# Matema´ticas I Ejercicios resueltos

Grado en Ingenier´ıa de Tecnolog´ıas Industriales

Marta Latorre Balado y Javier Mart´ınez Mart´ınez Material docente en abierto de la Universidad Rey Juan Carlos

BURJ Digital https://burjcdigital.urjc.es/

7 de septiembre de 2023

©2023 Marta Latorre Balado y Javier Mart´ınez Mart´ınez Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Atribucio´n-CompartirIgual 4.0 Internacional” de Creative Commons, disponible en

https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es



## ´Indice

1. [Nu´meros complejos](#_bookmark0) 5
2. [L´ımites de funciones reales](#_bookmark1) 7
3. [Continuidad](#_bookmark2) 8
4. [Derivacio´n de funciones](#_bookmark3) 10
5. [Aplicaciones de la derivada](#_bookmark4) 11
6. [Integracio´n](#_bookmark5) 12
7. [Matrices y sistemas de ecuaciones lineales](#_bookmark6) 13
8. [Espacios vectoriales](#_bookmark8) 15
9. [Aplicaciones lineales](#_bookmark9) 17
10. [Diagonalizacio´n. Autovalores y autovectores.](#_bookmark10) 19
11. [Espacios normados](#_bookmark11) 21

[Soluciones](#_bookmark12) 23

[Soluciones Tema 1](#_bookmark13) 25

[Soluciones Tema 2](#_bookmark14) 29

[Soluciones Tema 3](#_bookmark15) 32

[Soluciones Tema 4](#_bookmark16) 36

[Soluciones Tema 5](#_bookmark17) 38

[Soluciones Tema 6](#_bookmark18) 44

[Soluciones Tema 7](#_bookmark19) 49

[Soluciones Tema 8](#_bookmark20) 55

[Soluciones Tema 9](#_bookmark21) 61

[Soluciones Tema 10](#_bookmark22) 67

[Soluciones Tema 11](#_bookmark25) 73

TEMA 1. Nu´meros complejos

Ejercicio 1.1. *Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma bino´mica.*

1. (*ι*˙ + 3)(2*ι*˙ − 1)

1 − *ι*˙

1. (1 + *ι*˙)2 + 2*ι*˙

3 + *ι*˙

1. 2*e* 3

*π ι*˙

1. 4

4 *π*

2 *−π*

2

− (*ι*˙ + 2)

Ejercicio 1.2. *Expresa en forma polar los siguientes nu´meros complejos.*

1. *e*1+*ι*˙
2. 2 *π* 3*π*1 *−π*

5 2

1. *ι*˙7

Ejercicio 1.3. *Encuentra todos los nu´meros complejos z* ∈ C *tales que z* 4 = *eπι*˙*.*

Ejercicio 1.4. *Representa los siguientes conjuntos en el plano complejo.*

1. *A* = {*z* ∈ C | |*z* − *ι*˙| = 2}
2. *B* = {*z* ∈ C | |*z* | ≤ 1 *y* Re(*z* ) ≥ 0}
3. *C* = {*z* ∈ C | 1 *<* |*z* | *<* 2}
4. *D* = {*z* ∈ C | −2 ≤ Im(*z* ) ≤ 2}
5. *E* = {*z* ∈ C | *z* 3 = −8}

Ejercicio 1.5. *Encuentra todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones.*

1. *z* 3 + 1 = *ι*˙
2. (*z* + 1)4 = 16

Ejercicio 1.6. *Determina todos los nu´meros complejos que satisfacen la ecuacio´n* |*z* + 1| = |*z* − *ι*˙|*.*

Ejercicio 1.7. *Expresa los siguientes nu´meros complejos en forma bino´mica y en forma polar.*

1. 1 100

( )

−*ι*˙

1. (1 − *ι*˙)50
2. (2 + 2*ι*˙)20

(2 − 2*ι*˙)40

Ejercicio 1.8. *Resuelve la ecuacio´n x* 6 − 2*x* 3 + 2 = 0 *con x* ∈ C*.*

EJERCICIOS TEMA 1 MATEMA´TICAS I

Ejercicio 1.9. *Sea z* ∈ C *tal que*

*Calcula la forma polar y bino´mica de z* 2 + *ι*˙*.*

*z*

*z* − 2

= 1 − *ι*˙.

*ι*˙ + 1

Ejercicio 1.10. *Demuestra que si p*(*x* ) *es un polinomio de grado n* N *con coeficientes reales y z C es ra´ız de p*(*x* )*, entonces z tambie´n es ra´ız de p*(*x* )*.*

∈ ∈

Ejercicio 2.1. *Halla el valor de los siguientes l´ımites.*

1. l´ım

*x* →*a*+

1. l´ım

*x* →*a*+

√*x* − √*a si a* 0 (*x* − *a*)2

√*x* − *a x* − *a*

≥

*x* − *a*

1. l´ım

*x* →*a*+

√*x* − *a*

1. l´ım

*x* →+∞

*x* 2 + *a* − *ax* *si a* ≥ 0

Ejercicio 2.2. *Calcula el l´ımite de las siguientes funciones en el origen.*

1. *f* (*x* ) = *x* sin( *π* )

*x*

21*/x* + 5−1*/x*

*g* (*x* ) = 31*/x* + 4−1*/x*

1. *h*(*x* ) = (3*x* 2 + 1)1*/x*2

∗Ejercicio 2.3. *Calcula los siguientes l´ımites.*

1. l´ım ( 1 − 1 )

*x* →1 ln *x x* − 1

1. l´ım (1 + *x* sin *x* )2*/x*2

*x* →0

*x* − *a*

*(c)* l´ım √3 *x* − *a*

*x* →*a*

√*x* − *a*

*(d)* l´ım

*x* →*a*

3 *x* − √3 *a*

Ejercicio 3.1. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones.*

*(a) f* (*x* ) = √1 − *x* 2

√1 − *x* 2 *si x* ∈ [−1, 1]

*(b) g* (*x* ) = t

0 *si x* ̸∈ [−1, 1]

√1 − *x* 2 *si x* ∈ [−1, 1]

*(c) h*(*x* ) = t

*x* − 1 *si x* ̸∈ [−1, 1]

Ejercicio 3.2. *Sabiendo que h* : R −→ R *es una funcio´n continua tal que h*(0) = *β, determina el valor de los para´metros α, β* ∈ R *para que la funcio´n f* : R −→ R *dada por*

*αx*



|*x* − 2| + 4

*si x* ≤ 2,

*f* (*x* ) =  (*x* − 2) sin ( *πx* ) *si* 2 *< x* ≤ 10,

****

*sea continua en x* = 2 *y en x* = 10*.*

****

*x* − 2

*h*(*x* − 10) − 10

10*x* + 10

*si x >* 10,

Ejercicio 3.3. *Demuestra que la ecuacio´n* sin *x* = 2*x* − 3 *tiene, al menos, una solucio´n real.*

Ejercicio 3.4. *Sea la funcio´n f* : R −→ R *dada por*

 √*x* 2 + 4 *si x* ∈ (−∞, 0],

1. *Calcula f* (0) *y f* (2)*.*

*f* (*x* ) =



*x* + 6

*x* 2 − 4*x* + 3

*si x* ∈ (0, +∞).

1. *Comprueba si existe x* ∈ R *tal que f* (*x* ) = 0*.*
2. *Explica si los resultados anteriores contradicen, o no, el Teorema de Bolzano.*

Ejercicio 3.5. *Sea f* : [0, 1] R *una funcio´n continua con* 0 *f* (*x* ) 1*. Demuestra que la ecuacio´n*

−→ ≤ ≤

*f* (*x* ) = *x tiene, al menos, una solucio´n.*

Ejercicio 3.6. *Demuestra que la ecuacio´n*

*tiene al menos dos soluciones reales.*

*x* 2 = cos *x* − *x* sin *x*

Ejercicio 3.7. *Demuestra que la ecuacio´n x* 6 = 1 + 6*x tiene exactamente dos soluciones reales.*

Ejercicio 3.8. *Determina el valor del para´metro a* ∈ R *para que la funcio´n*

1

*f* (*x* ) = *x* 2 − 2*ax* + 5*a*

*sea continua en todo* R*.*

EJERCICIOS TEMA 3 MATEMA´TICAS I

∗Ejercicio 3.9. *Determina el valor de c* ∈ R *para que la funcio´n*

*f* (*x* ) = t ̸

*x* cot *x si x* = 0,

*c si x* = 0,

*sea continua en x* = 0*.*

Ejercicio 3.10. *Determina si existe algu´n valor c* ∈ R *para el que la funcio´n*

****

*x*

*x* 2

4 + sin2 1

*si x <* 0,

*f* (*x* ) =

*c si x* = 0,

*es continua en x* = 0*.*

31*/x* + 21*/x*

 41*/x*

****

*si x >* 0,

Ejercicio 4.1. *Utiliza la Regla de L’Hoˆpital para resolver el siguiente l´ımite.*

*e*−1*/x*

l´ım

*x* →0+ *x*

Ejercicio 4.2. *Determina el valor de los para´metros a*, *b* ∈ R *para que la ecuacio´n de la recta tangente a la gra´fica de f* (*x* ) = *ax* 2 + *bx* + 2 *en el punto* (2, 0) *sea y* − *x* + 2 = 0*.*

Ejercicio 4.3. *Demuestra que la funcio´n f* (*x* ) = *xex*2 −1 + *λx tiene una u´nica ra´ız real en el intervalo* [ *α*, *α*]

−

*para cualquier valor α*, *λ >* 0*.*

Ejercicio 4.4. *Sea f* (*x* ) = 3 (1 + *x* )2*.*

1. *Calcula f* (−4) *y f* (2)*.*
2. *Comprueba que la ecuacio´n f* ′(*x* ) = 0 *no tiene solucio´n si x* ∈ (−4, 2)*.*
3. *¿Contradicen los resultados anteriores el Teorema de Rolle?*

Ejercicio 5.1. *Utiliza un polinomio de Taylor de orden* 2 *para obtener un valor aproximado de e*0,1 sin(0,2)

*y acota el error cometido en dicha aproximacio´n.*

Ejercicio 5.2. *Haz un esbozo de la gra´fica de*

*ex*

*f* (*x* ) = √*x* (*x* − 2)

*calculando previamente el dominio, los puntos de corte con los ejes, as´ıntotas verticales y horizontales, monoton´ıa y extremos relativos.*

Ejercicio 5.3. *Aproxima el nu´mero* √3 *e*2 *con un error menor que* 10−2*.*

Ejercicio 5.4. *Calcula el polinomio de Taylor P*(*x* ) *de segundo orden alrededor del punto x* = *π de la*

4

*funcio´n f* (*x* ) = sec *x.*

Ejercicio 5.5. *Dada f* (*x* ) = *x*

log *x*

*noton´ıa y extremos relativos.*

Ejercicio 5.6. *Dada la funcio´n*

*, realiza un esbozo de su gra´fica analizando su dominio, as´ıntotas, mo-*

*f* (*x* ) = |1 − |*x* || ,

*determina su dominio, puntos de corte con los ejes, analiza su continuidad y derivabilidad y estudia su monoton´ıa y extremos relativos.*

Ejercicio 5.7. *Calcula los puntos de la para´bola y* = *x* 2 *que se hallan a distancia m´ınima del punto* (0, 2)*.*

Ejercicio 6.1. *Utiliza la te´cnica de integracio´n por partes para hallar* r arcsin *x dx.*

Ejercicio 6.2. *Utiliza un cambio de variable para calcular*

r *x* 2

√*x* − 2 *dx.*

Ejercicio 6.3. *Resuelve la siguiente integral c´ıclica:* r *e*2*x* sin *x dx.*

Ejercicio 6.4. *Resuelve las siguientes integrales definidas.*

1

*(a)* r

1 − *x* 2 *dx*

0

r

t

*(b)* 2

0

*f* (*x* ) *dx*

*con*

*f* (*x* ) =

2*x* − 3 *si x <* 1 3*x* 2 − 4*x si x* ≥ 1

Ejercicio 6.5. *Calcula* r 3*x* 5 − 4*x* 3 + 4*x* 2 − 9*x* + 4 *.*

*x* 4 − 2*x* 3 + 2*x* 2 − 2*x* + 1 *dx*

Ejercicio 6.6. *Calcula*  −4 *dx.*

r

*x* 3 + 2*x* 2 + 3*x* + 6

Ejercicio 6.7. *Calcula una primitiva de* r *e*√*x dx.*

Ejercicio 6.8. *Resuelve la integral trigonome´trica*  1 *dx.*

r

cos *x*

Ejercicio 6.9. *Calcula la integral definida*

1

1 + √*x dx.*

0

r 1

Ejercicio 6.10. *Calcula la integral*

2 2

√4 − *x* 2 *dx.*

r

*x*

0

Ejercicio 7.1. *Comprueba que B* = ( 6 −7) *es la inversa de A* = (6 7)*.*

Ejercicio 7.2.

−5 6 5 6

−2 1 1

1. *Calcula, si existe, la inversa de A* = 0 1 1 *.*

 

0 −1 1

1. *Utilizando la informacio´n obtenida en el apartado anterior, halla la solucio´n de*

 −

2*x* + *y* + *z* = 2,

*y* + *z* = 1,

 −*y* + *z* = 2.

Ejercicio 7.3. *Utilizando el me´todo de Gauss, determina si el sistema*

****

****

*x y* + *t* + 2*w* = 1, 2*x* 2*y* + *z* + 3*t* + 4*w* = 0,

*z* + *t* + *w* = 3,

−

− −

*x* − *y* + *z* + 2*t* + 3*w* = 2,

*tiene una, infinitas o ninguna solucio´n. Halla la solucio´n en caso de que exista.*

Ejercicio 7.4. *Utiliza el me´todo de Gauss-Jordan para hallar la solucio´n de AX* = *B siendo*

*A* = 2 −2 0

1 −1 3

*x* 4

, *X* = *y*  *y B* = −1 .

( )

*z*

 

( )

1 0 2 3

Ejercicio 7.5. *Calcula, utilizando el desarrollo por adjuntos, el determinante de* 0 0 −1 3 *.*

*A* =  

1 2 0 1

*¿Es*

*A invertible?*

1 −1 1 2

Ejercicio 7.6. *Utiliza el me´todo de Gauss para determinar, en funcio´n del para´metro β* ∈ R*, si el sistema*



*x* + *βy* + 2*z* = 1, *x* + 2*y* 3*z* + *βt* = 0, *x* + *βy* + 2*z* + *βt* = *β*,

− −

*es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.*

Ejercicio 7.7. *Utiliza el me´todo de Gauss para determinar, en funcio´n del valor de los para´metros α*, *β* R*, si el sistema*

∈

−



*x αy* + 2*z* = *β*,

2*x* + *y* + *βz* = 0,



2*x* + 4*z* = *β*,

*es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.*

EJERCICIOS TEMA 7 MATEMA´TICAS I

Ejercicio 7.8. *Utiliza el me´todo de Gauss para discutir y resolver el sistema*

*x*2 + 5*x*3 = −4,



*x*1 + 4*x*2 + 3*x*3 = −2,

 2*x*1 + 7*x*2 + *x*3 = −2.

∗Ejercicio 7.9. *Sean A y B matrices* 2 2 *con coeficientes reales. Se define el conmutador de A y B como la matriz*

×

[*A*, *B*] = *AB* − *BA*,

*de modo que el producto de dos matrices es conmutativo si y solo si su conmutador es cero.*

1. *Justifica que si la traza de A es cero, entonces A*2 *es un mu´ltiplo de la matriz identidad.*
2. *Prueba que el cuadrado de* [*A*, *B*] *conmuta con cualquier matriz C* ∈ M2*.*

(Pista: ¿cua´l es la traza de [*A*, *B*]?)

1. *Prueba que el conmutador de A y B no puede ser nunca un mu´ltiplo no nulo de la matriz identidad.*

∗Ejercicio 7.10. *Sea A* ∈ M2*. Demuestra que siempre se cumple la identidad*

*A*2 − tr(*A*)*A* + det(*A*)*I*2 = 0.

*Emplea la identidad anterior para demostrar que si* det(*A*) ̸= 0*, entonces A es invertible.*

∗Ejercicio 7.11. *Determina los valores de a*, *b* R *para que los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sean equivalentes.*

∈

*x*1 + 2*x*2 + *x*3 + (*a* − 1)*x*4 = 0,

t

2*x*1 + *x*2 + *bx*3 − *x*4 = 0,

4*x*1 + 5*x*2 − *bx*3 + *x*4 = 0,

*x*1 − 4*x*2 + (*b* − 4)*x*3 − 5*x*4 = 0.

t

∗Ejercicio 7.12. *Demuestra que si A es una matriz* 2 × 1 *y B es una matriz* 1 × 2*, entonces la matriz AB no es invertible. Generaliza el resultado al caso en que A* ∈ M*n*×1 *y B* ∈ M1×*n.*

∗Ejercicio 7.13. *Decimos que una matriz cuadrada A es nilpotente si verifica que An* = 0 *para algu´n n* ∈ N*. Si A* ∈ M*n es nilponente:*

1. *¿Cua´l es el determinante de A?*
2. *Caracteriza todas las matrices A* ∈ M2 *nilpotentes.*
3. *Demuestra que si A* ∈ M*n es nilpotente, entonces A* + *In es invertible.*

TEMA 8. Espacios vectoriales

Ejercicio 8.1. *Determina si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales del espacio corres- pondiente.*

1. *S* = {(*a*, *b*) ∈ R2 | *a* − 2*b* = 0} *subespacio vectorial de* R2*.*
2. *T* = {*p*(*x* ) ∈ R2[*x* ] | *p*(0) = 2} *subespacio vectorial de* R2[*x* ]*.*

t( )

1. *R* =

*a a*2 2*a*

*a a*3 3*a*

| *a* ∈ R

1 *subespacio vectorial de*

M2×3*.*

1. *U* = {(*λ*, 2*λ*, *λ* + 1) ∈ R3 | *λ* ∈ R} *subespacio vectorial de* R3*.*
2. *V* = {*A* ∈ M2 | *A* = *At*} *subespacio vectorial de* M2*.*
3. *W* = {(*λ*, *λµ*, *µ*, 0) ∈ R4 | *λ*, *µ* ∈ R} *subespacio vectorial de* R4*.*

Ejercicio 8.2. *Sea W* = {2*b* + (*a* + *b*)*x* + (*a* − *b*)*x* 2 ∈ R2[*x* ] | *a*, *b* ∈ R}*.*

1. *Comprueba que W es un subespacio vectorial de* R2[*x* ]*.*
2. *Obte´n un sistema generador de W .*
3. *¿p*(*x* ) = 3 + 2*x* − *x* 2 *es un vector de W ?*

Ejercicio 8.3. *Comprueba que los vectores* (1, *λ* + 1, 3 − *λ*)*,* (1, *λ*, 3) *y* (1, *λ* + 1, 1 − *λ*) *forman una base de*

R3 *para cualquier valor de λ* ∈ R*.*

Ejercicio 8.4. *Sea V un espacio vectorial de dimensio´n* 3 *y sean u*, *v* , *w V . Sabiendo que u*, *v* , *w es un conjunto de vectores linealmente independientes, comprueba si los conjuntos*

∈ { }

1. *T* = {*u*, *w* }
2. *S* = {*u* + *w* , *u* − *v* , 2*u* + *w* − *v* , 3*w* }
3. *W* = {*u* + *v* , *u* − *v* + *w* , *v* + *w* }

*tambie´n son linealmente independientes.*

Ejercicio 8.5. *Sea V un espacio vectorial y sea B* = {*u*, *v* , *w* } *una base de V . Determina si los conjuntos*

1. *U* = {*u*, *w* }
2. *W* = {*u*, *v* , *w* , 3*w* − 2*v* }

*son un sistema generador de V .*

Ejercicio 8.6.

1. *Demuestra que el conjunto de vectores B*′ = {5*x* 2, *x* 2 + 2*x* , *x* 2 + *x* + 7} *forma una base de* R2[*x* ]*.*
2. *Calcula la matriz de cambio de base para pasar de coordenadas con respecto a B*′ *a coordenadas con respecto a la base esta´ndar de* R2[*x* ]*.*

Ejercicio 8.7. *Sea V un espacio vectorial de dimensio´n* 2 *y sean B* = *b*1, *b*2 *, C* = *c*1, *c*2 *y D* = *d*1, *d*2

{ } { } { }

*tres bases de V . Si*

*PC*←*B* = (−1 2) *y PD*←*C* = ( 1 0) ,

0 1

−1 1

*calcula las coordenadas de b*1 *con respecto a las bases B, C y D y las matrices PB*←*C y PD*←*B .*

EJERCICIOS TEMA 8 MATEMA´TICAS I

Ejercicio 8.8. *En* R4*, consideramos los vectores*

*v*1 = (1, 1, 1, 2), *v*2 = (2, 2, 2, 3), *v*3 = (1, 1, 0, 1),

*y llamamos V al subespacio generado por ellos.*

1. *¿Cua´l es la dimensio´n de V ?*
2. *Si llamamos W al conjunto de vectores de V cuyas dos primeras coordenadas son iguales a* 0*, ¿es*

*W subespacio vectorial de V ? En caso afirmativo, calcula una base de W .*

Ejercicio 8.9. *En* R3*, dada la base* B = {*e*1, *e*2, *e*3}*, se considera el conjunto*

B′ = {*e*1 + *e*2, *e*1 − *e*2 − *e*3, *e*3}.

1. *Demuestra que* B′ *es una base de* R3*.*
2. *Escribe la matriz cambio de base de* B *a* B′ *y de* B′ *a* B*.*
3. *Prueba que el conjunto de todos los vectores que tienen las mismas coordenadas respecto a am- bas bases forman un subespacio vectorial de* R3*.*

∗Ejercicio 8.10. *En* R3 *se consideran los vectores*

*v*1 = (2, 1, −1), *v*2 = (3, 3, −1), *v*3 = (0, 3, 1), *v*4 = (3, 0, −2).

*Demuestra que* ⟨*v*1, *v*2⟩ = ⟨*v*3, *v*4⟩*.*

Ejercicio 8.11. *Sean*

4

*W*1 = {(*x* , *y* , *z* , *t*) ∈ R | *x* + *z* = 0, *y* − *t* = 0},

*W*2 = ⟨(0, 0, 0, 1), (1, 1, −1, 1)⟩,

*dos subespacios de* R4*.*

1. *Calcula la dimensio´n de W*1 ∩ *W*2 *y de W*1 + *W*2*.*
2. *¿Existe algu´n espacio W*3 *que sea suplementario de W*1 *y tambie´n suplementario de W*2*? Justifica tu respuesta y proporciona un ejemplo en caso afirmativo.*

Ejercicio 8.12. *Sea V un espacio vectorial de dimensio´n finita, y consideremos tres vectores v*1, *v*2, *v*3 *tales que v*1, *v*2 *, v*1, *v*3 *, v*2, *v*3 *son conjuntos linealmente independientes. ¿Implica eso que v*1, *v*2, *v*3 *son linealmente independientes? Razona tu respuesta.*

{ } { } { } { }

∗Ejercicio 8.13.

1. *Sean V*1 *y V*2 *subespacios de un espacio vectorial fijado V , tales que V*1 + *V*2 = *V y V*1 ∩ *V*2 = {0}*. Demuestra que todo vector v* ∈ *V puede expresarse de modo u´nico como v* = *v*1 + *v*2*, con v*1 ∈ *V*1 *y v*2 ∈ *V*2*.*
2. *Si consideramos los subespacios de* R3

*V*1 = {(*x* , *y* , *z* ) ∈ R3 | *x* + *y* + *z* = 0}, *V*2 = {(*λ*, *λ*, *λ*) ∈ R3 | *λ* ∈ R},

*aplica el apartado anterior y expresa el vector* (1, 0, 1) *como suma de un vector de V*1 *y un vector de V*2*.*

TEMA 9. Aplicaciones lineales

Ejercicio 9.1. *Justifica si las siguientes aplicaciones son lineales.*

1. *f* : R2 −→ R3[*x* ] *dada por f* (*a*, *b*) = *a* + *bx* + (*a* + *b* + 1)*x* 2*.*
2. *f* : R3 −→ R *dada por f* (*x* , *y* , *z* ) = *x* − 2*z.*

( )

 

1. *f* : M2 −→ M3×2 *dada por f*

*a b*

*a b* = *c d .*

 

*c d* 1 1

1. *f* : M2 −→ R2[*x* ] *dada por f* (*a b*) = *a*2*x* 2 + *bx* + *c.*

*c d*

Ejercicio 9.2. *Calcula un sistema generador del nu´cleo de las siguientes aplicaciones lineales.*

1. *f* : R2 −→ M2 *dada por f* (*a*, *b*) = (*a* + *b b*)*.*

0 *a*

1. *f* : R2[*x* ] −→ R *dada por f* (*ax* 2 + *bx* + *c*) = *a* + 2*b* − *c.*

Ejercicio 9.3. *Obte´n un sistema generador de la imagen de las siguientes aplicaciones lineales.*

1. *f* : R2 −→ M2 *dada por f* (*a*, *b*) = (*a* + *b b*)*.*

0 *a*

1. *f* : R2[*x* ] −→ R *dada por f* (*ax* 2 + *bx* + *c*) = *a* + 2*b* − *c.*

Ejercicio 9.4. *Considera la aplicacio´n lineal f* : R2 −→ M2 *definida por*

*f* (2, 1) = (0 −1) , *f* (−1, 1) = ( 1 −2) .

