La naturaleza de la lógica

José Alejandro Fernández Cuesta

alejandro.fernandez@urjc.es

2022/2023

Índice

Introducción

- Definición de lógica implica compromisos.
  - Podemos definirla como un conjunto de saberes repartidos en disciplinas muy diferentes: informática, ciencias de la computación, matemáticas, filosofía, lingüística, etc. $\Rightarrow$ No es sustantiva.
  - Podemos definirla como una única ciencia transversal a distintas disciplinas (núcleo común) $\Rightarrow$ Sí es sustantiva.
- Interdisciplinariedad $\Rightarrow$ problemática.

¿Qué hacemos cuando hacemos lógica?

Dialéctica

Dialéctica

Desde la grecia clásica (sofistas, Aristóteles) la lógica es eminentemente **dialéctica**.

- Cómo argumentar correctamente.
- Pensamiento, lengua y lenguaje son inseparables.
- Hoy en día queda este remanente en retórica, oratoria, teoría de la argumentación, etc.

La matematización de la lógica

Lógica

- Lógica termina confluyendo con las matemáticas.
- Geometría: nociones, conceptos y demostraciones.
- Álgebra: metodología
- ¿Se puede hacer un *álgebra del pensamiento*?

Dos vías para la lógica a partir del siglo XXI:

- Computación: modelizar razonamientos.
- Fundamentación matemática: ¿qué son los objetos abstractos?

Fin de la lógica natural

Kant

Que la lógica ha tomado este camino seguro desde los tiempos más antiguos es algo que puede inferirse del hecho de que no ha necesitado dar ningún paso atrás desde Aristóteles, salvo que se quieran considerar como correcciones la supresión de ciertas sutilezas innecesarias o la clarificación de lo expuesto, aspectos que afectan a la elegancia, más que a la certeza de la ciencia. Lo curioso de la lógica es que tampoco haya sido capaz de avanzar, hasta hoy, un solo paso. **Según todas las apariencias se halla, pues, definitivamente concluida**.
(KrV: B, VIII).

Validez y verdad

Dos grandes ramas actuales

- **Computación:**
  - Modelizar forma de razonamiento con *lenguajes formales*: terminan evolucionando en teoría de la computación.
  - Hablamos de *lenguajes* de programación, informáticos, puertas *lógicas*, etc.
- **Fundamentación:**
  - Finales del XIX y principios del XX: nuevas entidades y objetos matemáticos *sin intuición* (nuevas geometrías, fundamentación de los números, etc.).
  - Infinitos *en acto*: prueba de la diagonalización de Cantor.
  - ¿Cómo demostrar y entender entidades abstractas en matemáticas?

La lógica se consolida como disciplina al a base de las ciencias de la computación pero también de la fundamentación de objetos matemáticos.

Deducción formal

¿Cómo es posible realizar deducciones formales que sean verdaderas?

Teorema de Euclides

- **Ax. 1. (Definición** $\langle \mathbb{N}, +, <, \cdot, \div \rangle$**)**
- **Ax. 2. (Definición de número primo)**: todo $n \in \mathbb{N} : n > 1$ y n solo tiene dos divisores; él mismo y la unidad.
- **Ax. 3. (Definición de número compuesto)**: todo $n \in \mathbb{N} : n > 1$ y n tiene al menos un divisor además de él mismo y la unidad (son factorizables).
- **Ax. 4. (Teorema fundamental de la aritmética)**: todo entero positivo mayor que 1 es un número primo o un producto único de números primos).

Deducción formal

Teorema de Euclides

1. $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\} : \forall x \in P(\phi x) \wedge \neg\exists x(x \notin P \wedge \phi(x))$
2. $Q = (p_1 p_2 ... p_n) + 1$
3. $Q > 1 \wedge Q \neq p_1, ..., p_n$
4. $\phi(Q)$ *xor* $\neg\phi(Q)$:
   - 4.1. $\mathfrak{v}\big(\phi(Q)\big) = 1 \Longrightarrow \exists p_i(p_i \notin P) \vdash \perp$
   - 4.2. $\mathfrak{v}\big(\phi(Q)\big) = 0 \Longrightarrow \exists f : Q/f \wedge f \in P$
   - 4.3. $Q = c_i p_i : c_i \geq 1 \vdash \perp$

El objeto de estudio de la lógica es el de fundamentar estas demostraciones. Se busca crear un lenguaje lógico que se utilice, precisamente, para poder expresar y fundamentar deducciones o demostraciones como ésta.

Validez y verdad

Nos movemos en plano de: objetos/entidades abstractos.

Validez

Correcta fundamentación de una serie de pruebas, demostraciones y argumentos mediante procesos inferenciales que cumplen con exigencias formales de un cálculo concreto.
Los procesos inferenciales son válidos.

Verdad

1. **NO:** adecuación entre la abstracción de un **objeto** concreto susceptible de incorporarse en un análisis lógico formal y el objeto mismo. Es extralógico.
2. **SÍ:** asignación de valores de verdad a través de una función a ciertos enunciados elementales. Es extralógico.

Verdad/Arriba/Encendido/... 1 Falsedad/Abajo/Apagado/... 0

Validez y verdad

Proposición

Una **proposición** es toda fórmula bien formada susceptible de recibir un valor 1 o 0. Podrán ser compuestas formadas a partir de otras más simples o atómicas. Se suelen representar con p_i una fórmula concreta y con ϕ una cualquiera. Y el estudio del contenido proposicional es extralógico.

Función de asignación de valores de verdad

$$\mathfrak{v}(\phi) = \{1, 0\}$$

$$\mathfrak{v} : \mathcal{L} \longrightarrow \{1, 0\}$$

Actuales disciplinas de la lógica

Teoría de la prueba

- Boole, Frege, Peano, Hilbert, Gentzen.
- Se trasladan nuevos debates desde la filosofía a las matemáticas (se matematiza la dialéctica y la *logística* empieza a ser una rama de las matemáticas).
- Nostros veremos tres cálculos distintos: tablas de verdad, árboles analíticos y deducción natural.

Actuales disciplinas de la lógica

Teoría de la recursión

- Dedekind, Church, Kleene, Turing.
- Los cálculos lógicos como meros formalismos, finalmente permiten generar computación efectiva y la implementación de sistemas deductivos y algoritmos en máquinas que los resuelvan *físicamente*.
- Aquí se estudian las implementaciones computacionales de los resultados lógicos.

Actuales disciplinas de la lógica

Teoría de modelos

- Löwenheim, Skolem, Gödel, Tarski.
- Se estudian estructuras matemáticas y las leyes que obedecen.
- Aquí se desarrollan los principales metateoremas limitativos (parada, incompletitud o Löwenheim-Skolem).
- Es la conocida como *meta-lógica*.

Del lenguaje natural al lenguaje formal

Debemos distinguir:

- Lenguas (habladas) y lenguajes (no hablados).
- Lenguajes naturales (lingüística) y formales (lógicos).

Entendemos el estudio de la lógica como el estudio de los lenguajes formales y sus cálculos deductivos.

Del lenguaje natural al lenguaje formal

Intuicionismo: Poincaré, Brouwer, Lebesgue, Borel

- Los objetos matemáticos solamente existen en la mente.
- Matemática constructivista: no puedo admitir que existe aquello para lo que no hay una prueba efectiva.
- Rechazo de pruebas basadas en la generalización existencial: $\neg\exists x(\Phi(x)) \vdash A \wedge \neg A \Rightarrow \exists x(\Phi(x))$
- Rechazo la regla de la doble negación ($\neg\neg\phi \models \phi$).
- Pérdidas demasiado grandes.

Del lenguaje natural al lenguaje formal

Formalismo: Hilbert, Zermelo, von Neumann

- La matemática se agota en sí misma: no hace falta lógica.
- Un objeto abstracto es solamente aquello para lo que lo esté usando.
- Se interpreta la matemática como un juego de axiomas.
- Teoremas de incompletitud (límites inherentes del método axiomático): ningún sistema aritmético podrá probar su propia completitud.

Del lenguaje natural al lenguaje formal

Logicismo: Frege, Peano, Russell

- La naturaleza de las matemáticas es puramente lógica: debo traducir y reducir toda la matemática a la lógica.
- Paradoja de Russell: $M = \{x : x \notin x\}$.
- Teoremas de incompletitud: si una teoría lógica está mínimamente aritmetizada, entonces habrá fórmulas cuya verdad no podré demostrar

Hoy necesitamos un paso intermedio: teoría de conjuntos:

$$\mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L}_{po} \Rightarrow ST \Rightarrow \text{matemática}$$

El formal lenguaje de la lógica

Sintaxis: manipular signos

- Alfabeto
- Concatenación
- Expresiones bien formadas
- Grado lógico
- Signo lógico principal
- Subfórmulas
- Árboles de descomposición

El lenguaje formal de la lógica

Semántica: interpretar símbolos

- Función veritativa
- Modelos
- Satisfacibilidad
- Consecuencia y verdad lógicas
- Tablas de verdad
- Reglas deductivas y cálculos (A.A. y D.N.)

Lenguaje y metalenguaje

Estratificación y autorreferencialidad

Algunos autores entienden por *metalógica* la estratificación y autorreferencialidad pero esto es representable en un mismo lenguaje.

Metalenguaje

Un **metalenguaje** es aquel lenguaje empleado para estudiar otro lenguaje (llamado *lenguaje objeto*). Habitualmente se utiliza para

- Realizar exposiciones de manera más asequible: ej. "es cierto que 4 es un número par" en lugar de "$v(4 = 2k : k \in \mathbb{N}) = 1$")
- Estudiar ciertas propiedades metalógicas de cálculos o fórmulas lógicas: ej. un lenguaje de orden cero tiene menor capacidad expresiva que uno de primer orden.

Lenguaje y metalenguaje

Lógica de primer orden como metalenguaje

El metalenguaje y el lenguaje objeto pueden coincidir, aunque no tienen por qué. Se suele privilegiar el uso del cálculo de primer orden como metalenguaje debido a su equilibrio entre poder expresivo y satisfacibilidad de propiedades deseables: **Teorema de Lindström**.

