* ? Cierto ya que (*x , y* ) ∈ *W* ⇒ *y* = 2*x*

* }

*λ* ∈ R

× ⇒ *λy* = *λ*2*x* = 2(*λx* ).

1. *S* no es un subespacio vectorial de R2 porque (1*,* 0) ∈ *S* pero 2(1*,* 0) ̸∈ *S* porque 2 + 0 ̸= 1.
2. *T* sí es un subespacio vectorial de R3 porque:

Si (2*t,* 4*t,* −*t*)*,* (2*s,* 4*s,* −*s*) ∈ *T* , ¿(2*t,* 4*t,* −*t*) + (2*s,* 4*s,* −*s*) ∈ *W* ? Cierto ya que

◦

(2*t,* 4*t,* −*t*) + (2*s,* 4*s,* −*s*) = (2(*t* + *s*)*,* 4(*t* + *s*)*,* −(*t* + *s*)) con *s* + *t* ∈ R.

Si (2*t,* 4*t,* −*t*) ∈ *T* y *λ* ∈ R, ¿*λ*(2*t,* 4*t,* −*t*) ∈ *W* ? Cierto ya que

◦

*λ*(2*t,* 4*t,* −*t*) = (2(*λt*)*,* 4(*λt*)*,* −(*λt*)) con *λt* ∈ R.

1. / 55
2. *P* sí es un subespacio vectorial de R2[*x* ] porque:
   * Si *p*(*x* )*, q*(*x* ) ∈ *P*, ¿*p*(*x* ) +}*q*(*x* ) ∈ *P*? Cierto ya que

*p*(*x* ) ∈ *P* ⇒ *p*(3) = 0

*q*(*x* ) ∈ *P* ⇒ *q*(3) = 0

+ ⇒ *p*(3) + *q*(3) = 0.

Si *p*(*x* ) ∈ *P* y *λ* ∈ R, ¿*λp*(*x* ) ∈ *W* ? Cierto ya que

* }

*p*(*x* ) ∈ *P* ⇒ *p*(3) = 0

*λ* ∈ R

× ⇒ *λp*(3) = *λ* · 0 = 0.

1. *N* sí es un subespacio vectorial de M2 porque:
   * Si *A* = ( *a* 2*a*

0 −*a*

*A* + *B* = (

) *, B* = ( *b* 2*b*

) ∈ *N*, ¿*A* + *B* ∈ *P*? Cierto ya que

*a* + *b* 2(*a* + *b*)

0 −*b*

).

0 −(*a* + *b*)

* + Si *A* = ( *a* 2*a* ) ∈ *N* y *λ* ∈ R, ¿*λA* ∈ *W* ? Cierto ya que *λA* = ( *λa* 2(*λa*) ).

0 −*a*

0 −(*λa*)

1. Como *A* es invertible, existe *A*−1. Entonces, *AX* = 0 ⇒ *A*−1 *AX* = *A*−10 ⇒

⇒ *InX* = 0 ⇒ *X* = 0. Es decir, *V* = { 0 } que es subespacio vectorial de M*n*×1.

1. / 55

Pág. 9

1. *S* no es un subespacio vectorial de R2 ya que (0*,* 0) ̸∈ *S* porque 0 ̸= 0 + 1.
2. *T* no es un subespacio vectorial de R2[*x* ] ya que 0 = 0 + 0 *x* + 0 *x* 2 ̸∈ *T* porque el

f 1 = 0

*,*

sistema

*a* = 0 *,*

*b* = 0 *,*

no tiene solución.

1. *N* no es un subespacio vectorial de M2 ya que ( 0 0 ) ̸∈ *N* porque el sistema

0 0



*a* = 0 *,*

*a* + 1 = 0 *,*

2*a* = 0 *,*

−*a* = 0 *,*

no tiene solución.

1. *W* no es un subespacio vectorial de R3 ya que (1*,* 1*,* 0) ∈ *W* pero 2 (1*,* 1*,* 0) ̸∈ *W* .

Pág. 12

1. a) *S T* sí es subespacio vectorial de R2 por ser intersección de dos subespacios vectoriales de R2.

∩

* 1. *S* ∪ *T* no es subespacio vectorial porque (1*,* 0) ∈ *S* ⊂ *S* ∪ *T* y (0*,* 7) ∈ *T* ⊂ *S* ∪ *T*

pero (1*,* 0) + (0*,* 7) = (1*,* 7) ̸∈ *S* ∪ *T* porque (1*,* 7) ̸∈ *S* ni (1*,* 7) ̸∈ *T* .

1. / 55
2. a) *S T* sí es subespacio vectorial de R2 por ser intersección de dos subespacios vectoriales de R2.

∩

* 1. *S* ∪ *T* no es subespacio vectorial porque (1*,* 2) ∈ *S* ⊂ *S* ∪ *T* y (1*,* 3) ∈ *T* ⊂ *S* ∪ *T*

pero (1*,* 2) + (1*,* 3) = (2*,* 5) ̸∈ *S* ∪ *T* porque (2*,* 5) ̸∈ *S* ni (2*,* 5) ̸∈ *T* .

Pág. 15

1. a) Cierto porque (2*,* −2*,* 0) = 2 *u* − *v* .

f

* 1. Cierto porque (0*,* 0*,* 1) = *α* (1*,* 0*,* 0) + *β* (0*,* 2*,* 0) ⇒

solución.

f

0 = 1 *α ,*

0 = 2 *β ,*

1 = 0

no tiene

1. a) Cierto porque 2 = *α* (1 + *x* ) + *β* (1 + *x*
   1. Cierto porque *s*(*x* ) = *p*(*x* ) + *q*(*x* ).
2. / 55

2) ⇒

2 = *α* + *β ,*

0 = *α ,*

0 = *β ,*

no tiene solución.

Pág. 17

1. Si (0*,* 0*,* 0) = *α* (1*,* 0*,* 1) + *β* (1*,* 1*,* 0) + *γ* (1*,* 1*,* 1) + *λ* (1*,* 2*,* 1), entonces

f

f

0 = *α* + *β* + *γ* + *λ* 0 = *β* + *γ* + 2*λ* 0 = *α* + *γ* + *λ*

f

−

∼

*E*3 →*E*3 −*E*1

0 = *α* + *β* + *γ* + *λ* 0 = *β* + *γ* + 2*λ* 0 = − *β*

∼

*E*3 →*E*3 +*E*2

0 = *α* + *β* + *γ* + *λ*

0 = *β* + *γ* + 2*λ*

0 = *γ* + 2*λ*

es un SCI con solución:



*α* = *s , β* = 0 *,*

*γ* = 2*s , λ* = *s*

−

con *s* ∈ R.

Deducimos que los vectores { *u, v , w , t* } son linealmente dependientes.

1. Si 0 = 0 + 0 *x* + 0 *x* 2 = *α* (1 + *x* + *x* 2) + *β* (1 + 2*x* ) + *γ* (1 + *x* 2), entonces

f

f

f

0 = *α* + *β* + *γ*

0 = *α* + 2*β*

0 = *α* + *γ*

∼

*E*2 →*E*2 −*E*1

*E*3 →*E*3 −*E*1

0 = *α* + *β* + *γ* 0 = *β* − *γ* 0 = − *β*

∼

*E*3 →*E*3 +*E*2

0 = *α* + *β* + *γ*

0 = *β* − *γ*

0 = − *γ*

es un SCD con solución: *α* = *β* = *γ* = 0.

Deducimos que los vectores { *p*(*x* )*, q*(*x* )*, r* (*x* ) } son linealmente independientes.

1. / 55

Pág. 19

1. Como rg

1 1 2 2

0 1 1 1

(

)

2 0 2 2

= rg

*F*3 →*F*3 −2*F*1

1 1 2 2

0 1 1 1

(

)

0 −2 −2 −2

=

*F*3 →*F*3 +2*F*2

= rg

1 1 2 2

0 1 1 1

(

0 0 0 0

) = 2 deducimos que los vectores de *T* son linealmente

dependientes.

1. Como *S* = *T* (1*,* 1*,* 1*,* 1) y los vectores de *T* son linealmente dependientes, también lo son los de *S*.

∪ { }

Pág. 22

1. *S* sí es sistema generador de R2 porque si (*a, b*) ∈ R2, el sistema (*a, b*) = *α* (0*,* 1) + *β* (1*,* 0) + *γ* (1*,* −1) tiene solución:

f

−

*a* = *β* + *γ* es SCI con solución:

*b* = *α* − *γ*

*α* = *b* + *t , β* = *a t , γ* = *t ,*

con *t* ∈ R.

1. / 55
2. *P* sí es sistema generador de R2[*x* ] porque si *a* + *b x* + *c x* 2 ∈ R2[*x* ], el sistema

f

*a* + *b x* + *c x* 2

= *α* 1 + *β x* + *γ x* 2

tiene solución:

*α* = *a , β* = *b , γ* = *c ,*

con *t* ∈ R.

1. *R* no es sistema generador de M2 porque si ( *a b* ) ∈ M2, el sistema

*c d*

(

*a b* ) = *α* ( 1 0

0 0

1 0

1 0

*c d*



) + *β* ( 2 −1

) + *γ* ( 1 0

), es decir,

*a* = *α* + 2*β* + *γ*



*b* = *β*

−

*c* = *β* + *γ*



*d* = 0

no tiene solución si *d* ̸= 0.

1. *T* no es sistema generador de R3 porque si (*a, b, c*) ∈ R3, el sistema

f *a* =

*β*

(*a, b, c*) = *α* (0*,* 3*,* 0) + *β* (1*,* 0*,* 0), es decir,

*b* = 3*α*

*c* = 0

no tiene solución si *c* ̸= 0.

1. / 55

Pág. 23

1. ⟨ (1*,* 0) ⟩ = { *α* (1*,* 0) I *α* ∈ R }. I

I

1. ⟨ (2*,* 1*,* 0)*,* (0*,* 1*,* 1) ⟩ = { *α* (2*,* 1*,* 0) + *β* (0*,* 1*,* 1) *α, β* ∈ R }.

2 2

3) ⟨ *x* + 1 ⟩ = { *α* (*x* + 1) I *α* ∈ R }.

Pág. 29

1. Buscamos un sistema generador de *S* resolviendo el sistema

f −

*x* + 2*y z* = 0 2*x* − *y* + 3*z* = 0

*x* = *t*

*y* = *t ,*

− ⇒

*z* = *t ,*

con *t* ∈ R. Entonces, *S* = ⟨ (−1*,* 1*,* 1) ⟩.

Como el sistema generador está formado por un único elemento no nulo, es linealmente independiente y, por lo tanto, una base de *S* es { (−1*,* 1*,* 1) }.

1. Buscamos un sistema generador de *W* resolviendo el sistema

f −

f

2*x y* + 3*z* = 0

4*x* − 2*y* + 6*z* = 0 ⇒

*S* =−6*x* + 3*y* − 9*z* = 0

*x* = *t*

*y* = 2*t* + 3*s ,*

*z* = *s ,*

con *t, s* ∈ R. Entonces,

⟨ (1*,* 2*,* 0)*,* (0*,* 3*,* 1) ⟩. Como además esos dos vectores son linealmente

independientes (ya que tienen rango 2) una base de *W* es { (1*,* 2*,* 0)*,* (0*,* 3*,* 1) }.

1. / 55
2. Buscamos un sistema generador de *W* resolviendo el sistema

f −

f

2*x y* + 3*z* = 0 4*x* 2*y* + 6*z* = 0 6*x* + 3*y* 9*z* = 0

− −

−

⇒

escribir

*x* = *t*

*y* = 2*t* + 3*s ,*

*z* = *s ,*

con *t, s* ∈ R. Entonces, podemos

*W* = { (*x , y , z*) ∈ R *x* = *α, y* = 2*α* + 3*β, z* = *β* } =

3

I

3

= { (*α,* 2*α* + 3*β, β*) ∈ R I *α, β* ∈ R } =

= { (*α,* 2*α,* 0) + (0*,* 3*β, β*) ∈ R *α, β* ∈ R } =

3

I

3

= { *α*(1*,* 2*,* 0) + *β*(0*,* 3*,* 1) ∈ R I *α, β* ∈ R } = ⟨(1*,* 2*,* 0)*,* (0*,* 3*,* 1)⟩ *.*

Como además esos dos vectores son linealmente independientes (ya que rg(1 2 0)= 2),

0 3 1

una base de *W* es { (1*,* 2*,* 0)*,* (0*,* 3*,* 1) }.