1 2 −1 0

1. *Comprueba que B* = {(2, 1), (−1, 1)} *es una base de* R2*.*
2. *Sabiendo que Bc* = t(1 0) , (0 1) , (0 0) , (0 0)1 *es una base de* M2*, calcula MB* ←*B* (*f* )*.*

0 0

0 0

1 0

0 1

*c*

1. *Calcula un sistema generador de* ker(*f* )*.*
2. *Calcula una base de* Im(*f* )*.*
3. *Calcula MBc* ←*B′* (*f* ) *siendo Bc*′ = {(1, 0), (0, 1)}*.*

*c*

Ejercicio 9.5. *Determina si las siguientes aplicaciones lineales son inyectivas, sobreyectivas y/o biyec- tivas.*

 

1

1. *f* : R −→ R2[*x* ] *dada por A* = *MB′*←*B* (*f* ) = −1 *siendo B* = {1} *y B*′ = {1, *x* , *x* 2}*.*

2

1. *f* : R2 −→ R3 *tal que f* (1, 0) = (0, 1, 2) *y f* (0, 1) = (0, 0, 0)*.*

Ejercicio 9.6. *Sea f* : *V* −→ *W una aplicacio´n lineal tal que*

*f* (*v*1) = *w*1 + 2*w*2, *f* (*v*2) = −*w*1, *f* (*v*3) = *w*1 + *w*2,

*donde B* = {*v*1, *v*2, *v*3} *y B*′ = {*w*1, *w*2} *son bases de V y W respectivamente.*

EJERCICIOS TEMA 9 MATEMA´TICAS I

1. *Calcula MB′*←*B* (*f* )*.*
2. *Comprueba que C* = {*f* (*v*1), *f* (*v*2)} *es una base de W .*
3. *Halla MC*←*B* (*f* )*.*

Ejercicio 9.7. *Sea f* : R3 −→ R3 *la aplicacio´n lineal dada por*

*f* (*x* , *y* , *z* ) = (*x* + *y* , *z* , *x* + *z* ).

1. *Calcula la matriz de la aplicacio´n lineal respecto a la base cano´nica.*
2. *Determina la imagen mediante f del subespacio de ecuacio´n x* + *y* + *z* = 0*.*
3. *Obte´n el conjunto de vectores de* R3 *tales que f* (*v* ) ∈ *W , donde W es el subespacio de ecuacio´n*

*x* − *y* = 0*.*

Ejercicio 9.8. *Sea f* : R2 → R2 *una aplicacio´n lineal que cumple:*

*f* (1, 1) = (2, 2) *y* (2, 1) ∈ ker(*f* ).

1. *Calcula la matriz asociada a f respecto a la base cano´nica de* R2*.*
2. *Calcula la matriz asociada a f respecto a la base B*′ = {(1, 1), (2, 1)}*.*

Ejercicio 9.9. *Sea la aplicacio´n f* : M2 −→ R *la aplicacio´n definida como f* (*A*) = tr(*A*)*.*

1. *Prueba que f es una aplicacio´n lineal.*
2. *Determina la dimensio´n y una base del nu´cleo de f .*

Ejercicio 9.10. *Si consideramos la aplicacio´n lineal f* : R3 R3 *cuya matriz respecto de la base cano´nica es*

→

 

4 2 2

*α* 4 4 ,

 

2 1 *β*

*determina la inyectividad y sobreyectividad de f en funcio´n de los posibles valores de α*, *β* ∈ R*.*

Ejercicio 9.11. *Sea g* : M2 −→ M2 *la aplicacio´n lineal definida como g* (*A*) = *AB, donde B es la matriz*

( )

*B* = 1 3 .

2 6

1. *Demuestra que la aplicacio´n g es lineal.*
2. *Calcula la matriz asociada a g respecto a la base cano´nica de* M2*.*
3. *Halla una base y la dimensio´n del nu´cleo.*
4. *Indica la dimensio´n de la imagen.*

## TEMA 10. Diagonalizacio´n. Autovalores y autovectores.

Ejercicio 10.1. *Indica si la matriz A es diagonalizable y, si existe, calcula una matriz diagonal D semejante a la dada y la matriz de paso P tal que A* = *PDP*−1*.*

 3 2 0

− 

*A* =

1 0 0 .

1 0 2

Ejercicio 10.2. *Sea f* : R2 −→ R2 *una aplicacio´n lineal tal que f* (*x* , *y* ) = (3*x* − *y* , 2*x* )*. Indica si f es diago- nalizable y, en caso de que exista, da una base B de* R2 *tal que MB*←*B* (*f* ) *es diagonal.*

Ejercicio 10.3. *Sea f* : R3 −→ R3 *dada por f* (*x* , *y* , *z* ) = (−3*x* + *z* , 2*y* , −*ax* )*. Calcula el valor del para´metro*

*a* ∈ R *para que f tenga tres vales propios reales (no necesariamente distintos).*

Ejercicio 10.4. *Sea la matriz*

 

1 *β β* 0

 

1 2 1 0

*A* =   .

−

0 0 1 0

 

*β* 1 0 −2

1. *Sabiendo que λ* = 3 *es un valor propio de A, calcula el valor del para´metro β* ∈ R*. Con valor de β obtenido en el apartado anterior:*
2. *Da tres vectores propios distintos asociados al valor propio λ* = 3*.*
3. *Calcula todos los valores propios de A. ¿Es A diagonalizable?*
4. *Comprueba si v* = (4, −2, 0, 1) *es un vector propio de A e indica el valor propio asociado.*

2 −2 −2

 

Ejercicio 10.5. *Sea la matriz A* = −1 1 1 *. Calcula los autovalores y autovectores de A. ¿Es A*

*diagonalizable?*

1 −1 −1

Ejercicio 10.6. *Prueba que toda matriz sime´trica* 2 × 2 *es diagonalizable.*

Ejercicio 10.7. *Se consideran las matrices*

0 2 1  2 1 0 

*A* = 2 3 2 , *B* = −1 2 0  .

1 2 0

1. *Calcula los autovalores de A y de B.*

0 0 −1

1. *Determina si A y B son diagonalizables sobre* R*. En caso afirmativo, calcula una forma diagonal D*

*y una matriz de paso P y expresa la relacio´n entre ellas y la matriz original.*

Ejercicio 10.8. *Construye una matriz M* ∈ M2 *tal que v*1 = (2, 3) *sea autovector con autovalor* 2 *y v*2 = (1, 2) *sea autovector con autovalor* −1*.*

Ejercicio 10.9. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*

1. *Si A es una matriz tal que An* = 0*, entonces su u´nico autovalor posible es λ* = 0*.*

EJERCICIOS TEMA 10 MATEMA´TICAS I

1. *Si λ es autovalor de una matriz A invertible, entonces λ*−1 *es autovalor de su matriz inversa A*−1*.*
2. *Si λ es un autovalor de A, entonces λ es tambie´n autovalor de At, la matriz traspuesta de A.*
3. *Los autovectores asociados a dos autovalores distintos son siempre linealmente independientes.*

TEMA 11. Espacios normados

Ejercicio 11.1. *Sea la aplicacio´n bilineal* · : R3 × R3 −→ R3 *dada por*

(*a*, *b*, *c*) · (*x* , *y* , *z* ) = 2*ax* − 2*ay* − 2*bx* + *βby* + *az* + *cx* + 6*cz* .

1. *Determina el valor del para´metro β para que* · *sea un producto escalar. Si β* = 3*, v* = (1, 1, −1) *y W* = {(*x* , *y* , *z* ) ∈ R3 | *x* + *y* − *z* = 0}*:*
2. *Comprueba si v* ⊥*W .*

Ejercicio 11.2. *Considera, en* R3*, los vectores v* = (2, 0, 1) *y w* = (2, 0, 0) *y el producto escalar cuya matriz*

*de Gram con respecto a la base B* = {(1, 1, 1), (1, −1, 0), (0, 0, 1)} *es*

 

7 0 5

*GB* = 0 9 1 .

 

5 1 4

1. *Calcula* ∥*v* ∥*.*
2. *Calcula la distancia entre v y w.*

Ejercicio 11.3. *Sea* · : R2[*x* ] × R2[*x* ] −→ R2[*x* ] *el producto escalar en* R2[*x* ] *dado por*

(*a*1*x* 2 + *b*1*x* + *c*1) · (*a*2*x* 2 + *b*2*x* + *c*2) = *a*1*a*2 + *b*1*b*2 + *b*1*c*2 + *b*2*c*1 + 2*c*1*c*2,

*y sean los vectores p*(*x* ) = *x* + *x* 2*, q*(*x* ) = 1 + *x y r* (*x* ) = −*x* 2*.*

1. *Calcula p*(*x* ) · *q*(*x* )*.*
2. *¿Es r* (*x* ) *unitario?*
3. *Calcula la matriz de Gram del producto escalar con respecto a la base B* = {*p*(*x* ), *q*(*x* ), *r* (*x* )}*.*

Ejercicio 11.4. *Calcula una base ortonormal a los siguientes subespacios con el producto escalar indi- cado.*

1. *T* = ⟨(1, 2, 0, −1), (2, 1, 1, 0)⟩ *con el producto escalar esta´ndar de* R4*.*
2. *W es el subespacio de* R3 *cuya base es B* = {*x* 2 − 1, *x* 2 + 2*x* + 3} *con el producto escalar*

· : R2[*x* ] × R2[*x* ] −→ R *tal que* (*a*1*x* 2 + *b*1*x* + *c*1) · (*a*2*x* 2 + *b*2 + *c*2) = 3*a*1*a*2 + 2*b*1*b*2 + *c*1*c*2.

1. *S* = t(*a b*) | *a* − *b* + *c* − 2*d* = 0, *b* − *c* + *d* = 0, *c* + *d* = 01 *con el producto escalar*

*c d*

· : M2 × M2 −→ R *dado por* (*a b*) · (*e f* ) = *ae* + *bf* + *cg* + *dh*.

*c d*

*g h*

Ejercicio 11.5. *Sea un espacio eucl´ıdeo y sea una base de tal que es unitario,*

*V B* = {*b*1, *b*2, *b*3} *V b*1

*b*1 · *b*2 = 0*, b*2 · *b*2 = 1*,* ∥*b*3∥ = √2*,* (*b*1 − *b*3) · *b*2 = 0 *y* (*b*1 − *b*3)⊥*b*1*.*

1. *Calcula la matriz de Gram con respecto a la base B.*
2. *Calcula* d(*b*1, *b*3) *y el a´ngulo que forman b*3 − *b*1 *y b*2*.*
3. *Calcula una base B*′ = {*v*1, *v*2, *v*3} *ortonormal.*
4. *Calcula la matriz de Gram con respecto a la nueva base B*′*.*

EJERCICIOS TEMA 11 MATEMA´TICAS I

1 1 0

 

−

Ejercicio 11.6. *Considera el producto escalar con matriz de Gram GB* = 1 2 1 *, siendo la base*

− 

0 1 3

*B* = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)}*.*

1. *Obte´n GB si Bc denota a la base cano´nica de* R3*.*

*c*

1. *Halla, utilizando GB , el producto escalar* (1, 1, 1) · (0, 1, 0)*.*
2. *Calcula el producto escalar* (1, 1, 1) · (0, 1, 0) *utilizando ahora GBc .*
3. *¿Son coherentes los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c)?*

Ejercicio 11.7. *En* R3*, se considera el producto escalar dado por*

⟨(*x*1, *x*2, *x*3), (*y*1, *y*2, *y*3)⟩ = 3*x*1*y*1 + *x*1*y*2 + *x*1*y*3 + *x*2*y*1 + 3*x*2*y*2 + *x*3*y*1 + 3*x*3*y*3.

1. *Halla la matriz de Gram del producto escalar anterior.*
2. *Calcula el mo´dulo del vector v* = (1, 0, 1) *respecto al producto escalar dado.*
3. *Determina unas ecuaciones impl´ıcitas del subespacio ortogonal al vector anterior.*

Ejercicio 11.8. *En* R2[*x* ] *se considera el producto escalar dado por*

*p*(*x* ) · *q*(*x* ) = *p*(0)*q*(0) + *p*(1)*q*(1) + *p*(2)*q*(2).

1. *Calcula la matriz de Gram para la base cano´nica de* R2[*x* ]*.*
2. *Calcula la distancia entre los polinomios x y x* 2*.*
3. *Calcula la norma de los polinomios* 1 + *x y* 1 − *x.*

Ejercicio 11.9. *Se considera, en* R4 *con el producto escalar habitual, el subespacio definido por las ecua- ciones impl´ıcitas*

*x* + *y* + *z* = 0, *y* − *z* + 2*t* = 0.

1. *Calcula la dimensio´n y una base de W .*
2. *Emplea el me´todo de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal a partir de la base hallada en el apartado anterior.*
3. *Calcula la proyeccio´n del vector v* = (1, 0, 0, 0) *sobre W .*

Ejercicio 11.10. *Demuestra que en un espacio eucl´ıdeo V se cumple la ley del paralelogramo*

2

*para todo u*, *v* ∈ *V .*

∥*u* + *v* ∥

+ ∥*u* − *v* ∥2

= 2∥*u*∥2

+ 2∥*v* ∥2

Ejercicio 11.11. *Demuestra que si dos vectores u*, *v de un espacio eucl´ıdeo verifican que*

2

*entonces son ortogonales.*

∥*u*∥

+ ∥*v* ∥2

= ∥*u* + *v* ∥2,

Ejercicio 11.12. *En* R4 *con el producto escalar habitual y dado v* = (1, 2, 3, 1)*, encuentra el vector de W*

*ma´s cercano a v si W es el subespacio de ecuaciones*

*x* + *y* = 0, *x* − *y* + *z* = 0.

∗Ejercicio 11.13. *Si U y V son subespacios de un espacio eucl´ıdeo, demuestra que*

(*U* + *V* )⊥ = *U*⊥ ∩ *V* ⊥.

# Soluciones

Solucio´n 1.1.

1. (*ι*˙ + 3)(2*ι*˙ − 1) =

2*ι*˙2 − *ι*˙ + 6*ι*˙ − 3

−5 + 5*ι*˙ 1 + *ι*˙ =

2

−5 − 5*ι*˙ + 5*ι*˙ − 5*ι*˙

= 0 = 0.

1 − *ι*˙

1 − *ι*˙

1 − *ι*˙

1 + *ι*˙

12 + 12 2

1. (1 + *ι*˙)2 + 2*ι*˙ =

=

=

=

(1 + *ι*˙)(2 − 2*ι*˙)

2 − 2*ι*˙ + 2*ι*˙ − 4*ι*˙2

6 3 − *ι*˙ =

18 + 6*ι*˙

=

9 + 3 *ι*˙.

3 + *ι*˙

*π ι*˙

(c) 2*e* 3

−(*ι*˙+2) = 2

3 + *ι*˙

*π*

cos( 3 ) + *ι*˙ sin( 3 )

3 + *ι*˙

*π*

−(*ι*˙+2) = 2

3 + *ι*˙ 3 − *ι*˙

1 √3

−(*ι*˙+2) = 1+

2 + *ι*˙ 2

32 + 12 5 5

√ √

3*ι*˙−(*ι*˙+2) = = −1+(

3−1)*ι*˙.

4 *π* ( 4 )

(d)

4

=

2*ι*˙.

4

2 *−π*

2

−*π* −*π*

= 2 3*π* = 2 *−π* = 2

cos( 4 ) + *ι*˙ sin( 4 )

2 − *ι*˙ 2

=

2 −

4

√2

= 2

√2 √ √

2 4 2

*π* + *π*

Solucio´n 1.2.

1. *e*1+*ι*˙ = *e*1.

10

1. 2 *π* 3*π*1 *−π* = 2 · 3 · 1 *π*

5

2

5 +*π*− 2

(c) *ι*˙7 = *ι*˙4*ι*˙2*ι*˙ = 1 · (−1) · *ι*˙ = −*ι*˙ = 1 *−π* , donde hemos utilizado que |*ι*˙| = 02 + (−1)2 = 1 y Arg(−*ι*˙) = −*π*

*π* = 6 7*π* .

2

(porque −*ι*˙ esta´ situado en la parte negativa del eje vertical).

2

Solucio´n 1.3. Como *z* 4 = *eπι*˙, tenemos que calcular todas las ra´ıces cuartas de *w* = *eπι*˙.

* Calculamos el mo´dulo y argumento de *w* = *e*0+*πι*˙ = *e*0(cos *π* + *ι*˙ sin *π*) = −1 + 0*ι*˙ = −1:

|*w* | = (−1)2 + 02 = 1 y Arg(*w* ) = *π* (porque *w* esta´ en la parte negativa del eje horizontal).

* Calculamos las ra´ıces cuartas de *w* con la fo´rmula *vk* = 4 |*w* | Arg(*w* )+2*kπ* para *k* = 0, 1, 2, 3:

4

*v*0 = √1 *π* = 1 *π* , *v*1 = √1 *π*+2*π* = 1 3*π* ,

4

4

4

4

4

4

√4 √4

*v*2 =

1 *π*+4*π* = 1 5*π* = 1 *−*3*π* , *v*3 = 1 *π*+6*π* = 1 7*π* = 1 *−π* .

Solucio´n 1.4.

4 4 4

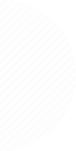
4 4 4

*I*m(*z* )

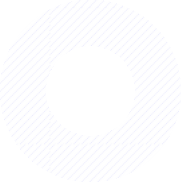
*I*m(*z* )

*I*m(*z* )

*C*



*B*



*R*e(*z* )

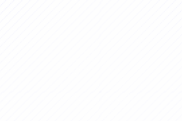
*A*

*R*e(*z* )

*R*e(*z* )

*I*m(*z* )

*I*m(*z* )



*D*

*R*e(*z* ) *R*e(*z* )

*E*

donde hemos calculado las ra´ıces cu´bicas de *w* = −8:

| | −

* Mo´dulo y argumento: *w* = ( 8)2 + 02 = 8 y Arg(*w* ) = *π* (porque *w* esta´ en la parte negativa del eje horizontal).
* Ra´ıces cu´bicas de *w* : *zk* = 3 |*w* | Arg(*w* )+2*kπ* para *k* = 0, 1, 2:

3

*z*0 = √8 *π* = 2 *π* , *z*1 = √8 *π*+2*π* = 2*π*, *z*2 = √8 *π*+4*π* = 2 5*π* = 1 *−π* .

3

3

3

3 3 3

3 3 3

Solucio´n 1.5.

1. Como *z* 3 = −1 + *ι*˙, calculamos las ra´ıces cu´bicas de *w* = −1 + *ι*˙.

– Mo´dulo y argumento: |*w* | = (−1)2 + 12 = √2 y Arg(*w* ) = *π* − arctan 1 = *π* − *π* = 3*π* (porque

*w* esta´ en el segundo cuadrante).

* + Ra´ıces cu´bicas de *w* : *zk* = 3 |*w* | Arg(*w* )+2*kπ* para *k* = 0, 1, 2:

3

1 4 4

*z*0 =

6

q3 √

2 3*π* +0 = √

4

3

2 *π* , *z* =

4

1

q3 √

2 3*π* +2*π* = √

4

6

3

2 11*π* ,

12

*z*2 =

q3 √

2 3*π* +4*π* = √2 19*π* = 1 *−*5*π* .

4 12 12

6

3

1. Hacemos el cambio de variable *t* = *z* + 1 y resolvemos *t*4 = 16 calculando las ra´ıces cuartas de

*w* = 16:

* + Mo´dulo y argumento: *w* = √162 + 02 = 16 y Arg(*w* ) = 0 (porque *w* esta´ en la parte positiva del eje horizontal).

| |

* + Ra´ıces cuartas de *w* : *tk* = 4 |*w* | Arg(*w* )+2*kπ* para *k* = 0, 1, 2, 3:

4

*t*0 = √

4

160 = 20 = 2(cos 0 + *ι*˙ sin 0) = 2,

4

*t*1 = √

4

√4

160+2*π* = 2 *π*

4 2

*π*

= 2(cos

2

+ *ι*˙ sin

*π*

) = 2*ι*˙,

2

*t*2 =

√4

160+4*π* = 2*π* = 2(cos *π* + *ι*˙ sin *π* = 2,

4

−

−*π* −*π*

*t*3 =

160+6*π* = 2 3*π* = 2 *−π* = 2(cos(

4

2

2

) + *ι*˙ sin(

2

2 )) = −2.

Deshacemos el cambio de variable *zk* = *tk* − 1:

*z*0 = *t*0 − 1 = 1, *z*1 = *t*1 − 1 = −1 + 2*ι*˙, *z*2 = *t*2 − 1 = −3, *z*3 = *t*3 − 1 = −1 − 2*ι*˙.

Solucio´n 1.6. Si escribimos *z* = *a* + *bi* , tendremos por un lado

|*z* + 1| = |*a* + *bι*˙ + 1| = |(*a* + 1) + *bι*˙| = (*a* + 1)2 + *b*2,

y por otro,

|*z* − *i* | = |*a* + *bι*˙ − *ι*˙| = |*a* + (*b* − 1)*ι*˙| = *a*2 + (*b* − 1)2.

Ambas expresiones son iguales si, y so´lo si,

(*a* + 1)2 + *b*2 = *a*2 + (*b* − 1)2,

que desarrollando ambos lados, es equivalente a

*a*2 + 2*a* + 1 + *b*2 = *a*2 + *b*2 − 2*b* + 1.

Simplificando, se llega a la condicio´n *a* = *b*. Por tanto, los nu´meros complejos solucio´n de la ecuacio´n dada son de la forma

−

*z* = *a* − *aι*˙, *a* ∈ R.

Se trata de una recta en el plano complejo, mu´ltiplos reales del nu´mero complejo 1 − *ι*˙.

Solucio´n 1.7.

1. En primer lugar, −1 = *ι*˙. Como *ι*˙4 = 1, deducimos que

*ι*˙

( )

En forma polar, 10.

1 100

−*ι*˙

= *ι*˙100 =

*ι*˙4

25

= 125 = 1.

1. En forma polar, 1 *ι*˙ = √2 *−π* y entonces

−

2

√2 *−π*

2

50

= 225

*−*50*π* = 2

25

2

−25*π* = 225*π* .

En forma bino´mica, 225*π* = 225(cos *π* + *ι*˙ sin *π*) = −225.

1. Las formas polares de 2 + 2*ι*˙ y 2 − 2*ι*˙ son √8 *π* y √8− *π* (son conjugados). Por tanto, en forma polar,

se tiene que

√8 *π*

4

20

= 810

20*π* = 8

4

4

5*π* = 810*π* y

10

4

√8 *−π*

4

40

= 820

*−*20*π* = 8

20

4

−5*π* = 820*π* .

Y por lo tanto,

810*π*

=

820*π*

1

810

( )

= 8−100.

0

En forma bino´mica, 8−100 = 8−10(cos 0 + *ι*˙ sin 0) = 8−10 (es un nu´mero real).

Solucio´n 1.8. Para resolver la ecuacio´n *x* 6 2*x* 3+2 = 0, hacemos el cambio de variable *z* = *x* 3 y obtenemos la ecuacio´n de grado dos

−

que tiene como solucio´n:

*z* 2 − 2*z* + 2 = 0,

−*b* ± √*b*2 − 4*ac* 2*a*

*z* =

2 ± √4 − 8 =

2

=

2 ± √−4 =

2

2 ± 2√−1 = 1 *ι*˙,

2

±

es decir, tiene dos ra´ıces complejas: *z*1 = 1 + *ι*˙ y *z*2 = 1 − *ι*˙.

Si tratamos de deshacer el cambio de variable original, debemos resolver la ecuacio´n

*x* 3 = 1 + *ι*˙,

lo que equivale a hallar las ra´ıces cu´bicas de 1 + *ι*˙, cuya expresio´n en polares es √2 *π* . Empleando la

fo´rmula *xk* = 3 |1 + *ι*˙| Arg(1+*ι*˙)+2*kπ* para , las ra´ıces cu´bicas son:

4

*k* = 0, 1, 2

3

*x*1 =

q3 √

*π* √6

4

2

=

3

2 *π* , *x* =

12

2

q3 √

2 *π* +2*π* = √

3

4

6

2 3*π* , *x*3 =

4

q3 √

2 *π* +4*π* = √

3

4

6

2 17*π* = √

12

6

2 *−*7*π* .