Lenguaje y metalenguaje

Metateoremas relevantes

- Consistencia: si no se puede demostrar una fórmula y su negación.
- Completitud: si toda fórmula es un teorema (demostrable).
- Decidibilidad: si existe un procedimiento efectivo a partir del cual, en un número finito de pasos, determinar si una sentencia del lenguaje es o no un teorema de la teoría.

Teoría aristotélica

Distinción fundamental

La distinción fundamental más elemental de todo contenido proposicional (conceptual y lingüístico) es la distinción entre **sujeto** y **predicado**.

Juicios categóricos

Atribución de un predicado a un sujeto. Son los únicos susceptibles de ser verdaderos y, por tanto, los que conforman la lógica: silogística.

Principios fundamentales

Principio de contradicción

Es imposible, en efecto, que un mismo atributo se dé y no se dé simultáneamente en el mismo sujeto y en un mismo sentido (con todas las demás puntualizaciones que pudiéramos hacer con miras a las dificultades lógicas).

Tercio excluso

Por consiguiente, si es imposible afirmar y negar al mismo tiempo con verdad, también será imposible que los contrarios se den simultáneamente, y o bien ambos se darán en algún aspecto, o uno en algún aspecto, y el otro, absolutamente.

Identidad

Tratar de averiguar por qué una cosa es ella misma no es tratar de averiguar nada (...).

Juicios

Tipos de juicios por términos

Término es aquello susceptible de ser sujeto o predicado. Pueden ser singulares (Sócrates) o universales (mortal, hombre). Los singulares sólo pueden ser sujetos. Los universales pueden ser sujetos o predicados.

- Juicios universales: **Todo S es P**.
- Juicios Particulares: **Algún/algunos S es/son P**

Juicios

Tipos de juicios por verdad

Verdadero, para Aristóteles, es *decir de lo que es, que es y de lo que no es, que no es*. Los dos juicios anteriores podrán ser, a su vez:

- Afirmativos.
- Negativos.

Tabla de los juicios

JUICIOS	**Afirmativo**	**Negativo**
Universal	Todo S es P (A)	Ningún S es P (E)
Particular	Algún S es P (I)	Algún S no es P (O)

Figuras de los silogismos

ELEMENTOS	**1ª figura**	**2ª figura**	**3ª figura**	**4ª figura**
Premisa Mayor	MP	PM	MP	PM
Premisa Menor	SM	SM	MS	MS
Conclusión	**SP**	**SP**	**SP**	**SP**

Reglas de silogismos

- No pueden aparecer más de tres términos.
- El término medio no puede aparecer en la conclusión.
- De dos premisas negativas no se sigue nada.
- De dos premisas afirmativas no se se puede seguir una negativa.

De la primera figura

- **AAA**: todos los asturianos son españoles; todos los gijoneses son asturianos $\models$ todos los gijoneses son españoles.
- **EAE**: ningún mamífero es un reptil,

Significado y alcance

Falacia

Tipo de argumento en lenguaje natural que, de acuerdo con la silogística de Aristóteles no es un tipo de argumento *válido*.

- Último residuo de la teoría aristotélica.
- Ámbito de aplicación limitado: oratoria, debates, retórica, dialéctica, etc.
- Estudiadas en teoría de la argumentación (**no** en lógica formal.

Significado y alcance

Tipos

Habitualmente se suelen dividir en dos grupos: formales e informales. Las informales son, propiamente, los argumentos inválidos herederos de la silogística.

Problemas

- No son exhaustivas.
- Teorías pragmáticas critican su posible consideración en distintos contextos (teoría de los *juegos del lenguaje* de Wittgenstein).
- Meramente recreativas.

Falacias informales

Falacias informales

- Ad hominem: se ataca al interlocutor.
- Ad verecundiam: argumento de autoridad.
- Ad ignorantiam: se defiende la verdad (resp. falsedad) por no haberse probado la falsedad (resp. verdad) de una proposición.
- Ad baculum: se defiende un argumento por medio de la fuerza.
- Petitio principii: falacia a demostrar se incluye de manera implícita o explícita entre las premisas.

Falacias informales

Falacias informales

- Ad hominem $\Rightarrow$ contextos jurídicos.
- Ad verecundiam $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ contextos jerarquizados.
- Ad ignorantiam $\Rightarrow$ reducción al absurdo.
- Ad baculum $\Rightarrow$ contextos violentos (utilitarismo).
- Petitio principii $\Rightarrow$ hipótesis.

Falacias formales

Falacias formales

Se basan en la lectura de los cálculos lógicos formales actuales como cálculos silogísticos.

- Aplico los cálculos formales contemporáneos al análisis de inferencias del lenguaje natural.
- Se realiza un abuso de los cálculos.
- Se realiza una extrapolación ilegítima de los resultados lógico-formales.

El **fin** de la lógica formal **no** es el de fundamentar las inferencias en el lenguaje natural. Además, al realizar dicho proceso, surgen paradojas.

Lógica proposicional (orden cero)

José Alejandro Fernández Cuesta

alejandro.fernandez@urjc.es

2022/2023

Índice

Sintaxis Orden Cero

Alfabeto de L

1. Signos lógicos (conectivas monarias y binarias):
   - Negación: $\neg$
   - Conjunción: $\wedge$
   - Disyunción: $\vee$
   - Condicional: $\rightarrow$
2. Constantes universales:
   - $\top$
   - $\bot$
3. Signos proposicionales: p_i
4. Cifras: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
5. Delimitadores

Sintaxis Orden Cero

Concatenación en L

Concatenar es una operación básica que consiste en la producción de *ristras* o *expresiones* de L. Se define como una operación de n argumentos cuyo resultado es una ristra de signos.

Concatenación de signos

- Si x_1 es un signo, $Con(x_1) = x_1$
- Si x_1 y x_2 son signos, $Con(x_1, x_2) = x_1x_2$
- Si $x_1, x_2, ..., x_n$ son signos,
  $Con(x_1, x_2, ..., x_n) = Con\Big(x_1, Con\big(x_2, ..., Con(x_{n-1}, x_n)\big)\Big)$

Sintaxis Orden Cero

Concatenación de ristras

- Si x_1 es una ristra, $Con(x_1) = x_1$
- Si x_1 y x_2 son ristras, o cualquiera de ellos es un signo y el otro una ristra, $Con(x_1, x_2) = Con\big(Con(x_1), Con(x_2)\big) = x_1 x_2$
- Si $x_1, x_2, ..., x_n$ son signos o ristras, $Con(x_1, x_2, ..., x_n) = Con\Big(x_1, Con\big(x_2, ..., Con(x_{n-1}, x_n)\big)\Big)$

Si el resultado es una ristra que solamente contiene signos de L, se trata de una ristra de L. Vía concatenación se pueden formar infinitas expresiones de L.

Ejemplos: $Con(p_5) =$ "p_5"; $Con(\ p_5, \wedge, p\ ) =$ "$p_5 \wedge p$"; $Con(\ p_5, \neg, \wedge, p\ ) =$ "$p_5 \neg \wedge p$".

Fbfs

De todas las ristras de signos producidas por concatenación, solamente serán **fórmulas bien formadas** (fbfs) finitas, aquellas que satisfagan los siguientes criterios:

- Si ϕ es de la forma $p_i : i \in \mathbb{N}$ o $\top$ o $\bot$, entonces ϕ es una fbf.
- Si ψ es una fbf, $\neg\psi$ es una fbf.
- Si ϕ y ψ son fbfs, entonces:
  - $\phi \wedge \psi$ es una fbf.
  - $\phi \vee \psi$ es una fbf.
  - $\phi \rightarrow \psi$ es una fbf.

El conjunto de todas las ristras bien formadas es un subconjunto del conjunto de todas las ristras posibles de L. Llamamos a este subconjunto $\mathcal{L}$.

Grado lógico

El **grado lógico** de una fórmula es una función de $\mathcal{L}$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$gr : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Definida recursivamente como:

0. Sean ϕ y ψ fórmulas en $\mathcal{L}$
1. Si ϕ es una fórmula elemental, o $\top$ o $\bot$ y $gr(\phi) = 0$.
2. $gr(\neg\phi) = 1 + gr(\phi)$
3. $gr(\phi \diamond \psi) = 1 + gr(\phi) + gr(\psi)$

Donde $\diamond$ está por cualquier conectiva binaria.

Sintaxis Orden Cero

Operadores de concatenación

Se define un operador de concatenación para cada conectiva primitiva:

- $Con_{\neg}(\phi) =$ "$\neg\phi$ "
- $Con_{\wedge}(\phi, \psi) =$ "$\phi \wedge \psi$ "
- $Con_{\vee}(\phi, \psi) =$ "$\phi \vee \psi$ "
- $Con_{\rightarrow}(\phi, \psi) =$ "$\phi \rightarrow \psi$ "

Operadores de concatenación

Por tanto, toda fbf se ha construido por aplicación sucesiva de un número limitado de operaciones de concatenación. Por ejemplo, el principio de contradicción $\neg(p \wedge \neg p)$ se construye a partir de la secuencia:

1. $Con_{\neg}(p \wedge \neg p)$
2. $Con_{\wedge}(p, \neg p)$
3. $Con_{\neg}(p)$

Signo lógico principal

En toda fórmula existe un único **signo lógico principal**: aquel introducido por el último operador de concatenación en la secuencia de formación de la fórmula. Puesto que una fórmula ha de ser generada mediante una secuencia finita de aplicaciones de operadores de concatenación, cada fórmula solamente puede formarse de una única manera.

Sintaxis Orden Cero

Subfórmula

- Si ϕ es una fórmula elemental, la única subfórmula de ϕ es ella misma.
- Si ψ es de la forma $\neg\phi$, entonces son subfórmulas de ψ: $\neg\phi$ y todas las subfórmulas de ϕ.
- Si ρ es de la forma $\psi \diamond \phi$, entonces son subfórmulas de ρ: $\psi \diamond \phi$, las subfórmulas de ψ y las subfórmulas de ϕ.