1. Como ya tenemos un sistema generador de *T* , solo hay que comprobar que son lineal- mente independientes (pasando a coordenadas con respecto de la base estándar):

rg 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  0  −1   | | 1  0  1  0 | 1  0  1  1 | 1  1  0  0 |  −1  0    | 0  1  1  0 | 0  1  1  1 | 1   1  0  = |
|  | 2 | 1 | 2 | 0 |  1 ↔ 2  1 | 1 | 2 | 0  *F*3 →*F*3 +*F*1  0 *F*4 →*F*4 +*F*1 *F*5 →*F*5 −2*F*1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1

= rg 1

*F F*

2

1. / 55

−1 1 0

0



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0  1  1  0  1  0  1  0  0 | 0  1  1  1  2  0  1  1  1 | 1   1  2  1   1 | −1  *F*3 →*F*3 −*F*2 0  *F*5 →*F*5 −*F*2 0  −1  *F*4 →*F*4 −*F*3 0 | 0  1  0  0  0  0  1  0  0 | 0  1  0  1  1  0  1  1  0 | 1   1  0  =  1 *F*3 ↔  1  1   1  0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

= rg  0

0

0

1  =

rg 0

*F*5

−1 1 0

0

= rg  0 1  = rg  0 1  = 3*.*

0

0

Entonces, una base de *T* es { *x* 3 − *x , x* 3 + *x* 2 + *x ,* 2*x* 2 + *x* + 2 }.

Pág. 30

1. Buscamos un sistema generador de *S*. Para ello, resolvemos el sistema

f *x* = −*s* − *t ,*

*x* + *y* + *z* = 0 ⇒

*y* = *s ,*

*z* = *t .*

Entonces, podemos escribir

*S* = { (−*s* − *t,* −*s,* −*t*) ∈ R *s, t* ∈ R } = { (−*s,* −*s,* 0) + (−*t,* 0*,* −*t*) ∈ R *s, t* ∈ R } =

3 3

I I

= { *s*(−1*,* −1*,* 0) + *t*(−1*,* 0*,* −1) ∈ R I *s, t* ∈ R } = ⟨ (−1*,* 1*,* 0)*,* (−1*,* 0*,* 1) ⟩ *.*

3

49 / 55

Ya conocemos un sistema generador de

*S* + *T* = ( 1*,* 1*,* 0)*,* ( 1*,* 0*,* 1)*,* (1*,* 1*,* 1)*,* (1*,* 1*,* 0)*,* ( 1*,* 1*,* 0) . Eliminamos los vec-

⟨ − − − − ⟩

tores linealmente dependientes para obtener la base:

 1 1 0   1 1 0 

−1 0 1

rg  1 1 1 









= rg 

0 1 1

0 0 1

 = 3.

1 1 0

−1 −1 0

*F*2 →*F*2 +*F*1 *F*3 →*F*3 −*F*1 *F*4 →*F*4 −*F*1 *F*5 →*F*5 +*F*1

0 0 0

0 0 0

Deducimos que una base de *S* + *T* es { (1*,* 1*,* 0)*,* (−1*,* 0*,* 1)*,* (1*,* 1*,* 1) }.

1. Buscamos un sistema generador de *S*. Para ello, resolvemos el sistema

*a c*

− −

*b* + *c*

*d* = 0

= 0 ⇒



*a* = *α* + *β ,*

*b* = *α ,*

−

*c* = *α ,*

*d* = *β .*

Entonces, podemos escribir

50 / 55

*S* = { (*α* + *β*) − *βx* + *αx* + *βx* ∈ R3[*x* ] *α, β* ∈ R } =

= { (*α* + *αx* ) + (*β* − *βx* + *βx* ) ∈ R3[*x* ] *s, t* ∈ R } =

2 3

2 3

I

I

= { *α*(1 + *x* ) + *β*(1 − *x* + *x* ) ∈ R3[*x* ] I *s, t* ∈ R } = ⟨ 1 + *x ,* 1 − *x* + *x* ⟩ *.*

2 3 2 3

Ya conocemos un sistema generador de

*S* + *T* = 1 + *x* 2 *,* 1 *x* + *x* 3 *,* 1 + *x* 2 + *x* 3 *,* 1 *x x* 2 *, x* + 2*x* 2 + *x* 3 . Eliminamos los vectores linealmente dependientes para obtener la base. Para ello, trabajamos en coordenadas con respecto a la base *B* = { 1*, x , x* 2 *, x* 3 }.

⟨ − − − ⟩





rg 





1 0 1 0

1 1 0 1

−

1 0 1 1 



= rg 





1 0 1 0

0 1 1 1

− −

0 0 0 1  =



1 1 1 0

− −

0 1 2 1



*F*2 →*F*2 −*F*1 *F*3 →*F*3 −*F*1 *F*4 →*F*4 −*F*1

0 1 2 0

0 1 2 1

− −

*F*4 →*F*4 −*F*2 *F*5 →*F*5 +*F*2

= rg 





1 0 1 0

0 1 1 1

− −

0 0 0 1 

− − 

= rg 





1 0 1 0

0 1 1 1

0 0 −1 −1  =

− − 

0 0 1 1

− −

0 0 1 2

 *F*3 ↔*F*4

0 0 0 1

0 0 1 2

 *F*5 →*F*5 +*F*3

= rg 





1 0 1 0

0 1 1 1

0 0 −1 −1 

= rg 





1 0 1 0

0 −1 −1 1

0 0 −1 −1

 = 4.





0 0 0 1

0 0 0 1

 *F*5 →*F*5 −*F*4

0 0 0 1

0 0 0 0

Deducimos que una base de *S* + *T* es { 1 + *x* 2 *,* 1 − *x* + *x* 3 *,* 1 − *x* − *x* 2 *,* 1 + *x* 2 + *x* 3 }.

51 / 55

Pág. 33

1. a) Resolvemos el sistema: (2*,* −4) = *α*(1*,* 0) + *β*(0*,* 1) ⇒ 2 = *α ,*

Entonces,

*v* = [2

*,* −4]*B*.

−4 = *β .*

* 1. Resolvemos el sistema: (2*,* −4) = *α*(1*,* 1) + *β*(0*,* 2) ⇒ 2 = *α* ⇒

−4 = *α* + 2*β*

⇒

*α* = 2 *, β* = 3 *.*

Entonces, *v* = [2*,* −3]*B′* .

2

2 f 3 = *α ,*

1. a) Resolvemos el sistema: 6*x*

*p*(*x* ) = [3*,* −2*,* 6]*B*.

−2*x* +3 = *α* · 1 +*β x* +*γ x* ⇒

2 = *β ,*

6 = *γ .*

−

Entonces,

* 1. Resolvemos el sistema: 6*x*

f *α* = 6 *,*

2−2*x* +3 = *α x*

2+*β* (*x* +1)+*γ*·(−5) ⇒

6 = *α*

−2 = *β*

f

3 = *β* − 5*γ*

⇒ *β* = −2 *, γ* = −1 *.*

Entonces, *p*(*x* ) = [6*,* −2*,* −1]*B′* .

52 / 55

Pág. 34

1. Calculamos las coordenadas de los vectores de *T* con respecto a la base estándar de

R2[*x* ], la base *B* = { 1*, x , x* 2 }:

*p*(*x* ) = 3*x* 2 + 2*x* + 1 = [1*,* 2*,* 3]*B , q*(*x* ) = 4*x* 2 + 3*x* + 2 = [2*,* 3*,* 4]*B ,*

*r* (*x* ) = 6*x* 2 + 4*x* + 3 = [3*,* 4*,* 6]*B .*

(

(

(

Como rg

1 2 3

2 3 4

3 4 6

) = rg

1 2 3

0 −1 −2

0 −2 −3

) = rg

1 2 3

0 1 2

0 0 1

) = 3 = nº de

vectores de *T* , deducimos que los vectores de *T* son linealmente independientes.

1. Como *S* ⊂ *T* y *T* es linealmente independiente, *S* también es linealmente independiente.

Pág. 37

1. a) Como *B* es la base canónica, las coordenadas de los vectores de *B*′ con respecto a la base *B* son:

(1*,* 1*,* 0) = [1*,* 1*,* 0]*B,* (0*,* 1*,* 1) = [0*,* 1*,* 1]*B* y (0*,* 1*,* 0) = [0*,* 1*,* 0]*B ,*

(

)

y entonces *PB*←*B′* =

1 0 0

1 1 1 .

0 1 0

53 / 55

*T T* ( 1 0 0

)( 1 )

( 1 )

* 1. Como *vB* = *PB*←*B′ vB′* =

*v* = [1*,* −1*,* 0]*B*.

1 1 1

0 1 0

0 = 1

−2 0

−

, entonces

1. a) Como *B* es la base estándar, las coordenadas de los vectores de *B*′ con respecto a la base *B* son:

*x* 2 − 2*x* + 1 = [1*,* −2*,* 1]*B,* 2*x* − 2 = [−2*,* 2*,* 0]*B* y 2 = [2*,* 0*,* 0]*B ,*

( −

)

y entonces *PB*←*B′* =

1 2 2

2 2 0 .

−

1 0 0

* 1. Calculamos la inversa de *PB*←*B′* para obtener *PB′*←*B* :

( −

( −

)

)

(*PB*←*B′* | *I*3) =

1 2 2

2 2 0

−

1 0 0

1 0 0

0 1 0

0 0 1

∼

*F*2 →*F*2 +2*F*1 *F*3 →*F*3 −*F*1

1 2 2

0 −2 4

0 2 −2

1 0 0

2 1 0

−1 0 1

1 2 2

( −

0 2 4

−

∼

0 0 2

*F*

1 0 0

2 1 0

1 1 1

∼

*F*1 →*F*1 −*F*3

)

1 2 0

0 2 0

( −

−

0 0 2

0 1 1

0 1 2

− −

− −

)

1 1 1

54 / 55

3 →*F*3 +*F*2

*F*2 →*F*2 −2*F*3

( 1 0 0

∼

0 −2 0

0 0 1 ) ∼

( 1 0 0

0 0 1

0

1

1

1

=

)

1

*/*2

*F*1 →*F*1 −*F*2

0 −1 −2

0 0 2

1 1 1

*F*2 → *− F*2*/*2

*F*3 →*F*3*/*2

0 1 0

0 0 1

*/*2 1*/*2 */*2

= (*I*3 | *PB′*←*B* ).

*T*

Entonces, *vB′* = *PB′*←*B vB* =

*T* ( 0

1 0 1 )( 1 )

( −2 )

tanto, *p*(*x* ) = [−2*,* −1*,* 1 ]*B′* .

2

0

1

*/*2 1

2

=

−1

y por lo

*/*2 1*/*2 1*/*2 −2

1*/*2

55 / 55

# Tema 9. Aplicaciones lineales

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales Curso 2023 – 2024

# Aplicación lineal

2 / 35

### Aplicación

* Si *A* y *B* son dos conjuntos, llamamos aplicación de *A* en *B* (denotado por *f* : *A* −→ *B*) a una *ley* o *regla* que asigna a cada elemento *x* ∈ *A* un *único* elemento de *B*, denotado por *f* (*x* ) ∈ *B*.

Decimos que *A* es el conjunto origen y *B* es el conjunto de llegada o

•

destino.

* Llamamos imagen de *x* ∈ *A* al valor *f* (*x* ) ∈ *B* y antiimagen de *f* (*x* ) ∈ *B*

al valor *x* ∈ *A*.

* Ejemplo.
  1. *f* : N −→ Z con *f* (*n*) = −*n*
  2. *f* : R −→ R con *f* (*x* ) = *x* 2

3 / 35

### Aplicación lineal

Si *V* y *W* son dos R-espacios vectoriales, decimos que *f* : *V W* es una aplicación lineal (o homomorfismo) si

* −→

*f* (*αu* + *βv* ) = *αf* (*u*) + *βf* (*v* ) para todo *u, v* ∈ *V* y para todo *α, β* ∈ R.

O equivalentemente, si

f

*f* (*u* + *v* ) = *f* (*u*) + *f* (*v* ) para todo *u, v* ∈ *V ,*

*f* (*λu*) = *λf* (*u*) para todo *u* ∈ *V* y para todo *λ* ∈ R *.*

* Si *V* = *W* decimos que la aplicación lineal es un endomorfismo.

4 / 35

### Aplicación lineal

* Ejemplo. Determina si las siguientes aplicaciones son lineales.
  1. *f* : R3 −→ R2 con *f* (*x , y , z* ) = (*x* − *y , z* + *x* )
  2. *f* : R3 −→ R2 con *f* (*x , y , z* ) = (*y , x* 2)
  3. *f* : R2[*x* ] −→ R1[*x* ] con *f* (*p*(*x* )) = *p*′(*x* )
  4. *f* : R2[*x* ] −→ M2 con *f* (*a* + *bx* + *cx* 2) = ( *b* 2 i

−*c a* + *b*

*(Solución)*

5 / 35

### Aplicación lineal

* Proposición. Si *f* : *V* −→ *W* es una aplicación lineal, se cumple:
  1. *f* (0) = 0
  2. *f* (−*v* ) = −*f* (*v* ) para todo *v* ∈ *V*
  3. *f* (*λ*1*u*1 + *λ*2*u*2 + · · · + *λk uk* ) = *λ*1*f* (*u*1) + *λ*2*f* (*u*2) + · · · + *λk f* (*uk* ) para todo

*u*1*, u*2*, . . . , uk* ∈ *V* y para todo *λ*1*, λ*2 *. . . , λk* ∈ R.