12

La ecuacio´n 3 se resuelve de modo similar, teniendo en cuenta que en polares tiene expresio´n

*x* = 1−*ι*˙ 1−*ι*˙

√2 *−π* . Las soluciones son:

4

*x*4 =

3 √2

3

q

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *−π* =  4 | √6 q3 | √ | *−π* +2*π* = | √6 q3 | √ | *−π* +4*π* = | √6  4 | √6 2 *−*  *π*  4 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

2 *−π* , *x*5 = 2

12 4

3

2 7*π* , *x*6 = 2

12 4

3

2 5*π* = .

Solucio´n 1.9. Despejando, se obtiene que

*z* (*ι*˙ + 1) = (*z* − 2)(1 − *ι*˙) ⇒ *z* (*ι*˙ + 1) = *z* (1 − *ι*˙) + (−2 + 2*ι*˙),

y agrupando y despejando de nuevo *z* llegamos a

*z* (*ι*˙ + 1) − *z* (1 − *ι*˙) = −2 + 2*ι*˙

⇒ 2*ι*˙*z* = −2 + 2*ι*˙

⇒ *z* = −2 + 2*ι*˙ = −1 + *ι*˙ = 1 + *ι*˙.

Por tanto, el nu´mero complejo pedido es *z* 2 + *ι*˙ = (1 + *ι*˙)2 − *ι*˙ = 1 + 2*ι*˙ + *ι*˙2 − *ι*˙ = *ι*˙, cuya forma polar es 1 *π* .

2

2*ι*˙

*ι*˙

Solucio´n 1.10. Sea *p*(*x* ) = *anxn* + *an*−1*xn*−1 + ... + *a*1*x* + *a*0 un polinomio con coeficientes reales, es decir,

*ai* ∈ R. Si *z* es ra´ız de *p*(*x* ), esto quiere decir que *p*(*z* ) = 0, y por tanto

*anzn* + *an*−1*zn*−1 + ... + *a*1*z* + *a*0 = 0.

Si conjugamos ambos lados de la ecuacio´n y aplicamos las propiedades de la conjugacio´n de nu´meros complejos respecto a la suma y al producto, se tiene que

0 = *anzn* + *an*−1*zn*−1 + ... + *a*1*z* + *a*0 = *anzn* + *an*−1*zn*−1 + ... + *a*1*z* + *a*0 =

= *an zn* + *an*−1 *zn*−1 + ... + *a*1 *z* + *a*0 =

= *an z n* + *an*−1 *z n*−1 + ... + *a*1 *z* + *a*0 =

= *anz n* + *an*−1*z n*−1 + ... + *a*1*z* + *a*0 = *p*(*z* ),

donde hemos aplicado tambie´n que *ai* = *ai* por ser los coeficientes nu´meros reales.

Solucio´n 2.1.

√*x* − √*a*

(a) l´ım

*x*

2 =

i 0 l

√*x* − √*a* √*x* + √*a*

*x* − *a*

→*a*+ − *a*) 0 →*a*+ (*x* − *a*) *x* + *a*

(*x*

= l´ım

*x*

2

√

√

=

→*a*+ (*x* − *a*) ( *x* + *a*)

1 i 1 l

= l´ım

*x*

2 √

√

= l´ım

*x* →*a*+ (*x* −

*a*)(√*x* +

√*a*) =

0+ · 2√*a*

= +∞.

(b) l´ım

√*x* − *a* = i 0 l = l´ım (*x* − *a*) 1 −1 = l´ım

√*x* − *a* = √*a*+ − *a* = √0+ = 0.

*x* →*a*+

2

*x* − *a*

*x* − *a*

√

0

i 0 l

=

*x* →*a*+

1− 1

= l´ım (*x* − *a*)

*x* →*a*+

1

2 = l´ım

√ = √ = √ =

1 1 1

+ = +∞.

*x* →*a*+

(c) l´ım

*x* − *a* 0 *x* →*a*+

*x* →*a*+

*x* − *a a*+ − *a* 0+ 0

1. l´ım

*x* →+∞

*x* 2 + *a* − *ax*

= i + ∞ − ∞l

= l´ım

*x* →+∞

√*x* 2 + *a ax* √*x* 2 + *a* + *ax*

=

√

−

*x* 2 + *a* + *ax*

*x* 2 + *a* − *a*2*x* 2 (1 − *a*2)*x* 2 + *a*

= l´ım

*x* →+∞

Si *a* ̸= 1:

√*x* 2

+ *a* + *ax*

= l´ım

*x* →+∞

√*x* 2

.

+ *a* + *ax*

l´ım

*x* →+∞

*x* 2 + *a* − *ax*

= l´ım

*x* →+∞

t

(1 *a*2)*x* 2 + *a*

=

√

−

*x* 2 + *a* + *ax*

∞ = l´ım

+∞ *x* →+∞

i

l

(1 *a*2)*x* 2 + *a*

=

√

−

*x* 2 + *a* + *ax*

= l´ım

*x*

*x* →+∞

Si *a* = 1:

−

(1 − *a*2)*x* + *a*

*x* 2

+∞ si *a* ∈ [0, 1),

−∞ si *a* ∈ (1, +∞).

l´ım

*x* →+∞

*x* 2 + 1 *x* = l´ım

1 + *a* + *a* =

*x* →+∞

1

√*x* 2 + 1 + *x*

= 1 = 0.

+∞

i

l

Solucio´n 2.2.

1. l´ım *f* (*x* ) = l´ım *x* sin *π* = 0 por el Criterio del Sa´ndwich ya que l´ım *x* = 0 y sin *π* ≤ 1.

*x* →0

*x* →0

*x*

*x* →0

*x*

l´ım *g* (*x* ) = l´ım

=

−1*/x*

⇒

21*/x* + 5−1*/x*

1*/x*

i 21*/*0 + 5−1*/*0 l

calculamos los l´ımites laterales:

1*/*0

−1*/*0

*x* →0

*x* →0 3

+ 4 3

21*/x* + 5−1*/x*

3

+ 4

+ 4

21*/*0+ + 51*/*0*−*

i 2+∞ + 5−∞ l

i+∞ + 0 l

l´ım

→0+

*x*

*g* (*x* ) = l´ım

*x*

→0+ 3

1*/x*

=

−1*/x*

+ 4

1*/*0+

1*/*0*−*

= = =

3+∞ + 4−∞ +∞

3

2

+ 0

2 1*/x*

+ 15

−1*/x*

 2 1*/*0+

+ 15

1*/*0*−* 

3 −∞

+ 15

−∞

0 + 0

= l´ım

3

*x* →0+

1 + 12−1*/x* = 

1 + 121*/*0*−*  =

1 + 12−∞

= = 0.

1 + 0

l´ım

*x* →0*−*

*g* (*x* ) = l´ım

*x* →0*−*

21*/x* + 5−1*/x*

31*/x* + 4−1*/x* =

21*/*0*−* + 51*/*0+

31*/*0*−* + 41*/*0+



2−∞ + 5+∞

=

3−∞ + 4+∞

= 0 + ∞ =

0 + ∞

i l

1*/x*

i l

5 −1*/x*

 1*/*0*−*

5 1*/*0+ 

−∞ 5 +∞

8 +

121*/*0*−* + 1

= 4

= l´ım 4

*x* →0*−*

121*/x* + 1

8 + 8 +

 =

12−∞ + 1

0 + 1

4

= 0 + ∞ = +∞.

Como los l´ımites laterales no coinciden, no existe l´ım *g* (*x* ).

*x* →0



 3*x* 2

1. l´ım *h*(*x* ) = l´ım (3*x* 2 + 1) 1

*x* 2

*x* →0

*x* →0

*x* →0

1

i

l

= 1 0+ =

i1+∞l

= l´ım 

1

1 + 1

3*x* 2 *x* 2



1

= *e*3.

3*x* 2

Solucio´n 2.3.

l´ım ( 1 −

1 = i

∞ − ∞l

= l´ım

*x* − 1 − log *x*

= i 0 l

= l´ım

1 1

=

*x*

−

*x* →1

log *x*

*x* − 1

*x* →1 (*x* − 1) log *x*

0 *x* →1 1 (*x* − 1) + log *x*

= l´ım *x* − 1 = i 0 l = l´ım 1 = 1 .

*x*

)

*x* →1 *x* − 1 + *x* log *x* 0 *x* →1 1 + log *x* + 1 2

1. l´ım (1 + *x* sin *x* )2*/x*2 = i1∞l = l´ım  1 + 1

1

*x* sin *x*

2*x* sin *x x* 2





= l´ım *e*(1+*x* sin *x* −1) 2

l´ım*x →*0 (*x* sin *x* ) 2

= *e x* 2 .

*x* →0

*x* 2

*x* →0

1

*x* sin *x*

*x* →0

Calculamos el l´ımite del exponente utilizando que l´ım sin *x* = 1:

*x* →0 *x*

l´ım

2*x* sin *x*

2 = l´ım

2 sin *x*

= 2.

Por tanto, l´ım (1 + *x* sin *x* )2*/x*2 = *e*2.

*x* →0

*x* − *a*

*x* →0 *x*

*x* →0 *x*

1. l´ım √3

= i 0 l

= l´ım (*x* − *a*)

1−1*/*3

= l´ım (*x* − *a*)

2*/*3

= (*a* − *a*)

2*/*3

= 0.

*x* →*a*

*x* − *a*

0 *x* →*a*

*x* →*a*

1. Si empleamos la identidad *x* 3 − *y* 3 = (*x* − *y* )(*x* 2 + *xy* + *y* 2) (similar a la habitualmente utilizada

*x* 2 − *y* 2 = (*x* − *y* )(*x* + *y* )), y la aplicamos con *x* 1*/*3 y *a*1*/*3 como te´rminos, se obtiene que

*x* − *a*

√3

*x* − *a*

(*x* 1*/*3 − *a*1*/*3)(*x* 2*/*3 + *x* 1*/*3*a*1*/*3 + *a*2*/*3)

l´ım

*x* →*a*

*x* − √3 *a*

= l´ım

*x* →*a x*

1*/*3

1*/*3 = l´ım

− *a x* →*a*

*x* 1*/*3

− *a*1*/*3 =

= l´ım (*x* 2*/*3 + *x* 1*/*3*a*1*/*3 + *a*2*/*3) = 3*a*2*/*3.

*x* →*a*

Solucio´n 3.1.

1. La funcio´n es continua en todo su dominio (Dom(*f* ) = [−1, 1]) porque es una ra´ız cuadrada de un polinomio (que siempre es positivo en [−1, 1]).
2. La funcio´n *g* es continua en (−1, 1) por estar definida como la ra´ız cuadrada de un polinomio (que siempre es positivo en (−1, 1)) y tambie´n es continua en (−∞, −1) ∪ (1, +∞) por ser constante.

La funcio´n es continua en *x* = −1 si *f* (−1) = *x* l´ım 1 *f* (*x* ). Calculamos *f* (−1) = 1 − (−1) = 0 y

2

→−

l´ım

*x* →−1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →−1*−*

0 = 0 y l´ım

*x* →−1+

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →−1+

1 − *x* 2 = 1 − (−1)2 = 0,

es decir, *f* (−1) = 0 = *x* l´ım 1 *f* (*x* ) y deducimos que *f* es continua en *x* = −1.

´ →− √

2

La funcion es continua en *x* = 1 si *f* (1) = l´ım *f* (*x* ). Calculamos *f* (1) =

*x* →1

− −

1 − 1

= 0 y

l´ım

*x* →1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →1*−*

1 *x* 2 = 1 12 = 0 y l´ım

*x* →1+

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →1+

0 = 0,

es decir, *f* (1) = 0 = l´ım *f* (*x* ) y deducimos que *f* es continua en *x* = 1.

*x* →1

1. La funcio´n *g* es continua en (−1, 1) por estar definida como la ra´ız cuadrada de un polinomio (que siempre es positivo en (−1, 1)) y tambie´n es continua en (−∞, −1) ∪ (1, +∞) por ser un polinomio.

La funcio´n es continua en *x* = −1 si *f* (−1) = *x* l´ım 1 *f* (*x* ). Calculamos *f* (−1) = 1 − (−1) = 0 y

2

→−

l´ım

*x* →−1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →−1*−*

(*x* − 1) = −2 y *x* l´ım +

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →−1+

1 − *x* 2 = 1 − (−1)2 = 0.

→−1

Como los l´ımites laterales no coinciden, deducimos que no existe l´ım *f* (*x* ) y, por lo tanto, *f* no es

→−

continua en *x* = −1. Adema´s, como

*x* 1

*x* l´ım *± f* (*x* ) ∈ R, deducimos que *f* tiene una discontinuidad de

salto finito en

*x* = −1.

→−1

√

La funcio´n es continua en *x* = 1 si *f* (1) = l´ım *f* (*x* ). Calculamos *f* (1) =

*x* →1

− −

1 − 12 = 0 y

l´ım

*x* →1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →1*−*

1 *x* 2 = 1 12 = 0 y l´ım

*x* →1+

*f* (*x* ) = l´ım (*x* 1) = 1 1 = 0,

→1+

*x* − −

es decir, *f* (1) = 0 = l´ım *f* (*x* ) y deducimos que *f* es continua en *x* = 1.

*x* →1

Solucio´n 3.2. Para que *f* sea continua en *x* = 2 necesitamos que l´ım *f* (*x* ) = *f* (2) =  2*α*

= *α* . Calculamos

los l´ımites laterales:

l´ım

*f* (*x* ) = l´ım

*αx α*2

=

*x* →2

*α*

= ,

0+4 2

*x* →2*−*

*x* →2*−* |*x* − 2| + 4 |2 − 2| + 4 2

l´ım *f* (*x* ) = l´ım (*x* − 2) sin *πx*  = 0,

*x* →2+

*x* →2+

*x* −2

donde hemos aplicado el Criterio del Sa´ndwich (porque l´ım (*x* − 2) = 0 y sin *πx* ≤ 1). Deducimos que

*f* es continua en *x* = 2 si *α* = 0, es decir, si *α* = 0.

2

*x* →2

*x* −2

Para que *f* sea continua en *x* = 10 necesitamos que l´ım *f* (*x* ) = *f* (10) = 8 sin 5*π* = 8 sin *π* = 4√2.

Calculamos los l´ımites laterales:

l´ım *f* (*x* ) = l´ım (*x* − 2) sin *πx* = 8 sin 10*π* = 4√2,

*x* →10

4

4

*x* →10*−*

*x* →10*−*

*x* −2

8

l´ım

*f* (*x* ) = l´ım

*h*(*x* − 10) − 10 = *h*(0) − 10 = *β* − 10 .

*x* →10+

*x* →10+

10*x* + 10

1010 + 10

1010 + 10

Deducimos que *f* es continua en *x* = 10 si *β*−10 = 4√2, es decir, si *β* = 10 + 4√2(1010 − 10).

1010 +10

Solucio´n 3.3. Definimos la funcio´n *f* (*x* ) = 2*x* − 3 − sin *x* , que es continua en R, en particular en [0, *π*]. Adema´s, como *f* (0) = 0 − 3 −sin 0 = −3 *<* 0 y *f* (*π*) = 2*π* − 3 −sin *π* = 2*π* − 3 *>* 0, por el teorema de Bolzano deducimos que existe *ξ* ∈ (0, *π*) tal que *f* (*ξ*) = 0, es decir, sin *ξ* = 2*ξ* − 3.

Solucio´n 3.4.

1. *f* (0) = √02 + 4 = 2 y *f* (2) = 2 + 6 = 8 = −8.

22 − 4 · 2 + 3 −1

1. Si *x* ∈ (−∞, 0] ⇒ *f* (*x* ) = 0 ⇒ √*x* 2 + 4 = 0 ⇒ *x* 2 = −4 ⇒No hay solucio´n.

Si *x* ∈ (0, +∞) ⇒ *f* (*x* ) = 0 ⇒ *x* + 6 = 0 ⇒ *x* + 6 = 0 ⇒ *x* = −6 ̸∈ (0, +∞) ⇒No hay solucio´n.

*x* 2 − 4*x* + 3

1. Para poder utilizar el Teorema de Bolzano la funcio´n *f* tiene que ser continua en el intervalo [0, 2], pero esto no es cierto porque en *x* = 1 la funcio´n tiene una discontinuidad de salto infinito ya que

l´ım

*f* (*x* ) = l´ım

*x* + 6 = i 7 l = −∞.

*x* →1+

*x* →1+ (*x* − 1)(*x* − 3)

0+ · (−2)

Solucio´n 3.5. Definimos la funcio´n *g* (*x* ) = *f* (*x* ) − *x* , que es continua en el intervalo [0, 1].

Si *f* (0) ̸= 0 y *f* (1) ̸= 1, entonces *g* (0) = *f* (0) − 0 *>* 0 y *g* (1) = *f* (1) − 1 *<* 0 y por el teorema de Bolzano deducimos que existe *ξ* ∈ (0, 1) ⊂ [0, 1] tal que *g* (*ξ*) = 0, es decir, *f* (*ξ*) = *ξ*.

Si *f* (0) = 0 o *f* (1) = 1, la solucio´n de la ecuacio´n ser´ıa *x* = 0 o *x* = 1, respectivamente.

Solucio´n 3.6. Si definimos la funcio´n

*f* (*x* ) = *x* 2 − cos *x* + *x* sin *x* ,

*f* (*x* ) es una funcio´n continua en todo R por ser suma y producto de funciones continuas. Es fa´cil verificar adema´s que *f* (0) = −1 *<* 0 y *f* (*π*) = *π*2 + 1 *>* 0, por lo que el Teorema de Bolzano permite afirmar que existe *x*1 ∈ (0, *π*) tal que *f* (*x*1) = 0, esto es, una solucio´n real a la ecuacio´n dada.

Por otro lado, tomando ahora *x* = *π*, *f* ( *π*) = *π*2 + 1 *>* 0, as´ı que tambie´n podemos aplicar de nuevo el teorema de Bolzano al intervalo [ *π*, 0] y afirmar que existe un segundo valor *x*2 ( *π*, 0) tal que *f* (*x*2) = 0, lo que proporciona una segunda solucio´n real.

− ∈ −

− −

Solucio´n 3.7. Consideramos la funcio´n

*f* (*x* ) = *x* 6 − 6*x* − 1,

que es continua y derivable en todo R, ya que es una funcio´n polino´mica. Adema´s, *f* (*x* ) cumple que *f* (0) = 1 *<* 0, *f* ( 1) = 6 *>* 0 y *f* (2) = 26 12 1 = 51 *>* 0, luego podemos aplicar el teorema de Bolzano a los intervalos [ 1, 0] y [0, 2] para garantizar que existen dos puntos donde *f* se anula, *x*1 y *x*2, pertenecientes a los intervalos ( 1, 0) y (0, 2), respectivamente. Los puntos *x*1 y *x*2 proporcionan dos soluciones reales de la ecuacio´n dada.

−

−

− − − −

Vamos ahora a comprobar que no existen ma´s soluciones reales: si analizamos el signo de *f* ′(*x* ),

*f* ′(*x* ) = 6*x* 5 − 6 = 6(*x* 5 − 1),

se tiene que *f* (*x* ) es decreciente en ( , 1) y creciente en (1, + ). Una funcio´n as´ı tiene como ma´ximo dos ra´ıces reales: dado que es estrictamente mono´tona en ( , 1) y en (1, + ), so´lo puede tener una ra´ız cada uno de los intervalos (tambie´n se puede comprobar utilizando el Teorema de Rolle).

−∞ ∞

−∞ ∞

Solucio´n 3.8. Como la funcio´n *f* (*x* ) es una funcio´n racional (cociente de dos polinomios), para que sea continua en todo R sera´ necesario que *x* 2 2*ax* +5*a* = 0 para todo *x* R, ya que en caso contrario existira´ un *x*0 R en el que el denominador se anule. En ese caso, la funcio´n no estara´ definida en *x*0 y no tendra´ sentido entonces hablar de su continuidad en ese punto (y no podremos ni mucho menos decir que es continua en todo R).

∈

− ̸ ∈

Si calculamos las ra´ıces de *x* 2 − 2*ax* + 5*a*, se tiene que

2*a* √4*a*2 20*a*

± −

*x* =

2

= 2*a* ± 4*a*(*a* − 5).

2

La funcio´n no tendra´ ra´ıces reales siempre que 4*a*(*a* − 5) *<* 0, lo que sucede solamente si, y so´lo si,

*a* ∈ (0, 5).

Por tanto, *f* (*x* ) es continua en todo R si *a* ∈ (0, 5).

Solucio´n 3.9. Para que la funcio´n sea continua en 0 debera´ suceder que

l´ım

*x* →0*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →0+

*f* (*x* ) = *f* (0),

y dado que *f* (0) = *c*, el u´nico valor de *c* que hara´ continua la funcio´n sera el valor del l´ımite, que debe existir y ser u´nico. Calculando el valor del l´ımite en *x* = 0, se tiene que

l´ım *x* cot *x* = l´ım *x* cos *x* = i 0 l = l´ım cos *x* − *x* sin *x* = 1

*x* →0

*x* →0

sin *x*

0

*x* →0

cos *x*

Se deduce que *c* = 1 es el u´nico valor de *c* que hace la funcio´n continua (en el resto de casos posee una discontinuidad de tipo evitable).

Solucio´n 3.10. Si calculamos el l´ımite de *f* (*x* ) por la izquierda, vemos que

*x* 2

l´ım

*x* →0*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →0*−* 4 + sin

2 1 = 0,

*x*

puesto que 0 ≤ sin2 1 ≤ 1, de donde se deduce que

*x*

*x* 2 *x* 2 *x* 2

5 ≤ 4 + sin2 1 ≤ 4 ,

*x*

y como l´ım *x*2 = l´ım

5

*x* 2 = 0, se tiene que el l´ımite lateral por la izquierda es cero.

*x* →0*− x* →0*−*

4

Si analizamos el l´ımite por la derecha, y recordamos que l´ım 1 = +∞, tenemos que

*x* →0+ *x*

31*/x* + 21*/x* i∞l ( 3 )1*/x* + ( 2 )1*/x*

l´ım

*x* →0+

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →0+

=

= l´ım

*x* →0+

4

4

=

= 0,

41*/x*

∞

1

0 + 0

1

de donde se deduce que existe l´ım *f* (*x* ) para cualquier valor de *c* ∈ R, y su valor es 0. El u´nico valor que

hace a

continua es

*x* →0 .

*f* (*x* )

*c* = 0, ya que de este modo l´ım *f* (*x* ) = *c* = 0

*x* →0

Solucio´n 4.1.

l´ım

*e*−1*/x*

= l´ım

1

*x* =

*x* 2

i+∞l

= l´ım

−1

*x* 2 = l´ım

1 = i 1

l = 0.

*x* →0+ *x*

*x* →0+ *e*1*/x*

+∞ *x* →0+ −1 *e*1*/x*

*x* →0+ *e*1*/x* +∞

Solucio´n 4.2. Como 0 = *f* (2) = 4*a* + 2*b* y *f* ′(2) = 4*a* + *b* (ya que *f* ′(*x* ) = 2*ax* + *b*), al sustituir en la ecuacio´n de la recta tangente *y f* (2) = *f* ′(2)(*x* 2) *y* 0 = (4*a* +*b*)(*x* 2) deducimos que 4*a* +*b* = 1 y resolvemos el sistema

− − ⇒ − −

t

⇒ t

Solucio´n 4.3.

1. Existencia de solucio´n.

4*a* + 2*b* = 0,

4*a* + *b* = 1,

*a* = 1,

*b* = −3.

La funcio´n *f* (*x* ) = *xex*2 −1 + *λx* es continua en [−*α*, *α*] y adema´s, como *f* (−*α*) = −*αeα*2 −1 − *αλ* y *f* ′(*α*) = *αeα*2 −1 + *αλ*, es decir, *f* (−*α*)*f* (*α*) = −*α*2(*eα*2 −1 + *λ*)2 *<* 0. Por lo tanto, el teorema de Bolzano prueba que existe *ξ* ∈ (−*α*, *α*) tal que *f* (*ξ*) = 0.

1. Unicidad de solucio´n.

Suponemos, por reduccio´n al absurdo, que existen *ξ*1 *< ξ*2 con *ξ*1, *ξ*2 [ *α*, *α*] tales que *f* (*ξ*1) = *f* (*ξ*2). Como *f* es continua en [*ξ*1, *ξ*2] y derivable en (*ξ*1, *ξ*2), deducimos que existe *z* (*ξ*1, *ξ*2) tal que *f* ′(*z* ) = 0. Es decir, 0 = *f* ′(*z* ) = *ez*2 −1 +2*z* 2*ez*2 −1 +*λ* pero esto es imposible porque (1+2*z* 2)*ez*2 −1 +*λ >* 0 y concluimos que la solucio´n es u´nica.