Subfórmula inmediata

- Una fórmula elemental no tiene subfórmula inmediata.
- ϕ es la única subfórmula inmediata de $\neg\phi$.
- ϕ y ψ son las únicas subfórmulas inmediatas de $\phi \diamond \psi$ (resp. subfórmula inmediata de la izquierda y de la derecha).

Árbol de descomposición

El **árbol de descomposición de una fórmula** es una representación diagramática de flujo de su proceso de construcción. La construcción de un árbol de descomposición ha de seguir las siguientes reglas:

1. La fórmula dada se escribe en la raíz del árbol.
2. En los sucesores inmediatos, se escriben las subfórmulas inmediatas.
3. En cada nudo terminal actual se aplica de nuevo 2.
4. Se repite el proceso hasta que en todo nudo terminal del árbol sólo hay fórmulas elementales.

- $(p \to \neg\neg q) \to \neg(q \vee \neg t)$
  - $(p \to \neg\neg q)$
    - p
    - $\neg\neg q$
      - $\neg q$
        - q
  - $\neg(q \vee \neg t)$
    - $q \vee \neg t$
      - q
      - $\neg t$
        - t

Árbol de descomposición

Lema de descomposición única

El proceso de composición y el proceso de descomposición de una fórmula son uno y exactamente el mismo. En representación por medio de árboles solamente cambia el sentido (manteniéndose los valores módulo y dirección y siendo, además, los únicos posibles).

Función veritativa

El valor de verdad de las fbfs atómicas no compete a la lógica, sin embargo, la manipulación de dichas proposiciones, una vez han recibido un valor de verdad, es competencia exclusiva de esta (por eso mismo llevamos el apellido de *formal*, aún cuando no seamos formalistas).

Para definir el comportamiento semántico de las fórmulas definimos:

- Un conjunto de "valores de verdad" $V = \{1, 0\}$.
- El conjunto de fbfs $\mathcal{L}$
- Una función de valoración o asignación, $\mathfrak{v}$, de valores tal que a todo elemento de $\mathcal{L}$ le corresponda uno, y sólo un elemento de V:

  $$\mathfrak{v} : \mathcal{L} \longrightarrow V$$

  Escribimos $\mathfrak{v}(\Phi)$ para representar el valor de verdad de Φ (que será 1 o 0).

Asignación de valores de verdad (definición recursiva):

1. $\mathfrak{v}(\neg\phi) = 1$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 0$ y $\mathfrak{v}(\neg\phi) = 0$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$.
2. $\mathfrak{v}(\phi \wedge \psi) = 1$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ y $\mathfrak{v}(\psi) = 1$. En otro caso, $\mathfrak{v}(\phi \wedge \psi) = 0$.
3. $\mathfrak{v}(\phi \vee \psi) = 0$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 0$ y $\mathfrak{v}(\psi) = 0$. En otro caso, $\mathfrak{v}(\phi \vee \psi) = 1$.
4. $\mathfrak{v}(\phi \rightarrow \psi) = 0$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ y $\mathfrak{v}(\psi) = 0$. En otro caso, $\mathfrak{v}(\phi \vee \psi) = 1$.
5. Si ϕ es una fórmula elemental $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ o $\mathfrak{v}(\phi) = 0$. Este es el caso mínimo o condición de parada del análisis recursivo.

Tablas de verdad

Una tabla de verdad es una matriz tal que cada fila es una interpretación y cada columna un caso o fórmula. Cada valor de la matriz está identificado por el número de orden de la fila y la columna.

	p	q	$p \to q$
i_1	1	1	1
i_2	1	0	0
i_3	0	1	1
i_4	0	0	1

Tabla de verdad para $((p \vee \neg q) \wedge r)$

1. Identificamos cuántos símbolos proposicionales diferentes hay: p, q, r.
2. Construimos la tabla con tantas columnas a la izquierda como símbolos proposicionales hemos identificado y con 2^n interpretaciones donde n es el número de símbolos proposicionales diferentes. En este caso, $2^3 = 8$:

*La fórmula es 2^n porque $\mathcal{L}$ es bivalente.

Semántica de Orden Cero

	p	q	r
i_1			
i_2			
i_3			
i_4			
i_5			
i_6			
i_7			
i_8			

3. Escribimos toda combinación de valores de verdad (interpertación) posible. Las tablas de verdad son exhaustivas:

	p	q	r
i_1	1	1	1
i_2	1	1	0
i_3	1	0	1
i_4	1	0	0
i_5	0	1	1
i_6	0	1	0
i_7	0	0	1
i_8	0	0	0

4. Añadimos una columna final para $\big((p \vee \neg q) \wedge r\big)$ y a su izquierda tantas como subfórmulas inmediatas hasta las elementales. Ninguna columna podrá estar repetida, por tanto, habremos de añadir columnas para: $\neg q$; $(p \vee \neg q)$ y $\big((p \vee \neg q) \wedge r\big)$:

	p	q	r	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$\big((p \vee \neg q) \wedge r\big)$
i_1	1	1	1			
i_2	1	1	0			
i_3	1	0	1			
i_4	1	0	0			
i_5	0	1	1			
i_6	0	1	0			
i_7	0	0	1			
i_8	0	0	0			

5. Añadimos valores de verdad a cada interpretación (fila) de cada expresión (columna) según las reglas semánticas de las conectivas:

	p	q	r	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$\big((p \vee \neg q) \wedge r\big)$
i_1	1	1	1	0	1	1
i_2	1	1	0	0	1	0
i_3	1	0	1	1	1	1
i_4	1	0	0	1	1	0
i_5	0	1	1	0	0	0
i_6	0	1	0	0	0	0
i_7	0	0	1	1	1	1
i_8	0	0	0	1	1	0

Si se tratase de un conjunto de expresiones, podemos igualmente hacer una tabla de verdad. Sea $\Gamma = \{(p \to q), (q \vee r), \neg p\}$

	p	q	r	$\neg p$	$p \to q$	$q \vee r$
i_1	1	1	1	0	1	1
i_2	1	1	0	0	1	1
i_3	1	0	1	0	0	1
i_4	1	0	0	0	0	0
i_5	0	1	1	1	1	1
i_6	0	1	0	1	1	1
i_7	0	0	1	1	1	1
i_8	0	0	0	1	1	0

Conjunción:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disyunción:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Condicional:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Negación:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Semántica de Orden Cero

Modelo de una fórmula

Dada una interpretación $\mathfrak{v}$ y una fórmula ϕ tales que $\mathfrak{v}(\phi) = 1$, se dice indistintamente que:

- $\mathfrak{v}$ satisface la fórmula ϕ.
- ϕ es verdadera en $\mathfrak{v}$.
- $\mathfrak{v}$ es un modelo de ϕ.

Fórmula satisfacible

Una fórmula ϕ es, veritativo-funcionalmente, **satisfacible** syss existe una interpretación $\mathfrak{v}$ tal que $\mathfrak{v}(\phi) = 1$.

Conjunto satisfacible de fórmulas

Un conjunto de fórmulas Γ es, veritativo-funcionalmente, **satisfacible** syss existe una interpretación $\mathfrak{v}$ tal que $\mathfrak{v}(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Semántica de Orden Cero

Fórmula insatisfacible

Una fórmula ϕ es, veritativo-funcionalmente, **insatisfacible** syss no existe una interpretación $\mathfrak{v}$ tal que $\mathfrak{v}(\phi) = 1$. Habitualmente suelen llamarse "contradicciones".

Conjunto insatisfacible de fórmulas

Un conjunto de fórmulas Γ es, veritativo-funcionalmente, **insatisfacible** syss no existe una interpretación $\mathfrak{v}$ tal que $\mathfrak{v}(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Fórmula contingente

Una fórmula ϕ es, veritativo-funcionalmente, **contingente** syss existen, al menos, dos interpretaciones $\mathfrak{v}$ y $\mathfrak{v}'$ tales que $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ y $\mathfrak{v}'(\phi) = 0$.

Semántica de Orden Cero

Fórmula válida o verdad lógica

Una fórmula ϕ es veritativo-funcionalmente una **verdad lógica** syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ para toda interpretación posible. Habitualmente suelen llamarse "tautologías". Escribimos $\models \phi$.

Consecuencia lógica

Una fórmula ϕ es veritativo-funcionalmente **consecuencia** de un conjunto Γ de fórmulas syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ en cada interpretación en que Γ es satisfacible. Escribimos $\Gamma \models \phi$.

- Corolario: si ϕ es una tautología, $\Gamma \models \phi$ para cualquier Γ.
- Corolario: $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\} \models \phi$ syss $(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge ... \wedge \gamma_n) \rightarrow \phi$ es una tautología.
- Corolario: $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\} \models \phi$ syss $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\} \cup \neg\phi$ es insatisfacible.

- **Monotonía**: $\Gamma \models \phi \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \models \phi$.
- **Reflexividad**: para toda $\gamma \in \Gamma$ se cumple que $\Gamma \models \gamma$.
- **Corte**: si $\Gamma \models \phi$ y $\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi$, entonces $\Gamma \models \psi$.

Fórmula independiente

Una fórmula ϕ es veritativo-funcionalmente **independiente** de un conjunto de fórmulas Γ syss ϕ no es consecuencia lógica de Γ. Es decir, hay modelos de Γ que no lo son de ϕ. Escribimos $\Gamma \not\models \phi$.

Conjunto independiente de fórmulas

Un conjunto de fórmulas Δ es veritativo-funcionalmente independiente syss cada $\delta_i \in \Delta$ es independiente del resto. Es decir, para cada $\delta_i \in \Delta$ se cumple que $\Delta - \{\delta_i\} \not\models \delta_i$.