* Ejemplo. Determina si la siguiente aplicación es lineal.
  1. *f* : R2[*x* ] −→ R2[*x* ] con *f* (*p*(*x* )) = *p*(*x* ) + 2 para todo *p*(*x* ) ∈ R2[*x* ]

*(Solución)*

6 / 35

# Núcleo e imagen

7 / 35

### Núcleo e imagen

* Si *f* : *V* −→ *W* es una aplicación lineal, se define:
* El núcleo de *f* como
* La imagen de *f* como

ker(*f* ) = { *v* ∈ *V* I *f* (*v* ) = 0 } *.*

Im (*f* ) = { *f* (*v* ) ∈ *W* I *v* ∈ *V* } *.*

8 / 35

### Núcleo e imagen

* Proposición. Si *f* : *V* −→ *W* es una aplicación lineal, entonces
  1. ker(*f* ) es un subespacio vectorial de *V* .
  2. Im (*f* ) es un subespacio vectorial de *W* y el rango de *f* es rg (*f* ) = dim(Im (*f* )).
  3. Si { *u*1*, u*2*, . . . , uk* } es un sistema generador de *V* , entonces

{ *f* (*u*1)*, f* (*u*2)*, . . . , f* (*uk* ) } es un sistema generador de Im (*f* ) (que puede ser distinto de *W* ).

* 1. Si *V* es un R-espacio vectorial de dimensión finita, se cumple

dim(ker(*f* )) + dim(Im (*f* )) = dim(*V* ) *.*

9 / 35

### Núcleo e imagen

Ejemplo. Calcula el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales.

•

1. *f* : R3 −→ R2 con *f* (*x , y , z* ) = (*x* − *y , z* ).
2. *f* : R2[*x* ] −→ R1[*x* ] con *f* (*p*(*x* )) = *p*′(*x* ).
3. *f* : M2 −→ R3[*x* ] con *f* ( *a b* i = (*a* + *d* )*x* 3 + (*b* − 2*c*)*x* 2 + *cx* + *a*.

*c d*

*(Solución)*

10 / 35

# Aplicaciones lineales inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

11 / 35

### Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

* Decimos que *f* : *A* −→ *B* es inyectiva si para *x , y* ∈ Dom (*f* ) con

*f* (*x* ) = *f* (*y* )*,* entonces *x* = *y .*

* Ejemplo. Determina si las siguientes aplicaciones son inyectivas.
  1. *f* : *A B*
  2. *g* : *A B*

*(Solución)*



*a*

*b c*

*d*

1

2

3

4

5



*a*

*b c*

*d*

1

2

3

4

5

12 / 35

### Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Decimos que *f* : *A B* es sobreyectiva si para todo *y B* existe *x A*

* −→ ∈ ∈

con *f* (*x* ) = *y* , es decir, si

Im (*f* ) = *B .*

* Ejemplo. Determina si las siguientes aplicaciones son sobreyectivas.
  1. *f* : *A B*
  2. *g* : *A B*



*a*

*b c*

*d*

1

2

3

4

5



*a*

*b c*

*d e*

1

2

3

4

5

*(Solución)*

13 / 35

### Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

* Decimos que *f* : *A* −→ *B* es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo. Determina si las siguientes aplicaciones son inyectivas, sobreyec- tivas y/o biyectivas.

•

* 1. *f* : R −→ R con *f* (*x* ) = *x* 2
  2. *f* : R −→ [0*,* +∞) con *f* (*x* ) = *x* 2
  3. *f* : [0*,* +∞) −→ R con *f* (*x* ) = *x* 2
  4. *f* : [0*,* +∞) −→ [0*,* +∞) con *f* (*x* ) = *x* 2

*(Solución)*

14 / 35

### Aplicación inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

* Caracterización. Sea *f* : *V* −→ *W* una aplicación lineal. Entonces,
* *f* es inyectiva si y solo si ker(*f* ) = { 0 }.
* *f* es sobreyectiva si y solo si Im (*f* ) = *W* .
* Proposición. Sea *f* : *V* −→ *W* una aplicación lineal. Entonces,
* *f* es inyectiva si y solo si dim(Im (*f* )) = dim(*V* ).
* *f* es sobreyectiva si y solo si dim(Im (*f* )) = dim(*W* ).

15 / 35

# Matriz asociada a una aplicación lineal

16 / 35

### Matriz asociada a una aplicación lineal

* Sea *f* : *V* −→ *W* una aplicación lineal y sean

*B* = { *u*1*, u*2*, . . . , un* } y *B*′ = { *w*1*, w*2*, . . . , wm* }

bases de *V* y de *W* respectivamente.

* Podemos escribir

1 1 1 1 1 1

*f* (*u*1) = *λ*1*w*1 + *λ*2*w*2 + · · · + *λmwm* = [*λ*1*, λ*2*, . . . , λm*]*B′ ,*

2 2 2 2 2 2

*f* (*u*2) = *λ*1*w*1 + *λ*2*w*2 + · · · + *λmwm* = [*λ*1*, λ*2*, . . . , λm*]*B′ ,*

.

*n n n n n n*

*f* (*un*) = *λ*1 *w*1 + *λ*2 *w*2 + · · · + *λmwm* = [*λ*1 *, λ*2 *, . . . , λm*]*B′ .*

17 / 35

### Matriz asociada a una aplicación lineal

* La matriz asociada a *f* respecto de las bases *B* y *B*′ es





1 2 *. . . λn*

*λ*

*λ*

1

1 1

1 2 *n*

*λ*2 *λ*2 *. . . λ*2





*M ′* (*f* ) =

*B* ←*B* 



.

1

*λ*

*m*

. . . . .

2 *. . . λn*

*λ*

*m*

*m*

 ∈ M*m*×*n .*

En la columna *j* están las coordenadas del vector *f* (*uj* ) con respecto a la base *B*′ (para *j* = 1*,* 2*, . . . , n*).

•

18 / 35

### Matriz asociada a una aplicación lineal

* Si *v V* es un vector con coordenadas *v* = [*α*1*, α*2 *. . . , αn*]*B* y

∈

*f* (*v* ) = [*β*1*, β*2*, . . . , βm*]*B′* , entonces se cumple

 *β*1

 .

*β*2

.

*βm*

o equivalentemente,





= *MB′*←*B* (*f* )

*T*

 *α*1

 .

*α*2

.

*αn*

*T*



 *,*

(*f* (*v* ))*B′* = *MB′*←*B* (*f* ) *vB .*

19 / 35

### Matriz asociada a una aplicación lineal

* Si *f* : *V* −→ *V* es la identidad, es decir,

*f* (*v* ) = *v* para todo *v* ∈ *V ,*

y *B* y *B*′ son dos bases de *V* , entonces

*MB′*←*B* (*f* ) = *PB′*←*B .*

20 / 35

### Matriz asociada a una aplicación lineal

Ejemplo. Calcula la matriz asociada de las siguientes aplicaciones lineales respecto a las bases indicadas.

•

1. *f* : R3 −→ R2 dada por *f* (*x , y , z* ) = (*x* + *y ,* −*z* )

*B* = { (1*,* 0*,* 0)*,* (0*,* 1*,* 0)*,* (0*,* 0*,* 1) } y

*B*′ = { (1*,* 0)*,* (0*,* 1) }

1. *f* : R3 −→ R2[*x* ] dada por *f* (*a, b, c*) = (*a* + *b*)*x* 2 + *a* + *b* + *c B* = { (1*,* 0*,* 0)*,* (1*,* 1*,* 0)*,* (1*,* 1*,* 1) } y

*B*′ = { 1*, x , x* 2 }

*(Solución)*

21 / 35

### Matriz asociada a una aplicación lineal

* Ejemplo.
  1. Obtén una base del núcleo y de la imagen de *f* : R4 R2[*x* ] sabiendo que la matriz asociada a *f* con respecto a las bases

−→

*B* = { (1*,* 0*,* 0*,* 0)*,* (1*,* 1*,* 0*,* 0)*,* (1*,* 1*,* 2*,* 0)*,* (0*,* 0*,* 0*,* 1) } y

*B*′ = { 1*, x , x* 2 }

es

*(Solución)*

22 / 35

*MB′*←*B* (*f* ) =

1 2 4 2

1 0 0 0 *.*

A

B

0 1 2 1

### Matriz asociada a una aplicación lineal

Proposición. Sea *f* : *V W* una aplicación lineal y sea *M* la matriz asociada a *f* . Entonces,

* −→

1. *f* es inyectiva si y solo si rg (*M*) = dim(*V* ).
2. *f* es sobreyectiva si y solo si rg (*M*) = dim(*W* ).

* Corolario. Sea *f* : *V* −→ *W* una aplicación lineal. Entonces,
  1. Si dim(*V* ) *>* dim(*W* ), entonces *f* no es inyectiva.
  2. Si dim(*W* ) *>* dim(*V* ), entonces *f* no es sobreyectiva.

23 / 35

### Matriz asociada a una aplicación lineal

Ejemplo. Determina si las siguientes aplicaciones lineales son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

•

1. *f* : R3 −→ R5 dada por *f* (*x , y , z* ) = (*x , x* + *y , x* − 2*y ,* 3*z ,* 2*x* + *z* )
2. *f* : R2[*x* ] −→ R2[*x* ] dada por *f* (*a x* 2 + *b x* + *c*) = *c x* 2 + *a x* + *b*

*(Solución)*

24 / 35

# Soluciones

25 / 35

Pág. 5

1. *f* es una aplicación lineal porque

Si (*x, y, z*)*,* (*a, b, c*) R3. ¿*f* ((*x, y, z*) + (*a, b, c*)) = *f* (*x, y, z*) + *f* (*a, b, c*)?. Cierto ya que

* ∈

*f* ((*x, y, z*) + (*a, b, c*)) = *f* (*x* + *a, y* + *b, z* + *c*) =

= (*x* + *a* − *y* − *b, z* + *c* + *x* + *a*)

*f* (*x, y, z*) + *f* (*a, b, c*) = (*x* − *y, z* + *x* ) + (*a* − *b, c* + *a*) =

= (*x* + *a* − *y* − *b, z* + *c* + *x* + *a*)





=



* Si (*x, y, z*) ∈ R3 y *λ* ∈ R. ¿*f* (*λ*(*x, y, z*)) = *λf* (*x, y, z*)? Cierto ya que

*λf* (*x, y, z*) = *λ*(*x y, z* + *x* ) = (*λx λy, λz* + *λx* ) }

*f* (*λ*(*x, y, z*)) = *f* (*λx, λy, λz*) = (*λx* − *λy, λz* + *λx* )

=

− −

1. No es una aplicación lineal porque *f* (2(1*,* 0)) = *f* (2*,* 0) = (0*,* 4) pero 2*f* (1*,* 0) =

= 2(0*,* 1) = (0*,* 2) ̸= (0*,* 4).

1. *f* es una aplicación lineal porque

Si *p*(*x* ) = *a*1*x* 2 + *b*1*x* + *c*1 y *q*(*x* ) = *a*2*x* 2 + *b*2*x* + *c*2 R2[*x* ]. ¿*f* (*p*(*x* ) + *q*(*x* )) =

* ∈

*f* (*p*(*x* )) + *f* (*q*(*x* ))? Cierto ya que

26 / 35

*f* (*p*(*x* ) + *q*(*x* )) = *f* ((*a*1 + *a*2)*x* 2 + (*b*1 + *b*2)*x* + (*c*1 + *c*2) =

= 2(*a*1 + *a*2)*x* + (*b*1 + *b*2)

=

l

*f* (*p*(*x* )) + *f* (*q*(*x* )) = 2*a*1*x* + *b*1 + 2*a*2*x* + *b*2

Si *ax* 2 + *bx* + *c* R2[*x* ] y *λ* R. ¿*f* (*λ*(*ax* 2 + *bx* + *c*)) = *λf* (*ax* 2 + *bx* + *c*)? Cierto ya que

* ∈ ∈

*f* (*λ*(*ax* 2 + *bx* + *c*)) = *f* (*λax* 2 + *λbx* + *λcz* ) = 2*λax* + *λb λf* (*ax* 2 + *bx* + *c*) = *λ*(2*ax* + *b*)

1. No es una aplicación lineal porque *f* (0 + 0*x* + 0*x* 2) = ( 0 2

0 0

}

) ̸= ( 0 0 ).

=

0 0

Pág. 6 No es una aplicación lineal porque *f* (0) = 0 + 2 ̸= 0.

Pág. 10

1. ◦ ker(*f* ) = { (*x, y, z*) ∈ R *f* (*x, y, z*) = (0*,* 0) } =

3 3

3

I

*z* = 0

= { (*x, y, z*) ∈ R I (*x* − *y, z*) = (0*,* 0) } = { (*x, y, z*) ∈ R I *x* − *y* = 0*, z* = 0 }.