∈

∈ −

Solucio´n 4.4.

1. *f* (−4) = 3 (1 − 4)2 = √3 9 y *f* (2) = 3 (1 + 2)2 = √3 9.

1. Calculamos *f* ′(*x* ) = 2 √3 1 y si *f* ′(*x* ) = 0, entonces 2 = 0 y deducimos que la ecuacio´n no tiene

solucio´n.

3 1+*x*

1. No se contradice el Teorema de Rolle porque la funcio´n *f* (*x* ) no es derivable en *x* = −1 ∈ (−4, 2):

i l

l´ım

*x* →−1+

*f* (*x* ) − *f* (−1)

*x* − (−1)

= l´ım

*x* →−1+

(1 + *x* )2*/*3 − 0

*x* + 1

= l´ım

*x* →−1+

1 (1 + *x* )1*/*3 =

1

0+ = +∞.

Solucio´n 5.1. Definimos la funcio´n *f* (*x* ) = *ex* sin(2*x* ) y calcularemos el polinomio de Taylor *P*2,0(*x* ):

*f* (*x* ) = *ex* sin(2*x* ) *f* (0) = 0,

*f* ′(*x* ) = *ex* (sin(2*x* ) + 2 cos(2*x* )) *f* ′(0) = 2,

*f* ′′(*x* ) = *ex* (−3 sin(2*x* ) + 4 cos(2*x* )) *f* ′′(0) = 4.

Entonces, el polinomio de Taylor queda:

*P*2,0(*x* ) = *f* (0) + *f* ′(0)(*x* − 0) + *f*

′′(0)

(*x* 0)2

= 0 + 2*x* +

−

2

4*x* 2

= 2*x* + 2*x* 2

2

= 2*x* (1 + *x* ).

Una aproximacio´n a *e*0,1 sin(0,2) es *f* (0,1) ≈ *P*2,0(0,1) = 2 · 0,1 · (1 + 0,1) = 0,22. Acotamos el error cometido sabiendo que *ξ* ∈ (0, 0,1):

*f* ′′′(*ξ*)

3 0,13 *ξ*

*R* (0,1) = (0,1 − 0) =

2,0

*e*

3!

6 (−11 sin(2*ξ*) − 2 cos(2*ξ*)) ≤

≤ 6 *e* (11| sin(2*ξ*)| + 2| cos(2*ξ*)|) ≤ 6 *e* (11 + 2) ≤ 6 0,1 *e* ≤ 3 6 0,1

0,13

*ξ*

0,13

*ξ*

13

3

13

3

13

= 2 0,001 =

Solucio´n 5.2.

= 0,0065.

1. Dom(*f* ) = (0, 2) ∪ (2, +∞).
2. Puntos de corte con los ejes: no hay punto de corte con el eje de ordenadas porque 0 ̸∈ Dom(*f* ) y

*x*

*e*

tampoco hay punto de corte con el eje de abscisas porque la ecuacio´n √*x* (*x* 2) = 0 ⇒ *e*

−

*x*

tiene solucio´n.

1. As´ıntotas horizontales:

= 0 no

l´ım

*x*

*ex*

*f* (*x* ) = l´ım

√

*x*

= i+∞l

= l´ım

*x* √1

*ex*

= l´ım

√

*x*

2√*xex*

= i+∞l =

→+∞

*x*

→+∞

*x* (*x* − 2) +∞

→+∞ 2

*x* (*x* − 2) + *x*

→+∞ 3*x* − 2 +∞

= l´ım

*x* →+∞

√1 *ex* + 2√*xex* 3

= l´ım

*x* →+∞

1 + 2√*x*

3

*ex* =

0 + ∞

3

· (+∞)l

= +∞.

No hay as´ıntota horizontal en +∞ porque *x* l´ım *f* (*x* ) ̸∈ R y tampoco en −∞ porque el dominio esta´

√

i

*x*

acotado por la izquierda.

1. As´ıntotas verticales:

l´ım

*x* →0+

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →0+

→+∞

*ex*

√*x* (*x* − 2) =

1

0+ · (−2)

i l

i

l

= −∞,

l´ım

*x* →2*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →2*−*

*ex*

√*x* (*x* − 2) =

*e*2

√2 · 0−

i

l

= −∞,

l´ım

*x* →2+

*f* (*x* ) = l´ım

*x* →2+

*ex*

√*x* (*x* − 2) =

*e*2

√2 · 0+

= +∞.

Las rectas *x* = 0 y *x* = 2 son as´ıntotas verticales de *f* .

1. Monoton´ıa: calculamos la derivada de *f* .

*f* ′(*x* ) =

*ex* √*x* (*x* − 2) − *ex* √1

(*x* − 2) + √*x*

= *ex*

2*x* (*x* − 2) − (*x* − 2) − 2*x*

= *ex*

2*x* 2 7*x* + 2

√ .

−

*x* (*x* − 2)2

2

*x*

Si f *x*1 = 7−√33 *<* 7 *<* 2,

√

*f* ′(*x* ) = 0 ⇒ 2*x* 2 − 7*x* + 2 = 0 ⇒

√4

4 √

*>*

2 *xx* (*x* − 2)2

2 *xx* (*x* − 2)2

Estudiamos el signo de *f* ′(*x* ):

*x*2 = 7+

4

33 7+

4

25 *>* 2.

* Si *x* ∈ (0, *x*1): *f* ′(*x* ) *>* 0 y la funcio´n es creciente.
* Si *x* ∈ (*x*1, 2) ∪ (2, *x*2): *f* ′(*x* ) *<* 0 y la funcio´n es decreciente.
* Si *x* ∈ (*x*2, +∞): *f* ′(*x* ) *>* 0 y la funcio´n es creciente.

1. Extremos relativos: de la monoton´ıa deducimos que *f* tiene un ma´ximo local en *x* = *x*1 y un m´ınimo local en *x* = *x*2.
2. Representacio´n gra´fica:

*y*

*x*

Solucio´n 5.3. Si tomamos el polinomio de grado *n* en el origen de la funcio´n exponencial *f* (*x* ) = *ex* ,

*x* 2 *x* 3 *xn*

*Pn*,0 = 1 + *x* + 2 + 3! + · · · + *n*! ,

una aproximacio´n del nu´mero pedido, √3 *e*2 = *f* 2 , sera´ *P*

3

*n*,0

2 :

2 22 2*n*

3

*Pn*,0 = 1 + 3 + 2 · 32 + · · · + *n*! · 3*n* .

Dado que para el error cometido sabemos que *ξ* ∈ 0, 2 , tomando la fo´rmula del error buscamos un

3

*n* N tal que

∈

=

2

*f n*+1(*ξ*) 2

*n*+1

*eξ* 2*n*+1 −2

*Rn*,0

3 (*n* + 1)!

3 − 0

= (*n* + 1)!3*n*+1 ≤ 10 .

Dado que *eξ < e*1 = *e <* 3, se tendra´ que

*R*  2 *<*

3 2*n*+1

=

·

2*n*+1

.

Tomando *n* = 4, se obtiene que

*n*,0 3

25

(*n* + 1)!3*n*+1

4

(*n* + 1)!3*n*

−2

5!34 = 1215 ≈ 0, 003292 *<* 10 ,

siendo *n* = 4 el primer entero para el que se cumple el error es menor que 10−2 (para *n* = 3 se obtiene

2 0, 0247). Por tanto, sustituyendo en el polinomio de Taylor de grado 4, la aproximacio´n que cumple lo pedido es

81

≈

√3 *e*2 ≈ 1 + 2 + 2 + 4 + 2 .

3

9

81

243

Solucio´n 5.4. Si calculamos las derivadas de la funcio´n secante, vemos que:

*f* ′(*x* ) = sin *x*

cos2 *x*

= tan *x* sec *x* ,

*f* ′′(*x* ) = sec3 *x* + sec *x* tan2 *x* ,

y como sec( *π* ) = √2, tan( *π* ) = 1, deducimos que *f* ( *π* ) = √2, *f* ′( *π* ) = √2 y *f* ′′( *π* ) = 2√2 + √2 = 3√2.

4 4 4 4 4

Por tanto, el polinomio de Taylor en *π* vendra´ dado por

4

*π* 2

4

4

4

2

4

*P*2, *π* (*x* ) = *f*

4

4

*π* + *f* ′ *π*

*x* − *π*

+ *f* ′′

*π* (*x* − 4 )

4

2

= √2 +

√2(*x* − *π* ) + √3 (*x* − *π* )2.

Solucio´n 5.5.

1. Dom(*f* ) = R+ \ {1} = (0, 1) ∪ (1, +∞).
2. Puntos de corte con los ejes: no hay punto de corte con el eje de ordenadas porque 0 ̸∈ Dom(*f* )

*x* ⇒

y tampoco hay punto de corte con el eje de abscisas porque la ecuacio´n = 0 *x* = 0 tiene

log *x*

como u´nica solucio´n *x* = 0, que no pertenece al dominio.

1. As´ıntotas horizontales:

l´ım

*x* →+∞

*f* (*x* ) = l´ım

*x* = i∞l = l´ım

1

= l´ım

*x* →∞

*x*

*x* = +∞,

luego no hay as´ıntota horizontal en + y tampoco en porque el dominio esta´ acotado por la izquierda.

∞ −∞

*x* →+∞ log *x*

∞

*x* →∞ 1

1. As´ıntota oblicua:

l´ım

*f* (*x* )

= l´ım

1

= 0,

*x* →+∞ *x x* →+∞ log *x*

luego tampoco hay as´ıntota oblicua en +∞.

1. As´ıntotas verticales:

l´ım

*x* →1*−*

*f* (*x* ) = l´ım

*x* = i 1 l = −∞,

l´ım *f* (*x* ) = l´ım

*x* →1*−* log *x*

0−

*x* = i 1 l = +∞

*x* →1+

La recta *x* = 1 es as´ıntota vertical de *f* .

1. Monoton´ıa: calculamos *f* ′(*x* ) = log *x* − 1 .

(log *x* )2

*x* →1+ log *x* 0+

Si *f* ′(*x* ) = 0 log *x* 1 = 0 log *x* = 1 *x* = *e*, por lo que la funcio´n, que es continua y derivable en su dominio por ser cociente de funciones derivables, tiene un u´nico punto cr´ıtico.

⇒ − ⇒ ⇒

Estudiamos el signo de *f* ′(*x* ):

* Si *x* ∈ (0, 1) ∪ (1, *e*): *f* ′(*x* ) *<* 0 y la funcio´n es decreciente.
* Si *x* ∈ (*e*, +∞): *f* ′(*x* ) *>* 0 y la funcio´n es creciente.

1. Extremos relativos: de la monoton´ıa deducimos que *f* tiene un m´ınimo local en *x* = *e*. Representacio´n gra´fica:

*y*

*x*

Solucio´n 5.6. Aplicando la definicio´n de valor absoluto, se tendra´ que

*f* (*x* ) = t

1 − |*x* | si 1 − |*x* | *>* 0,

−1 + |*x* | si 1 − |*x* | ≤ 0,

Puesto que 1 *x >* 0 si y so´lo si 1 *< x <* 1, podemos expandir la funcio´n anterior y considerar la expresio´n alternativa

− | | −



− | | ≤ −

*f* (*x* ) =

1 + *x* si *x* 1,

1 *x* si 1 *< x <* 1,

− | | −

 −1 + |*x* | si *x* ≥ 1.

Finalmente, analizando *x* en cada uno de los intervalos dados, llegamos a la siguiente u´ltima expresio´n de *f* (*x* ) como funcio´n a trozos, que no involucra valores absolutos:

| |

**** −1 − *x* si *x* ≤ −1,

Teniendo esto en cuenta:

1. Dom(*f* ) = R.

*f* (*x* ) =

****

1 + *x* si −1 *< x* ≤ 0, 1 − *x* si 0 *< x <* 1,

−1 + *x* si *x* ≥ 1.

1. Puntos de corte con los ejes: se tiene que 1 *x* = 0 si y so´lo si 1 *x* = 0, lo que sucede si y so´lo si *x* = 1, esto es, la funcio´n corta al eje de abscisas cuando *x* = 1 (puntos ( 1, 0) y (1, 0)). En cuanto al eje de ordenadas, se tiene que *f* (0) = 1, luego corta a dicho eje en el (0, 1).

| | ± −

| − | || − | |

1. Continuidad: la funcio´n valor absoluto *g* (*x* ) = *x* es una funcio´n continua en todo R, y la funcio´n

| |

*f* (*x* ) dada es composicio´n y suma de funciones continuas, luego es continua en todo R.

1. Derivabilidad: analizando la descripcio´n de *f* (*x* ) como funcio´n a trozos, es una funcio´n lineal en cada uno de ellos, luego es derivable en ( , 1) ( 1, 0) (0, 1) (1, ) (coincide con una funcio´n lineal, por tanto derivable, en un entorno abierto). En esos intervalos, se tiene que

−∞ − ∪ − ∪ ∪ ∞

**** −1 si *x <* −1,

Dado que

*f* ′(*x* ) =

1 si 1 *< x <* 0,

1 si 0 *< x <* 1,

**** −

−

1 si *x >* 1.

*x* l´ım *− f* ′(*x* ) = *x* l´ım *−* −1 ̸= 1 = *x* l´ım + 1 = *x* l´ım + *f* ′(*x* ),

→−1

→−1

→−1

→−1

la funcio´n no es derivable en *x* = 1. Un ca´lculo ana´logo prueba que tampoco es derivable en *x* = 0

−

ni en *x* = 1.

1. Monoton´ıa: analizando el signo de la derivada, vemos que e´sta no se anula nunca y que:
   * Si *x* ∈ (−∞, −1) ∪ (0, 1), la funcio´n es decreciente.
   * Si *x* ∈ (−1, 0) ∪ (1, +∞), la funcio´n es creciente.

La funcio´n presenta tres puntos cr´ıticos, *x* = 1, *x* = 0, *x* = 1: se tiene que *x* = 1 son m´ınimos relativos (y de hecho absolutos, puesto que *f* (1) = *f* ( 1) = 0 y la funcio´n es siempre mayor o igual a cero) y *x* = 0 es ma´ximo relativo (no absoluto).

−

− ±

Solucio´n 5.7. La distancia entre el punto *P*0 := (0, 2) y un punto gene´rico *P* = (*x* , *y* ) R2 viene dada por la funcio´n distancia

∈

*d* (*x* , *y* ) = (*x* − 0)2 + (*y* − 2)2 = *x* 2 + (*y* − 2)2.

Si exigimos ahora que el punto pertenezca a la para´bola *y* = *x* 2, obtenemos sustituyendo en la funcio´n de arriba una funcio´n distancia de una variable

*d* (*x* ) := *d* (*x* , *x* 2) = *x* 2 + (*x* 2 − 2)2,

de la que buscamos hallar los m´ınimos absolutos. La funcio´n *x* 2 + (*x* 2 2)2 es estrictamente positiva, luego es derivable por ser composicio´n de funciones derivables (la funcio´n ra´ız cuadrada lo es en R+). Si calculamos la derivada obtenemos:

−

′ 2*x* + 2(*x* 2 − 2)2*x* 2*x* (1 + 2(*x* 2 − 2)) *x* (1 + 2(*x* 2 − 2))

*d* (*x* ) = 2 *x* 2 + (*x* 2 − 2)2 = 2 *x* 2 + (*x* 2 − 2)2 = *x* 2 + (*x* 2 − 2)2 ,

y deducimos que los puntos cr´ıticos, es decir, la solucio´n de *d* ′(*x* ) = 0, son *x* = 0 y aquellos tales que

1 + 2(*x* 2 − 2) = 0,

esto es, *x* 2 = 3 , de donde *x* = ±J 3 . Analizando el signo de *d* ′(*x* ), vemos que la funcio´n *d* (*x* ) es decre-

2

2

ciente en −∞, −J 3 ∪ 0, J 3 y creciente en −J 3 , 0 ∪ J 3 , ∞ .

J

2

2

2

2

Por tanto *x* = 0 es un ma´ximo relativo y *x* = ± 3 son ambos m´ınimos relativos (y de hecho absolutos). Por tanto, los puntos de la para´bola donde la distancia al punto (0, 2) se minimiza son

*P* = −r 3 , 3 , *P* = r 3 , 3 .

2

1

2

2

2

2

2

Solucio´n 6.1. Utilizamos la fo´rmula de integracio´n por partes con

 *u* = arcsin *x* ⇒ *du* = √

r

1

1. − *x*r2

*dx* ,

para resolver la integral:

 *dv* = *dx* ⇒ *v* =

*dv* =

*dx* = *x* ,

r arcsin *x dx* = *x* arcsin *x* − r

*x*

√1 − *x* 2

−

*dx* = *x* arcsin *x* + 1 r −2*x* (1 − *x* 2)−1*/*2 *dx* =

= *x* arcsin *x* +

1 (1 *x* 2)1*/*2

1

+ *C* = *x* arcsin *x* +

1 − *x* 2 + *C* .

2

2 2

Solucio´n 6.2. Utilizamos el cambio de variable *x* − 2 = *t*2 con *dx* = 2*t dt*:

r

r

r

*x* 2

√*x* − 2 *dx* =

(*t*2 + 2)2

2*t dt* = 2

*t*

(*t*4

+ 4*t*2

+ 4) *dt* =

2*t*5

+

5

8*t*3

+ 8*t* + *K* =

3

= 2 (*x* 2)5*/*2 + 5

−

8

3 (*x* − 2) + 8(*x* − 2) + *K* .

3*/*2 1*/*2

Solucio´n 6.3. Utilizamos la fo´rmula de integracio´n por partes con

 *u* = *e* ⇒ *du* = 2*e dx* ,

2*x* 2*x*

 *dv* = sin *x dx* ⇒ *v* = r *dv* = r sin *x dx* = − cos *x* ,

para resolver la integral:

*I* = r *e*2*x* sin *x dx* = −*e*2*x* cos *x* − r −2*e*2*x* cos *x dx* = −*e*2*x* cos *x* + 2 r *e*2*x* cos *x dx* =

= −*e*2*x* cos *x* + 2 i*e*2*x* sin *x* − r 2*e*2*x* sin *x dx* l = −*e*2*x* cos *x* + 2*e*2*x* sin *x* − 4 r *e*2*x* sin *x dx* =

= *e*2*x* (2 sin *x* − cos *x* ) − 4*I* ,

donde hemos vuelto a utilizar la fo´rmula de integracio´n por partes con

 *u* = *e* ⇒ *du* = 2*e dx* ,

2*x* 2*x*

 *dv* = cos *x dx* ⇒ *v* = r *dv* = r cos *x dx* = sin *x* .

Hemos obtenido

2*x*

*I* = *e*2*x*

Solucio´n 6.4.

(2 sin *x* − cos *x* ) − 4*I* ⇒ 5*I* = *e*

(2 sin *x* − cos *x* ) ⇒ *I* =

*e*2*x*

5 (2 sin *x* − cos *x* ) + *K* .

(a) Utilizamos el cambio de variable *x* = sin *t* con *dx* = cos *t dt* y t si *x* = 0 → *t* = arcsin 0 = 0,

si *x* = 1 → *t* = arcsin 1 = *π* ,

enton-

ces

r 1

1 − *x* 2 *dx* =

r *π*

1 − sin2 *t* cos *t dt* =

*π*

2

cos2 *t dt* =

r

r *π* 1 + cos(2*t*)

2

*dt* =

0 0

2

1 r *π*

2

1 r *π*

0 0

1 i l *π* 1 i

2

l

2

*π* 1 *π* 1 *π*

2

= *dt* +

2

2 0 4 0

2 cos(2*t*) *dt* = *t* +

2 0 4

2

sin(2*t*) 0 = 2 2 + 4 (sin *π* − sin 0) = 4 .

(b) 2

r

0

*f* (*x* ) *dx* =

1

*f* (*x* ) *dx* +

r

0

2

*f* (*x* ) *dx* =

r

1

1

(2*x* 3) *dx* +

r

−

0

2

(3*x* 2

r

1

− 4*x* ) *dx* =

i*x* 2

− 3*x*

1

+ *x* 3

l

i

0

− 2*x*

1. 2 =

1

l

= (1 − 3) − 0 + (8 − 8) − (1 − 2) = −1.

Solucio´n 6.5. Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, resolvemos la divisio´n:

3*x* 5 − 4*x* 3 + 5*x* 2 − 10*x* + 6 2*x* 3 − 2*x* 2 − 2

Entonces

*x* 4 − 2*x* 3 + 2*x* 2 − 2*x* + 1 = 3*x* + 6 + *x* 4 − 2*x* 3 + 2*x* 2 − 2*x* + 1 .

3*x* 5 4*x* 3 + 5*x* 2 10*x* + 6

r − −

r

*x* 4 − 2*x* 3 + 2*x* 2 − 2*x* + 1 *dx* =

r − −

(3*x* + 6) *dx* +

2*x* 3 2*x* 2 2

*x* 4 − 2*x* 3 + 2*x* 2 − 2*x* + 1 *dx* =

r − −

r − −

3*x* 2

= + 6*x* + 2

2*x* 3 2*x* 2 2

*x* 4 − 2*x* 3 + 2*x* 2 − 2*x* + 1 *dx* =

r

r −

r

3*x* 2

+ 6*x* +

2

2*x* 3 2*x* 2 2

(*x* 2 + 1)(*x* − 1)2 *dx* =

3*x* 2

= + 6*x* + 2

3*x* 2

1 *dx* +

*x* 2 + 1

2 *dx*

*x* − 1

1

1 *dx* = (*x* − 1)2

= 2 + 6*x* + arctan *x* + 2 log |*x* + 1| + *x* − 1 + *C* ,

donde hemos utilizado la descomposicio´n en fracciones simples:

2*x* 3 − 2*x* 2 − 2

*Mx* + *N A*

*B* (*Mx* + *N*)(*x* − 1)2 + *A*(*x* 2 + 1)(*x* − 1) + *B*(*x* 2 + 1)

(*x* 2 + 1)(*x* − 1)2 =

es decir,

*x* 2 + 1 + *x* + 1 + (*x* − 1)2 =

(*x* 2 + 1)(*x* − 1)2 ,

2*x* 3 − 2*x* 2 − 2 = *M*(*x* 3 − 2*x* 2 + *x* ) + *N*(*x* 2 − 2*x* + 1) + *A*(*x* 3 − *x* 2 + *x* − 1) + *B*(*x* 2 + 1),

y el sistema obtenido al igualar coeficientes es:

Coef. *x* 3 : 2 = *M* + *A*

Coef. *x* 2 : −2 = −2*M* + *N* − *A* + *B*

****

*M* = 0,

*N* = 1,

****

Coef. *x* : 0 = *M* − 2*N* + *A*

⇒ *A* = 2,

Te´rm. indep. : −2 = *N* − *A* + *B*   *B* = −1.

 

Solucio´n 6.6. Si realizamos una descomposicio´n en fracciones simples, dado que el denominador fac- toriza como *x* 3 + 2*x* 2 + 3*x* + 6 = (*x* + 2)(*x* 2 + 3), obtenemos que:

−4 = *A*

*Mx* + *N A*(*x* 2

+ =

+ 3) + (*Mx* + *N*)(*x* + 2)

,

(*x* + 2)(*x* 2 + 3) *x* + 2

*x* 2 + 3

(*x* + 2)(*x* 2 + 3)

de donde igualando numeradores y operando conseguimos la expresio´n

−4 = (*A* + *M*)*x*

2

+ (2*M* + *N*)*x* + (3*A* + 2*N*),

y al igualar coeficientes es llegamos al sistema

Coef. *x* 2 : 0 = *A* + *M*

Coef. *x* : 0 = 2*M* + *N*

Te´rm. indep. : −4 = 3*A* + 2*N*



*A* = 4*/*7,

 −

*M* = 4*/*7,

⇒

 *N* = −8*/*7.

Se sigue que

r −4 *dx* = − 4 r 1 *dx* + 1 r 4*x* − 8 *dx* = − 4 r 1 *dx* + 4 r *x dx* − 8 r 1 *dx* .

*x* 3 + 2*x* 2 + 3*x* + 6

7

*x* + 2

7

*x* 2 + 3

7

*x* + 2

7

*x* 2 + 3

7

*x* 2 + 3

Las dos primeras integrales son inmediatas:

− 4 r 1 *dx* = − 4 log |*x* + 2| y 4 r *x dx* = 2 r 2*x dx* = 2 log |*x* 2 + 3|.