Equivalencia lógica

- Dos fórmulas son lógicamente equivalentes syss su valor de verdad es el mismo para toda interpretación (y son sustituibles). Escribimos $\phi \equiv \psi$.
- La equivalencia lógica es un caso de combinatoria de valores de verdad y por tanto una conectiva definida (una conjunción de condicionales). Además es reflexiva, transitiva y simétrica.

Tablas de verdad y conceptos semánticos fundamentales

- Una fórmula es satisfacible y también contingente si en su columna existen tanto interpretaciones con valor 1 como con valor 0. En caso de que solamente existan valores 1 o valores 0, dicha fórmula representará, respectivamente, una verdad lógica o una fórmula insatisfacible.
- Una fórmula ϕ es consecuencia lógica de un conjunto Γ de fórmulas syss la columna de ϕ contiene el valor 1 en todas aquellas interpretaciones en que cada una de las fórmulas de Γ también sean igual a 1.

Ejercicios

1. Dibuja la tabla de $\{(\neg q \to \neg r), (\neg r \to \neg p), (\neg p \to \neg q)\} \models (q \to r)$.
2. ¿Cómo se podría comprobar vía tablas de verdad que dos expresiones lógicas son equivalentes? Explícalo. Comprueba si las siguientes expresiones son equivalentes: $(\phi \to \psi)$ y $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$; $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$ y $(\phi \to \psi)$; $(\phi \to \psi)$ y $(\neg\phi \vee \psi)$; $(\neg\psi \vee \psi)$ y $(\phi \to \psi)$.
3. ¿Puedes dibujar una tabla de verdad con toda conectiva posible en $\mathcal{L}$?¿Esta tabla es exhaustiva, es decir, pueden añadirse nuevas conectivas en $\mathcal{L}$?¿Qué implicaciones tiene esto para el relevantismo?
4. Dibuja la tabla de verdad de una contradicción, de una tautología y de una fórmula contingente.

¿Cuál es la relación entre $\mathcal{L}$ y LN?

Lógica formal y lenguaje natural

- Conectivas lógicas: son exhaustivas.
- En el lenguaje hay más conectivas que en el cálculo lógico: se reducen interpretaciones por simplificación (pero, aunque, no obstante, como, para que...).
- En el cálculo lógico hay expresiones que carecen de interpretación en LN: $\downarrow$, $\uparrow$.

Semántica de Orden Cero

Árbol Analítico

Propuestos originalmente por Beth, los *tableaux*, árboles analíticos, tablas semánticas o árboles semánticos, son un procedimiento de prueba para ciertos cálculos que adoptan la forma de grafo o árbol invertido, de manera que en la **raíz** escribimos la fórmula problema y, desde ella, desplegamos cada una de las **ramas** del árbol. Toda ramificación tiene un nodo terminal desde el cual es posible determinar si la rama está **cerrada** o **abierta**. Existirá una deducción syss toda rama está cerrada.

Función

- Establecer que una fórmula es lógicamente válida.
- Establecer que una fórmula es deducible a partir de un conjunto de premisas: reducción al absurdo.

Reducción al absurdo

$(\Gamma \cup \{\neg\phi\} \Rightarrow \bot) \Longrightarrow \Gamma \models \phi \wedge \Gamma \not\models \neg\phi$.

$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash \phi \ \Rightarrow \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \rightarrow \phi$ **(Metateorema de deducción)**.

1. Escribimos como nodo raíz la primera premisa e inmediatamente como nodos sucesores el resto de premisas.
2. Escribimos la conclusión negada.
3. Se expande el árbol mediante aplicación de reglas del cálculo.
4. Cuando todas las fórmulas existentes que no sean elementales hayan servido de base para la aplicación de una regla, el árbol está **acabado**.
5. Si en el camino del nodo terminal de una rema existe, al menos, una contradicción, entonces decimos que esta rama está **cerrada**.
6. Un árbol analítico acabado con todas las ramas cerradas es una **refutación**.

Semántica de Orden Cero

Fórmulas α (tipo conjuntivo)

α	α_1	α_2
$(\phi \wedge \psi)$	ϕ	ψ
$\neg(\phi \vee \psi)$	$\neg\phi$	$\neg\psi$
$\neg(\phi \to \psi)$	ϕ	$\neg\psi$
$\neg\neg\phi$	ϕ	

Fórmulas β (tipo disyuntivo)

β	β_1	β_2
$\neg(\phi \wedge \psi)$	$\neg\phi$	$\neg\psi$
$(\phi \vee \psi)$	ϕ	ψ
$(\phi \to \psi)$	$\neg\phi$	ψ

Ejemplo: $\big((p \to q) \wedge p\big) \to q$. Iniciamos negando la fórmula

0. $\neg\Big(\big((p \to q) \wedge p\big) \to q\Big)$

   1. $\big((p \to q) \wedge p\big)$

      2. $\neg q$

Los dos primeros nodos se obtienen a partir del hecho de que en la raíz se está negando un condicional. Sabemos que, por su definición semántica, un condicional solamente es falso syss el antecedente es verdadero **y** el consecuente es falso. Las fórmulas tipo α no generan nuevas ramas.

Semántica de Orden Cero

0. $\neg\Big(((p \to q) \wedge p) \to q\Big)$

1. $((p \to q) \wedge p)$

2. $\neg q$

3. $(p \to q)$

4. p

De 1., que es una conjunción, de nuevo salen dos fórmulas más, puesto que una conjunción es verdadera syss cada uno de los conjuntos lo es.

Semántica de Orden Cero

0. $\neg\Big(((p \to q) \wedge p) \to q\Big)$

1. $((p \to q) \wedge p)$

2. $\neg q$

3. $(p \to q)$

4. p

5. $\neg p$ 6. q

Por el nodo 3. se dibujan otros dos tipo β generando una ramificación. **Ejercicio:**¿Por qué esto es así?¿Este árbol está acabado?¿Todas las ramas están cerradas?¿Qué implica ?

Semántica de Orden Cero

Reglas α:

$\wedge_\alpha$: $\phi \wedge \psi$
$$\begin{array}{c} \phi \wedge \psi \\ | \\ \phi \\ | \\ \psi \end{array}$$

$\vee_\alpha$: $\neg(\phi \vee \psi)$
$$\begin{array}{c} \neg(\phi \vee \psi) \\ | \\ \neg\phi \\ | \\ \neg\psi \end{array}$$

$\rightarrow_\alpha$: $\neg(\phi \rightarrow \psi)$
$$\begin{array}{c} \neg(\phi \rightarrow \psi) \\ | \\ \phi \\ | \\ \neg\psi \end{array}$$

$\neg_\alpha$: $\neg\neg\phi$
$$\begin{array}{c} \neg\neg\phi \\ | \\ \phi \end{array}$$

Reglas β:

$\wedge_\beta$: $\neg(\phi \wedge \psi)$
$$\begin{array}{ccc} & \neg(\phi \wedge \psi) & \\ / & & \backslash \\ \neg\phi & & \neg\psi \end{array}$$

$\vee_\beta$: $\phi \vee \psi$
$$\begin{array}{ccc} & \phi \vee \psi & \\ / & & \backslash \\ \phi & & \psi \end{array}$$

$\rightarrow_\beta$: $\phi \rightarrow \psi$
$$\begin{array}{ccc} & \phi \rightarrow \psi & \\ / & & \backslash \\ \neg\phi & & \psi \end{array}$$

Ejercicios

Comprueba vía A.A. si las siguientes deducciones son correctas:

a) $\phi \to \psi; \phi \land \rho \models \psi$

b) $(\phi \land \psi) \to \rho; \rho \to \sigma \models (\phi \land \psi) \to \sigma$

c) $(\phi \lor \psi) \to \rho; \sigma \to (\tau \land \omega) \models \neg((\phi \to \rho) \land (\sigma \to \omega))$

c) $(\phi \land \psi) \to \rho; \sigma \to (\tau \land \omega) \models (\phi \to \rho) \land (\sigma \to \omega)$

d) $(\phi \to \psi) \land (\rho \to \sigma); \phi \lor \rho; (\psi \to \rho) \land (\sigma \to \tau) \models \rho \lor \tau$

e) $\phi \to (\psi \lor \rho); \psi \to \rho; \rho \to \sigma \models \phi \to \sigma$

f) $\phi \to \neg\psi; \rho \to \psi \models \neg(\phi \land \rho)$

g) $\phi \to \psi; (\phi \land \psi) \to \rho; \neg(\phi \land \rho) \models \neg\phi$

h) $\models ((\phi \land \psi) \to \rho) \leftrightarrow ((\phi \land \neg\rho) \to \neg\psi)$

i) $\models ((\phi \to \rho) \land (\psi \to \sigma)) \to ((\phi \land \psi) \to (\rho \land \sigma))$

Deducción Natural

El uso normal de este cálculo es disponer cada deducción en una serie de líneas numeradas y consecutivas. Cada problema deductivo tendrá, como datos iniciales, expresiones bien formadas. Dichos datos iniciales se llaman premisas. El esquema general de una deducción natural es el siguiente:

1	Γ	pr.
2	Δ	(regla)
3	$\quad\Gamma'$	hip.
4	$\quad\Delta'$	(regla)
5	ϕ	(regla)

Reglas de eliminación de conectivas:

1	$\neg\neg\phi$	pr.
2	ϕ	$Elim_{\neg}, 1$

1	$\phi \wedge \psi$	pr.
2	ϕ/ψ	$Elim_{\wedge}, 1$

1	$\phi \rightarrow \psi$	pr.
2	ϕ	pr.
3	ψ	$Elim_{\rightarrow}, 1, 2$

1	$\phi \vee \psi$	pr.
2	ϕ	hip.
3	$\vdots$	
4	ρ	
5	ψ	hip.
6	$\vdots$	
7	ρ	
8	ρ	$Elim_{\vee}$, 1: 2-4, 5-7

Reglas de introducción de conectivas:

1	$\vdots$	pr.
2	$\quad \phi$	hip.
3	$\quad \dots$	
4	$\quad \psi \wedge \neg\psi$	$\perp$
5	$\neg\phi$	*Intro*$_\neg$, 2-4

