Lógica Formal

Introducción

José Alejandro Fernández Cuesta

alejandro.fernandez@urjc.es

2023/2024

Índice

Lógica Formal (DLE)

Lógica Formal: *lógica que opera utilizando un lenguaje simbólico abstracto para representar la estructura básica de un sistema.*

Lógica Formal (DLE)

Lógica Formal: *lógica que opera utilizando un lenguaje simbólico abstracto para representar la estructura básica de un sistema.*

- ¿Qué significa que una lógica *opere*?

Lógica Formal (DLE)

Lógica Formal: *lógica que opera utilizando un lenguaje simbólico abstracto para representar la estructura básica de un sistema.*

- ¿Qué significa que una lógica *opere*?
- ¿Qué significa aquí abstracto?

Lógica Formal (DLE)

Lógica Formal: *lógica que opera utilizando un lenguaje simbólico abstracto para representar la estructura básica de un sistema.*

- ¿Qué significa que una lógica *opere*?
- ¿Qué significa aquí abstracto?
- ¿Qué significa representar una estructura? ¿Y estructura?

Lógica Formal (DLE)

Lógica Formal: *lógica que opera utilizando un lenguaje simbólico abstracto para representar la estructura básica de un sistema.*

- ¿Qué significa que una lógica *opere*?
- ¿Qué significa aquí abstracto?
- ¿Qué significa representar una estructura? ¿Y estructura?
- ¿Qué es la estructura básica de un sistema? ¿Y un sistema?

Introducción

Lógica Formal (DLE)

Lógica Formal: *lógica que opera utilizando un lenguaje simbólico abstracto para representar la estructura básica de un sistema.*

- ¿Qué significa que una lógica *opere*?
- ¿Qué significa aquí abstracto?
- ¿Qué significa representar una estructura? ¿Y estructura?
- ¿Qué es la estructura básica de un sistema? ¿Y un sistema?

Modificación

Lógica Formal: disciplina académica basada en la aplicación de lenguajes formales para (i) formalizar, representar y manipular y (ii) construir, fundamentar y estudiar teorías formales (principalmente matemáticas, físicas y metafísicas).

Esquema general del curso

Necesidad de fundamentación (Historia) $\longrightarrow$ "Lenguajes" $\longrightarrow$ Teorías.

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{po}$$

Introducción

- Definición de lógica implica compromisos:
  - Estatus gnoseológico de la lógica formal.
  - Distintas acepciones de «clásica».
  - Distintas lógicas no-clásicas.
  - Problemas de relación entre sí.
- Veremos perspectiva «estándar».

Crisis de fundamentos

Antecedentes:

- Hasta el siglo XIX: armonía (Física, Lógica, Ontología, Matemáticas).
- s. XVII y XVIII. Generalización de conceptos controvertidos: función, infinitesimal, derivada, sucesión, límite ...
- s. XIX. Fundamentación como clarificación.
- Aritmetización del análisis: Bolzano, Dedekind, Cantor, Weierstrass, ...
- Cadena de fundamentación numérica: análisis matemático reducido a axiomatización de la aritmética.

$$\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \cdots$$

- Se necesitan conjuntos: elementos y propiedades (teoría informal de conjuntos).
  - Conjunto como colección de elementos (intensional o extensional).
  - Elemento ($\in$), subconjunto ($\subseteq$), conjunto potencia ($\mathcal{P}(A)$), unión ($\cup$) e intersección ($\cap$).

Crisis de fundamentos

Infinitos

- Potencia: inacabado, imperfecto, clásico.
- Acto: en el tiempo, terminado, imposible.
- Trascendental: ¿Dios?

Infinitos en *acto*

- Aristóteles: infinito como infinito en potencia (ilimitación, indeterminación). Para San Agustín el infinito, para Dios, es como si fuera finito. Para Santo Tomás Dios mismo será infinito: problema de conocimiento.
- Descartes (ideas innatas), Hume (problema del mal).
- Panteísmo.
- Kant: infinito en acto como *ideal* de la razón.

Crisis de fundamentos

Primera teoría de conjuntos informal

- Liouville (1874), Cantor (1878): cardinalidad de conjuntos ("potencia" de Steiner).
- Ahora el potencial deriva del infinito en acto: lo sobreentiende.
- Preguntas de Cantor:
  - ¿Cualquier conjunto de reales es numerable o tiene la potencia del continuo?
  - ¿Cuál es la potencia del continuo? (**Problema del continuo**).

Consolidación de la teoría de conjuntos

- Teorema de Cantor: el conjunto potencia de cualquier conjunto tiene una cardinalidad estrictamente mayor que la del propio conjunto.
    - Corolario: la colección universal $\mathcal{V}$ de todos los conjuntos no puede ser un conjunto ya que, de serlo, su conjunto potencia tendría más elementos que ella misma.
    - Desarrolla la aritmética transfinita: $\ldots -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, \ldots, \omega+1, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots$
- Cantor demuestra que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ y que $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$
- **Hipótesis del Continuo** ($\mathcal{HC}$): $\mathfrak{c} = \aleph_1$
- Schröder (1896: prueba incompleta), Bernstein (1898: prueba correcta): *teorema Schröder-Bernstein-Cantor*.

Crisis de fundamentos

Paradojas: primera crisis de la teoría informal de conjuntos

- 1897: primera paradoja de Bourali-Forti.
- Resuelta con distinción de von Neumann (1925) entre conjunto y clases (infinito absoluto y absoluto transfinito de Cantor).
- 1901: primera paradoja de Russell (cardinalidad álefs).
- 1902: rechazo a la teoría de conjuntos (Kronecker y Poincaré).
- 1903: paradoja de Russell (sobre definición intensiva de conjuntos: a cada propiedad se asocia un conjunto cuyos elementos son todos los objetos que verifican dicha propiedad).

$$M = \{x \mid x \notin x\}$$
$$\models M \in M \leftrightarrow M \notin M$$

Crisis de fundamentos

Teorema del buen orden de Zermelo: segunda crisis de la teoría informal de conjuntos

- Paradoja de Russell echa por tierra proyecto logicista.
- 1904: Zermelo publica prueba del teorema de buen orden explicitando el axioma de elección (como elemento necesario para la prueba).
- Peano y Borel se oponen: se incluye un axioma existencial con el que se asegura la existencia de un objeto sin ofrecer método alguno para obtenerlo.