7

*x* + 2

7

7

*x* 2 + 3

7

*x* 2 + 3

7

La u´ltima es una integral de tipo arcotangente, puesto que

8 r 1

8 r 1

8 √

r 1*/*√3

8√3

( *x* )

− 7 *x* 2 + 3 *dx* = − 7

3

3 *x* 2 + 1

*dx* = − 21 3

1 + *x*

√

3

arctan

21

2

2 *dx* = −

arctan .

21 3

+ 3| −

√3

+ *K* .

√

Concluimos que

r −4 4

*x* 3 + 2*x* 2 + 3*x* + 6 *dx* = − 7 log |*x* + 2| + 7 log |*x*

2 8√3

( *x* )

Solucio´n 6.7. Si tomamos el cambio de variable *t* = √*x* , con *dt* =

integral se convierte en

1

2√*x dx* (y por tanto 2*t dt* = *dx* ), la

r *e*√*x dx* = r 2*tet dt*.

Resolviendo ahora por partes, con  *u* = 2*t* ⇒ *du* =r2 *dt*,

se llega a

 *dv* = *et dt* ⇒ *v* = *et dt* = *et*,

r *e*√*x dx* = r 2*tet dt* = 2*tet* − r 2*et dt* = 2*tet* − 2*et* + *K* = 2√*xe*√*x* − 2*e*√*x* + *K* = 2*e*√*x* √*x* − 1 + *K* .

Solucio´n 6.8. La integral pedida es la integral de la funcio´n secante, para la que existen varios me´todos de ca´lculo empleando identidades trigonome´tricas. Uno de los ma´s sencillos es el siguiente: si multipli- camos numerador y denominador por cos *x* y utilizamos que cos2 *x* + sin2 *x* = 1, se obtiene:

r 1 *dx* = r cos *x dx* = r cos *x dx* .

cos *x*

cos2 *x*

1 − sin2 *x*

Utilizando ahora el cambio de variable *t* = sin *x* , con *dt* = cos *x dx* , llegamos a

r cos *x dx* = r 1 *dt*,

1 − sin2 *x* 1 − *t*2

que se trata de una integral racional. Descomponiendo en fracciones simples:

1 1 *A B*

= = +

= *A*(1 − *t*) + *B*(1 + *t*) = (*B* − *A*)*t* + (*A* + *B*),

1 − *t*2

(1 − *t*)(1 + *t*)

1 + *t*

1 − *t*

(1 − *t*)(1 + *t*)

(1 − *t*)(1 + *t*)

e igualando coeficientes se obtiene

Coef. *t* : 0 = *B* − *A* 1 ⇒ t *A* = 1*/*2,

En consecuencia

Te´rm. indep. : 1 = *A* + *B*

*B* = 1*/*2.

r 1 *dx* = r 1 *dt* = r 1*/*2 *dt* + r 1*/*2 *dt* = 1 (log |1 + *t*| − log |1 − *t*|) + *K* =

cos *x*

1 1 + *t* 1 1 + sin *x*

1 − *t*2

1 + *t*

1 − *t* 2

2 1 − *t* 2 1 − sin *x*

= log + *K* = log + *K* .

Solucio´n 6.9. Calculamos primero la integral indefinida. Si escogemos el cambio de variable *t* = √*x* , con

1

*dt* = 2√*x dx* (y por tanto 2*t dt* = *dx* ) se tiene que

1

r

1 + √*x dx* =

1 2*t dt* = 2

1 + *t*

r

*t dt* = 2 1 + *t*

1 + *t* − 1 *dt* = 2

1 + *t*

r

1 1

1 + *t*

− )

r (

*dt* =

= 2 (*t* − log |1 + *t*|) + *K* = 2 √*x* − log |1 + √*x* | + *K* .

r

Aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida:

1 1

r

1 + √*x dx* =

0

i2 √

*x* − log

1 + √*x*

l1 = 2(1 − log 2) − 2(0 − 0) = 2 − 2 log 2 = 2 − log 4.

0

Solucio´n 6.10. Calculamos en primer lugar la integral indefinida. El denominador sugiere emplear el cam- bio de variable *x* = 2 sin *t*, de donde *dx* = 2 cos *t dt*.

Aplicando dicho cambio,

r *x* 2

r 4 sin2 *t*

r 8 sin2 *t* cos *t*

r 8 sin2 *t* cos *t* r 2

√4 − *x* 2 *dx* =

4 − 4 sin2 *t* 2 cos *t dt* =

J4(1 − sin2 *t*)

*dt* =

*dt* =

2 cos *t*

4 sin

*t dt*.

La integral de sin2 *t* se resuelve utilizando identidades trigonome´tricas del a´ngulo doble: puesto que

sin2 *t* + cos2 *t* = 1 y cos2 *t* − sin2 *t* = cos(2*t*), se obtiene restando ambas ecuaciones que

sin2 *t* = 1 − cos(2*t*) ,

2

y por tanto

r 4 sin2 *t dt* = 4 r 1 − cos(2*t*) *dt* = 2 r (1 − cos(2*t*)) *dt* = 2 *t* − 1 sin(2*t*) + *K* = 2*t* − sin(2*t*) + *K* .

2

2

Para resolver la integral indefinida no es necesario deshacer el cambio de variable ya que basta ver que la funcio´n 2 sin *t* es biyectiva en el intervalo (0, *π* ) y que si *t* ∈ (0, *π* ), entonces *x* = 2 sin *t* ∈ (0, 2). Por ello,

2 2

r 2 *x* 2 *π*

l

i

2

√4 − *x* 2 *dx* = 2*t* − sin(2*t*) 0 = (*π* − sin *π*) − (0 − sin 0) = *π*.

0

Solucio´n 7.1. Como *AB* = *I*2 y *BA* = *I*2, deducimos que *B* es la inversa de *A*.

Solucio´n 7.2. (a)

2

(*A* | *I*3) =

0 1 1

0 −1 1

0

0

0

1

*F*

∼

3 →*F*3 +*F*2

0 1

0 0

∼

*F*1 →*F*1 − 1 *F*3

*F*2 →*F*2 − 1 *F*3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  −2 1 1 1   −2 1 0 1 | | | | 0  1  0  −1  1  2 | 0   −1  |  −2 1   −2 | 1  1  2  0  1 | 1  0  0  0  0 | 0  1  1  1  0 | 0   0  1  −1  1  2 |
| 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | *F*1 →*F*1 −*F*2 | | 0 | 2 | 0 | 1 |

2

∼  0 1 0 0

2

1  ∼  0

−

2

2

0



2  *F* ∼ *F*

−

→

*−*1

1

1 0 1

 1 0 0 −1 1 0 

1 2 1

*F*3 → 1 *F*3

2

2 2

∼

 −1  −1

0

 

 

0 1 0

0 0 1

1

2

1

2

2

1

2

=

*I*3 | *A*

.

0

(b) Si *A* =

−2 1 1

0 −1 1

 0 1 1, *X* =

*x*

*y*  y *B* =

*z*

2

1, resolvemos el sistema *AX* = *B* multiplicando la

1  

2

ecuacio´n matricial por *A*−1:

1    

*X* = *A*−1*B* =

−1 1 0 2

0 1 −1 1 =

2

0 1 1

2

−1

−1 .

2

3

Solucio´n 7.3. Hacemos operaciones elementales sobre la matriz ampliada del sistema:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | −1 | 0 | 1 | 2 | −1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 0 0 1 1 1  0 0 1 1 1 | | | | | 3  3 |

 1 −1 0 1 2

|  −

−1   

(*A B*) = 2 2 1 3 4 0

 *F* 2*F*

 *F F*



0 0 1 1 1 3



1 −1 1 2 3 2

∼

2 →*F*2 − 1

*F*4 →*F*4 −*F*1

∼

3 →*F*3 − 2

*F*4 →*F*4 −*F*2

 1 −

∼

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 0 | 1 | 2 |  | −1 | 0 | 1 | 2 | −1 |
| 0 0 1 | | 1 | 0 | 2 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 |
|  | 0 0 0 1 | | | 4 →*F*4 − 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 0 0 | | 0 | 1 | 1 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Como rg(*A* | *B*) = rg(*A*) | = 3 ̸= | 5 = nº | inco´gn | | itas, el sistema es co | mpatible | | | indeter | |

−1 

 1 

∼  0

infinitas soluciones:

1  *F*

*F*  0

 .

minado, es decir, tiene

**** *x* − *y* + *t* + 2*w* = −1

*x* = *α β* 3,

*y* = *α*,

**** − −

*AX* = *B* ∼ 

****



Solucio´n 7.4.

*z* + *t* = 2

*w* = 1

0 = 0

⇒  *z* = 2 − *β*

**** *w* = 1,

*t* = *β*,

con *α*, *β* ∈ R.

(*A* | *B*) = ( 2 −2 0

4 ) ∼

( 1 −1 3

−1 ) ∼

( 1 −1 3

−1 ) ∼

1 −1 3

∼ (

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | −1 | 3 | −1 |
| 0 | 0 | 1 | −1 |

−1 *F*1 ↔*F*2

) ∼

2 −2 0 4

(

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | −1 0 | 2 |
| 0 | 0 1 | −1 |

*F*2 →*F*2 −2*F*1

) .

0 0 −6 6

*F*2 → *−*1 *F*2

*F*1 →*F*1 −3*F*2

6

Una vez hemos obtenido la matriz escalonada reducida equivalente a (*A* | *B*), resolvemos el sistema:

t ⇒



Solucio´n 7.5.

*AX* = *B* ∼

*x* − *y* = 2

*z* = −1

*x* = 2 + *α*,

*y* = *α*,

 *z* = −1,

con *α* ∈ R.

1 3

0

3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 |
| 0 | −1 |
| 2 | 0 |
| 1 | −1 | 1 |

1 2 3

1 2 3

det   = 2(−1)3+2 det 0 −1 3 − 1(−1)4+2 det 0 −1 3 =





1 1 Adj. *C*2

2

1 1 2

1 0 1

Adj. *C*1

= −2 i1(−1)1+1 det (−1 3) + 1(−1)3+1 det ( 2 3)l +

1 2

−1 3

− i1(−1)1+1 det (−1 3) + 1(−1)3+1 det ( 2 3) l =

0 1 −1 3

= −2i(−2 − 3) + (6 + 3)l − i(−1 − 0) + (6 + 3)l = −16.

Como det(*A*) ̸= 0, la matriz *A* es invertible.

Solucio´n 7.6. Realizamos operaciones elementales por filas en la matriz ampliada del sistema:





(*A* | *B*) =

1 *β* 2 0

1 2 3 *β*

− −

1 *β* 2 *β*

1 

∼

*F*2 →*F*2 +*F*1

1 *β* 2 0

0 2 + *β* 1 *β*

−

0 0 0 *β*

1

1

*β* − 1

 .

*F*3 →*F*3 −*F*1

– Si *β* = 2 y *β* = 0: la matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 3 = 4 = nº inco´gnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

̸ − ̸ | ̸

0

*β*



 −

1 2 2 0 1

– Si *β* = −2: (*A* | *B*) ∼  0 0 −1 −2

1 .



0 0 0 −2 −3

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 3 = 4 = nº inco´gnitas, el sistema es compa- tible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

| ̸





1 0 2 0 1

– Si *β* = 0: (*A B*) ∼ 0 2 1 0 1 .

| 



0 0 0 0 −1

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = 3 = 2 = rg(*A*), el sistema es incompatible, es decir, no tiene solucio´n.

| ̸

Solucio´n 7.7.

 −



−

(*A* | *B*) =

1. *α* 2
2. 1 *β*

2 1 4

*β* 

∼

*F*2 →*F*2 −2*F*1

1 *α* 2

0 1 + 2*α β* 4

−

0 1 + 2*α* 0

*β*

−2*β*

−*β*

 .

– Si *α* ̸= −1 : (*A* | *B*) ∼

2

*F*3 →*F*3 −2*F*1

1 −*α* 2 *β*



0

*β*

 0 1 + 2*α β* − 4 −2*β*

*F*3 →*F*3 −*F*2

0 0 4 − *β*

*β*

.

▶ Si *β* = 4: la matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 3 = nº inco´gnitas, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una u´nica solucio´n.

̸ |

 1 −*α* 2 4 

▶ Si *β* = 4: (*A B*) ∼ 0 1 + 2*α* 0

| 

0 0 0

−8 .

4

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = 3 = 2 = rg(*A*), el sistema es incompatible, es decir, no tiene solucio´n.

| ̸

 1 1 2 *β* 

2

– Si *α* = −1 : (*A* | *B*) ∼  0 0 *β* − 4 −2*β*  .

2

0 0 0 −*β*

▶ Si *β* = 4 y *β* = 0: la matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 3 = nº inco´gnitas, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una u´nica solucio´n.

̸ ̸ |

 1 1 2 4   1 1 2 4 

2

2

▶ Si *β* = 4: (*A* | *B*) ∼  0 0 0 −8  *F* ∼ 2*F*  0 0 0 −8  .

0 0 0

−4

3 →*F*3 −

2

0 0 0

0

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = 2 = 1 = rg(*A*), el sistema es incompatible, es decir, no tiene solucio´n.

| ̸

 1 1 2 0 

2

▶ Si *β* = 0: (*A B*) ∼ 0 0 4 0 .

|  −



0 0 0 0

La matriz esta´ escalonada y como rg(*A B*) = rg(*A*) = 2 = 3 = nº inco´gnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

| ̸

Solucio´n 7.8.

 0 1 5 −4 

 1 4 3 −2 

 1 4 3 −2 

(*A* | *B*) =  1 4 3

−2  *F* ∼

 0 1 5 −4  *F*

∼ 2*F*  0 1 5 −4  *F* ∼

2 7 1

−

 1 4 3

2

−2 



1 ↔*F*2

2 7 1 −2

3 →*F*3 − 1

0 −1 −5 2

3 →*F*3 +*F*2

∼ 0 1 5



0 0 0

−4 .

−2

A partir de la forma escalonada se deduce que rg(*A*) = 2 y rg(*A B*) = 3, luego el sistema es incompatible y no tiene solucio´n.

|

Solucio´n 7.9.

( ) ∈

1. Si la traza de *A* es cero, podemos escribir *A* = *a b* donde *a*, *b*, *c* R y calculamos

*c* −*a*

2 (*a b* ) (*a b* )

*A*

= *A* · *A* =

=

= (*a*

+ *bc*)

= (*a*

+ *bc*)*I*2.

*c* −*a*

*c* −*a*

(*a*2 + *bc* 0 ) 2

0 *a*2 + *bc*

(1 0) 2

0 1

1. Siguiendo la pista dada, calculamos en primer lugar tr[*A*, *B*] = tr(*AB* − *BA*) = tr(*AB*) − tr(*BA*): Si *A* = (*a*11 *a*12) y *B* = (*b*11 *b*12) se tiene que

( ) 11 11 12 21 21 12 22 22

*a*21 *a*22

*b*21 *b*22

y tambie´n

tr(*AB*) = tr *a*11*b*11 + *a*12*b*21 *a*11*b*12 + *a*12*b*22 = *a b* + *a b* + *a b* + *a b* ,

*a*21*b*11 + *a*22*b*21 *a*21*b*12 + *a*22*b*22

tr(*BA*) = tr *b*11*a*11 + *b*12*a*21 *b*11*a*12 + *b*12*a*22 = *b a* + *b a* + *b a* + *b a* .

( ) 11 11 12 21 21 12 22 22

*b*21*a*11 + *b*22*a*21 *b*21*a*12 + *b*22*a*22

Se sigue de ello que tr[*A*, *B*] = 0.

Por el apartado (a), puesto que tr[*A*, *B*] = 0, el cuadrado de [*A*, *B*] es un mu´ltiplo de la identidad, es decir, [*A*, *B*]2 = *αI*2 para algu´n *α* ∈ R. Vamos ahora a comprobar que el conmutador de una matriz *C* ∈ M2 con un mu´ltiplo de la identidad es la matriz cero:

[*C* , [*A*, *B*]2] = [*C* , *αI*2] = *C αI*2 − *αI*2*C* = *α*(*CI*2 − *I*2*C* ) = *α*(*C* − *C* ) = 0,

y por tanto *C* conmuta con [*A*, *B*]2.

1. Si fuese cierto que [*A*, *B*] = *αI*2, con *α* = 0, se tendr´ıa que tr[*A*, *B*] = tr(*αI*2) = 2*α* = 0, lo que supone una contradiccio´n con tr[*A*, *B*] = 0 (probado en el apartado anterior) y concluimos que [*A*, *B*] no puede ser nunca un mu´ltiplo no nulo de la identidad.

̸ ̸

Solucio´n 7.10. Es un ca´lculo directo verificar la identidad. Si *A* = *a b* , se tiene que:

( )

*c d*

*A*2 − tr(*A*)*A* + det(*A*)*I*2 = (*a b*) (*a b*) − (*a* + *d* ) (*a b*) + (*ad* − *bc*) (1 0) =

( )

( )

(

*c d*

*c d*

*c d*

0 1

0 *ad bc*)

*a*2 + *bc ab* + *bd*

= *ca* + *dc d* 2 + *bc*

( )

*a*2 + *da ab* + *db*

− *ac* + *dc d* 2 + *ad*

+ *ad* − *bc* 0 =

−

= 0 0 .

0 0

Veamos ahora que *A* es invertible si det(*A*) = 0. Podemos despejar det(*A*)*I*2 de la identidad del apartado anterior, de modo que:

̸

*A*2 − tr(*A*)*A* = − det(*A*)*I*2.

Puesto que det(*A*) ̸= 0, podemos dividir por − det(*A*) y llegar a la identidad

tr(*A*)*A* − *A*2 = *I* .

1

det(*A*)

2

Sacando factor comu´n *A* (por la izquierda y por la derecha), se obtienen las identidades

*A* ( tr(*A*)*I*2 − *A* ) = *I* y ( tr(*A*)*I*2 − *A* ) *A* = *I* ,

det(*A*)

2

det(*A*)

2

lo que permite afirmar que *A* es invertible, y *A*−1 = 1 (tr(*A*)*I*2 − *A*).

det *A*

Solucio´n 7.11. Para que los sistemas de ecuaciones sean equivalentes, ambos deben tener el mismo conjunto de soluciones. Si consideramos el sistema formado por las cuatro ecuaciones,

 1 2 1 *a* − 1



(*A* | *B*) =  2 1 *b* −1

4 5 −*b* 1

1 −4 *b* − 4 −5

0 

 ∼

0



0

0

*F*2 →*F*2 −2*F*1 *F*3 →*F*3 −4*F*1 *F*4 →*F*4 −*F*1

 1 *a* 1 *a* − 1

 0 −3 *b* − 2 1 − 2*a*



0 −3 −*b* − 4 5 − 4*a*

0 −6 *b* − 5 −4 − *a*

0 

 ,

0



0

0

es inmediato comprobar, analizando las dos primeras ecuaciones, que el primer sistema tiene rango 2 para todo valor de *a*, *b* R. Por tanto, para que el segundo sistema sea equivalente al primero, es necesario que la matriz 4 4 tenga tambie´n rango 2, ya que en otro caso ambos sistemas no ser´ıan compatibles. Si realizamos ma´s operaciones elementales

×

∈

 1 *a* 1 *a* − 1 0 





 0 −3 *b* − 2 1 − 2*a*  ∼

0

 1 *a* 1 *a* − 1 0 

 0 −3 *b* − 2 1 − 2*a* 



0



 0 −3 −*b* − 4 5 − 4*a* 0  *F*3 →*F*3 −*F*2  0 0 −2*b* − 2 4 − 2*a* 0 

0

*F*4 →*F*4 −2*F*2

0

0 −6 *b* − 5 −4 − *a*

0 0 −*b* − 1 −6 + 3*a*

vemos que para que la matriz tenga rango 2, los para´metros *a* y *b* debera´n satisfacer las ecuaciones

−*b* − 1 = 0 y 2 − *a* = 0,

que proporcionan los valores *a* = 2, *b* = 1. Sustituyendo en la matriz anterior, obtenemos la matriz ampliada del sistema escalonada:

−





1 2 1 1 0

0 3 3 3 0





− − −



0 0 0 0 0 .



0 0 0 0 0

Por tanto, para *a* = 2 y *b* = 1, rg(*A B*) = 2 y las ecuaciones del segundo sistema se obtienen a partir del primero mediante operaciones elementales, por lo que toda solucio´n del primer sistema tambie´n lo sera´ del segundo.

− |

Es sencillo comprobar que la matriz del segundo sistema tiene tambie´n rango 2, por lo que las ecuacio- nes del primer sistema pueden ser tambie´n expresadas mediante operaciones elementales a partir del primero, y ambos sistemas son equivalentes.

Solucio´n 7.12. En primer lugar, la matriz *AB* esta´ bien definida y se trata de una matriz 2 × 2. Si llamamos

*A* = (*a*1) y *B* = *b*1 *b*2 ,

*a*2

se obtiene

*AB* = (*a*1) *b*1 *b*2 = (*a*1*b*1 *a*1*b*2) ,

y esta matriz nunca sera´ invertible porque det(*AB*) = *a*1*b*1*a*2*b*2 − *a*1*b*2*a*2*b*1 = 0 para cualquier valor

*a*2

*a*2*b*1 *a*2*b*2

*a*1, *a*2, *b*1, *b*2 ∈ R.

Finalmente, si *A* es un vector columna y *B* un vector fila, es decir,

*a*1

*a*2

 

*A* = .

 

.

*an*

y *B* = *b*1

*b*2 · · · *bn* .

Si expresamos la matriz *AB* en funcio´n de sus columnas, tenemos

*AB* = *b*1*A b*2*A* ... *bn*−1*A bnA* ,

de modo que todas las columnas de *AB* son proporcionales al vector columna *A*. Por tanto, es inmediato deducir que det(*AB*) = 0 (la matriz *AB* tiene rango menor o igual a 1) y la matriz no es invertible.

Solucio´n 7.13.

1. Como 0 = *An*, entonces 0 = det(*An*) = (det(*A*))*n* y deducimos que det(*A*) = 0.
2. Si *A* es nilpotente, se tiene que det(*A*) = 0 y aplicando el ejercicio [7.10](#_bookmark7) deducimos

*A*2 − tr(*A*)*A* = − det(*A*)*I*2 = 0, (1)

o equivalentemente, *A*2 = tr(*A*)*A*. Adema´s, deducimos que

*A*3 = *A*2*A* = tr(*A*)*A*2 = (tr(*A*))2*A*,

*A*4 = *A*3*A* = (tr(*A*))2*A*2 = (tr(*A*))3*A*,

de donde puede probarse por induccio´n que *An* = (tr *A*)*n*−1*A*. Deducimos entonces que *An* es una matriz no nula si *A* es no nula y tr(*A*) ̸= 0.

Por tanto, para que *A* = 0 sea nilpotente, es necesario que tr(*A*) = 0 (y tambie´n det(*A*) = 0). Dichas matrices sera´n del tipo

̸

( ) ∈

1. Si *An* = 0, entonces ya que

*A* = *a b* , *a*2 = *bc*, *a*, *b*, *c* R.

*c* −*a*

(*A* + *In*)−1 = *In* − *A* + *A*2 − *A*3 + ... + (−1)*n*−1*An*−1

(*In* + *A*)(*In* − *A* + *A*2 − *A*3 + ... + (−1)*n*−1*An*−1) = *In* + (−1)*n*−1*An* = *In*, (*In* − *A* + *A*2 − *A*3 + ... + (−1)*n*−1*An*−1)(*In* + *A*) = *In* + (−1)*n*−1*An* = *In*.

Solucio´n 8.1.

1. El conjunto *S* s´ı es un subespacio vectorial de R2 ya que
   1. si (*a*, *b*) y (*c*, *d* ) ∈ *S* , entonces (*a*, *b*) + (*c*, *d* ) = (*a* + *c*, *b* + *d* ) ∈ *S* ya que

(*a*, *b*) ∈ *S* ⇒ *a* = 2*b* (*c*, *d* ) ∈ *S* ⇒ *c* = 2*d*

1 + ⇒ *a* + *c* = 2*b* + 2*d* = 2(*b* + *d* );

* 1. si (*a*, *b*) ∈ *S* y *λ* ∈ R, entonces *λ*(*a*, *b*) = (*λa*, *λb*) ∈ *S* ya que

(*a*, *b*) ∈ *S* ⇒ *a* = 2*b*

*λ* ∈ R

1 × ⇒ *λa* = *λ*2*b* = 2(*λb*).

1. El conjunto *T* no es un subespacio vectorial de R2[*x* ] porque *q*(*x* ) = 0 ̸∈ *T* (*q*(0) = 0 ̸= 2).
2. El conjunto *R* no es un subespacio vectorial de M2×3 ya que la matriz *A* = (1 1 2) ∈ *R* (con

1 1 3

*a* = 1), pero 2*A* = (2 2 4) ̸∈ *R*.