Resolvemos el sistema

{ *x* − *y* = 0 ⇒ SCI:

*x* = *λ ,*

*y* = *λ ,*

f

*z* = 0 *,*

3

con *λ* ∈ R. Entonces,

27 / 35

ker(*f* ) = { (*x, y, z*) ∈ R I *x* = *λ, y* = *λ, z* = 0 con *λ* ∈ R } =

Como el núcleo está generado por un único vector, es linealmente independiente y por lo tanto, una base del núcleo es { (1*,* 1*,* 0) } y dim(ker(*f* )) = 1.

= { (*λ, λ,* 0) I *λ* ∈ R } = { *λ* (1*,* 1*,* 0) I *λ* ∈ R } = ⟨ (1*,* 1*,* 0) ⟩ *.*

* + Como { (1*,* 0*,* 0)*,* (0*,* 1*,* 0)*,* (0*,* 0*,* 1) } es una base de R3,

Im (*f* ) = ⟨ *f* (1*,* 0*,* 0)*, f* (0*,* 1*,* 0)*, f* (0*,* 0*,* 1) ⟩ = ⟨ (1*,* 0)*,* (−1*,* 0)*,* (0*,* 1) ⟩ *.*

Además, como (−1*,* 0) = −1(1*,* 0):

Im (*f* ) = ⟨ (1*,* 0)*,* (−1*,* 0)*,* (0*,* 1) ⟩ = ⟨ (1*,* 0)*,* (0*,* 1) ⟩ = R2 *,*

y una base de Im (*f* ) es { (1*,* 0)*,* (0*,* 1) } y dim(Im (*f* )) = 2.

2) ◦ ker(*f* ) = { *p*(*x* ) ∈ R2[*x* ] I *f* (*p*(*x* )) = 0 } = { *ax* + *bx* + *c* ∈ R2[*x* ] I 2*ax* + *b* = 0 }.

2

Resolvemos el sistema

*b* = 0

{ 2*a* = 0 ⇒ SCI:

*a* = 0 *,*

*b* = 0 *,*

f

*c* = *λ ,*

con *λ* ∈ R. Entonces,

28 / 35

ker(*f* ) = { *ax* + *bx* + *c* ∈ R2[*x* ] I *a* = 0*, b* = 0*, c* = *λ* con *λ* ∈ R } =

Como el núcleo está generado por un único vector, es linealmente independiente y por lo tanto, una base del núcleo es { 1 } y dim(ker(*f* )) = 1.

= { *λ* I *λ* ∈ R } = ⟨ 1 ⟩ *.*

2

* Como { 1*, x, x* 2 } es una base de R3[*x* ],

Im (*f* ) = ⟨ *f* (1)*, f* (*x* )*, f* (*x* 2) ⟩ = ⟨ 0*,* 1*,* 2*x* ⟩ = ⟨ 1*,* 2*x* ⟩ = R1[*x* ] *,*

y una base de Im (*f* ) es { 1*,* 2*x* } y dim(Im (*f* )) = 2.

3) *f* : M2 −→ R3[*x* ] con *f* ( *a b* ) = (*a* + *d* )*x* 3 + (*b* − 2*c*)*x* 2 + *cx* + *a*.

*c d*

* ker(*f* ) = {( *a b* ) ∈ M2 I *f* ( *a b* ) = 0 + 0*x* + 0*x* 2 + 0*x* 3 } =

*c d*

*c d*

*c d*

= {( *a b* ) ∈ M2 I *a* + *cx* + (*b* − 2*c*)*x* 2 + (*a* + *d* )*x* 3 = 0 + 0*x* + 0*x* 2 + 0*x* 3 }.

Resolvemos el sistema



*a* = 0

*c* = 0

*b* − 2*c* = 0

ker(*f* ) = {( *a b* ) ∈ M2 I *a* = *b* = *c* = *d* = 0 } = {( 0 0 )} *.*

*a* + *d* = 0

⇒ SCD: *a* = *b* = *c* = *d* = 0. Entonces,

*c d*

0 0

Como el núcleo está generado por el vector nulo, no es linealmente independiente y por lo tanto el núcleo no tiene base y dim(ker(*f* )) = 0.

Como 4 = dim( 2) = dim(ker(*f* )) + dim(Im (*f* )) = 0 + dim(Im (*f* )), deducimos que dim(Im (*f* )) = 4 y como Im (*f* ) es un subespacio de R3[*x* ] que también tiene dimensión 4, deducimos que Im (*f* ) = R3[*x* ] y una base es { 1*, x, x* 2 *, x* 3 }.

* M

29 / 35

Pág. 12

1. Es inyectiva.
2. No es inyectiva porque *f* (*c*) = 4 = *f* (*d* ).

Pág. 13

1. No es sobreyectiva porque no hay elementos del dominio cuya imagen sea *a*.
2. Es sobreyectiva.

Pág. 14

1. ◦ No es inyectiva porque *f* (2) = *f* (−2) = 4.
   * No es sobreyectiva porque no existe *x* ∈ R tal que *f* (*x* ) = *x* 2
   * No es biyectiva porque no es inyectiva/sobreyectiva.

= −5.

1. No es inyectiva porque *f* (2) = *f* ( 2) = 4. Es sobreyectiva porque si *y* [0*,* ), existe

* ∈ ∞
* −

*f* (√*~~y~~* ) = (√*~~y~~* )2 = *y* .

* + No es biyectiva porque no es inyectiva.

√*y* ∈ Dom (*f* ) tal que

1. ◦ Es inyectiva porque si *f* (*x* ) = *f* (*y* ) ⇒ *x* 2 = *y* 2 y deducimos que *x* = *y* .
   * No es sobreyectiva porque no existe *x* ∈ R tal que *f* (*x* ) = *x* 2 = −5.
   * No es biyectiva porque no es sobreyectiva.

30 / 35

1. Es inyectiva porque si *f* (*x* ) = *f* (*y* ), es decir, si *x* 2 = *y* 2 deducimos que *x* = *y* .

◦

Es sobreyectiva porque si *y* [0*,* ), existe √*~~y~~* Dom (*f* ) tal que

* ∈ ∞ − ∈

*f* (√*~~y~~* ) = (−√*~~y~~* )2 = *y* .

* + Es biyectiva porque es inyectiva y sobreyectiva.

Pág. 21

1. Calculamos *f* (1*,* 0*,* 0) = (1*,* 0) = [1*,* 0]*B′* , *f* (0*,* 1*,* 0) = (1*,* 0) = [1*,* 0]*B′* y

*f* (0*,* 0*,* 1) = (0*,* −1) = [0*,* −1]*B′* , y obtenemos *MB′*←*B* (*f* ) = ( 1 1 0 ) ∈ M2×3.

0 0 −1

1. Calculamos *f* (1*,* 0*,* 0) = *x* 2 + 1 = [1*,* 0*,* 1]*B′* , *f* (1*,* 1*,* 0) = 2*x* 2 + 2 = [2*,* 0*,* 2]*B′* y

(

*f* (1*,* 1*,* 1) = 2*x* 2

+ 3 = [3*,* 0*,* 2]*B′* , y obtenemos M*B′*←*B* (*f* ) =

1 2 3

0 0 0

1 2 2

 

0 

1 ∈ M3.

Pág. 22

4 I 

*α*1

I *α*2

( 0 1

* ker(*f* ) ={ *v* ∈ R

 *α*4

I *f* (*v* ) = 0 } = [*α*1*, α*2*, α*3*, α*4]*B* I *MB′*←*B* (*f* ) *α*3 = 0 =

31 / 35

=  [*α*1*, α*2*, α*3*, α*4]*B* I

1 2 4 2

(

1 0 0 0

0 1 2 1

*α*1 *α*2 *α*3 *α*4

 =

0 1  =

f I( *α*1 + 2*α*2 + 4*α*3 + 2*α*4 1

f

=

[*α*1*, α*2*, α*3*, α*4]*B*

*α*1

*α*2 + 2*α*3 + *α*4

=

0

0

1 



0

0

( 0 1 l

.

Resolvemos el sistema

*α*1 + 2*α*2 + 4*α*3 + 2*α*4 = 0

(

*α*1 = 0

*α*2 + 2*α*3 + *α*4 = 0

⇒ 

*α*1 = 0

*α*2 = *s*

*α*3 = *t*

*α*4 = −*s* − 2*t*

con

*s, t* ∈ R. Entonces, el núcleo es

ker(*f* ) = { [*α*1*, α*2*, α*3*, α*4]*B α*1 = 0*, α*2 = *s, α*3 = *t, α*4 = −*s* − 2*t* con *s, t* ∈ R } =

I

= { [0*, s, t,* −*s* − 2*t*]*B* ∈ R *λ* ∈ R } = ⟨ [0*,* 1*,* 0*,* −1]*B,* [0*,* 0*,* 1*,* −2]*B* ⟩ *.*

4

I

Pasamos de coordenadas a vectores:

[0*,* 1*,* 0*,* −1]*B* = 0(1*,* 0*,* 0*,* 0) + 1(1*,* 1*,* 0*,* 0) + 0(1*,* 1*,* 2*,* 0) − 1(0*,* 0*,* 0*,* 1) = (1*,* 1*,* 0*,* −1) *,*

[0*,* 0*,* 1*,* −2]*B* = 0(1*,* 0*,* 0*,* 0) + 0(1*,* 1*,* 0*,* 0) + 1(1*,* 1*,* 2*,* 0) − 2(0*,* 0*,* 0*,* 1) = (1*,* 1*,* 2*,* −2) *.*

32 / 35

Por lo tanto, ker(*f* ) = ⟨ (1*,* 1*,* 0*,* −1) *,* (1*,* 1*,* 2*,* −2) ⟩ y como

rg ( −

1 1 0 1

1 1 2 −2

) = rg ( 1 1 0 −1

) = 2,

los vectores son independientes y una base de ker(*f* ) es (1*,* 1*,* 0*,* 1) *,* (1*,* 1*,* 2*,* 2) y dim(ker(*f* )) = 2.

0 0 2 −1

{ − − }

* Como *B* es base de R4, Im (*f* ) = ⟨ *f* (1*,* 0*,* 0*,* 0)*, f* (1*,* 1*,* 0*,* 0)*, f* (1*,* 1*,* 2*,* 0)*, f* (0*,* 0*,* 0*,* 1) ⟩.

Usamos la fórmula *f* (*v* )*T* = *MB*←*B′* (*f* )*v T* para calcular

(

(

1

1

[*f* (1*,* 0*,* 0*,* 0)]*T′* =

*B*

[*f* (1*,* 1*,* 0*,* 0)]*T′* =

*B*

[*f* (1*,* 1*,* 2*,* 0)]*T′* =

*B*

1 2 4 2

1 0 0 0

0 1 2 1

(

1 2 4 2

1 0 0 0

0 1 2 1

(

1 2 4 2

1 0 0 0

0 1 2 1

1  0

1  1

0

0

0

0

0

1  0

0

1

0

 = 1

 = 2

(

1

1 *,*

0

0 *,*

1

 = 4

(

1

0 *,*

2

33 / 35

[*f* (0*,* 0*,* 0*,* 1)]*T′* =

*B*

1 2 4 2

1 0 0 0

(

0 1 2 1

1  0

1

 = 2

Así, Im (*f* ) = ⟨ [1*,* 1*,* 0]*B′ ,* [2*,* 0*,* 1]*B′ ,* [4*,* 0*,* 2]*B′ ,* [2*,* 0*,* 1]*B′* ⟩. Además, como

(

0

0

1

0 *.*

1

rg 

1 1 0

2 0 1

4 0 2

2 0 1

*F*

=

*F* 2*F*

2 −

rg 

1 1 0

0 −2 1

0 −4 2

0 −2 1

 =

rg 

1 1 0

0 2 0

−

0 0 0

0 0 0

 = 2,

*F*3 →*F*3 −4*F*1 *F*4 →*F*4 −2*F*1

2 →

1

*F*3 →*F*3 −2*F*2

*F*4 →*F*4 −*F*2

sabemos que Im (*f* ) = [1*,* 1*,* 0]*B ,* [2*,* 0*,* 1]*B* y al pasar de coordenadas a vectores obtenemos:

⟨ *′ ′* ⟩

[1*,* 1*,* 0]*B′* = 1 + *x* y [2*,* 0*,* 1]*B′* = 2 + *x* 2 *.*

Entonces, una base de Im (*f* ) es { 1 + *x,* 2 + *x* 2 } y dim(Im (*f* )) = 2.