Nace la tercera crisis de fundamentos de la historia de las matemáticas.

Crisis de fundamentos

Tres escuelas clásicas

- Logicismo (Frege): reducir todo a nueva lógica como solución (se diluiría). Fracasa por las paradojas como la de Russell. Hoy reformulado en neoplatonismo y realismo.
- Formalismo (Hilbert): definir todo en base a reglas y usos (no hay ontología de objetos abstractos). Fracasa por resultados de incompletitud y no es explicativo. Hoy reformulado en pragmatismo, instrumentalismo y pluralismo lógico.
- Intuicionismo (Brouwer): recuperar intuición clásica modificando matemática contemporánea. Construccionismo, nueva lógica (valores de demostración, trivalencia, sin eliminación de doble negación, sin reducción al absurdo). No ha logrado ofrecer una alternativa viable. Hoy vigente en idealismo.

Crisis de fundamentos

Nueva solución

Se exige una nueva metodología de solución.

Irrumpe la lógica formal.

- Necesitamos caracterizar nuestra teoría de conjuntos sin ambigüedad y eliminando paradojas.
- Necesitamos entender por qué irrumpen dichas paradojas y por qué ciertos axiomas funcionan para eliminarlas.
- Cuando irrumpen las definiciones adecuadas de existencia, predicado, objeto, relación, igualdad, infinito, etc. se reformulan numerosos debates matafísicos y epistemológicos clásicos.

La filosofía sufre un giro: necesitamos construir una ontología que no deje fuera ni sea directamente incompatible con la matemática.

s. XIX

- Armonía se rompe.
- Varias crisis de fundamentación físico-matemática $\Rightarrow$ nueva respuesta.

Ruptura filosóficamente relevante: *viraje filosófico* (principios del XX) y filosofía analítica.

Crisis de la intuición clásica.

Límites de las teorías clásicas

Revolución en física y matemáticas

- Se supera a Euclides: geometrías no clásicas y aplicaciones en física.
- Se supera a Newton: relatividad, cuántica y análisis complejo.

Revolución en respuesta lógica y metafísica

- Se supera a Aristóteles[a]: sujeto/predicado, categorías, ontología, silogística, infinito en acto, existencia como predicado, ...
- Se supera a Kant: sujeto/predicado, sintético/analítico, matemática como sintética *a priori*, tabla categorías, base empírica (fenómeno), ...

[a] Estos ejercicios de superación son parte del contenido que estudiaremos a lo largo del curso

Límites de las teorías clásicas

Nuevos resultados

- Sujeto/Predicado $\Rightarrow$ Función/Argumento.
- Predicados monádicos $\Rightarrow$ Propiedades n-ádicas.
- Existencia como predicado $\Rightarrow$ Existencia como propiedad de orden superior.
- Infinito en potencia $\Rightarrow$ infinito en acto.
- Silogística (lenguaje natural) $\Rightarrow$ Lenguajes formales (teorías axiomáticas).
- Matemática fundamentada en estética trascendental (Euclides-Newton-Kant) $\Rightarrow$ Crisis de la **intuición** clásica y nuevo proyecto de fundamentación.

Kant

Que la lógica ha tomado este camino seguro desde los tiempos más antiguos es algo que puede inferirse del hecho de que no ha necesitado dar ningún paso atrás desde Aristóteles, salvo que se quieran considerar como correcciones la supresión de ciertas sutilezas innecesarias o la clarificación de lo expuesto, aspectos que afectan a la elegancia, más que a la certeza de la ciencia. Lo curioso de la lógica es que tampoco haya sido capaz de avanzar, hasta hoy, un solo paso. **Según todas las apariencias se halla, pues, definitivamente concluida**.
(KrV: B, VIII).

Lenguajes y metalenguajes

Distinción fundamental

- Lengua hablada: lingüística.
- Lenguaje natural: abstracción basada en lenguas.
- Lenguaje formal: abstracción generalizada (lenguajes de programación/lenguajes lógicos).

Sintaxis

- Alfabeto
- Concatenación
- Expresiones bien formadas
- Grado lógico
- Signo lógico principal
- Subfórmulas
- Árboles de descomposición

Semántica

- Función veritativa
- Modelos
- Satisfacibilidad
- Consecuencia y verdad lógicas
- Tablas de verdad
- Cálculos (A.A. y D.N.)

Omitimos la pragmática: compromiso relevantista.

Lenguajes y metalenguajes: sintaxis y semántica

Estratificación y autorreferencialidad

Algunos autores entienden por «*metalógica*» la estratificación y autorreferencialidad, pero esto es representable en un mismo lenguaje.

Metalenguaje

Un **metalenguaje** es aquel lenguaje empleado para estudiar otro lenguaje (llamado *lenguaje objeto*). Sirve para

- Realizar exposiciones de manera más asequible (afirmando, por ejemplo, "es cierto que 4 es un número par" en lugar de "$v(4 = 2k : k \in \mathbb{N}) = 1$")
- **Estudiar ciertas propiedades metalógicas de lenguajes formales concretos**.

El metalenguaje y el lenguaje objeto pueden coincidir, aunque no tienen por qué. El metalenguaje estándar es $\mathcal{L}_{po}$ (teorema de Lindström).