2 2 6

1. El conjunto *U* no es un subespacio vectorial de R3: si tomamos *u* = (0, 0, 1) (vector obtenido con

*λ* = 0) y *u*′ = (1, 2, 2) (vector obtenido con *λ* = 1), ambos pertenecen a *U*, pero su suma

*u* + *u*′ = (0, 0, 1) + (1, 2, 2) = (1, 2, 3)

no pertenece a *U* (el sistema (1, 2, 3) = (*λ*, 2*λ*, *λ* + 1) es incompatible).

1. El conjunto *V* s´ı es subespacio vectorial de 2: si *A*, *B V* (es decir, *A* = *At* y *B* = *Bt*) y *λ* R, se tiene que

M ∈ ∈

* 1. (*A* + *B*)*t* = *At* + *Bt* = *A* + *B*, luego *A* + *B* ∈ *U*;
  2. (*λA*)*t* = *λAt* = *λA*, de donde se deduce que *λA* ∈ *U*; y por tanto *U* es subespacio.

1. El conjunto *W* no es un subespacio vectorial de R4. Como contraejemplo, si tomamos *λ* = 1 y *µ* = 1, obtenemos el vector *v* = (1, 1, 1, 0) ∈ *W* . No obstante, 2*v* = (2, 2, 2, 0) no es un vector de *W* , ya que no es igual a (*λ*, *λµ*, *µ*, 0) para ningu´n valor de *λ*, *µ* ∈ R.

Solucio´n 8.2.

1. El conjunto *W* s´ı es un subespacio vectorial de R2[*x* ] ya que
   1. si *r* (*x* ) = 2*b* + (*a* + *b*)*x* + (*a* − *b*)*x* 2 y *s*(*x* ) = 2*d* + (*c* + *d* )*x* + (*c* − *d* )*x* 2 ∈ *W* , entonces la suma

*r* (*x* ) + *s*(*x* ) = 2(*b* + *d* ) +

(*a* + *c*) + (*b* + *d* ) *x* +

(*a* + *c*) − (*b* + *d* ) *x* 2 ∈ *W* porque *a* + *c*, *b* + *d* ∈ R;

* 1. si *r* (*x* ) = 2*b* +(*a*+*b*)*x* +(*a*−*b*)*x* 2 ∈ *W* y *λ* ∈ R, entonces *λr* (*x* ) = 2*λb* +(*λa*+*λb*)*x* +(*λa*−*λb*)*x* 2 ∈ *W*

porque *λa*, *λb* ∈ R.

1. *W* = {2*b* + (*a* + *b*)*x* + (*a* − *b*)*x* 2 ∈ R2[*x* ] | *a*, *b* ∈ R} = {*a*(*x* + *x* 2) + *b*(2 + *x* − *x* 2) ∈ R2[*x* ] | *a*, *b* ∈ R} =

= ⟨*x* + *x* 2, 2 + *x* − *x* 2⟩.

1. Resolvemos: 3 + 2*x* − *x* 2 = *α*(*x* + *x* 2) + *β*(2 + *x* − *x* 2), es decir,



Te´rm. indep. : 3 = 2*β*

t *α* = ,

Coef. *x* : 2 = *α* + *β* ⇒

1

2

= 3 .

Coef. *x* 2 : −1 = *α* − *β*  *β* 2

Como el sistema tiene solucio´n, concluimos que *p*(*x* ) ∈ *W* con *p*(*x* ) = 1 *x* + *x* 2 + 3 2 + *x* − *x* 2 .

2

2

Solucio´n 8.3. Tenemos tres vectores en un espacio de dimensio´n 3, as´ı que para comprobar que forman una base de R3 basta con ver que son linealmente independientes. Para ello, calculamos el rango:

1 *λ* + 1 3 − *λ* 1 *λ* + 1 3 − *λ* 

rg 1 *λ* 3





 *F*

1 *λ* + 1 1 − *λ*

=

2 →*F*2 −*F*1

rg 0 −1 *λ*

0 0 −2 − 2*λ*

 = 3.

*F*3 →*F*3 −*F*1

Como el rango de los vectores es 3 para cualquier *λ* ∈ R, los vectores son linealmente independientes y para cualquier valor de *λ* ∈ R forman una base de R3.

Solucio´n 8.4.

1. Es linealmente independiente porque {*u*, *w* } ⊂ {*u*, *v* , *w* }, que es linealmente independiente.
2. El nu´mero ma´ximo de vectores linealmente independientes coincide con la dimesio´n del espacio vectorial. Como *S* tiene 4 vectores y dim(*V* ) = 3, el conjunto *S* no es linealmente independiente.
3. Vamos a comprobar si *W* es linealmente independiente utilizando la definicio´n. Planteamos:

0 = *α*(*u* + *v* ) + *β*(*u* − *v* + *w* ) + *γ*(*v* + *w* ) = (*α* + *β*)*u* + (*α* − *β* + *γ*)*v* + (*β* + *γ*)*w* .

Como {*u*, *v* , *w* } es linealmente independiente:







*α* + *β* = 0

*α* − *β* + *γ* = 0 ∼

*α* + *β* = 0

−2*β* + *γ* = 0 ∼ 1

*α* + *β* = 0

−2*β* + *γ* = 0

 *β* + *γ* = 0

2

*E*2 →*E*2 −*E*1 

*β* + *γ* = 0

*E*3 →*E*3 + 2 *E*2 

3 *γ* = 0

Al ser el sistema compatible determinado con solucio´n *α* = *β* = *γ* = 0, deducimos que el conjunto

*W* s´ı que es linealmente independiente.

Solucio´n 8.5.

1. El conjunto *U* no es un sistema generador de *V* porque el nu´mero m´ınimo de vectores de un sistema generador coincide con la dimensio´n del espacio y dim(*V* ) = 3 ̸= 2 = nº vectores de *U*.
2. El conjunto *W* s´ı es un sistema generador de *V* porque *B W* y *B* es sistema generador de *V* (por ser base).

⊂

Solucio´n 8.6.

1. El conjunto *B*′ esta´ formado tres vectores y dim(R2[*x* ]) = 3, as´ı que para comprobar que forman una base de R2[*x* ] basta con ver que son linealmente independientes. Para ello, pasamos a coordenadas con respecto a la base esta´ndar *B* = {1, *x* , *x* 2}:

5*x* 2 = [0, 0, 5]*B* , *x* 2 + 2*x* = [0, 2, 1]*B* , *x* 2 + *x* + 7 = [7, 1, 1]*B* ,

 

0 0 5

y como rg 0 2 1 = 3, concluimos que los vectores de *B*′ son linealmente independientes y,

 

7 1 1

por lo tanto, forman una base de R2[*x* ].

1. Escribimos las coordenadas de los elementos de *B*′ con respecto *B* en las columnas de *PB*←*B′* en

 

0 0 7

el orden adecuado: *PB*←*B′* = 0 2 1 .

 

5 1 1

Solucio´n 8.7.

* Como *b*1 es el primer vector de la base *B*: *b*1 = [1, 0]*B* .
* De la matriz *PC*←*B* deducimos que *b*1 = [−1, 0]*C* .
* *PD*←*B* = *PD*←*C PC* ←*B* = ( 1 0) (−1 2) = (−1 2 ).

−1 1 0 1 1 −1

* De la matriz *PD*←*B* deducimos que *b*1 = [−1, 1]*D* .
* *PB*←*C* = (*PC*←*B* )−1 = (−1 2) ya que

0 1

(*PC*←*B* | *I*2) = ( −1 2

0 1

0 1

*F*1 →*F*1 −2*F*2

0 1

*F*1 →−*F*1

0 1

1 0 ) ∼

( −1 0

0 1

1 −2 ) ∼

( 1 0

0 1

−1 2 ) =

Solucio´n 8.8.

= (*I*2 | (*PC*←*B* )−1).

1. Colocamos los tres vectores como columnas de una matriz *A* y la escalonamos:

1 2 1

*A* =   ∼

1 2 1

1 2 1 

  ∼

0 0 0

1 2 1 

0 −1 −1 .

1 2 0 *F*2 →*F*2 −*F*1 0 0 −1 *F*2 ↔*F*4 0 0 −1

2 3 1

*F*3 →*F*3 −*F*1 *F*4 →*F*4 −2*F*1

0 −1 −1

0 0 0

vemos que el rango es 3, por lo que los tres vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base de *V* . Se sigue adema´s que dim(*V* ) = 3.

1. *V* es espacio vectorial por ser un subespacio vectorial de R4. En *V* , el subconjunto *W* viene definido como el siguiente conjunto de soluciones al sistema de ecuaciones lineales homoge´neas

*x*1 = 0, *x*2 = 0,

as´ı que es subespacio de *V* . Como *V* viene definido por la ecuacio´n impl´ıcita

*x*1 − *x*2 = 0,

se tiene que el u´nico vector de *V* que cumple que *x*1 = 0 y *x*2 = 0, es el vector 0. Se concluye que

*W* = {0}, el subespacio nulo, que no tiene base.

Solucio´n 8.9.

1. B′ es un conjunto de 3 vectores en R3, luego basta ver que son linealmente independientes para verificar que forman base. Respecto a la base B, se tiene que

*e*1 + *e*2 = [1, 1, 0]B, *e*1 − *e*2 − *e*3 = [1, −1, −1]B, *e*3 = [0, 0, 1]B,

 

1 1 0

y como rg 1 −1 0 = 3, los vectores son linealmente independientes y constituyen una base

de R3.

0 −1 1

1. Por la propia definicio´n y construccio´n de la matriz cambio de base, se tiene que

1 1 0

*P*B←B*′* = 1 −1 0 ,

0 −1 1

y por las propiedades de la matriz cambio de base deducimos que

*P*B*′*←B = (*P*B←B*′* )−1 =

1 1 0 −1 1 1 0

1

1 −1 0





−

0

=

2

1

 

2



.

2

2

0 1 1 1 1

−

−

1

2 2

1. Supongamos que *v* es un vector que tiene las mismas coordenadas respecto a ambas bases, es decir, cumple que *v* = [*v*1, *v*2, *v*3]B = [*v*1, *v*2, *v*3]B*′* . Por tanto, matricialmente se verifica que:

*v*1 *v*1

*v*2 = *P*B←B*′* *v*2 ,

*v*3 *v*3

de donde despejando obtenemos el sistema

*v*1 0

(*P*B←B*′* − *I*3) *v*2 = 0 .

*v*3

0

Como consecuencia, los vectores con las mismas coordenadas respecto a ambas bases son so- lucio´n de un sistema lineal homoge´neo y, por lo tanto, forman subespacio vectorial de R3.

Solucio´n 8.10. En primer lugar, se tiene que dim(⟨*v*1, *v*2⟩) = dim(⟨*v*3, *v*4⟩) = 2, ya que es sencillo verificar que {*v*1, *v*2} y {*v*3, *v*4} son dos conjuntos linealmente independientes.

Si formamos una matriz con *v*1, *v*2, *v*3 y *v*4 como filas y la escalonamos:

2 1 −1

2 1 −1 2 1 −1

3 3 −1 ∼



0 3 1 ∼ 0 3 1 

   2 2   2 2  ,

2

2

2

−

0 3 1

*F*2 →*F*2 − 3 *F*1

0 3 1

*F*3 →*F*3 −2*F*2

0 0 0

3 0 −2

*F*4 →*F*4 − 3 *F*1

0 −3

1

2

*F*4 →*F*4 +*F*2

0 0 0

vemos que el rango es 2, por lo que se deduce que *v*3 y *v*4 pueden expresarse como combinacio´n lineal de *v*1 y *v*2. Por tanto, ⟨*v*3, *v*4⟩ ⊆ ⟨*v*1, *v*2⟩. Como ambos subespacios tienen dimensio´n dos, concluimos que

´

⟨*v*3, *v*4⟩ = ⟨*v*1, *v*2⟩, como querıamos probar.

Solucio´n 8.11.

1. Si resolvemos el sistema proporcionado por las ecuaciones impl´ıcitas de *W*1 obtenemos una base de dicho subespacio, como por ejemplo

B*W*1 = {(−1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)},

lo que prueba que *W*1 tiene dimensio´n 2. Por otro lado, como (0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1) es un conjunto linealmente independiente, deducimos que tambie´n es base de *W*2.

{ − }

Si juntamos las bases de *W*1 y *W*2 obtenemos un sistema generador de *W*1 + *W*2, que puede no ser base. Si formamos una matriz con dichos vectores y escalonamos con operaciones elementales por filas:

−1 0 1 0 

  ∼

0 1 0 1

−1 0 1 0 

  ∼

0 1 0 1

−1 0 1 0

  ,

0 1 0 1

 1 1 −1 −1 *F*3 →*F*3 +*F*1  0 1 0 −1 *F*3 →*F*3 −*F*2  0 0 0 0

0 0 0 1

0 0 0 1

0 0 0 1

deducimos que el rango es 3 y se sigue que dim(*W*1 + *W*2) = 3.

Aplicando la fo´rmula de Grassmann obtenemos la dimensio´n del subespacio interseccio´n:

dim(*W*1 ∩ *W*2) = dim(*W*1) + dim(*W*2) − dim(*W*1 + *W*2) = 2 + 2 − 3 = 1.

1. S´ı, es posible que exista. Un posible ejemplo viene dado por

*W*3 = ⟨(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)⟩,

que cumple lo deseado.

1 0 −1 0

Veamos que es suplementario de *W*1. Se tiene que rg 0 1 0 1 = 4, de donde se deduce

0 0 1 0

 

0 0 0 1

que dim(*W*1 + *W*3) = 4 y por tanto *W*1 + *W*3 = R4. Como claramente dim(*W*3) = 2, la fo´rmula de Grassmann proporciona que dim *W*1 *W*3 = 0, de donde *W*1 + *W*3 = 0 , luego *W*3 es suplementario de *W*1. Ca´lculos similares prueban que *W*3 tambie´n es suplementario de *W*2.

∩ { }

Solucio´n 8.12. La respuesta es negativa: tres vectores no son siempre linealmente independientes aun- que dos a dos lo sean. Un posible ejemplo es el dado por los siguientes tres vectores de R3:

*v*1 = (1, 0, 0), *v*2 = (0, 1, 0), *v*3 = (1, 1, 0).

Es sencillo verificar que *v*1, *v*2 , *v*1, *v*3 , *v*2, *v*3 son conjuntos linealmente independientes, pero *v*1, *v*2, *v*3

{ } { } { } { }

es linealmente dependiente, puesto que *v*3 = *v*1 + *v*2.

Solucio´n 8.13.

1. Si recordamos la definicio´n del subespacio suma como

*V*1 + *V*2 = {*v*1 + *v*2 | *v*1 ∈ *V*1, *v*2 ∈ *V*2},

se tiene que si *V*1 + *V*2 = *V* , todo vector *v* de *V* puede expresarse como *v* = *v*1 + *v*2 para algu´n

*v*1 ∈ *V*1, *v*2 ∈ *V*2. Si suponemos que hay otra expresio´n *v* = *v*1′ + *v*2′ , con *v*1′ ∈ *V*1, *v*2′ ∈ *V*2, se tiene que

*v* = *v*1 + *v*2 = *v*1′ + *v*2′ .

Despejando en la u´ltima igualdad, se sigue que

*v*1 − *v*1′ = *v*2′ − *v*2.

Este vector pertenece simulta´neamente a *V*1 y *V*2, ya que *v*1 − *v*1′ ∈ *V*1, pero tambie´n *v*2 − *v*2′ ∈ *V*2.

Como *V*1 ∩ *V*2 = {0}, se tendra´ entonces que

*v*1 − *v*1′ = *v*2′ − *v*2 = 0

y por tanto *v*1 = *v*1′ , *v*2 = *v*2′ y concluimos que la expresio´n es u´nica.

1. Obtengamos en primer lugar una base de *V*1 +*V*2. Se verifica que los siguientes conjuntos son base de *V*1 y *V*2, respectivamente

B*V*1 = {(−1, 0, 1), (0, −1, 1)}, B*V*2 = {(1, 1, 1)},

de donde se sigue que *V* +*V* = ( 1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1) es sistema generador de *V*1 + *V*2. Es adema´s base de *V*1 + *V*2 por ser linealmente independiente, puesto que

 

B 1 2 { − − }

1 0 1

−

rg 0 1 1 = 3.

 − 

1 1 1

La descomposicio´n buscada se halla expresando el vector (1, 0, 1) respecto a esta base, para lo que resolvemos el sistema

(1, 0, 1) = *λ*1(−1, 0, 1) + *λ*2(0, −1, 1) + *λ*3(1, 1, 1),

o equivalentemente,



−*λ*1 + *λ*3 = 1,

− *λ*2 + *λ*3 = 0,

 *λ*1 + *λ*2 + *λ*3 = 1,

cuya solucio´n es *λ*1 = −1 , *λ*2 = 2 , *λ*3 = 2 . Por tanto, sumando los dos primeros vectores, que

3 3 3

pertenecen a *V*1, obtenemos la descomposicio´n deseada:

1

*v* = − (−

1, 0, 1) +

2

(0,

−1, 1) +

2

(1, 1, 1) =

( 1 , −2 , 1 ) + ( 2 ,

2 , 2 ) .

3 3 3

3 3 3

3 3 3

Solucio´n 9.1.

1. *f* no es una aplicacio´n lineal porque *f* (0, 0) = *x* 2 ̸= 0 + 0*x* + 0*x* 2.
2. *f* es una aplicacio´n lineal ya que
   1. *f* (*x* , *y* , *z* ) + *f* (*u*, *v* , *w* ) = (*x* − 2*z* ) + (*u* − 2*w* ) = (*x* + *u*) − 2(*z* + *w* ) = *f* (*x* + *u*, *y* + *v* , *z* + *w* );
   2. *λf* (*x* , *y* , *z* ) = *λ*(*x* − 2*z* ) = *λx* − 2*λz* = *f* (*λx* , *λy* , *λz* ) = *f* (*λ*(*x* , *y* , *z* )).

(0 0)

0 0

0 0

1. *f* no es una aplicacio´n lineal porque *f* 0 0 = 0 0 ̸= 0 0.

1 1

0 0

1. *f* no es una aplicacio´n lineal porque *f* (2 (2 2)) = *f* (4 4) = 16*x* 2 + 4*x* + 4 pero no coincide con

2 2 4 4

( )

2*f* 2 2 = 2(4*x* 2 + 2*x* + 2) = 8*x* 2 + 4*x* + 4.

2 2

Solucio´n 9.2.

1. ker(*f* ) = t(*a*, *b*) ∈ R2 | *f* (*x* , *y* ) = (0 0)1 = t(*a*, *b*) ∈ R2 | (*a* + *b b*) = (0 0)1 = {(0, 0)} ya que el

0 0



**** *a* + *b* = 0

0 *a* 0 0

sistema

****

*b* = 0

*a* = 0

0 = 0

es compatible determinado con solucio´n *a* = *b* = 0.

1. ker(*f* ) = {*ax* 2 + *bx* + *c* ∈ R2[*x* ] | *f* (*ax* 2 + *bx* + *c*) = 0} = {*ax* 2 + *bx* + *c* ∈ R2[*x* ] | *a* + 2*b* − *c* = 0} =

= {(*α* − 2*β*)*x* 2 + *βx* + *α* ∈ R2[*x* ] | *α*, *β* ∈ R} = {*α*(*x* 2 + 1) + *β*(−2*x* 2 + *x* ) ∈ R2[*x* ] | *α*, *β* ∈ R} =

= ⟨*x* 2 + 1, −2*x* 2 + *x* ⟩,

 −

donde hemos resuelto la ecuacio´n

Solucio´n 9.3.

{*a* + 2*b* − *c* = 0 ⇒

*a* = *α* 2*β*,

*b* = *β*,

 *c* = *α*,

con *α*, *β* ∈ R.

1. Como *B* = {(1, 0), (0, 1)} es un sistema generador de R2, entonces

Im(*f* ) = ⟨*f* (1, 0), *f* (0, 1)⟩ = ((1 0) , (1 1)) .

0 1 0 0

1. Como *B* = {1, *x* , *x* 2} es una base de R2[*x* ], entonces

Solucio´n 9.4.

Im(*f* ) = ⟨*f* (1), *f* (*x* ), *f* (*x* 2)⟩ = ⟨−1, 2, 1⟩ = ⟨1⟩.

1. Como dim(R2) = 2, basta con comprobar que los dos vectores de *B* son linealmente independientes y esto es cierto ya que rg (−1 1) = rg (−1 1) = 2.

2 1

0 3

1. Calculamos las coordenadas de la imagen de los elementos de *B* con respecto a *Bc* :

*f* (2, 1) = (0 −1) = 0 · (1 0) − 1 · (0 1) + 1 · (0 0) + 2 · (0 0) = [0, −1, 1, 2]*B* ,

1 2

0 0

0 0

1 0

0 1

*c*

*f* (−1, 1) = ( 1 −2) = 1 · (1 0) − 2 · (0 1) − 1 · (0 0) + 0 · (0 0) = [1, −2, −1, 0]*B* .

−1 0

0 0 0 0 1 0 0 1 *c*

 0 1 

Entonces, *MB* ←*B* (*f* ) = −1 −2.

*c*

 1 −1

2 0

1. ker(*f* ) =

t(*x* , *y* ) ∈ R2 | *f* (*x* , *y* ) =

0 0 =

(

)1

0 0

****

****

*α*

[*α*, *β*]*B* | *MBc* ←*B* (*f* ) *β*

(

)

0

= 0**** =

0

****



      

0

  

−

*α β*

2*α*



0****

0 1 0

****

(

)

****

****

  

0

*β* 0 ****

= [*α*, *β*]*B* | −1 −2 *α*

****

 1 −1

*β*

0****

****



2 0

=   =

0

[*α*, *β*]*B* | −*α* − 2*β* = 0 =

0

= {[0, 0]*B* } = ⟨[0, 0]*B* ⟩ = ⟨(0, 0)⟩.

1. Como R2 = ⟨(2, 1), (−1, 1)⟩, entonces Im(*f* ) = ⟨*f* (2, 1), *f* (−1, 1)⟩ = ⟨[0, −1, 1, 2]*B* , [1, −2, −1, 0]*B* ⟩

y como adema´s, rg (1 −2 −1 0) = 2, deducimos que los vectores con coordenadas [0, −1, 1, 2]*B*

0 −1 1 2

y [1, −2, −1, 0]*B* son linealmente independientes y una base de Im(*f* ) es t(0 −1) , ( 1 −2)1.

1. Como *MBc* ←*B′* (*f* ) = *MBc* ←*B* (*f* )*PB*←*B′* , calculamos *PB*←*B′* :

1 2 −1 0

*c c c*

t 1 = 2*α* − *β* t *α* = 1

3

t − ⇒

t *λ* =

(1, 0) = *α*(2, 1) + *β*(−1, 1) ⇒

0 = *α* + *β* ⇒

3

*β* = −1

⇒ (0, 1) =

,

,

i 1 −1 l

3

3

*B*

(0, 1) = *λ*(2, 1) + *γ*(−1, 1) ⇒

Entonces, *PB*←*B′* = 1 ( 1 1) y

i

l

0 = 2*λ γ*

1 = *λ* + *γ*

1

3

*γ* = 2

3

⇒ (0, 1) =

1 2

, .

1. 3 *B*

*c* 3 −1 2

 0 1  (

) −1 2 

*M ′* (*f* ) = *M*

(*f* )*P*

*′* = 1 −1 −2

1 1 = 1  1 −5 .

Solucio´n 9.5.

*Bc* ←*Bc*

 1 

*Bc* ←*B*

1

*B*←*Bc*

3  1 −1

2 0

−1 2

3  2 −1

2 2

* 1. Como rg(*A*) = rg −1 = rg 0 = 1, deducimos que *f* es inyectiva (rg(*A*) = dim(R) = 1), no es

2

0

sobreyectiva (rg(*A*) = 1 ̸= 3 = dim(R2[*x* ])) y no es biyectiva (porque no es sobreyectiva).

* 1. *f* no es inyectiva porque ker(*f* ) = (0, 0) (ya que (0, 1) ker(*f* )), no es sobreyectiva porque

̸ { } ∈

dim(R3) = 3 *>* 2 = dim(R2) y tampoco es biyectiva porque no es inyectiva (o sobreyectiva).

Solucio´n 9.6.

1. Calculamos las coordenadas de las ima´genes de los elementos de *B* con respecto *B*′:

*f* (*v*1) = *w*1 + 2*w*2 = [1, 2]*B′* , *f* (*v*2) = −*w*1 = [−1, 0]*B′* , *f* (*v*3) = *w*1 + *w*2 = [1, 1]*B′* ,

entonces, *MB′*←*B* (*f* ) = (1 −1 1).