Pág. 24

1. Si *B* y *B*′ son las bases canónicas de R3 y R5 respectivamente, calculamos:

*f* (1*,* 0*,* 0) = (1*,* 1*,* 1*,* 0*,* 2) = [1*,* 1*,* 1*,* 0*,* 2]*B′ ,*

*f* (0*,* 1*,* 0) = (0*,* 1*,* −2*,* 0*,* 0) = [0*,* 1*,* −2*,* 0*,* 0]*B′ ,*

*f* (0*,* 0*,* 1) = (0*,* 0*,* 0*,* 3*,* 1) = [0*,* 0*,* 0*,* 3*,* 1]*B′ .*

34 / 35

1 0 0





1 1 0

1 0 0

0 1 0







Entonces *MB′*←*B* (*f* ) = 

1 2 0

0 0 3

−

2 0 1

 y como rg 

0 2 0

0 0 3

−

0 0 1

=

*F*3 →*F*3 +2*F*2

= rg 







1 0 0

0 1 0

0 0 0 

0 0 3

0 0 1

= rg 



*F*3 ↔*F*5



1 0 0

0 1 0



0 0 1 

0 0 3

0 0 0

= rg 



*F*4 →*F*4 −3*F*3



1 0 0

0 1 0

0 0 1

0 0 0

0 0 0

 = 3.





Al ser rg (*A*) = 3 = dim(R3), la aplicación es inyectiva pero no es sobreyectiva (ni biyectiva) ya que rg (*A*) = 3 *<* 5 = dim(R5).

1. Si *B* es a base estándar de R2[*x* ], calculamos:

*f* (1) = *x* 2 = [0*,* 0*,* 1]*B , f* (*x* ) = 1 = [1*,* 0*,* 0]*B , f* (*x* 2) = *x* = [0*,* 1*,* 0]*B ,*

(

entonces *MB′*←*B* (*f* ) =

0 1 0

0 0 1

1 0 0

1 y como rg (*A*) = 3 = dim(R2[*x* ]), la aplicación

es inyectiva y sobreyectiva y, por lo tanto, también biyectiva.

35 / 35

# Tema 10. Diagonalización. Autovalores y autovectores.

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales Curso 2023 – 2024

# Introducción

2 / 33

### Introducción

* Ejemplo. Sea *f* : R3 −→ R3 tal que

*f* (1*,* 2*,* 3) = (2*,* 4*,* 6) *, f* (0*,* 1*,* 2) = (0*,* 4*,* 8) y *f* (0*,* −1*,* 1) = (0*,* −5*,* 5) *.*

Calcula *MB*←*B*(*f* ) siendo *B* = { (1*,* 2*,* 3)*,* (0*,* 1*,* 2) *,* (0*,* −1*,* 1) }.

*(Solución)*

3 / 33

# Valores y vectores propios

4 / 33

### Introducción

* Sea *V* un R-espacio vectorial y *f* : *V V* una aplicación lineal con

−→

*A* = *MB*←*B*(*f* ) para cierta base *B* de *V* . Si *v V* y *λ* R, estudiaremos

∈ ∈

la ecuación

*f* (*v* ) = *λv ,* es decir, *Av T* = *λv T .*

* Ejemplo. Si *A* = ( 3 −2 l se tiene

1 0

* 1. para *λ* = 1, *u* = (1*,* 1) es solución de *AuT* = *λuT* .
  2. para *λ* = 2, *v* = (2*,* 1) es solución de *Av T* = *λv T* .

*(Solución)*

5 / 33

### Valor propio

* Sea *f* : *V* −→ *V* una aplicación lineal. Decimos que *λ* ∈ R es un valor propio o autovalor de *f* si existe *v* ∈ *V* no nulo tal que *f* (*v* ) = *λv* .
* Ejemplo. Dada *f* : R3 −→ R3 con

*f* (*x , y , z* ) = (*x* + *y* + *z ,* 2*y* + *z ,* 3*z* ), se cumple:

* 1. 2 es valor propio de *f* con *v* = (2*,* 2*,* 0)
  2. 3 es valor propio de *f* con *v* = (1*,* 1*,* 1)

*(Solución)*

6 / 33

### Valor propio

* Si *A* ∈ M*n* es una matriz cuadrada, entonces
  1. La suma de los elementos de la diagonal de *A* coincide con la suma de todos sus valores propios.
  2. El determinante de *A* coincide con el producto de todos sus valores propios.

7 / 33

### Vector propio

* Sean *f* : *V* −→ *V* una aplicación lineal. Decimos que *v* ∈ *V* es un vector propio o autovector de *f* asociado al valor propio *λ* ∈ R si *f* (*v* ) = *λv* .
* El conjunto de todos los vectores propios asociados al mismo valor propio

*λ* ∈ R se denota por

*Vλ* = { *v* ∈ *V f* (*v* ) = *λv* } *.*

1

* Ejemplo. Dada *f* : R3 −→ R3 con

*f* (*x , y , z* ) = (*x* + *y* + *z ,* 2*y* + *z ,* 3*z* ), se cumple:

* 1. (2*,* 2*,* 0) es un vector propio asociado al valor propio 2
  2. (1*,* 1*,* 1) es un vector propio asociado al valor propio 3

*(Solución)*

8 / 33

### Valores y vectores propios

* Proposición. Sea *f* : *V* −→ *V* una aplicación lineal y dim(*V* ) = *n*.

Si *A* es la matriz asociada a *f* respecto una base de *V* , para *λ* R se verifica:

∈

* 1. *Vλ* = ker(*f* − *λId* ).
  2. *Vλ* es un subespacio vectorial de *V* llamado subespacio propio de *λ*.
  3. dim(*Vλ*) = *n* − rg (*A* − *λIn*).
  4. Si *v* ∈ *Vλ* y *u* ∈ *Vλ*˜, entonces *u* y *v* son linealmente independientes.
  5. *λ* es valor propio de *f* si y solo si det(*A* − *λIn*) = 0.

9 / 33

### Cálculo de los valores propios

* Ejemplo. Calcula los valores propios de la siguientes aplicaciones lineales.
  1. *f* : R2 −→ R2 con *f* (*x , y* ) = (5*x* + 3*y ,* 2*y* )
  2. *f* : R3 −→ R3 cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es

( −

\

*(Solución)*

10 / 33

*B* = *MBC* ←*BC* (*f* ) =

2 2 1

0 2 0

0 0 3

### Cálculo del subespacio propio

* Ejemplo. Dada la aplicación lineal *f* : R3 −→ R3 con

*f* (*x , y , z* ) = (*x* + *y* + *z ,* 2*y* + *z ,* 3*z* ) *,*

calcula el subespacio propio asociado a los valores propios

1. *λ* = 2
2. *λ* = 3

*(Solución)*

11 / 33

### Polinomio característico

* Sea *f* : *V* −→ *V* una aplicación lineal y dim(*V* ) = *n*.
* Si *A* es la matriz asociada a *f* con respecto a una base de *V* , sabemos que

*λ* ∈ R es valor propio de *f* si y solo si det(*A* − *λIn*) = 0.

Si consideramos *λ* como una incógnita, *p*(*λ*) = det(*A λIn*) es un poli- nomio de grado *n* llamado polinomio característico.

* −
* Las raíces de *p*(*λ*) son los valores propios de *f* .

12 / 33

### Multiplicidad algebraica y geométrica

* Sea *f* : *V* −→ *V* una aplicación lineal y dim(*V* ) = *n*.

Si *λ* es un valor propio de *f* , entonces

la multiplicidad algebraica de *λ* (*ma*(*λ*)) es la multiplicidad del valor *λ* como raíz del polinomio característico;

◦

la multiplicidad geométrica de *λ* (*mg* (*λ*)) es la dimensión del subespacio propio *Vλ*:

◦

*mg* (*λ*) = dim(*Vλ*) = *n* − rg (*A* − *λIn*) *,*

siendo *A* la matriz asociada a *f* con respecto a una base de *V* .

* Si *λ* es un valor propio de *f* , entonces

1 ≤ *mg* (*λ*) ≤ *ma*(*λ*) *.*

13 / 33

### Multiplicidad algebraica y geométrica

* Ejemplo. Calcula *ma*(*λ*) y *mg* (*λ*) de los valores propios indicados.
  1. *f* : R2 −→ R2 dada por *f* (*x , y* ) = (*x* − 3*y , y* ) y *λ* = 1
  2. *f* : R3 −→ R3 cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es

( −

\

*(Solución)*

14 / 33

*A* = *MBC* ←*BC* (*f* ) =

2 5 1

0 2 2

− −

0 0 3

y *λ* = 3

# Diagonalización

15 / 33

### Diagonalización

* Decimos que dos matrices *A, B* ∈ M*n* son semejantes si existe una matriz

*P* ∈ M*n* invertible tal que

*A* = *PBP*−1 *.*

* Decimos que una matriz *A* ∈ M*n* es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal *D* ∈ M*n*.

16 / 33

### Aplicación diagonalizable

Sea *f* : *V V* una aplicación lineal. Decimos que *f* es diagonalizable si existe una base de *V* respecto a la cual, la matriz asociada a *f* es diagonal.

* −→
* Proposición. Sea *f* : *V* −→ *V* una aplicación lineal. Entonces,

*f* es diagonalizable si y solo si





existe una base de *V* formada por vectores propios de *f .*

17 / 33

### Criterio de diagonalizabilidad

* Teorema. Sea *f* : *V* −→ *V* una aplicación lineal y dim(*V* ) = *n*.

Si *λ*1*, λ*2*, . . . , λk* son los valores propios distintos de *f* , entonces

*f* es diagonalizable si y solo si *ma* (*λ*1) + *ma* (*λ*2) + · · · + *ma* (*λk* ) = *n ,*

*ma*(*λi* ) = *mg* (*λi* ) para todo *i* = 1*,* 2*, . . . , k .*

* Si *A* ∈ M*n* es diagonalizable, *A* = *PDP*−1 siendo
  + *D* una matriz diagonal cuyas entradas son los valores propios de *A*;
  + *P* es una matriz cuyas columnas son vectores propios de *A*.

18 / 33

### Diagonalización

* Teorema. Sea *f* : *V* −→ *V* una aplicación lineal y dim(*V* ) = *n*.

Si *A n* es la matriz asociada a *f* con respecto a una base de *V* , se cumple:

∈ M

1. Si *A* ∈ M*n* tiene *n* valores propios distintos, entonces *A* es diagonalizable.
2. Si *A* ∈ M*n* es simétrica, entonces es diagonalizable.

19 / 33

### Diagonalización

* Estudio de la diagonalizabilidad de una matriz *A* ∈ M*n*.

▶ Si *A* es simétrica, entonces es diagonalizable.

1º/ Calcular el polinomio característico *p*(*λ*).

2º/ Calcular las raíces de *p*(*λ*) y sus multiplicidades algebraicas.

* Si hay *n* raíces distintas, entonces *A* es diagonalizable.

3º/ Calcular las multiplicidades geométricas.

4º/ Comprobar que se cumple el criterio de diagonalizabilidad.

5º/ Si *A* es diagonalizable, calcular los subespacios propios.

6º/ Escribir la matriz de paso *P* en función de la matriz diagonal *D* elegida.

20 / 33

### Diagonalización

Ejemplo. Determina si las siguientes aplicaciones lineales son diagona- lizables y calcula, en su caso, una base respecto a la cual la matriz asociada es diagonal.

•

*y*

1 √3 1 1

− −



√3 1 0 2

  *x* *T*

1. *f* : R4 −→ R4 con *f* (*x , y , z , t*) = 

*t*

0 0 1

0 0 0

−2   *z* 

−1

1. *f* : R3 −→ R3 con *f* (*x , y , z* ) = (3*x* + *y* + *z , x* + 3*y* + *z , x* + *y* + 3*z* )
2. *f* : R3 R3 con *f* (*x , y , z* ) = (*x y* + 3*z ,* 2*y* + *z ,* 2*z* )

−→ −

*(Solución)*

* Ejemplo. Calcula *An*

21 / 33

siendo *A* =

1 1 1

0 3 3



0 0 5

. *(Solución)*

# Soluciones

22 / 33

Pág. 3

Calculamos las coordenadas:

*f* (1*,* 2*,* 3) = (2*,* 4*,* 6) = 2(1*,* 2*,* 3) + 0(0*,* 1*,* 2) + 0(0*,* −1*,* 1) = [2*,* 0*,* 0]*B*

*f* (0*,* 1*,* 2) = (0*,* 4*,* 8) = 0(1*,* 2*,* 3) + 4(0*,* 1*,* 2) + 0(0*,* −1*,* 1) = [0*,* 4*,* 0]*B*

*f* (0*,* −1*,* 1) = (0*,* −5*,* 5) = 0(1*,* 2*,* 3) + 0(0*,* 1*,* 2) + 5(0*,* −1*,* 1) = [0*,* 0*,* 5]*B*

(

\

y obtenemos la matriz *MB*←*B*(*f* ) =

Pág. 5

2 0 0

0 4 0 .