Metateoremas relevantes

- Consistencia: si no se puede demostrar una fórmula y su negación (no hay contradicciones).
- Completitud: si toda fórmula es un teorema (deducible en el lenguaje).
- Decidibilidad: si existe un procedimiento efectivo a partir del cual, en un número finito de pasos, determinar si una sentencia del lenguaje es o no un teorema de la teoría (cálculos efectivos).

Proposición

Una **proposición** es toda fórmula bien formada susceptible de ser verdadera/1 o falsa/0 (general: tener dos valores interdefinibles). Podrán ser compuestas formadas a partir de otras más simples o atómicas. Se suelen representar por p_i. Y el estudio del contenido proposicional es extralógico.

- Definición de verdad: qué es $\Rightarrow$ ontología, epistemología, filosofía del lenguaje.
- Criterio de verdad: cuándo algo es verdadero $\Rightarrow$ filosofía de la ciencia, filosofía del lenguaje, filosofía de la lógica.
- Lógica $\Rightarrow$ *ars combinatoria* y matemáticas.

Lógica Formal

Lógica de orden cero

José Alejandro Fernández Cuesta

alejandro.fernandez@urjc.es

2023/2024

Índice

Sintaxis Orden Cero

Alfabeto de L

1. Signos lógicos (conectivas monarias y binarias):
   - Negación: $\neg$
   - Conjunción: $\wedge$
   - Disyunción: $\vee$
   - Condicional: $\rightarrow$
2. Constantes universales:
   - $\top$
   - $\bot$
3. Signos proposicionales: p_i
4. Cifras: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
5. Delimitadores

Sintaxis Orden Cero

Concatenación en L

Concatenar es una operación básica que consiste en la producción de *ristras* o *expresiones* de L. Se define como una operación de n argumentos cuyo resultado es una ristra de signos.

Concatenación de signos

- Si x_1 es un signo, $Con(x_1) = x_1$
- Si x_1 y x_2 son signos, $Con(x_1, x_2) = x_1x_2$
- Si $x_1, x_2, ..., x_n$ son signos,
  $Con(x_1, x_2, ..., x_n) = Con\Big(x_1, Con\big(x_2, ..., Con(x_{n-1}, x_n)\big)\Big)$

Sintaxis Orden Cero

Concatenación de ristras

- Si x_1 es una ristra, $Con(x_1) = x_1$
- Si x_1 y x_2 son ristras, o cualquiera de ellos es un signo y el otro una ristra, $Con(x_1, x_2) = Con\big(Con(x_1), Con(x_2)\big) = x_1 x_2$
- Si $x_1, x_2, ..., x_n$ son signos o ristras, $Con(x_1, x_2, ..., x_n) = Con\Big(x_1, Con\big(x_2, ..., Con(x_{n-1}, x_n)\big)\Big)$

Si el resultado es una ristra que solamente contiene signos de L, se trata de una ristra de L. Vía concatenación se pueden formar infinitas expresiones de L.

Ejemplos: $Con(p_5) =$ "p_5"; $Con(\ p_5, \wedge, p\ ) =$ "$p_5 \wedge p$"; $Con(\ p_5, \neg, \wedge, p\ ) =$ "$p_5 \neg \wedge p$".

Fbfs (definición recursiva)

De todas las ristras de signos producidas por concatenación, solamente serán **fórmulas bien formadas** (fbfs) finitas, aquellas que satisfagan los siguientes criterios:

- Si ϕ es de la forma $p_i : i \in \mathbb{N}$ o $\top$ o $\bot$, entonces ϕ es una fbf.
- Si ψ es una fbf, $\neg\psi$ es una fbf.
- Si ϕ y ψ son fbfs, entonces:
  - $\phi \wedge \psi$ es una fbf.
  - $\phi \vee \psi$ es una fbf.
  - $\phi \rightarrow \psi$ es una fbf.

El conjunto de todas las ristras bien formadas es un subconjunto del conjunto de todas las ristras posibles de L. Llamamos a este subconjunto $\mathcal{L}$.

Grado lógico

El **grado lógico** de una fórmula es una función de $\mathcal{L}$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$gr : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Definida recursivamente como:

0. Sean ϕ y ψ fórmulas en $\mathcal{L}$
1. Si ϕ es una fórmula elemental, o $\top$ o $\perp$ y $gr(\phi) = 0$.
2. $gr(\neg\phi) = 1 + gr(\phi)$
3. $gr(\phi \diamond \psi) = 1 + gr(\phi) + gr(\psi)$

Donde $\diamond$ está por cualquier conectiva binaria.

Sintaxis Orden Cero

Operadores de concatenación

Se define un operador de concatenación para cada conectiva primitiva:

- $Con_{\neg}(\phi) = \text{“}\neg\phi\text{”}$
- $Con_{\wedge}(\phi, \psi) = \text{“}\phi \wedge \psi\text{”}$
- $Con_{\vee}(\phi, \psi) = \text{“}\phi \vee \psi\text{”}$
- $Con_{\rightarrow}(\phi, \psi) = \text{“}\phi \rightarrow \psi\text{”}$

Sintaxis Orden Cero

Operadores de concatenación

Por tanto, toda fbf se ha construido por aplicación sucesiva de un número limitado de operaciones de concatenación. Por ejemplo, el principio de contradicción $\neg(p \wedge \neg p)$ se construye a partir de la secuencia:

1. $Con_{\neg}(p \wedge \neg p)$
2. $Con_{\wedge}(p, \neg p)$
3. $Con_{\neg}(p)$

Signo lógico principal

En toda fórmula existe un único **signo lógico principal**: aquel introducido por el último operador de concatenación en la secuencia de formación de la fórmula. Puesto que una fórmula ha de ser generada mediante una secuencia finita de aplicaciones de operadores de concatenación, cada fórmula solamente puede formarse de una única manera.