2 0 1

1. Como dim(*W* ) = 2 (ya que la base *B*′ tiene dos elementos) y *C* tiene dos vectores, basta con comprobar que esos vectores son linealmente independientes y esto es cierto ya que

rg ( 1 2) = rg (1 2) = 2.

−1 0 0 2

Por lo tanto, deducimos que *C* es una base de *W* .

1. Calculamos las coordenadas de las ima´genes de los elementos de *B* con respecto *B*′:

Sabemos que *f* (*v*1) = [1, 0]*C* y *f* (*v*2) = [0, 1]*C* y

*f* (*v*3) = *w*1 + *w*2 = *αf* (*v*1) + *βf* (*v*2) = *α*(*w*1 + 2*w*2) + *β*(−*w*1) ⇒ 0 = (*α* − *β* − 1)*w*1 + (2*α* − 1)*w*2

Al ser *B*′ una base, los vectores *w*1 y *w*2 son linealmente independientes y como tenemos una combinacio´n lineal nula de esos dos elementos, deducimos que

y por lo tanto, Solucio´n 9.7.

2

2

1. Puesto que

*f* (*v*3) = [ 1 ,

−1 ]*C*

*α* − *β* − 1 = 0

2*α* − 1 = 0

t ⇒

. Entonces, *MC*←*B* (*f* ) =

1

2

*β* = −1 ,

t *α* = ,

2

1

(1 0 ).

2

0 1 −1

2

*f* (1, 0, 0) = (1, 0, 1) = [1, 0, 1]*Bc* ,

*f* (0, 1, 0) = (1, 0, 0) = [1, 0, 0]*Bc* ,

*f* (0, 0, 1) = (0, 1, 1) = [0, 1, 1]*Bc* ,

 

1 1 0

se obtiene que *MBc* ←*Bc* (*f* ) = 0 0 1 .

 

1 0 1

1. Sea *V* el subespacio de ecuacio´n *x* + *y* + *z* = 0. Resolviendo el sistema formado por esa u´nica ecuacio´n impl´ıcita, se obtiene que los vectores *v*1 = (0, 1, 1), *v*2 = ( 1, 0, 1) forman una base de *V* . Sus ima´genes,

− −

*f* (*v*1) = (−1, 1, 1), *f* (*v*2) = (−1, 1, 0),

forman una base del subespacio *f* (*V* ). Por tanto, *f* (*V* ) = ( 1, 1, 1), ( 1, 1, 0) (es un plano, de ecua- cio´n *x* + *y* = 0).

⟨ − − ⟩

1. Un vector *v* = (*x* , *y* , *z* ) ∈ R3 cumplira´ que *f* (*v* ) ∈ *W* si satisface la ecuacio´n impl´ıcita de *W* , es decir, si *x* − *y* = 0. Puesto que

*f* (*x* , *y* , *z* ) = (*x* + *y* , *z* , *x* + *z* ),

*f* (*v* ) cumplira´ la ecuacio´n si la diferencia entre su primera y segunda coordenada es cero, esto es, si

que es la ecuacio´n de un plano en R3.

Solucio´n 9.8.

(*x* + *y* ) − *z* = 0,

1. Puesto que *B*′ = {(1, 1), (2, 1)} es base de R2 (son linealmente independientes), y adema´s

*f* (1, 1) = (2, 2), *f* (2, 1) = (0, 0),

se tiene que *MB* ←*B′* = (2 0).

*c* 2 0

Finalmente,

*MB* ←*B* (*f* ) = *MB* ←*B′* (*f* )*PB′*←*B*

*c*

*c*

*c*

= *MB* ←*B′* (*f* ) (*PB* ←*B′* )−1 =

*c*

*c*

*c*

(2 0) (1 2)−1

=

=

=

.

2 0

1 1

(2 0) (−1 2 )

2 0

1 −1

(−2 4)

−2 4

1. Empleando de nuevo la matriz cambio de base adecuada, tenemos que

*MB′*←*B′* (*f* ) = *PB′*←*B MB* ←*B′* (*f* ) = (−1 2 ) (2 0) = (2 0) .

*c*

*c*

1 −1

2 0

0 0

Solucio´n 9.9. Recordemos que, dada una matriz cuadrada *A* = (*aij* ) ∈ M*n*, se define la traza como

*n*

L

tr(*A*) = *a*11 + *a*22 + ... + *ann* = *aii* .

*i* =1

En el caso de M2, la aplicacio´n viene dada por *f* (*A*) = *a*11 + *a*22.

1. *f* es lineal, puesto que si *A*, *B* ∈ M2 y *λ* ∈ R se cumple:
   1. *f* (*A*) + *f* (*B*) = *a*11 + *a*22 + *b*11 + *b*22 = *a*11 + *b*11 + *a*22 + *b*22 = *f* (*A* + *B*);
   2. *λf* (*A*) = *λ*(*a*11 + *a*22) = *λa*11 + *λa*22 = *f* (*λA*).
2. Sea *A* ∈ M2 tal que *f* (*A*) = 0. Por la definicio´n de traza, *A* verifica la ecuacio´n impl´ıcita

tr(*A*) = *a*11 + *a*22 = 0

cuya solucio´n es

*a*11 = −*λ*, *a*12 = *γ*, *a*21 = *β*, *a*22 = *λ*,

con *λ*, *β*, *γ* ∈ R. Matricialmente:

ker(*f* ) = t(−*λ γ*) : *λ*, *β*, *γ* ∈ R1 .

Se tiene por tanto que dim(ker(*f* )) = 3 y una base viene dada por:

*β λ*

*B* = t(−1 0) , (0 1) , (0 0)1 .

ker(*f* )

0 1

0 0

1 0

Solucio´n 9.10. Si realizamos operaciones elementales por filas para calcular el rango de *MBc* (*f* ),

4 2 2

2 1 1

2 1 1 

*α* 4 4 ∼ *α* 4 4 ∼ 0 4 − *α* 4 − *α*  ,

2

2

2 1 *β*

*F*1 → 1 *F*1

2 1 *β*

*F*2 →*F*2 − *α F*1 *F*3 →*F*3 −*F*1

2

0 0

2

*β* − 1

podemos hacer el siguiente ana´lisis por casos analizando sus pivotes:

* Si *α* ̸= 8, *β* ̸= 1, entonces rg(*A*) = 3.
* Si *α* ̸= 8, *β* = 1, entonces rg(*A*) = 2.
* Si *α* = 8, *β* ̸= 1, entonces rg(*A*) = 2.
* Si *α* = 8, *β* = 1, entonces rg(*A*) = 1.

Puesto que rg(*A*) = dim(Im(*f* )) y dim(ker(*f* )) + dim(Im(*f* )) = 3, se tendra´ que

* Si *α* ̸= 8 y *β* ̸= 1, entonces *f* es biyectiva porque dim(ker(*f* )) = rg(*A*) = dim(Im(*f* )).
* En resto de casos (*α* = 8 o *β* = 1), *f* no es inyectiva (porque dim(ker(*f* )) ̸= rg(*A*)) ni sobreyectiva (porque dim(Im(*f* )) ̸= rg(*A*)).

Solucio´n 9.11.

1. La aplicacio´n *g* es lineal, puesto que, para todo *A*1, *A*2 ∈ M2, *α* ∈ R, se tiene que
   1. *g* (*A*1 + *A*2) = (*A*1 + *A*2)*B* = *A*1*B* + *A*2*B* = *g* (*A*1) + *g* (*A*2),
   2. *g* (*αA*1) = (*αA*1)*B* = *αA*1*B* = *αg* (*A*1),

por las propiedades del producto matricial.

1. Si calculamos las ima´genes de las matrices de la base cano´nica y las expresamos en coordenadas, se tiene que

*g* (1 0) = (1 0) (1 3) = (1 3) = [1, 3, 0, 0]*B* ,

0 0

0 0

2 6

0 0

*c*

*g* (0 1) = (0 1) (1 3) = (2 6) = [2, 6, 0, 0]*B* ,

0 0

0 0

2 6

0 0

*c*

*g* (0 0) = (0 0) (1 3) = (0 0) = [0, 0, 1, 3]*B* ,

1 0

1 0

2 6

1 3

*c*

*g* (0 0) = (0 0) (1 3) = (0 0) = [0, 0, 2, 6]*B* ,

0 0

0 1

2 6

2 6

*c*

de donde se obtiene que la matriz asociada respecto a la base cano´nica es

1 2 0 0

*MB* ←*B* (*f* ) =   .

3 6 0 0

 

*c*

*c*

0 0 1 2

0 0 3 6

1. Una matriz *A* ∈ M2 pertenece al nu´cleo si cumple que *g* (*A*) = 0, esto es

(*a*11 *a*12) (1 3) = (0 0) .

*a*21 *a*22 2 6 0 0

Se obtiene el sistema de ecuaciones

****

*a*11 + 2*a*12 = 0, 3*a*11 + 6*a*12 = 0,

**** 21

*a*

+ 2*a*22

= 0,

cuya solucio´n es

3*a*21 + 6*a*22 = 0,

*a*11 = −2*µ*, *a*12 = *µ*, *a*21 = −2*λ*, *a*22 = *λ*,

con *λ*, *µ* ∈ R. Por tanto,

ker(*g* ) =

−2*µ µ*

−

t(

2*λ λ*)

| *λ*, *µ* ∈ R1 .

El nu´cleo tiene dimensio´n 2 y una base viene dada por *B*

= t(−2 1) , ( 0 0)1.

1. La dimensio´n de la imagen es igual a 2, dado que

ker(*g* )

0 0 −2 1

dim(Im(*g* ) = dim(M2) − dim(ker(*g* )) = 4 − 2 = 2.

Solucio´n 10.1. Calculamos los valores propios (con sus multiplicidades algebraicas):

3 − *λ* 2 0 

*p*(*λ*) = det(*A* − *λI*3) = det 

−1 −*λ* 0

1 0 2 − *λ*

 = −(*λ* − 2)2(*λ* − 1).

Los valores propios de *A* son *λ*1 = 1 y *λ*2 = 1 con *ma*(1) = 1 y *ma*(2) = 2. Calculamos las multiplicidades geome´tricas:

*mg* (1) = 1 proque 1 ≤ *mg* (1) ≤ *ma*(1) = 1,

 1 2 0 1 2 0

*mg* (2) = 3 − rg(*A* − 2*I*3) = 3 − rg −1 −2 0 = 3 − rg 0 0 0 = 3 − rg 0 −2 0 =

1 2 0

= 3 − 2 = 1.

1 0 0

0 −2 0

0 0 0

Como *ma*(2) = 2 ̸= 1 = *mg* (2), concluimos que *A* no es diagonalizable.

Solucio´n 10.2. Sea *Bc* = {(1, 0), (0, 1)}. Entonces *A* = *MB* ←*B* (*f* ) = (3 −1). Como la matriz es sime´trica

*c*

*c*

2 0

(*A* = *AT* ), deducimos que *f* es diagonalizable. Para obtener la base *B*, necesitamos los valores y vectores propios de *A*.

Calculamos los valores propios (con sus multiplicidades algebraicas):

*p*(*λ*) = det(*A* − *λI*2) = det (3 − *λ* −1) = (*λ* − 2)(*λ* − 1).

2 −*λ*

Los valores propios de *A* son *λ*1 = 1 y *λ*2 = 1 con *ma*(1) = 1 y *ma*(2) = 1. Calculamos el subespacio propio *V*1:

*V*1 = t(*x* , *y* ) ∈ R2 | *A* (*x* ) = 1 (*x* )1 = t(*x* , *y* ) ∈ R2 | (*A* − *I*2) (*x* ) = (0)1 ,

*y*

*y*

*y*

0

resolvemos el sistema (*A* − *I*2)*X* = 0, es decir, t 2*x* − *y* = 0 ⇒ SCI con solucio´n: t *x* = *α*, con *α* ∈ R.

Entonces,

*V*1 = {(*α*, 2*α*) ∈ R2

| *α* ∈ R} = ⟨(1, 2)⟩.

2*x* − *y* = 0

*y* = 2*α*,

Calculamos el subespacio propio *V*2:

*V*2 = t(*x* , *y* ) ∈ R2 | *A* (*x* ) = 2 (*x* )1 = t(*x* , *y* ) ∈ R2 | (*A* − 2*I*2) (*x* ) = (0)1 ,

*y*

*y*

*y*

0

resolvemos el sistema (*A* − 2*I*2)*X* = 0, es decir, t *x* − *y* = 0 ⇒ SCI con solucio´n: t *x* = *β*,

con *β* ∈ R.

Entonces, *V*2 = {(*β*, *β*) ∈ R2 | *β* ∈ R} = ⟨(1, 1)⟩.

2*x* − 2*y* = 0

*y* = *β*,

La base que buscamos es *B* = {(1, 2), (1, 1)}.

−3 0 −*a*

Solucio´n 10.3. Si *B* es la base cano´nica de R3, entonces *A* = *MB*←*B* (*f* ) = 0 2 0 .

 

1 0 0

Calculamos los valores propios de *A*:

−3 − *λ* 0 −*a*

(−3 − *λ* −*a*)

*p*(*λ*) = det(*A* − *λI*3) = det  0 2 − *λ* 0  = (2 − *λ*)(−1)2+2 det =

1 0 −*λ*

Adj. *C*2

1 −*λ*

= (2 − *λ*) [*λ*(3 + *λ*) + *a*] = (2 − *λ*)(*λ*2 + 3*λ* + *a*).

Como las ra´ıces de la ecuacio´n *λ*2 + 3*λ* + *a* = 0 vienen dadas por *λ* = −3±√9−4*a* , deducimos que *f* tiene tres valores propios (no necesariamente distintos) si 9 − 4*a* ≥ 0, es decir, s2i *a* ≤ 9 .

4

Solucio´n 10.4.

1. Como *λ* = 3 es valor propio de *A*, sabemos que 3 es ra´ız del polinomio caracter´ıstico, es decir,

*p*(3) = 0. Calculamos:

 

−2 *β β* 0 

 

*p*(3) = det(*A* − 3*I*4) = det  1 −1 −1 0  =

−2 *β β*

(−5)(−1)4+4 det  1 −1 −1 =

 0 0 −2 0  Adj. *C*4

*β* 1 0 −5

= (−5)(−2)(−1)3+3 det (−2 *β* ) = 10(2 − *β*) = 0 ⇒ *β* = 2.

1 −1

1. Calculamos el subespacio propio *V*3:

4 *y y*

2 *y* 0

0 0 −2

Adj. *F*3

****

*x*  *x* ****

****

*x*  0****

*V*3 =

****

(*x* , *y* , *z* , *t*) ∈ R | *A*   = 3   =

*t*

*t*

(*x* , *y* ) ∈ R | (*A* − 3*I*4)   =   ,

*t*

0

resolvemos el sistema (*A* − 3*I*4)*X* = 0:



*z* 

*z* ****

****







−2 2 2 0 0

1 −1 −1 0 

0

0 0 −2 0

2 1 0 −5

0

0

∼ 

2

2 2 2 0

0 0 0 0

−

0

*z* 

0****

 ∼ 

0

0 0 −2 0

0 3 2 −5

0  *F*2 ↔*F*4 

0

−2 2 2 0

0 3 2 −5

−

0 0 2 0

0 0 0 0

0 

 .

0



0

0

  *x* = 5*α* ,





*F*2 →*F*2 + 1 *F*1

*F*4 →*F*4 +*F*1

Es decir

*x* − *y* − *z* = 0

3*y* + 2*z* − 5*t* = 0

⇒ SCI con solucio´n:



3

*y* = 5*α* ,

*z* = 0,

con *α* ∈ R. Entonces,

3

 *z* = 0

**** *t* = *α*,

*V* = t( 5*α* , 5*α* , 0, *α*) ∈ R2 | *α* ∈ R1 = (( 5 5 ))

3

3

3

3

,

3

, 0, 1

y tres vectores de *V*3 son ( 5 , 5 , 0, 1), (5, 5, 0, 3) y (−5, −5, 0, −3).

3

3

1. Calculamos el polinomio caracter´ıstico:

1 − *λ* 2 2 0 

*p*(*λ*) = det(*A* − *λI*4) = det 



1 2 − *λ* −1 0

0 0 1 − *λ* 0

2 1 0 −2 − *λ*

=

Adj. *C*4

1 − *λ* 2 2 

= (−2 − *λ*)(−1)4+4 det 



1 2 − *λ* −1

0 0 1 − *λ*

=

Adj. *F*3

= (−2 − *λ*)(1 − *λ*)(−1)3+3 det (1 − *λ* 2 ) = (−2 − *λ*)(1 − *λ*)[(1 − *λ*)(2 − *λ*) − 2] =

1 2 − *λ*

= (−2 − *λ*)(1 − *λ*)*λ*(*λ* − 3).

Los valores propios son *λ*1 = 0, *λ*2 = 1, *λ*3 = 2 y *λ*4 = 3. Como *A* 4 tiene 4 valores propios distintos, es diagonalizable.

− ∈ M

1 0   4  0

|  |  |
| --- | --- |
| 2 | 2 |
| 2 | −1 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

0 −2 0

1

1. Calculamos *Av* =    = . Como *Av* = 0 · *v* , deducimos que *v* es un vector

0 0   0  0

2

−2

1

0

*A* asociado al valor propio *λ* = 0

propio de

.

Solucio´n 10.5. Calculamos el polinomio caracter´ıstico de *A*:

2 − *λ* −2 −2 

*p*(*λ*) = det(*A* − *λI*3) = det 

−1 1 − *λ* 1

1 −1 −1 − *λ*

 = −*λ*3 + 2*λ*2 = *λ*2(−*λ* + 2),

y obtenemos que los autovalores de *A*: *λ* = 0, que es autovalor doble (o dicho de otro modo, tiene multiplicidad algebraica 2) y *λ* = 2, que es autovalor simple (la multiplicidad algebraica es 1).

El subespacio propio asociado a *λ* = 0 es el nu´cleo de *A*, *V*0 = ker(*A*). Resolvemos el sistema *AX* = 0:

 2 −2 −2 0 

 1 −1 −1 0 

 1 −1 −1 0 

 −1 1 −1 0  *F* ∼  −1 1 −1 0  *F* ∼  0 0 0 0  ,

1 −1 −1

0

1 ↔*F*3

2 −2 −2

0

2 →*F*2 +*F*1

*F*3 →*F*3 −2*F*1

0 0 0

0

y vemos que el nu´cleo viene definido por la ecuacio´n *x* − *y* − *z* = 0, cuya solucio´n es

*V*0 = {(*µ* + *β*, *µ*, *β*) | *β*, *µ* ∈ R}.

La multiplicidad geome´trica de *λ* = 0 es 2 y una base del nu´cleo es {(1, 0, 1), (0, 1, 1)}.

Para el segundo espacio propio, resolvemos el sistema de ecuaciones asociado a *V*2 = ker(*A* − 2*I*3):

 0 −2 −2 0   1 −1 −3 0   1 −1 −3 0   1 −1 −3 0 

 −1 −1 1 0  *F* ∼  −1 −1 1 0  *F* ∼  0 −2 −2 0  *F* ∼ *F*  0 −2 −2 0  .

1 −1 −3

0

1 ↔*F*3

0 −2 −2

0

2 ↔*F*2 +*F*1

0 −2 −2

0

3 ↔*F*3 − 2

0 0 0

0

La solucio´n del sistema escalonado es la siguiente:

*V*−2 = {(2*β*, −*β*, *β*) | *β* ∈ R},

de donde obtenemos el autovector (2, −1, 1) como base. La multiplicidad geome´trica de *λ* = −2 es 1.

Dado que las multiplicidades geome´tricas y algebraicas coinciden para *λ* = 0 y *λ* = 2, la matriz *A* es diagonalizable.

−

Solucio´n 10.6. Si tomamos una matriz sime´trica 2 × 2, es decir, *A* = (*a b*) con *a*, *b*, *c* ∈ R, y calculamos

*b c*

su polinomio caracter´ıstico

− 2 (

*p*(*λ*) = det(*A λI* ) = det *a* − *λ b*

*b c* − *λ*

=

) = (*a* − *λ*)(*c* − *λ*) − *b*2 = *λ*2 − (*a* + *c*)*λ* + (*ac* − *b*2),

al calcular sus ra´ıces vemos que

(*a* + *c*) ± (*a* + *c*)2 − 4(*ac* − *b*2) (*a* + *c*) ± (*a* − *c*)2 + 4*b*2

2

*λ* =

=

2

.

=

(*a* + *c*) ± √*a*2 + *c*2 + 2*ac* − 4*ac* + 4*b*2 2

Como (*a c*)2 + 4*b*2 0, las ra´ıces son siempre nu´meros reales (la ra´ız es siempre mayor o igual a 0). Pueden darse dos casos:

− ≥

* (*a c*)2 + 4*b*2 *>* 0, en cuyo caso la matriz tiene dos autovalores reales distintos y es, por tanto, diagonalizable.

−

* (*a c*)2 + 4*b*2 = 0, lo que sucede si *a* = *c*, *b* = 0. En ese caso, *A* es tambie´n diagonalizable ya que es una matriz diagonal.

−

Solucio´n 10.7.

1. Calculamos el polinomio caracter´ıstico:

 

−*λ* 2 1

det(*A* − *λI*3) = det 2 3 − *λ* 2 = −*λ*3 + 3*λ*2 + 9*λ* + 5 = −(*λ* + 1)2(*λ* − 5),

 

1 2 −*λ*

y deducimos que los autovalores de *A* son: *λ* = 1, con multiplicidad algebraica 2, y *λ* = 5, con multiplicidad algebraica 1.

−

Del mismo modo,

2 − *λ* 1 0 

det(*B* − *λI*3) = det 

−1 2 − *λ* 0

0 0 −1 − *λ*

 = −*λ*3 + 3*λ*2 − *λ* − 5 = −(*λ* + 1)(*λ*2 − 4*λ* + 5).

Las ra´ıces del polinomio caracter´ıstico son 1, 2 *ι*˙, 2 + *ι*˙, luego tiene un u´nico autovalor real con multiplicidad algebraica 1 y dos autovalores complejos, 2 + *ι*˙ y 2 *ι*˙, tambie´n con multiplicidad algebraica 1.

−

− −

1. Si calculamos los subespacios propios de *A*, tenemos que *V*−1 = ker(*A*+*I*3). Si resolvemos el sistema

(*A* + *I*3)*X* = 0,









1 2 1 0 1 2 1 0

 2 4 2 0  *F* ∼ 2*F*  0 0 0 0  .

1 2 1

0

2 →*F*2 −

1

0 0 0

0

*F*3 →*F*3 −*F*1

El nu´cleo tiene por tanto una u´nica ecuacio´n impl´ıcita, *x* + 2*y* + *z* = 0, y la solucio´n es

*V*−1 = {(−2*µ* − *β*, *µ*, *β*) | *β*, *µ* ∈ R}.

 2 −2 2

1 2 −5

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Una base de *V*−1 esta´ formada por los autovect Para el segundo autovalor, resolvemos el sistema   −5 2 1 0   1 2 −5 | | ores {(−2, 1, 0), (−1, 0, 1)}.  de ecuaciones asociado a *V*5  0   1 2 −5  *F*3 →*F*3 +5*F*1 | = ker(*A* − 5*I*3):  0   0  ∼  *−*1  0 *F*2 → 6 *F*2 *F*3 →*F*3 +2*F*2 |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| 0 0 0 | 0 |  |  |

0 *F* ∼ 

2 −2 2



−5 2 1

0  *F*

∼ 2*F*  0 −6 12

1 2 5

 −

0

1 ↔*F*3

0

2 →*F*2 −

1

0 12 −24

∼  0 1 −2

0

0  .

Obtenemos el sistema de ecuaciones *x* + 2*y* − 5*z* = 0,

t

*y* − 2*z* = 0,

cuya solucio´n es

*V*−5 = {(*β*, 2*β*, *β*) | *β* ∈ R}.

Una base es la formada por el autovector {(1, 2, 1)}.

Las multiplicidades algebraica y geome´trica de todos los autovalores coinciden, luego la matriz *A*

es diagonalizable sobre R. Una forma diagonal *D* y una matriz de paso *P* para *A* son

−1 0 0 −2 −1 1

*D* =  0 −1 0 , *P* =  1 0 2 ,

de modo que *A* = *PDP*−1.

0 0 5

0 1 1

La matriz *B* no es diagonalizable sobre R, ya que no tiene tres autovalores reales.

Solucio´n 10.8. A partir de los datos, se sigue que una forma diagonal de *M* es *D* = (2 0 ) respecto

a la base

)

(

{(2, 3), (1, 2)}. Si llamamos

2 1

*P* = *MBc* ←*B* = 3 2 ,

0 −1

la matriz *M* buscada cumple *M* = *PDP*−1. Por tanto

(2 1) (2 0 ) (2 1)−1

(2 1) (2 0 ) ( 2 −1)

(11 −6 )

*M* = 3 2

Solucio´n 10.9.