1	$\vdots$	pr.
2	$\quad \phi$	hip.
3	$\quad \vdots$	
4	$\quad \psi$	
5	$\phi \to \psi$	*Intro*$_\to$, 2-4

1	ϕ	pr.
2	ψ	pr.
3	$\phi \wedge \psi$	*Intro*$_\wedge$, 1, 2

1	ϕ	pr.
2	$\phi \vee \psi$	*Intro*$_\vee$, 1

Transitividad del condicional

1	$\phi \rightarrow \psi$
2	$\psi \rightarrow \chi$
3	$\vdots$
4	$\phi \rightarrow \chi$

1	$\phi \rightarrow \psi$	pr.
2	$\psi \rightarrow \chi$	pr.
3	ϕ	hip.
4	ψ	*Elim*$_{\rightarrow}$, 1, 3
5	χ	*Elim*$_{\rightarrow}$, 2, 4
6	$\phi \rightarrow \chi$	*Intro*$_{\rightarrow}$, 3-5

Modus Tollens (MT)

1	$\phi \to \psi$	
2	$\neg\psi$	
3	$\vdots$	
4	$\neg\phi$	

1	$\phi \to \psi$	pr.
2	$\neg\psi$	pr.
3	$\quad\phi$	hip.
4	$\quad\psi$	*Elim*$_{\to}$, 1, 3
5	$\quad\psi \land \neg\psi$	*Intro*$_{\land}$, 4, 2
6	$\neg\phi$	*Intro*$_{\neg}$, 3-5

Contraposición (Contr)

1	$\phi \to \psi$	
2	$\vdots$	
3	$\neg\psi \to \neg\phi$	

1	$\phi \to \psi$	pr.
2	$\quad \neg\psi$	hip.
3	$\quad \neg\phi$	MT, 1, 2
4	$\neg\psi \to \neg\phi$	*Intro*$_{\to}$, 2-3

Reiteración o identidad (Reit/Id)

1	ϕ
2	$\vdots$
3	ϕ

1	ϕ	pr.
2	$\quad \neg\phi$	hip.
3	$\quad \phi \wedge \neg\phi$	*Intro*$_\wedge$, 1, 2
4	ϕ	*Intro*$_\neg$, 2-3

Semántica de Orden Cero

Ex contradictione quodlibet (Ecq)

1	$\phi \land \neg\phi$
2	$\vdots$
3	ψ

1	$\phi \land \neg\phi$	pr.
2	$\quad \neg\Psi$	hip.
3	$\quad \phi \land \neg\phi$	Reit, 1
4	Ψ	*Intro*$_{\neg}$, 2-3

Semántica de Orden Cero

Silogismo Disyuntivo (SD)

1	$\phi \vee \psi$
2	$\neg\phi$
3	$\vdots$
4	ψ

Ejercicio: La demostración más habitual de Ecq usa SD

¿Sabrías reconstruirla?

1	$\phi \vee \psi$	pr.
2	$\neg\phi$	pr.
3	$\neg\psi$	hip.
4	ϕ	sub-hip.
5	$\phi \wedge \neg\phi$	$Intro_\wedge$, 4, 2
6	ψ	sub-hip.
7	$\psi \wedge \neg\psi$	$Intro_\wedge$, 6, 3
8	$\phi \wedge \neg\phi$	Ecq, 7
9	$\phi \wedge \neg\phi$	$Elim_\vee$, 1: 4-5,
10	$\neg\neg\psi$	$Intro_\neg$, 3-9
11	ψ	$Elim_\neg$, 10

Silogismo Disyuntivo (SD)

1	$\phi \vee \psi$
2	$\neg\phi$
3	$\vdots$
4	ψ

Ejercicio: La demostración más habitual de Ecq usa SD

¿Sabrías reconstruirla?

1	$\phi \vee \psi$	pr.
2	$\neg\phi$	pr.
3	$\neg\psi$	hip.
4	ϕ	sub-hip.
5	$\phi \wedge \neg\phi$	$Intro_{\wedge}$, 4, 2
6	ψ	sub-hip.
7	$\psi \wedge \neg\psi$	$Intro_{\wedge}$, 6, 3
8	$\phi \wedge \neg\phi$	Ecq, 7
9	$\phi \wedge \neg\phi$	$Elim_{\vee}$, 1: 4-5, (
10	$\neg\neg\psi$	$Intro_{\neg}$, 3-9
11	ψ	$Elim_{\neg}$, 10

Definición de deducción

Una **deducción** es una secuencia finita de líneas en cada una de las cuales figura una fbf de $\mathcal{L}$ tal que es una **premisa**, una **hipótesis** o una expresión obtenida por transformación mediante la aplicación de una regla del cálculo. Cada deducción se compone de tantas filas como sean necesarias, cada una de las cuales está numerada de manera única y ordenada y de tres columnas compuestas por la numeración de cada fila, las fbfs y una cantidad acotada de información respecto de dicha fila por la que se identifica si se trata de una premisa, hipótesis, subhipótesis, subsubhipótesis, n-subhipótesis, o el resultado de la aplicación de una regla. Decimos que una fbf Φ es consecuencia lógica de Γ syss existe una deducción de Φ a partir de Γ y escribimos $\Gamma \models \Phi$.

Pregunta

A continuación se representan las reglas conocidas como *Leyes de De Morgan*, ¿Os atrevéis a deducirlas por DN?

1	$\neg(\phi \wedge \psi)$
2	$\vdots$
3	$\neg\phi \vee \neg\psi$

1	$\neg(\phi \vee \psi)$
2	$\vdots$
3	$\neg\phi \wedge \neg\psi$

Simplificación

1	$\phi \vee \phi$
2	$\vdots$
3	ϕ

Simplificación

1	$\phi \wedge \phi$
2	$\vdots$
3	ϕ

Semántica de Orden Cero

Simplificación

1	$\phi \to \phi$
2	$\vdots$
3	$\top$

Simplificación

1	$\phi \leftrightarrow \phi$
2	$\vdots$
3	$\top$

Otras reglas derivadas

1. **Identidad:**
   1.1. $\phi \vee \bot \equiv \phi$
   1.2. $\phi \wedge \top \equiv \phi$
   1.3. $\top \to \phi \equiv \phi$
   1.4. $\phi \vee \top \equiv \top$
   1.5. $\phi \wedge \bot \equiv \bot$
2. **Conmutativas:**
   2.1. $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$
   2.2. $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$
3. **Del condicional:**
   3.1. $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
   3.2. $\phi \to \psi \equiv \neg(\phi \wedge \neg\psi)$
   3.3. $\phi \to \psi \equiv \phi \leftrightarrow (\phi \wedge \psi)$
   3.4. $\phi \to \psi \equiv \psi \leftrightarrow (\phi \vee \psi)$
4. **Bicondicional:**
   4.1. $\phi \leftrightarrow \psi \equiv (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$
5. **Transposición:**
   5.1. $\phi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\phi$
   5.2. $\phi \leftrightarrow \psi \equiv \neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$
6. **Asociatividad ($Elim_{),(}$):**
   6.1. $(\phi \vee \psi) \vee \chi \equiv \phi \vee (\psi \vee \chi)$
   6.2. $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$
   6.3. $(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \equiv \phi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)$

Semántica de Orden Cero

Bonus track

7. **Distributividad:**
   7.1. $\phi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$
   7.2. $\phi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$
   7.3. $\phi \rightarrow (\psi \vee \chi) \equiv (\phi \rightarrow \psi) \vee (\phi \rightarrow \chi)$
   7.4. $\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi) \equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \chi)$
8. **Inferencia:**
   8.1. $\neg\phi \wedge (\phi \vee \psi) \models \psi$
   8.2. $\phi \wedge (\neg\phi \vee \neg\psi) \models \neg\psi$
9. ***Ponendo ponens*:**
   $(\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi \models \psi$
10. ***Tollendo tollens*:**
   $(\phi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi \models \neg\phi$
11. **Transitividad (silogismo hipotético):**
   11.1. $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models (\phi \rightarrow \chi)$
   11.2. $(\phi \leftrightarrow \psi) \wedge (\psi \leftrightarrow \chi) \models (\phi \leftrightarrow \chi)$
12. **Exportación:**
   $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi \equiv \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$
13. **Permutación:**
   $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \equiv \psi \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)$
14. **Resolución:**
   $(\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \models \psi \vee \chi$

3 ventajas de DN frente a AA

1. Podemos definir las conectivas a través sus reglas de introducción (en el fondo es equivalente).
2. Estamos ante un método de prueba directo: los árboles analíticos probaban por reducción al absurdo, DN no (pero en el fondo, de nuevo, es equivalente, vía tablas de verdad).
3. Podemos ser **inferencialistas**: renunciar a una exposición axiomática que necesite justificación.

Aparentes ventajas

En el fondo son ventajas interpretativas: el cálculo es equivalente.

"Cálculos" de $\mathcal{L}$

Hasta ahora hemos usado indistintamente los términos *lenguaje* y *cálculo* para referirnos a $\mathcal{L}$. Ahora podemos matizar: un lenguaje lógico como $\mathcal{L}$ (conjunto de fbfs de L) puede utilizarse para operar con distintos cálculos. Hemos visto, para $\mathcal{L}$, tres tipos, pero hay más:

1) Tablas de verdad.
2) Deducción natural.
3) Árboles analíticos.
4) Cálculos de secuentes.

Todos son equivalentes.

Demostraciones más frecuentes en matemáticas

1. **Deducción directa** (sobre todo por transitividad): lo tenemos.
2. **Negación del consecuente** (mediante transposición): lo tenemos.
3. **Reducción absurdo** (A.A.): lo tenemos.
4. [**Principio de inducción**]: NO ES FORMALIZABLE EN NUESTRO LENGUAJE.