Sintaxis Orden Cero

Subfórmula

- Si ϕ es una fórmula elemental, la única subfórmula de ϕ es ella misma.
- Si ψ es de la forma $\neg\phi$, entonces son subfórmulas de ψ: $\neg\phi$ y todas las subfórmulas de ϕ.
- Si ρ es de la forma $\psi \diamond \phi$, entonces son subfórmulas de ρ: $\psi \diamond \phi$, las subfórmulas de ψ y las subfórmulas de ϕ.

Subfórmula inmediata

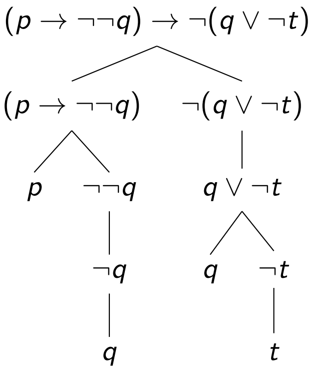
- Una fórmula elemental no tiene subfórmula inmediata.
- ϕ es la única subfórmula inmediata de $\neg\phi$.
- ϕ y ψ son las únicas subfórmulas inmediatas de $\phi \diamond \psi$ (resp. subfórmula inmediata de la izquierda y de la derecha).

Árbol de descomposición

El **árbol de descomposición de una fórmula** es una representación diagramática de flujo de su proceso de construcción. La construcción de un árbol de descomposición ha de seguir las siguientes reglas:

1. La fórmula dada se escribe en la raíz del árbol.
2. En los sucesores inmediatos, se escriben las subfórmulas inmediatas.
3. En cada nudo terminal actual se aplica de nuevo 2.
4. Se repite el proceso hasta que en todo nudo terminal del árbol sólo hay fórmulas elementales.

Sintaxis Orden Cero



Árbol de descomposición

Lema de descomposición única

El proceso de composición y el proceso de descomposición de una fórmula son uno y exactamente el mismo. En representación por medio de árboles solamente cambia el sentido (manteniéndose los valores módulo y dirección y siendo, además, los únicos posibles).

Ejercicios de Sintaxis

- Conocer el alfabeto de $\mathcal{L}$, saber realizar concatenaciones correctamente y leer fórmulas de orden cero.
- Conocer la definición recursiva de fbf y saber identificar y clasificar fbfs.
- Calcular el grado lógico de una fbf, identificar subfórmulas y subfórmulas inmediatas y descomponerlas vía árbol.
- Comprender el lema de descomposición única y el resto de aspectos teóricos sintácticos.

Función veritativa

El valor de verdad de las fbfs atómicas no compete a la lógica, sin embargo, la manipulación de dichas proposiciones, una vez han recibido un valor de verdad, es competencia exclusiva de esta (por eso mismo llevamos el apellido de *formal*, aún cuando no seamos formalistas).

Para definir el comportamiento semántico de las fórmulas definimos:

- Un conjunto de "valores de verdad" $V = \{1, 0\}$.
- El conjunto de fbfs $\mathcal{L}$
- Una función de valoración o asignación, $\mathfrak{v}$, de valores tal que a todo elemento de $\mathcal{L}$ le corresponda uno, y sólo un elemento de V:

  $$\mathfrak{v} : \mathcal{L} \longrightarrow V$$

  Escribimos $\mathfrak{v}(\Phi)$ para representar el valor de verdad de Φ (que será 1 o 0).

Asignación de valores de verdad (definición recursiva):

1. $\mathfrak{v}(\neg\phi) = 1$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 0$ y $\mathfrak{v}(\neg\phi) = 0$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$.
2. $\mathfrak{v}(\phi \wedge \psi) = 1$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ y $\mathfrak{v}(\psi) = 1$. En otro caso, $\mathfrak{v}(\phi \wedge \psi) = 0$.
3. $\mathfrak{v}(\phi \vee \psi) = 0$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 0$ y $\mathfrak{v}(\psi) = 0$. En otro caso, $\mathfrak{v}(\phi \vee \psi) = 1$.
4. $\mathfrak{v}(\phi \to \psi) = 0$ syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ y $\mathfrak{v}(\psi) = 0$. En otro caso, $\mathfrak{v}(\phi \vee \psi) = 1$.
5. Si ϕ es una fórmula elemental $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ o $\mathfrak{v}(\phi) = 0$. Este es el caso mínimo o condición de parada del análisis recursivo.

Semántica de Orden Cero

Conjunción:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disyunción:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Condicional:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Negación:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Definiciones

Modelo de una fórmula

Dada una interpretación $\mathfrak{i}$ y una fórmula ϕ tal que $\mathfrak{v}(\phi)_{\mathfrak{i}} = 1$, se dice indistintamente que:

- $\mathfrak{i}$ satisface la fórmula ϕ.
- ϕ es verdadera en $\mathfrak{i}$.
- $\mathfrak{i}$ es un modelo de ϕ.

Fórmula satisfacible

Una fórmula ϕ es, veritativo-funcionalmente, **satisfacible** syss existe una interpretación $\mathfrak{i}$ tal que $\mathfrak{v}(\phi)_{\mathfrak{i}} = 1$.

Conjunto satisfacible de fórmulas

Un conjunto de fórmulas Γ es, veritativo-funcionalmente, **satisfacible** syss existe al menos una interpretación $\mathfrak{i}$ tal que $\mathfrak{v}(\gamma)_{\mathfrak{i}} = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Definiciones

Fórmula insatisfacible

Una fórmula ϕ es, veritativo-funcionalmente, **insatisfacible** syss no existe una interpretación $\mathfrak{i}$ tal que $\mathfrak{v}(\phi)_{\mathfrak{i}} = 1$. Habitualmente suelen llamarse "contradicciones".