0 −1 3 2

= 3 2

0 −1

−3 2

= .

18 −10

1. Sea *λ* un autovalor de *A*. Por definicio´n, existe un autovector *v* no nulo tal que *Av* = *λv* . Entonces, si aplicamos *An* al vector *v* , aplicando *n* veces la definicio´n de autovector, vemos que

*Anv* = *An*−1(*Av* ) = *An*−1(*λv* ) = *λAn*−1*v* = *λAn*−2(*Av* ) = *λAn*−2(*λv* ) = *λ*2*An*−2*v* = ... = *λnv* ,

de donde se deduce que *λn* es autovalor de *An*. Como *An* es la matriz nula (su u´nico autovalor es el 0), se deduce que *λn* = 0 y concluimos que *λ* = 0.

1. Sea *λ* un autovalor de *A*. Existe entonces *v* = 0 tal que *Av* = *λv* . Aplicando *A*−1 a ambos lados, deducimos que

̸

*A*−1(*Av* ) = *A*−1(*λv* ),

y como *A*−1*A* = *In* y *A*−1 es lineal, entonces *v* = *λA*−1*v* y despejando:

*A*−1*v* = *λ*−1*v* .

1. Si *λ* es autovalor de *A* entonces es ra´ız del polinomio caracter´ıstico y cumple por ello la ecuacio´n

det(*A* − *λIn*) = 0.

Si trasponemos la matriz *A λIn*, se tiene que (*A λIn*)*t* = *At λI t* = *At λIn* (por las propiedades de la traspuesta y por ser la matriz identidad una matriz sime´trica). Como el determinante de una matriz y de su traspuesta son iguales, se deduce que

*n*

− − − −

det(*A* − *λIn*) = det((*A* − *λIn*)*t*) = det(*At* − *λIn*) = 0,

lo que en particular implica que *λ* es ra´ız del polinomio caracter´ıstico de *At*, y por tanto es autovalor de *At*.

1. Sean *λ*1 y *λ*2 dos autovalores distintos y sean *v*1 y *v*2 sus respectivos autovectores asociados.

Veamos que *v*1 y *v*2 son linealmente independientes. Sean *a*1, *a*2 escalares tales que

*a*1*v*1 + *a*2*v*2 = 0. (2)

Si aplicamos *A* a la igualdad anterior se tiene que

*A*(*a*1*v*1 + *a*2*v*2) = *a*1*Av*1 + *a*2*Av*2 = *a*1*λ*1*v*1 + *a*2*λ*2*v*2 = 0.

Por otro lado, si se multiplica [(2)](#_bookmark23) por *λ*2 conseguimos

*λ*2*a*1*v*1 + *λ*2*a*2*v*2 = 0. (3)

Restando [(3)](#_bookmark24) y [(3)](#_bookmark24) deducimos que

*a*1(*λ*2 − *λ*1)*v*1 = 0

y como *λ*1 = *λ*2 y *v*1 = 0, se sigue que *a*1 = 0. Sustituyendo de nuevo en [(2)](#_bookmark23) se obtiene que *a*2 = 0 y por tanto los autovectores son linealmente independientes.

̸ ̸

Solucio´n 11.1.

1. Vamos a comprobar que la matriz de Gram *GB* (siendo *B* la base cano´nica de R3) es sime´trica y definida positiva.

Calculamos la matriz de Gram:

(1, 0, 0) · (1, 0, 0) (1, 0, 0) · (0, 1, 0) (1, 0, 0) · (0, 0, 1)  2 −2 1

*GB* = (1, 0, 0) · (0, 1, 0) (0, 1, 0) · (0, 1, 0) (0, 1, 0) · (0, 0, 1) = −2 *β* 0 ,

(1, 0, 0) · (0, 0, 1) (0, 1, 0) · (0, 0, 1) (0, 0, 1) · (0, 0, 1)

1 0 6

que es sime´trica (*GB* = *GT* ) y tambie´n necesitamos que sea definida positiva:

24 det(*GB* ) = 11*β* − 24 *>* 0 ⇒ *β >* 11 ;

*B*

det ( 2 −2) = 2*β* − 4 *>* 0 ⇒ *β >* 2;

−2 *β*

det(2) = 2 *>* 0.

Concluimos que la aplicacio´n · es un producto escalar si *β >* 24 .

11

1. Calculamos un sistema generador de *W* :

*W* = {(*x* , *y* , *z* ) ∈ R3 | *x* + *y* − *z* = 0} = {(*α* − *β*, *β*, *α*) ∈ R3 | *α*, *β* ∈ R} = ⟨(1, 0, 1), (−1, 1, 0)⟩.

Como *v* (1, 0, 1) = 2 1 1 2 1 0 2 1 1 + 3 1 0 + 1 1 1 1 + 6 ( 1) 1 = 6 = 0, deducimos

· · · − · · − · · · · · − · · − · − ̸

que *v* no es ortogonal a *W* .

Solucio´n 11.2.

1. ∥*v* ∥ = (2, 0, 1) · (2, 0, 1) = √13 ya que





(2, 0, 1) = *α*(1, 1, 1) + *β*(1, −1, 0) + *γ*(0, 0, 1) ⇒

 

2 = *α* + *β*

0 = *α β*

−

 1 = *α* + *γ*

*α* = 1,

*β* = 1,

⇒

 *γ* = 0,

⇒ *v* = [1, 1, 0]*B* ,

1 7 0 5 1

7

(2, 0, 1) · (2, 0, 1) = 1 1 0 *GB* 1 = 1 1 0 0 9 1 1 = 1 1 0 9 = 13.

0

5 1 4

0

6

1. d(*v* , *w* ) = ∥*v* − *w* ∥ = ∥(2, 2, 1) − (2, 2, 0)∥ = ∥(0, 0, 1)∥ = (0, 0, 1) · (0, 0, 1) = √4 = 2.

Solucio´n 11.3.

1. *p*(*x* ) · *q*(*x* ) = (*x* + *x* 2) · (1 + *x* ) = 1 · 0 + 1 · 1 + 0 · 1 + 1 · 1 + 1 · 0 + 2 · 0 · 1 = 2.
2. Como ∥*r* (*x* )∥ = (−*x* 2) · (−*x* 2) = (−1) · (−1) = 1, el vector *r* (*x* ) es unitario.

*p*(*x* ) · *p*(*x* ) *p*(*x* ) · *q*(*x* ) *p*(*x* ) · *r* (*x* )  2 2 −1

(c) *GB* =

*q*(*x* ) · *p*(*x* ) *q*(*x* ) · *q*(*x* ) *q*(*x* ) · *r* (*x* )

*r* (*x* ) · *p*(*x* ) *r* (*x* ) · *q*(*x* ) *r* (*x* ) · *r* (*x* )

=

2 5 0

−1 0 1

.

Solucio´n 11.4.

1. Como *b*1 = (1, 2, 0, −1) y *b*2 = (2, 1, 1, 0) son linealmente independientes (porque tienen rango 2), el conjunto *B* = {*b*1, *b*2} es una base de *T* . Utilizamos el me´todo de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal *B*′ = {*w*1, *w*2} a partir de *B*.

*b*1 (1, 2, 0, −1)

*w*1 = =

∥*b*1∥

(1, 2, 0, −1) ( 1 2 −1 )

i ( 1 2 −1 )l

(1, 2, 0, −1) · (1, 2, 0, −1) = √1 + 4 + 0 + 1 =

√6 , √6 , 0, √6

.

*u*2 = *b*2 − *Pr* ⟨*w*1 ⟩(*b*2) = *b*2 − (*b*2 · *w*1)*w*1 = *b*2 −

(2, 1, 1, 0) ·

√6 , √6 , 0, √6

*w*1 =

i 2 2 l

= *b*2 −

√6 + √6 + 0 + 0

*w*1 = (2, 1, 1, 0) −

, , 0,

6 6

=

,

3

, 1,

3 3

;

( 4 8 −4 ) ( 4 −1 2 )

6

*u*2

( 4 , −1 , 1, 2 )

( 4 , −1 , 1, 2 )

( 4

−1 1

2 )

*w*2 = ∥*u* ∥ = J 4 −1 2

2

( 3 ,

3 , 1, 3 ) · ( 3 ,

9 + 9 + 1 + 9

3

3

3

4 −1

3 , 1, 3 )

2 = J 4 1

4 = √18 , √18 , √2 , √18 .

Una base ortonormal de *T* es *B*′ = { √1 , √2 , 0, √−1 , √4

3

6

6

6

18

3

3

, √−1 , √1 , √2

18

2

}.

1. Como (*x* 2 1) (*x* 2 + 2*x* + 3) = 3 1 1 + 2 0 2 + ( 1) 3 = 0, la base *B* es ortogonal y una base ortonormal de *W* sera´

− · · · · · − ·

18

′ t *x* 2 − 1

*x* 2 + 2*x* + 3 1

t 1 2

1 1 2 1

3 1

ya que

*B* = ,

∥*x* 2 − 1∥

=

∥*x* 2 + 2*x* + 3∥

2 *x* − 2 , √20 *x*

+ √5 *x* + √20

1. Como

*x* 2 1 = (*x* 2 1) (*x* 2 1) = 3 1 1 + 2 0 0 + ( 1) ( 1) = √4 = 2,

∥*x* 2 + 2*x* + 3∥ = (*x* 2 + 2*x* + 3) · (*x* 2 + 2*x* + 3) = √3 · 1 · 1 + 2 · 2 · 2 + 3 · 3 = √20.

∥ − ∥ − · − · · · · − · −

*S* = t(*a b*) | *a* − *b* + *c* − 2*d* = 0, *b* − *c* + *d* = 0, *c* + *d* = 01 = t( *α* −2*α*) | *α* ∈ R1 =

*c d*

= (( 1 −2)) ,

−1 1

una base de *S* es *B* = t( 1 −2)1. Y como adema´s

−1 1

−*α α*

( 1 −2) = s( 1 −2) · ( 1 −2) = 1 · 1 + (−2) · (−2) + (−1) · (−1) + 1 · 1 = √7,

f √

√ \ es una base ortonormal de

−1 1

−1 1

−1 1

entonces

Solucio´n 11.5.

*B*′ =

1 −2

7 7

*S* .

−1 1

√

√

7 7

*b*1 · *b*1 *b*1 · *b*2 *b*1 · *b*3 1 0 1

1. *GB* = *b*2 · *b*1 *b*2 · *b*2 *b*2 · *b*3 = 0 1 0.

1 0 2

*b*3 · *b*1 *b*3 · *b*2 *b*3 · *b*3

1. d(*b*1, *b*3) = (*b*1 − *b*3) · (*b*1 − *b*3) = √*b*1 · *b*1 − *b*1 · *b*3 − *b*1 · *b*1 + *b*3 · *b*3 = √1 + 1 + 1 + 2 = √5.

Como cos((*b*3 − *b*1), *b*2) = (*b*3 −*b*1 )·*b*2 = √0 = 0, entonces A´ngulo((*b*3 − *b*1), *b*2) = *π* .

∥*b*3−*b*1∥∥*b*2∥ 5·1 2

1. Utilizamos el me´todo de Gram-Schmidt para obtener la base ortonormal de *V* . Calculamos:

*v* = *b*1 = *b*1 = *b* .

1

1

∥*b*1∥ 1

*u*2 = *b*2 − *Pr* ⟨*v*1 ⟩(*b*2) = *b*2 − (*b*2 · *v*1)*v*1 = *b*2 − (*b*2 · *b*1)*v*1 = *b*2 − 0 = *b*2;

= *u*2 = *b*2 = *b*2 = *b* .

∥*u*2∥ ∥*b*2∥ 1

2

*v*

2

*u*3 = *b*3 − *Pr* ⟨*v*1 ,*v*2 ⟩(*b*3) = *b*3 − (*b*3 · *v*1)*v*1 − (*b*3 · *v*2)*v*2 = *b*3 − (*b*3 · *b*1)*b*1 − (*b*3 · *b*2)*b*2 =

= *b*3 − *b*1 − 0 = *b*3 − *b*1;

*v* = *u*3 = *b*3 − *b*1 = *b*3√− *b*1 .

3

∥*u*3∥ ∥*b*3 − *b*1∥ 5

Entonces *B*′ = {*v*1, *v*2, *v*3} = {*b*1, *b*2, √1 (*b*3 − *b*1)}.

 

5

1 0 0

1. Como *B*′ es ortonormal, *GB′* = 0 1 0 .

 

0 0 1

Solucio´n 11.6.

1. Calculamos las coordenadas de los vectores de *Bc* = {*e*1, *e*2, *e*3} con respecto a la base *B*:

 *α*1 = 0

*e*1 = (1, 0, 0) = *α*1(1, 1, 1) + *β*1(1, 1, 0) + *λ*1(1, 0, 0) ⇒

*β*1 = 0

 *λ*1 = 1

*α*

= 0



⇒ (1, 0, 0) = [0, 0, 1]*B* ,

*e*2 = (0, 1, 0) = *α*2(1, 1, 1) + *β*2(1, 1, 0) + *λ*2(1, 0, 0) ⇒

2

*β*2 = 1

 *λ*2 = −1

*α*

= 1



⇒ (0, 1, 0) = [0, 1, −1]*B* ,

*e*3 = (0, 0, 1) = *α*3(1, 1, 1) + *β*3(1, 1, 0) + *λ*3(1, 0, 0) ⇒

para poder utilizar la matriz *GB* .

3

*β* = 1

3 −

 *λ*3 = 0

⇒ (0, 0, 1) = [1, −1, 0]*B* ,

*e*1 · *e*1 =

0 0 1

0

*GB* 0 = 3, *e*1 · *e*2 =

1

 

 

0 0 1

 0 

−1

*GB*  1  = −2,

*e*1 · *e*3 =

1

0 0 1 *GB* −1 = −1, *e*2 · *e*2 =

 

0

0 1 −1

 0 

−1

*GB*  1  = 3,

 

*e*2 · *e*3 =

0 1 −1

1

*GB* −1 = −2, *e*3 · *e*3 =

0

1 −1 0

1

*GB* −1 = 1.

0

 3 −2 −1

Concluimos que *GBc* = −2 3 −2.

−1 −2 1

1. Como (1, 1, 1) = [1, 0, 0]*B* y (0, 1, 0) = [0, 1, −1]*B* , entonces

 0   1 −1 0  0 

−1

(1, 1, 1) · (0, 1, 0) =

1 0 0

*GB*  1  = 1 0 0 −1 2 1  1  =

−1

0 1 3

−1

1 0 0  1  = −1.

−2

1. Como (1, 1, 1) = [1, 1, 1]*B* y (0, 1, 0) = [0, 1, 0]*B* , entonces

*c c*

0

 3 −2 −1 0

−2

(1, 1, 1) · (0, 1, 0) =

1 1 1

*GBc* 1 =

0

1 1 1 −2 3 −2 1 =

−1 −2 1

0

1 1 1  3  = −1.

−2

1. S´ı porque el valor del producto escalar entre dos vectores no var´ıa si no cambia la definicio´n del producto escalar.

Solucio´n 11.7.

1. La matriz de Gram para la base cano´nica *Bc* = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} sera´

(1, 0, 0) · (1, 0, 0) (1, 0, 0) · (0, 1, 0) (1, 0, 0) · (0, 0, 1) 3 1 1

*GBc* = (1, 0, 0) · (0, 1, 0) (0, 1, 0) · (0, 1, 0) (0, 1, 0) · (0, 0, 1) = 1 3 0 .

1. Se tiene que

(1, 0, 0) · (0, 0, 1) (0, 1, 0) · (0, 0, 1) (0, 0, 1) · (0, 0, 1)

1 0 3

3 1 1 1 4

*v* · *v* = 1 0 1 1 3 0 0 = 1 0 1 1 = 8,

de donde ∥*v* ∥ = √*v* · *v* = √8 = 2√2.

1 0 3 1 4

1. Si llamamos *W* = (1, 0, 1) , se tiene que (*x* , *y* , *z* ) es ortogonal a (1, 0, 1) si (*x* , *y* , *z* ) (1, 0, 1) = 0. Empleando la matriz de Gram, esto es equivalente a

⟨ ⟩ ·

3 1 1 1 4

   

 

*x y z* 1 3 0 0 = *x y z* 1 = 0,

1 0 3

1

4

luego la ecuacio´n impl´ıcita de *W* ⊥ es 4*x* + *y* + 4*z* = 0 y entonces

*W* ⊥ = {(*x* , *y* , *z* ) ∈ R3 | 4*x* + *y* + 4*z* = 0}.

Solucio´n 11.8.

1. Calculamos la matriz de Gram para *Bc* = {1, *x* , *x* 2}:

 1 · 1 1 · *x* 1 · *x* 2 

=  *x* · 1 *x* · *x x* · *x* 2  = 3 5 9  ,

*GB*

*c*

3 3 5 

*x* 2 · 1 *x* 2 · *x x* 2 · *x* 2

5 9 17

donde cada producto escalar se ha calculado en base a la definicio´n dada. Por ejemplo,

*x* 2 · *x* 2 = 02 · 02 + 12 · 12 + 22 · 22 = 17.

1. Puesto que *x* = [0, 1, 0]*B* , *x* 2 = [0, 0, 1]*B* , entonces

*c c*

d(*x* , *x* 2) = ∥*x* − *x* 2∥ = ∥(0, 1, 0) − (0, 0, 1)∥ = ∥(0, 1, −1)∥ = (0, 1, −1) · (0, 1, −1).

Si calculamos el producto escalar empleando la matriz de Gram,

(0, 1, −1) · (0, 1, −1) =

0 1 −1

0

*GBc*  1  =

 

0 1 −1

3 3 5 0

3 5 9   1  =

   

1

−

−2

 

−4 = 4.

−8

=

0 1 −1

5 9 17 −1

Se concluye que d(*x* , *x* 2) = √4 = 2.

1. Si tomamos coordenadas y denotamos *v*1 = 1 + *x* = [1, 1, 0]*B* , *v*2 = 1 *x* = [1, 1, 0]*B* , empleando la matriz de Gram podemos calcular

*c* − − *c*

3 3 5  1  6 

∥*v*1∥ = 1 1 0 3 5 9  1 = 1 1 0  8  = 14,

2

5 9 17 0 14

de donde deducimos que ∥*v*1∥ = √14, y tambie´n

3 3 5   1   0 

∥*v*2∥ =

2

1 −1 0 3 5 9  −1 = 1 −1 0 −2 = 2,

luego ∥*v*2∥ = √2.

Solucio´n 11.9.

1. Resolviendo el sistema

5 9 17 0 −4

se obtiene que

*x* + *y* + *z* = 0,

*y* − *z* + 2*t* = 0,

t

*W* = {(−2*µ* + 2*λ*, *µ* − 2*λ*, *µ*, *λ*) ∈ R4 | *λ*, *µ* ∈ R},

de donde dim(*W* ) = 2 y una base de *W* viene dada por *B* = {*e*1, *e*2} siendo *e*1 = (−2, 1, 1, 0) y

*e*2 = (2, −2, 0, 1).

1. A partir de *B*, construimos una nueva base ortogonal *B*′ = *w*1, *w*2 mediante Gram-Schmidt. El primer vector se obtiene normalizando *e*1:

{ }

.

*e*1 (−2, 1, 1, 0) 1

*w*1 = =

∥*e*1∥

( −2 1 1 )

Para el segundo vector de la base ortonormal, calculamos

(−2, 1, 1, 0) · (−2, 1, 1, 0) = √6 (−2, 1, 1, 0) =

√6 , √6 , √6 , 0

( ( −2 1 1 )) ( −2 1 1 )

*u*2 = *e*2 − *Pr* ⟨*w*1 ⟩(*e*2) =

= (2, −2, 0, 1) −

(2, −2, 0, 1) ·

√6 , √6 , √6 , 0

√6 , √6 , √6 , 0

=

√ ( −2 1 1 )

que es perpendicular al primero y al normalizarlo obtenemos

= (2, −2, 0, 1) +

6

√6 , √6 , √6 , 0

= (0, −1, 1, 1),

*u*2 (0, −1, 1, 1) ( −1 1 1 )

*w*2 = =

∥*u*2∥

√3 =

0, √3 , √3 , √3

.

La base ortogonal pedida es *B*′ = { √−2 , √1 , √1 , 0 , 0, √−1 , √1 , √1 }.

1. Finalmente, si *v* = (1, 0, 0, 0), como

6 6 6

−2

3 3 3

se tiene que

*v* · *w*1 = √6 , *v* · *w*2 = 0,

2 ( −2 1 1 )

( −1 1

1 ) ( 2

−1 −1 )

*Pr W* = (*v* · *w*1)*w*1 + (*v* · *w*2)*w*2 = −√6

Solucio´n 11.10.

√6 , √6 , √6 , 0

+ 0 0, √3 , √3 , √3 =

, , , 0 .

3 3 3

∥*u* + *v* ∥

2

+ ∥*u* − *v* ∥

= (*u* + *v* ) · (*u* + *v* ) + (*u* − *v* ) · (*u* − *v* )

= *u* · *u* + 2(*u* · *v* ) + *v* · *v* + *u* · *u* − 2(*u* · *v* ) + *v* · *v*

2

= 2(*u* · *u*) + 2(*v* · *v* ) = 2∥*u*∥2 + 2∥*v* ∥2.

Solucio´n 11.11. Supongamos que *u*, *v* satisfacen

∥*u*∥ + ∥*v* ∥ = ∥*u* + *v* ∥ .

2 2 2

Si expandimos ambos lados de la igualdad, vemos que

*u* · *u* + *v* · *v* = (*u* + *v* ) · (*u* + *v* ) = *u* · *u* + 2*u* · *v* + *v* · *v* .

Despejando llegamos a 2*u* · *v* = 0, lo que implica que *u* · *v* = 0 y entonces *u*, *v* son ortogonales.

Solucio´n 11.12. En primer lugar, tomamos una base de *W* , *BW* = {*w*1, *w*2}, donde

*w*1 = (−1, 1, 2, 0), *w*2 = (0, 0, 0, 1),

y calculamos una base ortonormal, *BW* = {*e*1, *e*2}, mediante el me´todo de Gram-Schmidt.

*w*1 1

( −1 1 2 )

*e*1 = ∥*w* ∥ = √6 (−1, 1, 2, 0) =

1

√6 , √6 , √6 , 0

( (

*e*2 = *w*2 − (*w*2 · *e*1)*e*1 = (0, 0, 0, 1) −

(0, 0, 0, 1) ·

1 1 2

−√6 , √6 , √6 , 0

√6 , √6 , √6 , 0

=

)) ( −1

1 2 )

( −1 1 2 )

Observamos que el resultado es la base original normalizada, ya que era ortogonal de partida.

= (0, 0, 0, 1) − 0

√6 , √6 , √6 , 0

= (0, 0, 0, 1).

El vector de *W* ma´s cercano a *v* = (1, 2, 3, 1) es su proyeccio´n sobre *W* :

√6 , √6 , √6 , 0

+ ((1, 2, 3, 1) · (0, 0, 0, 1)) (0, 0, 0, 1) =

( ( −1

*Pr* *W* (*v* ) = (*v* · *e*1)*e*1 + (*v* · *e*2)*e*2 =

=

(1, 2, 3, 1) ·

√6 , √6 , √6 , 0

1 2

)) ( −1

.

1 2 )

7 ( −1

= √6

√6 , √6 , √6 , 0

+ 1(0, 0, 0, 1) =

1 2 )

( −7 7 7 )

Solucio´n 11.13. Sea *BU* = *u*1, ... , *ur* una base de *U* y *BV* = *v*1, ... , *vs* una base de *V* . Si consideramos el subespacio suma *U* + *V* , el conjunto

{ } { }

, , , 1

6 6 3

*SU*+*V* = {*u*1, ... , *ur* , *v*1, ... , *vs* }

es un sistema generador de *U* + *V* . Teniendo esto en cuenta:

* Si *w* ∈ (*U* + *V* )⊥, *w* es perpendicular a todos los vectores de *U* + *V* . En particular, es perpendicular al sistema de generadores dado, por lo que *w* · *ui* = 0 y *w* · *vi* . Como *BU* y *BV* son bases, se deduce entonces que *w* es perpendicular a todo vector de *U* y a todo vector de *V* , esto es , *w* ∈ *U*⊥ ∩ *V* ⊥.
* Si *w U*⊥ *V* ⊥, *w* es perpendicular a la base de *U* y a la base de *V* , luego es perpendicular al sistema de generadores *SU*+*V* , lo que quiere decir que es perpendicular a cualquier vector de *U* + *V* y, como consecuencia, *w* ∈ (*U* + *V* )⊥.

∈ ∩