0 0 5

1) Cierto porque ( 3 −2

1 0

2 Cierto porque ( 3 −2

1 0

)( 1

)( 2

1

1

) = ( 1

) = ( 4

1

2

) = 1 ( 1 ).

) = 2 ( 2 ).

1

1

Pág. 6

1. Cierto porque *f* (2*,* 2*,* 0) = (4*,* 4*,* 0) = 2(2*,* 2*,* 0).
2. Cierto porque *f* (1*,* 1*,* 1) = (3*,* 3*,* 3) = 3(1*,* 1*,* 1).

23 / 33

Pág. 8

1. Cierto porque *f* (2*,* 2*,* 0) = (4*,* 4*,* 0) = 2(2*,* 2*,* 0).
2. Cierto porque *f* (1*,* 1*,* 1) = (3*,* 3*,* 3) = 3(1*,* 1*,* 1).

Pág. 10

1. Como *f* (1*,* 0) = (5*,* 0) = [5*,* 0]*Bc* y *f* (0*,* 1) = (3*,* 2) = [3*,* 2]*Bc* , deducimos que

*A* = *MBc* ←*Bc* (*f* ) = ( 5 3 ) y det(*A* − *λI*2) = det ( 5 −0 *λ* 2 3 )=(5 − *λ*)(2 − *λ*).

0 2

− *λ*

Por lo tanto, los valores propios de *f* son 5 y 2.

1. Como det(*B*

*I* ) = det ( 2 −0 *λ*

2−2 1

\ = (2

)2(3

− *λ*

), deducimos

− *λ*

que *f* tiene dos valores propios: 2 y 3. − *λ*

− *λ* 3

0

−0 *λ*

3

0

Pág. 11

Como *f* (1*,* 0*,* 0) = (1*,* 0*,* 0) = [1*,* 0*,* 0]*Bc* , *f* (0*,* 1*,* 0) = (1*,* 2*,* 0) = [1*,* 2*,* 0]*Bc* y

(

\

1 1 1

*f* (0*,* 0*,* 1) = (1*,* 1*,* 3) = [1*,* 1*,* 3]*Bc* , deducimos que *A* = *MBC* ←*BC* (*f* ) =

0 2 1

0 0 3

.

24 / 33

1. Como

f

(*x , y , z*) ∈ R

*V*2 =

31 ( *x* \

( *x* \ f

31 ( *x* \

( 0 \

*,*

resolvemos el sistema (*A* − 2*I*3)*X* = 0, es decir,

*x* + *y* + *z* = 0

*z* = 0

*A*

*y z*

= 2

*y z*

=

(*x , y , z*) ∈ R

*y z*

*z* = 0

⇒ SCI:

*x* = *β ,*

*y* = *β ,*

=

0

0

*z* = 0 *,*

3

con *β* ∈ R. Entonces, *V*2 = { (*x , y , z*) ∈ R 1 *x* = *β, y* = *β, z* = 0 con *β* ∈ R } =

1

1(*A* − 2*I*3)

= { (*β, β,* 0) ∈ R *β* ∈ R } = ⟨ (1*,* 1*,* 0) ⟩.

3

1

1. Como

f−

f

( \

( \

( \

( \

*V*3 =

f(*x , y , z*) ∈ R

*x*

3 *A y z*

1

*x*

= 3 *y z*

f −

= f(*x , y , z*) ∈ R

*x* 0

31(*A* − 3*I*3) *y* = 0 *,*

*z*

0

resolvemos el sistema (*A* − 3*I*3)*X* = 0, es decir, SCI: *x* = *y* = *z* = *β* con *β* ∈ R. Entonces,

1 1

2*x* + *y* + *z* = 0

*y* + *z* = 0

−

⇒

0 = 0

*V*3 = { (*x , y , z*) ∈ R3 *x* = *y* = *z* = *β* con *β* ∈ R } = { (*β, β, β*) ∈ R3 *β* ∈ R } =

= ⟨ (1*,* 1*,* 1) ⟩.

25 / 33

Pág. 14

1. Como *f* (1*,* 0) = (1*,* 0) = [1*,* 0]*Bc* y *f* (0*,* 1) = (−3*,* 1) = [−3*,* 1]*Bc* , entonces

*A* = *MBc* ←*Bc* (*f* ) = ( 1 −3 ).

0 1

Calculamos *p*(*λ*) = det(*A* − *λI*2) = det ( 1 −0 *λ* 1−3 ) = (1 − *λ*)2 y deducimos

que *ma*

(1) = 2.

− *λ*

Además, *mg* (1) = 2 − rg (*A* − 1*I*2) = 2 − rg ( 0 −3 ) = 2 − 1 = 1.

0 0

1. Calculamos *p*(

) = det(*A I* ) = det ( −20− *λ*

25 1 \ =

*λ* − *λ* 3

0 0

− − *λ* −2

− *λ*

3

= (−2 − *λ*)2(3 − *λ*) y deducimos que *ma*(3) = 1.

Además, utilizamos la desigualdad 1 ≤ *mg* (3) ≤ *ma*(3) = 1 para deducir que *mg* (3) = 1.

Pág. 21

 1 − *λ* −√3 1 −1 

1. Calculamos *p*(*λ*) = det (*MBc*



=

− 

←*Bc* (*f* ) − *λI*4) = det

√3 1 *λ* 0 2

0 0 1 − *λ* −2

0 0 0 −1 − *λ*

26 / 33

= ( 1 *λ*)(1 *λ*) (1 *λ*)2 + 3 = ( 1 *λ*)(1 *λ*)(*λ*2 2*λ* + 4). Como *λ*2 2*λ* + 4

# $

− − − − − − − − −

es un polinomio sin raíces reales, los valores propios son *λ*1 = 1 y *λ*2 = 1 con *ma*( 1) = *ma*(1) = 1. Como *ma*( 1) + *ma*(1) = 1 + 1 = 2 = 4, la aplicación no es diagonalizable.

− − ̸

−

1. Calculamos *f* (1*,* 0*,* 0) = (3*,* 1*,* 1) = [3*,* 1*,* 1]*Bc* , *f* (0*,* 1*,* 0) = (1*,* 3*,* 1) = [1*,* 3*,* 1]*Bc* y

(

*f* (0*,* 0*,* 1) = (1*,* 1*,* 3) = [1*,* 1*,* 3]*Bc* , entonces, *A* = *MBc* ←*Bc* (*f* ) =

3 1 1

1 3 1

1 1 3

\. El

polinomio característico es *p*(

) = det(*A I* ) = det ( 3 −1 *λ* 3 1 1 \ =

*λ* − *λ* 3

1 −1 *λ*

1

3 − *λ*

= (*λ* 2)2(*λ* 5) y deducimos que los valores propios son *λ*1 = 2 y *λ*2 = 5 con

− − −

*ma*(2) = 2 y *ma*(5) = 1.

Calculamos las multiplicidades geométricas:

*mg* (5) = 1 porque 1 ≤ *mg* (5) ≤ *ma*(5) = 1 y

(

*mg* (2) = 3 − rg (*A* − 2*I*3) = 3 − rg

1 1 1

1 1 1

1 1 1

f

\ = 3 − 1 = 2.

Como se cumple el criterio de diagonalizabilidad: deducimos que *f* es diagonalizable.

27 / 33

3 = *ma*(2) + *ma*(5) = 2 + 1 ✓

*ma*(2) = 2 = *mg* (2) ✓

*ma*(5) = 1 = *mg* (5) ✓

Para obtener la base que pide el enunciado, necesitamos los subespacios propios. Calcu- lamos

( \

( \

( \

( \

f

*V*2 =

f(*x , y , z*) ∈ R

*x*

3 *A y z*

1

*x*

= 2 *y z*

= f(*x , y , z*) ∈ R

*x* 0

31(*A* − 2*I*3) *y* = 0 *,*

*z*

0

resolvemos el sistema (*A*−2*I*3)*X* = 0, es decir,

f *x* = −*α* − *β ,*

*y* = *α ,*

*z* = *β ,*

con *α, β* ∈ R. Entonces,

*x* + *y* + *z* = 0 *x* + *y* + *z* = 0 *x* + *y* + *z* = 0

⇒ SCI con solución:

*V*2 = { (−*α*−*β, α, β*) ∈ R *α, β* ∈ R } = { (−*α, α,* 0)+(−*β,* 0*, β*) ∈ R *α, β* ∈ R } =

3 3

1 1

= ⟨ (−1*,* 1*,* 0)*,* (−1*,* 0*,* 1) ⟩,

y como esos dos vectores son linealmente independientes porque

rg (−

0 −1 1

( \

( \

( \

( \

1 1 0

−1 0 1

Además,

) = rg (−1 1 0

) = 2, una base de *V*2 es { (−1*,* 1*,* 0)*,* (−1*,* 0*,* 1) }.

*V*5 =

f(*x , y , z*) ∈ R

*x*

3 *A y z*

1

*x*

= 5 *y z*

= f(*x , y , z*) ∈ R

*x* 0

31(*A* − 5*I*3) *y* = 0 *,*

*z*

0

28 / 33

resolvemos el sistema (*A* − 5*I*3)*X* = 0, es decir,

f −

f *x* = *α ,*

solución:

*y* = *α ,*

*z* = *α ,*

con *α* ∈ R. Entonces,

2*x* + *y* + *z* = 0 *x* − 2*y* + *z* = 0 *x* + *y* − 2*z* = 0

⇒ SCI con

*V*5 = { (*α, α, α*) ∈ R *α* ∈ R } = ⟨ (1*,* 1*,* 1) ⟩, y como *V*5 está generado por un único vector no nulo, una base de *V*5 es { (1*,* 1*,* 1) }.

3

1

Acabamos deduciendo que, si *B* = ( 1*,* 1*,* 0)*,* ( 1*,* 0*,* 1)*,* (1*,* 1*,* 1) , entonces *MB B*(*f* ) es diagonal.

{ − − } ←

1. Calculamos *f* (1*,* 0*,* 0) = (1*,* 0*,* 0) = [1*,* 0*,* 0]*Bc* , *f* (0*,* 1*,* 0) = (−1*,* 2*,* 0) = [−1*,* 2*,* 0]*Bc* y

( −

*f* (0*,* 0*,* 1) = (3*,* 1*,* 2) = [3*,* 1*,* 2]*Bc* , entonces *A* = *MBC* ←*BC* (*f* ) =

1 1 3

0 2 1

0 0 2

\. El

polinomio característico es *p*(

) = det(*A*

*I* ) = det ( 1 −0 *λ*

2−1 3 \ =

*λ* − *λ* 3

0 −0 *λ*

1

2 − *λ*

= (1 *λ*)(2 *λ*)2 y deducimos que los valores propios son *λ*1 = 1 y *λ*2 = 2 con

− −

*ma*(1) = 1 y *ma*(2) = 2.

29 / 33

Calculamos las multiplicidades geométricas:

*mg* (1) = 1 porque 1 ≤ *mg* (1) ≤ *ma*(1) = 1 y

(

\

−1 −1 3

*mg* (2) = 3 − rg (*A* − 2*I*3) = 3 − rg

0 0 1

0 0 0

= 3 − 2 = 1.

Como no se cumple el criterio de diagonalizablidad (porque *ma*(2) = 2 = 1 = *mg* (2), deducimos que *f* no es diagonalizable.

̸

Pág. 21

Comprobamos primero si *A* es diagonalizable. Como el polinomio característico es *p*(*λ*) =

det(*A I* ) = det ( 1 −0 *λ* 3 1 1 \ = (1 )(3 )(5 ), deducimos que

− *λ* 3

0

−0 *λ*

3

3

− *λ*

− *λ*

− *λ*

los valores propios son *λ*1

= 1, *λ*2

= 3 y

− *λ*

*λ*3 = 5. Al ser *A* ∈ M3

(

y tener 3 valores propios

distintos, *A* es diagonalizable con *A* = *PDP*−1

la matriz de paso *P* ∈ M3:

siendo *D* =

1 0 0

0 3 0

0 0 5

\. Calculamos

*V*1 =

f(*x , y , z*) ∈ R

*x* *x*

3 *A y* = *y*

( \

1

*z z*

= f(*x , y , z*) ∈ R

*x* 0

31(*A* − *I*3) *y* = 0 *,*

( \

( \

*z*

0

30 / 33

( \

resolvemos el sistema (*A* − *I*3)*X* = 0, es decir,

f *x* = *α ,*

*y* = 0 *,*

*z* = 0 *,*

*y* + *z* = 0 2*y* + 3*z* = 0

4*z* = 0

f

1

3

con *α* ∈ R. Entonces, *V*1 = { (*α,* 0*,* 0) ∈ R

*α* ∈ R } = ⟨ (1*,* 0*,* 0) ⟩, y como

⇒ SCI con solución:

*V*1 está generado por un único vector no nulo, una base de *V*1 es { (1*,* 0*,* 0) }.