Conjunto insatisfacible de fórmulas

Un conjunto de fórmulas Γ es, veritativo-funcionalmente, **insatisfacible** syss no existe una interpretación $\mathfrak{i}$ tal que $\mathfrak{v}(\gamma)_{\mathfrak{i}} = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Fórmula contingente

Una fórmula ϕ es, veritativo-funcionalmente, **contingente** syss existen, al menos, dos interpretaciones $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{j}$ tales que $\mathfrak{v}(\phi)_{\mathfrak{i}} = 1$ y $\mathfrak{v}(\phi)_{\mathfrak{j}} = 0$.

Definiciones

Fórmula válida o verdad lógica

Una fórmula ϕ es veritativo-funcionalmente una **verdad lógica** syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ para toda interpretación posible. Habitualmente suelen llamarse "tautologías". Escribimos $\models \phi$.

Consecuencia lógica

Una fórmula ϕ es veritativo-funcionalmente **consecuencia lógica** de un conjunto Γ de fórmulas syss $\mathfrak{v}(\phi) = 1$ en cada interpretación en que Γ es satisfacible. Escribimos $\Gamma \models \phi$.

- Corolario: si ϕ es una tautología, $\Gamma \models \phi$ para cualquier Γ.
- Corolario: $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\} \models \phi$ syss $(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge ... \wedge \gamma_n) \rightarrow \phi$ es una tautología.
- Corolario: $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\} \models \phi$ syss $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\} \cup \neg\phi$ es insatisfacible.

Definiciones

- **Monotonía**: $\Gamma \models \phi \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \models \phi$.
- **Reflexividad**: para toda $\gamma \in \Gamma$ se cumple que $\Gamma \models \gamma$.
- **Corte**: si $\Gamma \models \phi$ y $\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi$, entonces $\Gamma \models \psi$.

Definiciones

Fórmula independiente

Una fórmula ϕ es veritativo-funcionalmente **independiente** de un conjunto de fórmulas Γ syss ϕ no es consecuencia lógica de Γ. Es decir, hay modelos de Γ que no lo son de ϕ. Escribimos $\Gamma \not\models \phi$.

Conjunto independiente de fórmulas

Un conjunto de fórmulas Δ es veritativo-funcionalmente independiente syss cada $\delta_i \in \Delta$ es independiente del resto. Es decir, para cada $\delta_i \in \Delta$ se cumple que $\Delta - \{\delta_i\} \not\models \delta_i$.

Definiciones

Equivalencia lógica

- Dos fórmulas son lógicamente equivalentes syss su valor de verdad es el mismo para toda interpretación (y son sustituibles). Escribimos $\phi \equiv \psi$.
- La equivalencia lógica es un caso de combinatoria de valores de verdad y por tanto una conectiva definida (una conjunción de condicionales). Además es reflexiva, transitiva y simétrica.

Tablas de verdad

Tablas de verdad

Una tabla de verdad es una matriz tal que cada fila es una interpretación y cada columna un caso o fórmula. Cada valor de la matriz está identificado por el número de orden de la fila y la columna.

	p	q	$p \to q$
i_1	1	1	1
i_2	1	0	0
i_3	0	1	1
i_4	0	0	1

Tabla de verdad para $\big((p \vee \neg q) \wedge r\big)$

1. Identificamos cuántos símbolos proposicionales diferentes hay: p, q, r.
2. Construimos la tabla con tantas columnas a la izquierda como símbolos proposicionales hemos identificado y con 2^n interpretaciones donde n es el número de símbolos proposicionales diferentes. En este caso, $2^3 = 8$:

***La fórmula es 2^n porque $\mathcal{L}$ es bivalente.**

Tablas de verdad

	p	q	r
i_1			
i_2			
i_3			
i_4			
i_5			
i_6			
i_7			
i_8			

Tablas de verdad

3. Escribimos toda combinación de valores de verdad (interpertación) posible. Las tablas de verdad son exhaustivas:

	p	q	r
i_1	1	1	1
i_2	1	1	0
i_3	1	0	1
i_4	1	0	0
i_5	0	1	1
i_6	0	1	0
i_7	0	0	1
i_8	0	0	0

4. Añadimos una columna final para $\big((p \vee \neg q) \wedge r\big)$ y a su izquierda tantas como subfórmulas inmediatas hasta las elementales. Ninguna columna podrá estar repetida, por tanto, habremos de añadir columnas para: $\neg q$; $(p \vee \neg q)$ y $\big((p \vee \neg q) \wedge r\big)$:

	p	q	r	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$\big((p \vee \neg q) \wedge r\big)$
i_1	1	1	1			
i_2	1	1	0			
i_3	1	0	1			
i_4	1	0	0			
i_5	0	1	1			
i_6	0	1	0			
i_7	0	0	1			
i_8	0	0	0			

5. Añadimos valores de verdad a cada interpretación (fila) de cada expresión (columna) según las reglas semánticas de las conectivas:

	p	q	r	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$((p \vee \neg q) \wedge r)$
i_1	1	1	1	0	1	1
i_2	1	1	0	0	1	0
i_3	1	0	1	1	1	1
i_4	1	0	0	1	1	0
i_5	0	1	1	0	0	0
i_6	0	1	0	0	0	0
i_7	0	0	1	1	1	1
i_8	0	0	0	1	1	0

Tablas de verdad

Si se tratase de un conjunto de expresiones, podemos igualmente hacer una tabla de verdad. Sea $\Gamma = \{(p \to q), (q \vee r), \neg p\}$

	p	q	r	$\neg p$	$p \to q$	$q \vee r$
i_1	1	1	1	0	1	1
i_2	1	1	0	0	1	1
i_3	1	0	1	0	0	1
i_4	1	0	0	0	0	0
i_5	0	1	1	1	1	1
i_6	0	1	0	1	1	1
i_7	0	0	1	1	1	1
i_8	0	0	0	1	1	0

Tablas de verdad y conceptos semánticos fundamentales

- Una fórmula es satisfacible y también contingente si en su columna existen tanto interpretaciones con valor 1 como con valor 0. En caso de que solamente existan valores 1 o valores 0, dicha fórmula representará, respectivamente, una verdad lógica o una fórmula insatisfacible.
- Una fórmula ϕ es consecuencia lógica de un conjunto Γ de fórmulas syss la columna de ϕ contiene el valor 1 en todas aquellas interpretaciones en que cada una de las fórmulas de Γ también sean igual a 1.