$\mathcal{L}$ como cálculo base

Cálculos tipo $\mathcal{L}$ pueden ampliarse:

- Añadiendo más valores de verdad: lógicas trivalentes, n-valentes, difusas ...
- Añadiendo nuevas conectivas: primeros cálculos modales, relevantistas, ...
- Introduciendo nuevas semánticas (no veritativo-funcionales) especialmente por adición de operadores: lógicas modales (temporales, deónticas, aléticas, ...), ...
- Subiendo de *orden*: primer orden, segundo orden, teoría de modelos, many-sorted logics, ...

Semántica de primer orden

- Queremos estudiar propiedades y relaciones entre distintas entidades.
- Necesitamos mayor capacidad expresiva.
- Añadiremos complejidad a nuestra semántica.
- Un cálculo de orden cero es equivalente a un álgebra de Boole: necesito más complejidad.

Lógica Formal

José Alejandro Fernández Cuesta

alejandro.fernandez@urjc.es

2022/2023

Índice

Axiomas de Peano

A 1. El elemento 0 es un número natural: $0 \in \mathbb{N}$.

A 2. Todo número natural n tiene un único elemento sucesor que es también un número natural: $s(n) \in \mathbb{N}$.

A 3. 0 no es el sucesor de ningún número natural: $\neg\exists n \in \mathbb{N}\big(s(n) = 0\big)$.

A 4. Dos naturales cuyos sucesores son iguales, son iguales: $\forall xy\big(s(x) = s(y) \to x = y\big)$.

A 5. Si un subconjunto de números naturales contiene al cero y a los sucesores de cada uno de sus elementos, entonces contiene a todos los números naturales.

Lógica de Primer Orden: introducción

Axiomas de Peano

El primer axioma de Peano asegura que el $\mathbb{N} \neq \varnothing$. El segundo axioma refleja la idea de contar. El tercero indica que existe un primer elemento. El cuarto, junto al segundo y el tercero aseguran que al ir contando nunca se regrese al mismo elemento. El quinto es el usado en las demostraciones por inducción; su formulación conjuntista.

Principio de inducción

Si Φ es una propiedad definida sobre $\mathbb{N}$ tal que

1. 0 satisface Φ ($\mathfrak{v}(\Phi_0) = 1$ y
2. Si n satisface Φ, entonces el sucesor de n también,

entonces todo número natural satisface también Φ.

- ¿Todo?¿Existe?¿Pertenencia?
- Funciones, predicados...

Dominio

- **Dominio**: colección de objetos no vacía sobre la que trabajamos (separar teoría y realidad) cada uno de los cuales puede ser **asignado** por una **constante individual**. Ejemplos: $\mathbb{N}$, *decimales de* π, *factores primos de 30*, ...
- El dominio es lo más relevante porque cambiará los resultados: el formado por los factores primos de 30 no presenta dificultad porque podemos equiparar $30 \in \mathbb{N} = +30 \in \mathbb{Z} = +\frac{30}{1} \in \mathbb{Q}$ pero podría no ser así. Por ejemplo, $x^2 = 9$ en $\mathbb{N}$ devuelve $x = 3$ mientras que en $\mathbb{Z}$, $x = \pm 3$.
- **Asignación**: $\{\langle x, y \rangle | x \in Dom \wedge y \in Rang\}$.

Lógica de Primer Orden: introducción

Nociones preliminares

- El dominio es la extensión de un predicado: “todo factor primo de 30 es par” es falso y “todo factor primo de 64 es par” es verdadero. ¿Por qué?
- “Todo” significa “cada uno por separado” y es comprobable. Puedo comprobarlo en los conjuntos $\{2, 3, 5\}$ y $\{2\}$ respectivamente. No hay problema de inducción pero...
- *Todo* $n \in \mathbb{N}$ *tiene un sucesor* (A2): ¡Dominio infinito!
- Introduciremos en el cálculo de orden cero: predicados, relaciones, dominios, cuantificadores, ... y tendremos un primer orden.
- Tal y como hemos mencionado, definiremos un cálculo de primer orden y a partir de ahí introduciremos la teoría de conjuntos estándar.

Lógica de Primer Orden: sintaxis

Alfabeto

0. Dominio: Dom, $\mathcal{U}$, $\mathcal{D}$.
1. Términos individuales.
   1.1. Constantes individuales: $\{a, b, c, ...\}$
   1.2. Variables individuales: $\{x, y, z, ...\}$
      1.2.1. Libres.
      1.2.2. Ligadas.

$p \to q$

2. Términos predicativos: $\{P, Q, R, S, ...\}$
   2.1. Monádicos: $Pa, Pb, ..., Px, Py, ...$
   2.2. n-ádicos: $Raa, Rab, Rbb, ..., Rxx, Rxy, ..., Raaa, Raab, ...$
   2.3. Igualdad: $=$.
3. Alfabeto de $\mathcal{L}$ ampliado[a] con cuantificadores: $\forall$, $\exists$.

---

[a] Signos lógicos, constantes universales, cifras y delimitadores se mantienen. Por esto mismo $\mathcal{L}_{po}$ se dice que es una ampliación conservadora o restrictiva sobre $\mathcal{L}$.

Fórmulas y enunciados/oraciones elementales

- Un **elemento proposicional** de un lenguaje de primer orden es una constante o variable individual sola. A menudo se llaman simplemente **términos**. Un término es una parte de la proposición pero carece de contenido proposicional. No son susceptibles de ser 1 ni 0.
- Una **fórmula** de un lenguaje de primer orden es toda sucesión finita de símbolos de dicho lenguaje correctamente concatenados para formar fbfs según las reglas del propio cálculo y pueden ser:
  - Elementales: si tiene al menos un símbolo predicativo pero no tiene símbolos lógicos y es una fbf. Puede ser 1 o 0.
  - Compuestas: tiene al menos un símbolo lógico y es una fbf. Puede ser 1 o 0.
- Sean α, α' y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ términos de $\mathcal{L}_{po}$. Un enunciado, oración o fórmula **elemental** (antes p o ϕ) es toda fbf de la forma:
  1. $\alpha = \alpha'$. Estos enunciados se llaman ecuaciones.
  2. $P(\alpha)$.

Fórmulas y enunciados/oraciones compuestas

A partir de una fórmula o enunciado elemental se puede obtener todo enunciado u oración compuesto, que llamaremos simplemente **enunciado**, a partir de las siguientes reglas:

1. Toda **fórmula elemental** es un enunciado y ningún **término** lo es.
2. Si ϕ es un enunciado, también lo es $\neg\phi$.
3. Si ϕ y ψ son enunciados, también lo es $\phi \diamond \psi$.
4. Si ϕ es un enunciado y α una variable, $\forall\alpha(\phi)$ y $\exists\alpha(\phi)$ son enunciados.

Si el enunciado no tiene ninguna variable libre, además, decimos que es una **oración** o que está **cerrada**. Esto se debe a que los valores para fórmulas abiertas o enunciados no-oracionales, es lo mismo, dependerán del contexto.

Lógica de Primer Orden: sintaxis

Variables

1. $\forall x \exists y (x, y \in \mathbb{N} \land y = x + 1)$
2. $\forall x \exists y (x, y \in \mathbb{N} \land y = x + 2)$

   $\vdots$

3. $\forall x \exists y (x, y \in \mathbb{N} \land y = x + \cdots)$

- La x representa todo elemento. Porque está **ligada** al cuantificador universal.
- La y representa algún elemento. Porque está **ligada** al cuantificador existencial.
- Los puntos suspensivos están por un, y sólo un, elemento del dominio.

En la expresión $\forall x \exists y (x, y \in \mathbb{N} \land y = x + z)$ decimos que las variables x e y están ligadas y que z está libre.

Variables

Distinguiremos dos tipos de variables individuales:

- Libres: aquellas variables presentes en una fórmula atómica o en toda fbf compuesta tal que en sus subfórmulas inmediatas sea siempre libre y en aquellas expresiones cuantificadas de la forma $\forall x(\Phi)$ y $\exists x(\Phi)$ siempre que sea libre en Φ y distinta de x.
- Ligadas: aquellas variables que no son libres.

Lógica de Primer Orden: sintaxis

Ejemplos

- Son términos: a, c, π, x, etc.
- Enunciados elementales: $x = y$, $a = b$, $c = c$, Rxc, Rxy, Pa, Qz, $Sxyz$, etc. Se gana claramente capacidad expresiva respecto de las semánticas de orden cero.
- Son enunciados: $\forall x \exists y (x, y \in \mathbb{N} \wedge y = x + z)$ donde z es una variable libre, $\neg x = y$; $\neg Px$; $(Px \to Rxy)$; $\forall x(Rxa \to y)$; etc.
- Son oraciones: $\forall x \exists y \big((x, y \in \mathbb{N}) \wedge (y = x + 1)\big)$; $\exists x \exists y \forall z \big((x \wedge y) \to z\big)$, etc.

Lógica de Primer Orden: sintaxis

Abreviación

- Los paréntesis que contengan las expresiones cuantificadas son necesarios para que no haya ambigüedad, si bien en ciertos casos se pueden omitir: $\exists x Px$ se puede leer con sobreentendimiento de paréntesis en $\exists x\big(P(x)\big)$. En otros casos se deberá de indicar el paréntesis: $\exists x Px \equiv \exists x(Px) \equiv \exists x\big(P(x)\big)$
- Cuando haya más de un cuantificador, podrán omitirse los paréntesis de los cuantificadores precedentes y conservar solamente los relativos al último cuantificador: $\exists x \forall y \forall z(...)$ es una fbf. **Pero no es lo mismo cuantificar sobre un cuantificador que sobre una fórmula:** $\forall x \exists y(Rxy) \not\equiv \forall x\big(\exists y(Rxy)\big)$.
- Se podrá escribir $\forall x_1, ..., x_n$ en lugar de $\forall x_1, ..., \forall x_n$.
- Un cuantificador podrá regir sobre otros tantos. Así, son fbfs: $\forall x \forall y(Px \rightarrow \exists y(Py \wedge y = x)$, $\forall xy(Px \rightarrow \exists yz(Qz \wedge Rzy)$.