( \

*V*3 =

f(*x , y , z*) ∈ R

*x*

3 *A y z*

( \

1

*x*

= 2 *y z*

f −

= f(*x , y , z*) ∈ R

*x* 0

31(*A* − 3*I*3) *y* = 0 *,*

( \

( \

*z*

0

resolvemos el sistema (*A*−3*I*3)*X* = 0, es decir,

f *x* = *α ,*

*y* = 2*α ,*

*z* = 0 *,*

2*x* + *y* + *z* = 0

3*z* = 0

2*z* = 0

1

3

con *α* ∈ R. Entonces, *V*3 = { (*α,* 2*α,* 0) ∈ R

*α* ∈ R } = ⟨ (1*,* 2*,* 0) ⟩, y

⇒ SCI con solución:

como *V*3 está generado por un único vector no nulo, una base de *V*3 es { (1*,* 2*,* 0) }.

31 / 33

*V*5 =

f −

f(*x , y , z*) ∈ R

*x*

3 *A y z*

( \

1

*x*

= 5 *y z*

= f(*x , y , z*) ∈ R

*x* 0

31(*A* − 5*I*3) *y* = 0 *,*

( \

( \

*z*

0

resolvemos el sistema (*A*−5*I*3)*X* = 0, es decir,

( \

f *x* = 5*α ,*

*y* = 12*α ,*

*z* = 8*α ,*

con *α* ∈ R. Entonces,

4*x* + *y* + *z* = 0 2*y* + 3*z* = 0

0 = 0

−

⇒ SCI con solución:

*V*5 = { (5*α,* 12*α,* 8*α*) ∈ R *α* ∈ R } = ⟨ (5*,* 12*,* 8) ⟩, y como *V*5 está generado por un único vector no nulo, una base de *V*5 es { (5*,* 12*,* 8) }.

3

1

(

Concluimos que *P* =

1 1 5

0 2 12

0 0 8

\ y calculamos *P*

−1:

(*P* 1

*I*3) =

1 1 5

0 2 12

(

1 0 0

0 1 0 ∼

\

1 1 5

0 1 6

(

1 0 0

0 1*/*2 0 ∼

\

0 0 8

(

0 0 1

*F*2 →*F*2*/*12 *F*3 →*F*3*/*8

0 0 1

0 0 1*/*8

*F*2 →*F*2 −6*F*3 *F*1 →*F*1 −5*F*3

1 1 0

(

0 1 0

0 0 1

32 / 33

1 0 − 5*/*8

0 1*/*2 − 3*/*4

0 0 1*/*8

∼

*F*1 →*F*1 −*F*2

\

1 0 0

0 1 0

0 0 1

1 − 1*/*2 − 5*/*8

0 1*/*2 − 3*/*4

0 0 1*/*8

\ = (

*I*3 1 *P*−1).

Entonces, *An* = (*PDP*−1)*n* = *PDP*−1·*PDP*−1 · · · *PDP*−1 = *PD*·*D* · · · *DP*−1 = *PDn P*−1 =

(

\(

\(

\

1 1 5

= 0 2 12

0 0 8

1 0 0

0 3*n* 0

0 0 5*n*

1 − 1*/*2 − 5*/*8

0 1*/*2 − 3*/*4 .

0 0 1*/*8

33 / 33

# Tema 11. Espacios euclídeos

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales Curso 2023 – 2024

# Producto escalar

2 / 28

### Producto escalar

* Sea *V* un R-espacio vectorial. Decimos que la aplicación

· : *V* × *V* −→ R es un producto escalar si verifica:

1. *u* · *v* = *v* · *u* para todo *u, v* ∈ *V* (simetría).
2. *u* · *u >* 0 para todo *u* ∈ *V* con *u* ̸= 0 (positividad).
3. (*αu* + *βv* ) · *w* = *α*(*u* · *w* ) + *β*(*v* · *w* ) para todo *u, v , w* ∈ *V* y para todo

*α, β* ∈ R (bilinealidad).

* En particular, *u* · 0 = 0 para todo *u* ∈ *V* .

3 / 28

### Espacio euclídeo

Un espacio euclídeo es un espacio vectorial sobre el que se ha definido un producto escalar.

•

* Ejemplos.
  1. · : R3 × R3 −→ R dado por (*x , y , z* ) · (*a, b, c*) = *xa* + *yb* + *zc* (Producto escalar estándar sobre R3)
  2. · : R2[*x* ] × R2[*x* ] −→ R dado por

(*a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2) · (*b*0 + *b*1*x* + *b*2*x* 2) = *a*0*b*0 + *a*1*b*1 + *a*2*b*2 (Producto escalar estándar sobre R2[*x* ])

*(Solución)*

4 / 28

# Matriz de Gram

5 / 28

### Matriz de Gram

Sea *B* = *e*1*, e*2*, . . . , en* una base de un espacio euclídeo *V* . Llamamos

* { }

matriz de Gram con respecto a la base *B* a

*G* = 

*B*

*e*1 · *e*1 *e*1 · *e*2 *. . . e*1 · *en*

*e*2 .· *e*1 *e*2 .· *e*2 *. . . e*2 ·. *en*

.

. . . .

.

 ∈ M *.*

 *en* · *e*1 *en* · *e*2 *. . . en* · *en* 

*n*

* La matriz de Gram siempre es simétrica y definida positiva.
* Una matriz *G* ∈ M*n* simétrica es definida positiva si





*g*11 *g*22 *. . . g*1*i g*21 *g*22 *. . . g*2*i*

det (*Gi* ) *>* 0*, i* = 1*,* 2*, . . . , n* con *Gi* =  .

. . . . .

 *.*

6 / 28

*gi*1 *g*22 *. . . gii*

### Matriz de Gram

* Ejemplo. Calcula la matriz de Gram de:
  1. el producto escalar estándar de R3 con respecto a la base canónica

*B* = { (1*,* 0*,* 0)*,* (0*,* 1*,* 0)*,* (0*,* 0*,* 1) }

* 1. el producto escalar estándar de R3 con respecto a la base

*B*′ = { (2*,* 3*,* 1)*,* (0*,* 1*,* 1)*,* (0*,* 0*,* 2) }

*(Solución)*

7 / 28

### Coordenadas y matriz de Gram

Sea *V* un espacio euclídeo y *GB* la matriz de Gram del producto escalar con respecto a una base *B* de *V* . Si *u, v V* tienen como coordenadas *u* = [*α*1*, α*2*, . . . , αn*]*B* y *v* = [*β*1*, β*2*, . . . , βn*]*B*, entonces,

∈

•

* Ejemplo.

*u* · *v* = (*α*1

*, α*2

*, . . . , αn*

) *GB*

 *β*1

 .

*β*2

.

*βn*



 *.*

1) Si *B* = { (0*,* 1)*,* (2*,* 1) } es una base de R2 y *GB* = ( 1 −2 ), calcula

*u* · *v* con *u* = [1*,* 1]*B* y *v* = [0*,* 1]*B*.

−2 −1

*(Solución)*

8 / 28

# Norma de un vector

9 / 28

### Norma de un vector

* Sea *V* un espacio euclídeo. Se define la norma de *u* ∈ *V* como

∥*u*∥ = √*u* · *u .*

* Decimos que *u* ∈ *V* es unitario si ∥*u*∥ = 1.
* Ejemplo. Calcula:
  1. ∥*v* ∥ si *v* = (1*,* 1*,* 1) con el producto escalar estándar de R3
  2. ∥*p*(*x* )∥ si *p*(*x* ) = *x* + 2 con el producto escalar · : R1[*x* ] × R1[*x* ] −→ R

dado por (*a*0 + *a*1*x* ) · (*b*0 + *b*1*x* ) = *a*0*b*0 + 2*a*1*b*1

*(Solución)*

10 / 28

### Norma de un vector

* Propiedades. Sea *V* un espacio euclídeo. Se cumple:
  1. ∥*u*∥ ≥ 0 para todo *u* ∈ *V* .
  2. ∥*u*∥ = 0 si y solo si *u* = 0.
  3. ∥*λu*∥ = |*λ*|∥*u*∥ para todo *λ* ∈ R y para todo *u* ∈ *V* .
  4. ∥*u* + *v* ∥ ≤ ∥*u*∥ + ∥*v* ∥ para todo *u, v* ∈ *V* (Desigualdad triangular).
  5. |*u* · *v* | ≤ ∥*u*∥∥*v* ∥ para todo *u, v* ∈ *V* (Desigualdad de Cauchy–Schwarz).

11 / 28

### Distancia y ángulo

* Sean *V* un espacio euclídeo y *u, v* ∈ *V* . Se define
* la distancia entre *u* y *v* como

✓

*d* (*u, v* ) = ∥*u* − *v* ∥ = (*u* − *v* ) · (*u* − *v* ) ;

* el ángulo entre *u* y *v* al único *α* ∈ [0*, π*] tal que

cos(*α*) = *u* · *v .*

∥*u*∥∥*v* ∥

Ejemplo. Calcula el ángulo formado por los vectores *u* = (1*,* 1) y *v* = (1*,* 0) con los siguientes productos escalares:

•

1. Producto escalar estándar de R2
2. · : R2 −→ R2 tal que (*x , y* ) · (*a, b*) = 3*ax* + *yb*

*(Solución)*

12 / 28

# Bases ortogonales y ortonormales

13 / 28

### Vectores ortogonales

* Sea *V* un espacio euclídeo. Decimos que *u, v* ∈ *V* son ortogonales si

*u* · *v* = 0. Se denota por *u* ⊥ *v* .

* Ejemplo. Comprueba si los siguientes vectores son ortogonales.
  1. *u* = (2*,* −1) y *v* = (1*,* −2) con el producto estándar
  2. *u* = (2*,*(−1) y *v* =)(1*,* −2) con el producto escalar definido por

*GB*

*C*

=

1 0

0 −1

*(Solución)*

14 / 28

### Base ortogonal

Sea *V* un espacio euclídeo. Decimos que *B* = *e*1*, e*2*, . . . , en* es una

* { }

base ortogonal de *V* si

*ei* ⊥ *ej* para todo *i, j* = 1*,* 2*, . . . , n* con *i* ̸= *j .*

* Ejemplo.
  1. La base *B* = (1*,* 0*,* 0)*,* (0*,* 1*,* 0)*,* (0*,* 0*,* 2) es una base ortogonal de R3 con el producto escalar estándar

{ − }

* 1. La base *B* = { 1*,* 2*x ,* 3*x* 2 } es una base ortogonal de R2[*x* ] con el producto escalar · : R2[*x* ] × R2[*x* ] −→ R dado por

(*a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2) · (*b*0 + *b*1*x* + *b*2*x* 2) = *a*0*b*0 + *a*1*b*1 + *a*2*b*2

*(Solución)*

15 / 28

### Base ortonormal

Sea *V* un espacio euclídeo. Decimos que *B* = *e*1*, e*2*, . . . , en* es una

* { }

base ortonormal de *V* si

1. *B* es una base ortogonal;
2. ∥*ei* ∥ = 1 para todo *i* = 1*,* 2*, . . . , n*.

* Si *B* = { *e*1*, e*2*, . . . , en* } es una base ortogonal, entonces

*B*′ = � *e*1 *,*  *e*2 *, . . . ,*  *en*

es una base ortonormal.

16 / 28

∥*e*1∥

∥*e*2∥

∥*en*∥

### Vector ortogonal a un subespacio vectorial

Sea *V* un espacio euclídeo y sea *W* un subespacio vectorial de *V* . Decimos que *u V* es ortogonal a *W* (*u W* ) si es ortogonal a todo elemento de *W* .

∈ ⊥

•

Basta probar que *u V* es ortogonal a todos los elementos de un sistema generador de *W* .

* ∈
* Ejemplo.
  1. El vector *u* = (5*,* 1*,* −2) es ortogonal al subespacio

*W* = ⟨ (1*,* −1*,* 2)*,* (0*,* 2*,* 1) ⟩ con el producto escalar estándar

*(Solución)*

17 / 28

### Proyección ortogonal

* Sea *V* un espacio euclídeo y *W* un subespacio vectorial de *V* . Si

{ *c*1*, c*2*, . . . , ck* } es una base *ortonormal* de *W* , se define la proyección ortogonal de *u* ∈ *V* sobre *W* como

*Pr* 1*W* (*u*) = (*u* · *c*1)*c*1 + (*u* · *c*2)*c*2 + · · · + (*u* · *ck* )*ck* ∈ *W .*

* El vector *z* = *u* − *Pr* 1*W* (*u*) es ortogonal a *W* : *z* ⊥ *W* .