Ejercicios

1. Dibuja la tabla de $\{(\neg q \to \neg r), (\neg r \to \neg p), (\neg p \to \neg q)\} \models (q \to r)$.
2. ¿Cómo se podría comprobar vía tablas de verdad que dos expresiones lógicas son equivalentes? Explícalo. Comprueba si las siguientes expresiones son equivalentes: $(\phi \to \psi)$ y $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$; $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$ y $(\phi \to \psi)$; $(\phi \to \psi)$ y $(\neg\phi \vee \psi)$; $(\neg\psi \vee \psi)$ y $(\phi \to \psi)$.
3. ¿Puedes dibujar una tabla de verdad con toda conectiva posible en $\mathcal{L}$?¿Esta tabla es exhaustiva, es decir, pueden añadirse nuevas conectivas en $\mathcal{L}$?¿Qué implicaciones tiene esto para el relevantismo?
4. Dibuja la tabla de verdad de una contradicción, de una tautología y de una fórmula contingente.

¿Cuál es la relación entre $\mathcal{L}$ y *LN*?

Trabajo Individual

- Conectivas lógicas: son exhaustivas y no ambiguas.
- Caso *Tonk*: no podemos *crear* nuevas conectivas arbitrariamente.
- En *LN* hay conectivas que no están en $\mathcal{L}$: se reducen interpretaciones por simplificación (pero, aunque, no obstante, como, para que...).
- En *LN* se utilizan conectivas de manera diferente a $\mathcal{L}$: «o estudias o apruebas», «si llueve, el suelo está mojado».
- En $\mathcal{L}$ hay expresiones que carecen de interpretación en *LN*: $\phi \downarrow \neg\psi$, $\psi \uparrow \psi$.
- Problema del **relevantismo**: las paradojas de la implicación material solamente son paradojas si utilizo el condicional para modelizar una conectiva del lenguaje natural.

Ejercicios de Semántica

- Conocer la función veritativa y saber evaluar fórmulas de orden cero correctamente a través de la definición recursiva de asignación.
- Construcción de tablas de verdad y evaluación de fórmulas complejas agotando todos sus posibles valores en cada interpretación.
- Definiciones teóricas y conceptos semánticos fundamentales.
- Evaluar fórmulas de primer orden en estructuras determinando si son modelos o no.

Árboles analíticos (AA.AA.)

Árbol Analítico

Propuestos originalmente por Beth, los *tableaux*, árboles analíticos, tablas semánticas o árboles semánticos, son un procedimiento de prueba (**cálculo**) para ciertos lenguajes que adoptan la forma de grafo o árbol invertido, de manera que en la **raíz** escribimos la fórmula problema y, desde ella, desplegamos cada una de las **ramas** del árbol. Toda ramificación tiene un nodo terminal desde el cual es posible determinar si la rama está **cerrada** o **abierta**. Existirá una deducción syss toda rama está cerrada.

Función

- Establecer que una fórmula es lógicamente válida en mi lenguaje.
- Establecer que una fórmula es deducible a partir de un conjunto de premisas: reducción al absurdo.

Árboles analíticos (AA.AA.)

Reducción al absurdo

$(\Gamma \cup \{\neg\phi\} \Rightarrow \bot) \Longrightarrow \Gamma \models \phi \wedge \Gamma \not\models \neg\phi.$

$\{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \vdash \phi \ \Rightarrow \vdash (\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \rightarrow \phi$ **(Metateorema de deducción)**.

1. Escribimos como nodo raíz la primera premisa e inmediatamente como nodos sucesores el resto de premisas.
2. Escribimos la conclusión negada.
3. Se expande el árbol mediante aplicación de reglas del cálculo.
4. Cuando todas las fórmulas existentes que no sean elementales hayan servido de base para la aplicación de una regla, el árbol está **acabado**.
5. Si en el camino del nodo terminal de una rema existe, al menos, una contradicción, entonces decimos que esta rama está **cerrada**.
6. Un árbol analítico acabado con todas las ramas cerradas es una **refutación**.

Árboles analíticos (AA.AA.)

Fórmulas α (tipo conjuntivo)

α	α_1	α_2
$(\phi \wedge \psi)$	ϕ	ψ
$\neg(\phi \vee \psi)$	$\neg\phi$	$\neg\psi$
$\neg(\phi \rightarrow \psi)$	ϕ	$\neg\psi$
$\neg\neg\phi$	ϕ	

Fórmulas β (tipo disyuntivo)

β	β_1	β_2
$\neg(\phi \wedge \psi)$	$\neg\phi$	$\neg\psi$
$(\phi \vee \psi)$	ϕ	ψ
$(\phi \rightarrow \psi)$	$\neg\phi$	ψ

Árboles analíticos (AA.AA.)

Ejemplo: $((p \to q) \wedge p) \to q$. Iniciamos negando la fórmula

0. $\neg\Big(((p \to q) \wedge p) \to q\Big)$

$|$

1. $((p \to q) \wedge p)$

$|$

2. $\neg q$

Los dos primeros nodos se obtienen a partir del hecho de que en la raíz se está negando un condicional. Sabemos que, por su definición semántica, un condicional solamente es falso syss el antecedente es verdadero **y** el consecuente es falso. Las fórmulas tipo α no generan nuevas ramas.