Sustitución de variables libres

Si ϕ es un enunciado de primer orden, x una variable individual y a es una constante, la **sustitución** de x por a u otra variable en ϕ es la fórmula obtenida al reemplazar en ϕ cada aparición libre de x en ϕ por a o la variable correspondiente (las constantes representan objetos). Escribimos la fórmula cuyas variables sustituiremos entre paréntesis y como superíndice la variable a sustituir y como subíndice el término que la sustituirá, $(\Phi)^x_a$. Son ejemplos:

- $(Px)^x_y = Py$
- $(Py)^y_c = Pc$
- $(\forall x(Rxy \rightarrow Py))^y_c = \forall x(Rxc \rightarrow Pc)$
- $(\forall y(Ryx \rightarrow Px))^x_c = \forall y(Ryc \rightarrow Pc)$
- $(\forall y(Px \rightarrow Ryx))^x_y = \forall y(Py \rightarrow Qyy)$

Sustitución de variables libres

Una sustitución es simultánea si se sustituyen, respectivamente, las variables $x_1, \ldots, x_n$ por los términos $a_1, \ldots, a_n$ uno a uno y escribimos $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{a_1,\ldots,a_n}$. Otra notación igualmente extendida escribe $\Phi[x/a]$ para representar que en la fórmula Φ han de sustituirse las x libres por a. Debe tenerse en cuenta que $(\Phi)^{x_1,x_2}_{a_1,a_2}$ puede ser distinta de $((\Phi)^{x_1}_{a_1})^{x_2}_{a_2}$. Así, por ejemplo:

- $(Rxy)^{x,y}_{y,x} = Ryx$.
- $((Rxy)^{x}_{y})^{y}_{x} = (Ryy)^{y}_{x} = Rxx$.

Sustitución de variables libres: corolario

- $(\neg A)^x_a = \neg(A)^x_a$
- $(A \diamond B)^x_a = (A)^x_a \diamond (B)^x_a$
- $(\forall x(A))^x_a = \forall x(A)$
- $(\forall x(A))^y_a = \forall x((A)^y_a)$

$(B)^x_a$ es la única **subfórmula inmediata** de $\forall xB$. La definición de subfórmula se mantiene.
Ya no existe simetría en la composición/descomposición de una fórmula en forma de árbol y por tanto no se satisface el lema de descomposición única ¿Sabrías explicar por qué?

Lógica de primer orden: sintaxis

Ejercicio: clasificación de fórmulas

Di si las siguientes expresiones son fórmulas bien formadas o no y si, de serlo, son **enunciados elementales**, **enunciados** u **oraciones** y señala sus variables libres y ligadas:

1.1 Rxy

1.2 $\neg Rxyz$

1.3 $\forall x(Rxy)$

1.4 $\forall x \forall y \Big(((x \to y) \wedge x) \to y \Big)$

1.5 $x \exists \forall y(Px)$

1.6 $\forall x((Px \to (Qx \vee Rxy))$

1.7 $\forall x \exists y \forall z(Rxz \to y)$

1.8 $\forall x \exists y \exists z \forall (RPx \wedge z)$

Ejercicios

1. Añade paréntesis no triviales a la siguiente expresión para obtener la cuantificación universal de un condicional y la cuantificación universal de una cuantificación universal: $\forall x \forall y Rxy \to Ryx$.
2. Añade paréntesis a la siguiente expresión, $\neg \forall x \neg \exists y Rxy \vee Rxz$ para obtener:
    2.1. Una disyunción.
    2.2. Un condicional cuyo consecuente es una disyunción.
    2.3. La negación de una cuantificación universal de una disyunción.

Ejercicio

Es fácil pasar de la fórmula Rxy a la fórmula Ryx mediante una sustitución simultánea $(Rxy)^{x,y}_{y,x}$. Sin embargo, las fórmulas $((Rxy)^{x}_{y})^{y}_{x}$, Ryx y $((Rxy)^{y}_{x})^{x}_{y}$ son distintas entre sí. No obstante, toda sustitución simultánea puede obtenerse mediante series de sustituciones individuales. Pasa de Rxy a Ryx y de $Sxyz$ a $Szyx$ mediante una serie de sustituciones individuales de variables.

Nueva semántica de estructuras

Función veritativa: ¿cómo evalúo un término?

¿Cómo evaluamos ahora las fbfs? Para interpretar $\mathcal{L}_{po}$ debo fijar, en primer lugar, un dominio $\mathcal{D}$ no vacío de objetos y, a continuación, definir las propiedades que interpretan los términos predicativos. Este es el análisis basado en la distinción entre función y argumento: complejizamos la función veritativa para expresiones cuantificadas como una función de primer orden. Ya no asignamos valores de verdad a fórmulas directamente, evaluamos la satisfacción de términos individuales y esto lo capturamos en un lenguaje $\mathcal{L}_{po}$.

Cuantificadores

Para evaluar una fórmula **cuantificada** tendremos que *eliminar* el cuantificador sustituyendo correctamente las variables por constantes *en* la estructura.

Nueva semántica de estructuras

Estructura

Definimos una **interpretación** para un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_{po}$ como una dupla o par

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$$

en que

1. $\mathcal{D}$ es un conjunto no vacío llamado dominio, universo de discurso o universo de la estructura y
2. $\mathcal{F}$ o, indistintamente, $\mathfrak{v}$, es una función de asignación cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios de $\mathcal{L}_{po}$ tal que:
   - 2.1. Si P es un predicado de $\mathcal{L}_{po}$, $\mathcal{F}(P)$ devuelve un subconjunto de $\mathcal{D}$.
   - 2.2. Si R es una relación $n-$aria de $\mathcal{L}_{po}$ con $n > 1$, $\mathcal{F}(R)$ devuelve un subconjunto de $\mathcal{D}$ con una relación $n-$aria en $\mathcal{D}$.
   - 2.3. Si c es una constante en $\mathcal{L}_{po}$, $\mathcal{F}(c)$ es un elemento de $\mathcal{D}$.

Interpretación

Ahora, si ϕ es un símbolo propio de $\mathcal{L}_{po}$, $\boxed{\mathcal{F}(\phi)}$ será la **interpretación** de ϕ en la estructura $\mathcal{E}$ y en lugar de $\mathcal{F}(\phi)$, escribimos $\phi^{\mathcal{E}}$ para referirnos a la interpretación de ϕ en $\mathcal{E}$, es decir, $\phi^{\mathcal{E}} = \mathcal{F}(\phi)$. Si c es una constante individual, $c^{\mathcal{E}}$ es la **denotación** o el **valor** de c en $\mathcal{E}$. Un mismo lenguaje tendrá muchas interpretaciones en distintas estructuras.

Ejemplo

Si definimos un lenguaje $\mathcal{L}_{po}$ como el lenguaje cuyos símbolos propios son dos símbolos de predicado, P y Q, uno binario R y dos constantes c y d, representaremos una estructura para $\mathcal{L}_{po}$ del siguiente modo:

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{D}, P^{\mathcal{E}}, Q^{\mathcal{E}}, R^{\mathcal{E}}, c^{\mathcal{E}}, d^{\mathcal{E}}, \rangle$$

Nueva semántica de estructuras

Ejemplo

Podemos definir una estructura

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{D}, P^{\mathcal{E}}, Q^{\mathcal{E}}, R^{\mathcal{E}}, c^{\mathcal{E}}, d^{\mathcal{E}}, e^{\mathcal{E}} \rangle$$

donde $\mathcal{D}$ es $\mathbb{N}$, $P^{\mathcal{E}}$ es el conjunto de los pares, $Q^{\mathcal{E}}$ es el conjunto de los primos, $R^{\mathcal{E}}$ es la relación *ser-menor-que* entre naturales, $c^{\mathcal{E}}$ es el 0, $d^{\mathcal{E}}$ es el 1 y $e^{\mathcal{E}}$ es el número 5.

Nueva semántica de estructuras

Ejemplo

Podemos definir una estructura

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{D}, P^{\mathcal{E}}, Q^{\mathcal{E}}, R^{\mathcal{E}}, c^{\mathcal{E}}, d^{\mathcal{E}}, e^{\mathcal{E}} \rangle$$

tal que

- $D = \{1, 2, 3, 4\}$
- $P = \{1, 2\}$
- $Q = \varnothing$
- $R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$

P_1 —

Nueva semántica de estructuras

Fórmula verdadera en una estructura

Ahora cada posible interpretación lógica la determina cada estructura. Un cuantificador generará una fórmula verdadera si lo que se cuantifica se cumple para el dominio de nuestra estructura.

a) Para cualquier predicado $n-$ádico Π: $\boxed{\mathfrak{v}(\Pi\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1}$ syss $\langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle \in \Pi^{\mathcal{E}} (n > 0)$.

b) Toda fórmula compuesta por conectivas preserva su definición veritativo-funcional igual que en $\mathcal{L}$ pero *en* una estructura:

b.1) $\mathcal{E} \models \neg\Phi \Leftrightarrow \mathcal{E} \not\models \phi$

b.2) $\mathcal{E} \models \Phi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \mathcal{E} \not\models \Phi$ o $\mathcal{E} \models \Psi$

b.3) $\mathcal{E} \models \Phi \wedge \Psi \Leftrightarrow \mathcal{E} \models \Phi$ y $\mathcal{E} \models \Psi$

c) $\mathfrak{v}\Big(\forall x(\Phi(x))\Big) = 1$ syss $\mathfrak{i}^x_a(\Phi) = 1$ para toda a en $\mathcal{D}$.

d) $\mathfrak{v}\Big(\exists x(\Phi(x))\Big) = 1$ syss existe un $a \in \mathcal{D} : \mathfrak{i}^x_a(\Phi) = 1$.