18 / 28

### Proyección ortogonal

* Ejemplo.
  1. En R3 con el producto escalar estándar, consideramos el subespacio vectorial

*W* = ⟨ (1*,* 0*,* 0)*,* (0*,* 1*,* 0) ⟩.

z

*v* = *Pr W* (*u*)



*u*

*v*

1

y

x

El vector *v* es la proyección ortogonal de *u* R3 sobre el plano horizontal

∈

*z* = 0 (sobre *W* )

19 / 28

### Método de ortonormalización de Gram–Schmidt

Si *V* es un espacio euclídeo y *W* es un subespacio vectorial de *V* , el método de ortonormalización de Gram–Schmidt permite pasar de una base cualquiera *B* = { *w*1*, w*2*, . . . , wk* } de *W* a una base *ortonormal B*′ = { *c*1*, c*2*, . . . , ck* }.

•

1. Cálculo de *c*1 = *w*1 .

∥*w*1∥

1. Cálculo de *c*2 = *z*2

1

∥*z*2∥

1. Cálculo de *c*3 = *z*3

con *z*2 = *w*2 − *Pr*

con

⟨ *c*1 ⟩

(*w*2) = *w*2 − (*w*2 · *c*1)*c*1.

∥*z*3∥

l

1

*z*3 = *w*3 − *Pr* 1⟨ *c*1 *, c*2 ⟩(*w*3) = *w*3 − (*w*3 · *c*1)*c*1 + (*w*3 · *c*2)*c*2 .

4. Se continua de igual modo hasta calcular el último vector *ck* .

20 / 28

* Ejemplos.
  1. Sea *B* = (3*,* 4*,* 0)*,* (1*,* 0*,* 0)*,* (3*,* 0*,* 4) una base de R3. Calcula, a partir de esta, una base ortonormal con el método de ortonormalización de Gram- Schmidt

{ − }

* 1. Sea *B* = (1*,* 1*,* 1*,* 0)*,* (1*,* 1*,* 1*,* 0)*,* ( 1*,* 1*,* 1*,* 0) una base de *W* . Calcula, a partir de esta, una base ortonormal con el método de ortonormalización de Gram-Schmidt

{ − − − }

*(Solución)*

21 / 28

# Soluciones

22 / 28

Pág. 4

1. Es un producto escalar porque si (*x , y , z*)*,* (*a, b, c*)*,* (*r , s, t*) ∈ R3 y *α, β* ∈ R se cumple:
   * (*x , y , z*) · (*a, b, c*) = *ax* + *yb* + *zc* = *ax* + *by* + *cz* = (*a, b, c*) · (*x , y , z*).
   * (*x , y , z*) · (*x , y , z*) = *x* 2 + *y* 2 + *z*2 *>* 0 si (*x , y , z*) ̸= (0*,* 0*,* 0).
   * (*α*(*x , y , z*) + *β*(*a, b, c*)) · (*r , s, t*) = (*αx* + *βa, αy* + *βb, αz* + *βc*) · (*r , s, t*) =

= *α*(*xr* + *ys* + *zt*) + *β*(*ar* + *bs* + *ct*) = *α*((*x , y , z*) · (*r , s, t*)) + *β*((*a, b, c*) · (*r , s, t*)).

1. Es un producto escalar porque si *a*0+*a*1*x* +*a*2*x* 2 *, b*0+*b*1*x* +*b*2*x* 2 *, c*0+*c*1*x* +*c*2*x* 2 ∈ R2[*x* ] y *α, β* ∈ R se cumple:
   * (*a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2) · (*b*0 + *b*1*x* + *b*2*x* 2) = *a*0*b*0 + *a*1*b*1 + *a*2*b*2 =

= *b*0*a*0 + *b*1*a*1 + *b*2*a*2 = (*b*0 + *b*1*x* + *b*2*x* 2) · (*a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2).

* + (*a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2) · (*a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2) = *a*2 + *a*2 + *a*2 *>* 0 si *a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2 ̸= 0.

0

1

2

(*α*(*a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2) + *β*(*b*0 + *b*1*x* + *b*2*x* 2)) (*c*0 + *c*1*x* + *c*2*x* 2) =

* ·

= (*αa*0 + *βb*0 + (*αa*1 + *βb*1)*x* + (*αa*2 + *βb*2)*x* 2) (*c*0 + *c*1*x* + *c*2*x* 2) =

·

= *α*(*a*0*c*0 + *a*1*c*1 + *a*2*c*2) + *β*(*b*0*c*0 + *b*1*c*1 + *b*2*c*2) =

= *α*((*a*0 + *a*1*x* + *a*2*x* 2) · (*c*0 + *c*1*x* + *c*2*x* 2)) + *β*((*b*0 + *b*1*x* + *b*2*x* 2) · (*c*0 + *c*1*x* + *c*2*x* 2)).

23 / 28

Pág. 7

1. Calculamos

( (1*,* 0*,* 0) · (1*,* 0*,* 0) (1*,* 0*,* 0) · (0*,* 1*,* 0) (1*,* 0*,* 0) · (0*,* 0*,* 1) \

( 1 0 0 \

*GB* =

(0*,* 1*,* 0) · (1*,* 0*,* 0) (0*,* 1*,* 0) · (0*,* 1*,* 0) (0*,* 1*,* 0) · (0*,* 0*,* 1) =

(0*,* 0*,* 1) · (1*,* 0*,* 0) (0*,* 0*,* 1) · (0*,* 1*,* 0) (0*,* 0*,* 1) · (0*,* 0*,* 1)

0 1 0 *.*

0 0 1

1. Calculamos

( (2*,* 3*,* 1) · (2*,* 3*,* 1) (2*,* 3*,* 1) · (0*,* 1*,* 1) (2*,* 3*,* 1) · (0*,* 0*,* 2) \

( 14 4 2 \

*GB′* =

(0*,* 1*,* 1) · (2*,* 3*,* 1) (0*,* 1*,* 1) · (0*,* 1*,* 1) (0*,* 1*,* 1) · (0*,* 0*,* 2) =

(0*,* 0*,* 2) · (2*,* 3*,* 1) (0*,* 0*,* 2) · (0*,* 0*,* 2) (0*,* 0*,* 2) · (0*,* 0*,* 1)

4 2 2 *.*

2 2 1

Pág. 8

1. *u* · *v* = (1*,* 1) ( 1 −2

−2 −1

)( 0

) = −2.

Pág. 10

1

✓

1. ∥(1*,* 1*,* 1)∥ = (1*,* 1*,* 1) · (1*,* 1*,* 1) = √1 + 1 + 1 = √3.

✓

1. ∥*p*(*x* )∥ = (*x* + 2) · (*x* + 2) = √4 + 2 = √6.

24 / 28

Pág. 12

1. cos *α* = (1*,* 1) · (1*,* 0)

=

∥(1*,* 1)∥∥(1*,* 0)∥

1 + 0

√1 + 1√1 + 0

*π*

1 ⇒ *α* = 4 .

1. cos *α* = (1*,* 1) · (1*,* 0)

=

∥(1*,* 1)∥∥(1*,* 0)∥

3 + 0

√3 + 1√3 + 0

=

√2

3

2√3

=

= √3

2

*π*

⇒ *α* = 3 .

Pág. 14

1. No son ortogonales porque (2*,* −1) · (1*,* −2) = 4 ̸= 0.

)(

1. Son ortogonales porque *u* · *v* = (2*,* −1) ( 1 0 1 ) = 0.

0 −1

−2

Pág. 15

1. Cierto porque (1*,* 0*,* 0) · (0*,* −1*,* 0) = 0, (1*,* 0*,* 0) · (0*,* 0*,* 2) = 0 y (0*,* −1*,* 0) · (0*,* 0*,* 2) = 0.
2. Cierto porque 1 · 2*x* = 0, 1 · 3*x* 2 = 0 y 2*x* · 3*x* 2 = 0.

Pág. 17

1. Cierto porque (5*,* 1*,* −2) · (1*,* −1*,* 2) = 5 − 1 − 4 = 0 y (5*,* 1*,* −2) · (0*,* 2*,* 1) = 2 − 2 = 0.

25 / 28

Pág. 21

1. Si denotamos *w*1 = (3*,* 4*,* 0), *w*2 = (1*,* 0*,* 0) y *w*3 = (3*,* 0*,* −4), calculamos:

*c*1 = *w*1 = √

∥*w*1∥

(3*,* 4*,* 0)

= ( 3 *,* 4 *,* 0);

*z*2 = *w*2−*Pr* 1 *c* (*w*2) = *w*2−(*w*2·*c*1)*c*1 = (1*,* 0*,* 0)−((1*,* 0*,* 0) · ( 3 *,* 4 *,* 0))( 3 *,* 4 *,* 0) =

32 + 42 + 02

5

5

⟨

1 ⟩

5

5

5

5

5

5

5

25

25

25

25

= (1*,* 0*,* 0) − 3 ( 3 *,* 4 *,* 0) = (1*,* 0*,* 0) − ( 9 *,* 12 *,* 0) = ( 16 *,* −12 *,* 0),

*c* = *z*2

25 25

= ( 16 *,* −12 *,* 0)

= 5 (

16 *,* −12 *,*

0) = (

4 *,* −3 *,*

0);

2 ∥*z*2∥

25

1 √162 + 122

4 25 25 5 5

*z*3 = *w*3 − *Pr c*1 *, c*2 (*w*3) = *w*3 − (*w*3 · *c*1)*c*1 + (*w*3 · *c*2)*c*2l =

1⟨ ⟩

= (3*,* 0*,* −4)− ((3*,* 0*,* −4)·( 3 *,* 4 *,* 0 )( 3 *,* 4 *,* 0)+((3*,* 0*,* −4)·( 4 *,* −3 *,* 0 )( 4 *,* −3 *,* 0)l =

5

5

5

5

5

5

5

5

= (3*,* 0*,* −4) − ( 75 *,* 0*,* 0) = (0*,* 0*,* −4),

52

5

5

5

5

5

5

25

25

25

25

= (3*,* 0*,* −4)− 9 ( 3 *,* 4 *,* 0)+12 ( 4 *,* −3 *,* 0)l = (3*,* 0*,* −4)− ( 27 *,* 36 *,* 0)+( 48 *,* −36 *,* 0)l =

*c*3 = *z*3

= −

∥*z*3∥

(0*,* 0*,* 4)

√42

= (0*,* 0*,* −1);

entonces la base ortonormal es { *c*1*, c*2*, c*3 }.

26 / 28

1. Si denotamos *w*1 = (1*,* 1*,* −1*,* 0), *w*2 = (1*,* −1*,* 1*,* 0) y *w*3 = (−1*,* 1*,* 1*,* 0), calculamos:

*w*1

*c*

=

=

∥*w*1∥

√3 =

√3 *,* √3 *,* √3 *,* 0

;

1

(1*,* 1*,* −1*,* 0)

( 1 1 −1 )

( ( 1 1 −1 ))( 1 1 −1 )

*z*2 = *w*2 − *Pr* 1⟨ *c*1 ⟩(*w*2) = *w*2 − (*w*2 · *c*1)*c*1 =

= (1*,* −1*,* 1*,* 0) −

(1*,* −1*,* 1*,* 0) ·

√3 *,* √3 *,* √3 *,* 0

√3 *,* √3 *,* √3 *,* 0

=

= (1*,* −1*,* 1*,* 0) +

√3

√3 *,* √3 *,* √3 *,* 0

=

3 *,*

3 *,* 3 *,* 0

,

1 ( 1 1 −1 ) ( 4 −2 2 )

*z*2 ( 4 *,* −2 *,* 2 *,* 0)

3 3 3

3 ( 4

−2 2 )

( 2 −1 1 )

*c*2 =

=

∥*z*2∥

3

*z*3 = *w*3 − *Pr* 1⟨ *c*1 *, c*2 ⟩(*w*3) = *w*3 − (*w*3 · *c*1)*c*1 + (*w*3 · *c*2)*c*2l =

1 √16 + 4 + 4 =

2√6

3 *,* 3 *,* 3 *,* 0 =

√6 *,* √6 *,* √6 *,* 0 ;

( ( 1 1 −1 ))( 1 1 −1 )

= (−1*,* 1*,* 1*,* 0) −

(−1*,* 1*,* 1*,* 0) ·

√3 *,* √3 *,* √3 *,* 0

√3 *,* √3 *,* √3 *,* 0

+

( ( 2

+

(−1*,* 1*,* 1*,* 0) ·

√6 *,* √6 *,* √6 *,* 0

√6 *,* √6 *,* √6 *,* 0

=

−1 1

))( 2

−1 1 ) l

−1 ( 1 1 −1 )

= (−1*,* 1*,* 1*,* 0) −

√3

√3 *,* √3 *,* √3 *,* 0

−

2 ( 2

−1 1 ) l

= (−1*,* 1*,* 1*,* 0) − (−1*,* 0*,* 0*,* 0) = (0*,* 1*,* 1*,* 0),

√6

√6 *,* √6 *,* √6 *,* 0

=

27 / 28

*z*3

*c*

=

=

∥*z*3∥

3

(0*,* 1*,* 1*,* 0)

( 1 1 )

entonces la base ortonormal es { *c*1*, c*2*, c*3 }.

√2 =

0*,* √2 *,* √2 *,* 0

;

28 / 28