0. $\neg\Big(((p \to q) \wedge p) \to q\Big)$

$|$

1. $((p \to q) \wedge p)$

$|$

2. $\neg q$

$|$

3. $(p \to q)$

$|$

4. p

De 1., que es una conjunción, de nuevo salen dos fórmulas más, puesto que una conjunción es verdadera syss cada uno de los conjuntos lo es.

Árboles analíticos (AA.AA.)

$$
\begin{array}{c}
0.\ \neg\Big(((p \to q) \land p) \to q\Big) \\
| \\
1.\ ((p \to q) \land p) \\
| \\
2.\ \neg q \\
| \\
3.\ (p \to q) \\
| \\
4.\ p \\
\diagup \quad \diagdown \\
5.\ \neg p \qquad 6.\ q
\end{array}
$$

Por el nodo 3. se dibujan otros dos tipo β generando una ramificación. **Ejercicio:**¿Por qué esto es así?¿Este árbol está acabado?¿Todas las ramas están cerradas?¿Qué implica ?

Árboles analíticos (AA.AA.)

Reglas α:

$$\wedge_\alpha:\ \begin{array}{c} \phi \wedge \psi \\ | \\ \phi \\ | \\ \psi \end{array} \qquad \vee_\alpha:\ \begin{array}{c} \neg(\phi \vee \psi) \\ | \\ \neg\phi \\ | \\ \neg\psi \end{array}$$

$$\to_\alpha:\ \begin{array}{c} \neg(\phi \to \psi) \\ | \\ \phi \\ | \\ \neg\psi \end{array}$$

$$\neg_\alpha:\ \begin{array}{c} \neg\neg\phi \\ | \\ \phi \end{array}$$

Reglas β:

$$\wedge_\beta:\ \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(\phi \wedge \psi)} \\ / & \backslash \\ \neg\phi & \neg\psi \end{array} \qquad \vee_\beta:\ \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\phi \vee \psi} \\ / & \backslash \\ \phi & \psi \end{array}$$

$$\to_\beta:\ \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\phi \to \psi} \\ / & \backslash \\ \neg\phi & \psi \end{array}$$

Ejercicios

Ejercicios

Comprueba vía A.A. si las siguientes deducciones son correctas (revisa tus resultados con ayuda de TPG:

a) $\phi \to \psi; \phi \wedge \rho \models \psi$

b) $(\phi \wedge \psi) \to \rho; \rho \to \sigma \models (\phi \wedge \psi) \to \sigma$

c) $(\phi \vee \psi) \to \rho; \sigma \to (\tau \wedge \omega) \models \neg((\phi \to \rho) \wedge (\sigma \to \omega))$

c) $(\phi \wedge \psi) \to \rho; \sigma \to (\tau \wedge \omega) \models (\phi \to \rho) \wedge (\sigma \to \omega)$

d) $(\phi \to \psi) \wedge (\rho \to \sigma); \phi \vee \rho; (\psi \to \rho) \wedge (\sigma \to \tau) \models \rho \vee \tau$

e) $\phi \to (\psi \vee \rho); \psi \to \rho; \rho \to \sigma \models \phi \to \sigma$

f) $\phi \to \neg\psi; \rho \to \psi \models \neg(\phi \wedge \rho)$

g) $\phi \to \psi; (\phi \wedge \psi) \to \rho; \neg(\phi \wedge \rho) \models \neg\phi$

h) $\models ((\phi \wedge \psi) \to \rho) \leftrightarrow ((\phi \wedge \neg\rho) \to \neg\psi)$

i) $\models ((\phi \to \rho) \wedge (\psi \to \sigma)) \to ((\phi \wedge \psi) \to (\rho \wedge \sigma))$

Deducción Natural

El uso normal de este cálculo es disponer cada deducción en una serie de líneas numeradas y consecutivas. Cada problema deductivo tendrá, como datos iniciales, expresiones bien formadas. Dichos datos iniciales se llaman premisas. El esquema general de una deducción natural es el siguiente:

1	Γ	pr.
2	Δ	(regla)
3	$\quad \Gamma'$	hip.
4	$\quad \Delta'$	(regla)
5	ϕ	(regla)

Semántica de Orden Cero

Reglas de eliminación de conectivas:

1	$\neg\neg\phi$	pr.
2	ϕ	$\mathit{Elim}_{\neg}, 1$

1	$\phi \wedge \psi$	pr.
2	ϕ / ψ	$\mathit{Elim}_{\wedge}, 1$

1	$\phi \to \psi$	pr.
2	ϕ	pr.
3	ψ	$\mathit{Elim}_{\to}, 1, 2$

1	$\phi \vee \psi$	pr.
2	$\quad \phi$	hip.
3	$\quad \vdots$	
4	$\quad \rho$	
5	$\quad \psi$	hip.
6	$\quad \vdots$	
7	$\quad \rho$	
8	ρ	$\mathit{Elim}_{\vee}$, 1: 2-4, 5-7

Reglas de introducción de conectivas:

1	$\vdots$	pr.
2	ϕ	hip.
3	$\ldots$	
4	$\psi \wedge \neg\psi$	$\perp$
5	$\neg\phi$	*Intro*$_{\neg}$, 2-4

1	$\vdots$	pr.
2	ϕ	hip.
3	$\vdots$	
4	ψ	
5	$\phi \rightarrow \psi$	*Intro*$_{\rightarrow}$, 2-4

1	ϕ	pr.
2	ψ	pr.
3	$\phi \wedge \psi$	*Intro*$_{\wedge}$, 1, 2

1	ϕ	pr.
2	$\phi \vee \psi$	*Intro*$_{\vee}$, 1

Semántica de Orden Cero

Transitividad del condicional

1	$\phi \to \psi$
2	$\psi \to \chi$
3	$\vdots$
4	$\phi \to \chi$

1	$\phi \to \psi$	pr.
2	$\psi \to \chi$	pr.
3	$\quad \phi$	hip.
4	$\quad \psi$	*Elim*$_{\to}$, 1, 3
5	$\quad \chi$	*Elim*$_{\to}$, 2, 4
6	$\phi \to \chi$	*Intro*$_{\to}$, 3-5