Nueva semántica de estructuras

Verdad lógica

Decimos que un enunciado es verdadero universalmente, **lógicamente** o que es una tautología syss es verdadero en toda estructura para $\mathcal{L}_{po}$. Todo enunciado que tiene la forma de una tautología seguirá siendo una verdad lógica. Ahora una tautología no solamente es verdadera en toda asignación o interpretación de la tabla de verdad; también lo es en toda interpretación para toda estructura.

Ejemplo

Una fórmula del tipo $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$ es una tautología. Por eso mismo lo será también $\big(\exists x(Px) \wedge \forall x(Qx)\big) \rightarrow \forall x(Qx)$. Esto se debe a que este tipo de enunciados son verdaderos en virtud de la semántica de conectivas. Pero habrá nuevos enunciados que también serán verdades lógicas en virtud de la semántica cuantificacional.

Nueva semántica de estructuras

Ejemplos de nuevas tautologías

1. $\forall x(Px \to Px)$.
2. $\forall x(Px) \to Pc$.
3. $Pc \to \exists x(Px)$.
4. $\forall x(Px) \to \exists x(Px)$.
5. $\exists x \forall y(Rxy) \to \forall y \exists x(Rxy)$.
6. $\forall x(x = x)$.
7. $\forall x, y(x = y \to y = x)$.
8. $\forall x, y, z\big((x = y \wedge y = z) \to x = z\big)$.
9. $\forall x, y\big((Px \wedge x = y) \to Py\big)$.

Nueva semántica de estructuras

Equivalencia lógica

Dos enunciados de un lenguaje de primer orden son **lógicamente equivalentes** si son sustituibles (por ser verdaderos y falsos respectivamente) en exactamente las mismas estructuras. Son ejemplos:

1. $\forall x(Px) \equiv \forall y(Py)$.
2. $\exists x(Px) \equiv \exists y(Py)$.
3. $\neg\forall x(Px) \equiv \exists x(\neg Px)$.
4. $\neg\exists x(Px) \equiv \forall x(\neg Px)$.
5. $\exists x(Px) \equiv \neg\forall x(\neg Px)$.
6. $\forall x(Px) \equiv \neg\exists x(\neg Px)$.
7. $\forall x(Px \wedge Qx) \equiv \forall x(Px) \wedge \forall x(Qx)$.
8. $\exists x(Px \vee Qx) \equiv \exists x(Px) \vee \exists x(Qx)$.

Nueva semántica de estructuras

Modelo de una fórmula

1. Dada una interpretación formada por una estructura y una función veritativa, $\langle \mathcal{E}, \mathfrak{v} \rangle$ y un enunciado de $\mathcal{L}_{po}$, si $\mathfrak{P}$ es un enunciado y es verdadero en $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ es un modelo de $\mathfrak{P}$ y escribimos $\mathcal{E} \models \mathfrak{P}$.
2. Si $\mathfrak{P}$ es una fórmula con variables libres $(x_1, \dots, x_n)$ y es verdadera cuando dichas variables se interpretan como los individuos $a_1, \dots, a_n$ del dominio, $\mathcal{E}$ es un modelo de $\mathfrak{P}$ y escribimos $\mathcal{E}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n] \models \mathfrak{P}$.

Modelo de un conjunto de fórmulas

Dada una interpretación $\mathfrak{i} = \langle \mathcal{E}, \mathfrak{v} \rangle$ y un conjunto Γ de fórmulas de $\mathcal{L}_{po}$, si cada $\gamma_i \in \Gamma$ es verdadera en $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ es un modelo de Γ y $\mathcal{E} \models \Gamma$.

Fórmula satisfacible

Una fórmula $\mathfrak{P} \in \mathcal{L}_{po}$ es satisfacible syss existe, al menos, una interpretación $\mathfrak{i} = \langle \mathcal{E}, \mathfrak{v} \rangle$ tal que $\mathfrak{i}(\mathfrak{P}) = 1$. Es decir, si $\mathfrak{P}$ tiene al menos un modelo o es verdadera en, al menos, una estructura.

Ejemplo de formalización

Definimos como dominio el conjunto de los naturales, $\mathcal{D} = \mathbb{N}$. Tomemos el predicado P como el predicado *par* o *ser-par*; Q como el conjunto de los números primos, el predicado *ser-primo* o, simplemente, el predicado *primo*. La relación o predicado diádico R será la operación de la división. La relación S, ser menor que y asignamos al objeto 0 la constante c, al objeto 1, la constante d y al objeto 2 la constante e. Veamos ejemplos de formalizaciones:

Nueva semántica de estructuras

Formalización

- Algún número es par y primo: $\exists x(Px \wedge Qx)$
- Todo número par es primo: $\forall x(Px \rightarrow Qx)$
- Ningún número par es primo: $\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$ o bien $\neg\exists x(Px \wedge Qx)$
- Todo número par es divisible por 2: $\forall x(Px \rightarrow Rex)$
- Un número es par si, y sólo si, es divisible por 2: $\forall x(Px \leftrightarrow Rex)$
- Para cada número hay uno mayor: $\forall x \exists y(Sxy)$
- Si un número divide a otro, es menor o igual que él: $\forall x, y(Rxy \rightarrow x = y \vee Sxy)$
- Para cada número primo, hay un número par mayor que él: $\forall x(Qx \rightarrow \exists y(Py \wedge Sxy))$

Nueva semántica de estructuras

Formalización

- Los números primos son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad: $\forall x\Big(Qx \to ((Rxx \wedge Rdx) \wedge \forall y(Ryx \to (y = x \vee y = d)))\Big)$.
  Aquí afirmamos dos cosas: que los números primos son divisibles por sí mismos y por la unidad y que si un número divide a un primo, debe ser igual a él o a la unidad. Un modo más simple de expresar lo anterior es: $\forall x\Big(Qx \to \forall y\big(Ryx \leftrightarrow (y = x \vee y = d)\big)\Big)$.
- Un número es primo si, y sólo si, es divisible por sí mismo y por la unidad:
  - $\forall x\Big(Qx \leftrightarrow ((Rxx \wedge Rdx) \wedge \forall y(Ryx \to (y = x \vee y = d)))\Big)$
  - $\forall x\Big(Qx \leftrightarrow \forall y\big(Ryx \leftrightarrow (y = x \vee y = d)\big)\Big)$

Ejercicios de formalización

Enunciado para formalizar en $\mathcal{L}_{po}$

1. Se os da un dominio definido intensional o extensionalmente formado por:
   1.1. Objetos y una **función de asignación**.
   1.2. Constantes asignadas a elementos del dominio.
2. Se definen uno o varios predicados:
   2.1. Pueden ser monarios o monádicos.
   2.2. Pueden ser $n-$arios o $n-$-adicos.
3. Se estudian las relaciones dentro de dicho dominio.

Ejemplo de ejercicio de formalización

Enunciado para formalizar en $\mathcal{L}_{po}$

1. $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ en la axiomática de Peano.
2. Definimos:
   2.1. La operación suma como la operación que satisface que $n + 1 = s(n)$ y $n + s(m) = s(n + m)$
   2.2. La operación producto entre dos elementos m y n del dominio como la operación $mn = m_1 + m_2 + ... + m_n$.
3. Se pregunta el valor de verdad de las siguientes fórmulas:
   3.1. $\forall x \exists y (y = x + 1)$
   3.2. $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$
   3.3. $\exists x (x = 5 + 1)$
   3.4. $\forall x \exists y \big((x + y = z) \wedge (y + x = z)\big)$

Reglas γ: Elim $\forall$ y Elim $\neg\exists$

La constante individual (a) puede ser cualquiera, usada anteriormente en el árbol o no.

$$
\begin{array}{cc}
\forall x(A) & \neg\exists x(A) \\
| & | \\
(A)^x_a & \neg(A)^x_a
\end{array}
$$

Reglas δ: Elim $\neg\forall$ y Elim $\exists$

La constante individual ($a*$) no ha podido ser usada en el árbol con anterioridad.

$$\begin{array}{ccc} \neg\forall x(A) & & \exists x(A) \\ | & & | \\ \neg(A)^{x}_{a*} & & (A)^{x}_{a*} \end{array}$$

Árboles analíticos: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

$\neg\forall x(Px) \wedge aRb \models \exists x(\neg Px)$

$$
\begin{array}{c}
1. \neg\forall x(Px) \wedge aRb \\
| \\
2. \neg(\exists x(\neg Px)) \\
| \\
3. \neg\forall x(Px) \\
| \\
4. aRb \\
| \\
5. \neg Pc \ \text{(por 3)} \\
| \\
6. \neg\neg Pc \ \text{(por 2)} \\
| \\
7. Pc \\
| \\
\#
\end{array}
$$

Ejercicios

Demuestre o refute por medio de A.A. las siguientes inferencias:

1. $\forall x(Px \to Qx) \models \forall x Px \to \forall x Qx$
2. $\forall x(Px \to Qx) \models \forall x \forall y((Px \land Ryx)) \to (Qx \land Ryx))$
3. $\forall x(Px \to Qx); \exists x(Rx \land Px) \models \exists x(Rx \land Qx)$

Punto de partida

Teoría de Conjuntos

- Entendemos que toda fórmula de un lenguaje de primer orden puede interpretarse en estructuras de dos clases: en aquellas en que es verdadera y en aquellas en que no lo es. Llamamos al conjunto del primer tipo de estructuras que hacen verdadera una fórmula ϕ el conjunto de modelos de ϕ y escribimos $MOD(\phi)$.
- Una teoría, en sentido estricto, es el conjunto de modelos que satisface un conjunto de fórmulas que definen dicha teoría y que llamamos axiomas
$$TEOR = MOD(\Gamma)$$
- La teoría de conjuntos se definirá, por tanto, de manera axiomática.

Punto de partida

ZFC

Definimos una relación concreta entre los elementos del dominio de las estructuras de $MOD(\Gamma)$ que llamamos relación de pertenencia y escribimos $a \in b$ en lugar de $a\mathcal{R}b$ o $\mathcal{R}ab$ para indicar que el elemento a está relacionado por medio de la relación $\in$ con el elemento b.