Modus Tollens (MT)

1	$\phi \rightarrow \psi$
2	$\neg\psi$
3	$\vdots$
4	$\neg\phi$

1	$\phi \rightarrow \psi$	pr.
2	$\neg\psi$	pr.
3	ϕ	hip.
4	ψ	$Elim_{\rightarrow}$, 1, 3
5	$\psi \wedge \neg\psi$	$Intro_{\wedge}$, 4, 2
6	$\neg\phi$	$Intro_{\neg}$, 3-5

Contraposición (Contr)

1	$\phi \to \psi$
2	$\vdots$
3	$\neg\psi \to \neg\phi$

1	$\phi \to \psi$	pr.
2	$\neg\psi$	hip.
3	$\neg\phi$	MT, 1, 2
4	$\neg\psi \to \neg\phi$	*Intro*$_{\to}$, 2-3

Reiteración o identidad (Reit/Id)

1	ϕ	
2	$\vdots$	
3	ϕ	

1	ϕ	pr.
2	$\neg\phi$	hip.
3	$\phi \wedge \neg\phi$	$Intro_{\wedge}$, 1, 2
4	ϕ	$Intro_{\neg}$, 2-3

Semántica de Orden Cero

Ex contradictione quodlibet (Ecq)

1	$\phi \wedge \neg\phi$
2	$\vdots$
3	ψ

1	$\phi \wedge \neg\phi$	pr.
2	$\quad \neg\Psi$	hip.
3	$\quad \phi \wedge \neg\phi$	Reit, 1
4	Ψ	*Intro*$_\neg$, 2-3

Silogismo Disyuntivo (SD)

1	$\phi \vee \psi$
2	$\neg\phi$
3	$\vdots$
4	ψ

Ejercicio: La demostración más habitual de Ecq usa SD

¿Sabrías reconstruirla?

1	$\phi \vee \psi$	pr.
2	$\neg\phi$	pr.
3	$\neg\psi$	hip.
4	ϕ	sub-hip.
5	$\phi \wedge \neg\phi$	$Intro_\wedge$, 4, 2
6	ψ	sub-hip.
7	$\psi \wedge \neg\psi$	$Intro_\wedge$, 6, 3
8	$\phi \wedge \neg\phi$	Ecq, 7
9	$\phi \wedge \neg\phi$	$Elim_\vee$, 1: 4-5,
10	$\neg\neg\psi$	$Intro_\neg$, 3-9
11	ψ	$Elim_\neg$, 10

Silogismo Disyuntivo (SD)

1	$\phi \vee \psi$	
2	$\neg\phi$	
3	$\vdots$	
4	ψ	

Ejercicio: La demostración más habitual de Ecq usa SD

¿Sabrías reconstruirla?

1	$\phi \vee \psi$	pr.
2	$\neg\phi$	pr.
3	$\neg\psi$	hip.
4	ϕ	sub-hip.
5	$\phi \wedge \neg\phi$	$Intro_{\wedge}$, 4, 2
6	ψ	sub-hip.
7	$\psi \wedge \neg\psi$	$Intro_{\wedge}$, 6, 3
8	$\phi \wedge \neg\phi$	Ecq, 7
9	$\phi \wedge \neg\phi$	$Elim_{\vee}$, 1: 4-5,
10	$\neg\neg\psi$	$Intro_{\neg}$, 3-9
11	ψ	$Elim_{\neg}$, 10

Semántica de Orden Cero

Definición de deducción

Una **deducción** es una secuencia finita de líneas en cada una de las cuales figura una fbf de $\mathcal{L}$ tal que es una **premisa**, una **hipótesis** o una expresión obtenida por transformación mediante la aplicación de una regla del cálculo. Cada deducción se compone de tantas filas como sean necesarias, cada una de las cuales está numerada de manera única y ordenada y de tres columnas compuestas por la numeración de cada fila, las fbfs y una cantidad acotada de información respecto de dicha fila por la que se identifica si se trata de una premisa, hipótesis, subhipótesis, subsubhipótesis, n-subhipótesis, o el resultado de la aplicación de una regla. Decimos que una fbf Φ es consecuencia lógica de Γ syss existe una deducción de Φ a partir de Γ y escribimos $\Gamma \models \Phi$.

Pregunta

A continuación se representan las reglas conocidas como *Leyes de De Morgan*, ¿Os atrevéis a deducirlas por DN?

$$\begin{array}{c|l} 1 & \neg(\phi \wedge \psi) \\ 2 & \vdots \\ 3 & \neg\phi \vee \neg\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} 1 & \neg(\phi \vee \psi) \\ 2 & \vdots \\ 3 & \neg\phi \wedge \neg\psi \end{array}$$

Simplificación

$$
\begin{array}{l|l}
1 & \phi \lor \phi \\
\hline
2 & \vdots \\
3 & \phi
\end{array}
$$

Simplificación

$$
\begin{array}{l|l}
1 & \phi \land \phi \\
\hline
2 & \vdots \\
3 & \phi
\end{array}
$$

Semántica de Orden Cero

Simplificación

1	$\phi \rightarrow \phi$
2	$\vdots$
3	$\top$

Simplificación

1	$\phi \leftrightarrow \phi$
2	$\vdots$
3	$\top$

Otras reglas derivadas

1. **Identidad:**
   1.1. $\phi \vee \bot \equiv \phi$
   1.2. $\phi \wedge \top \equiv \phi$
   1.3. $\top \to \phi \equiv \phi$
   1.4. $\phi \vee \top \equiv \top$
   1.5. $\phi \wedge \bot \equiv \bot$
2. **Conmutativas:**
   2.1. $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$
   2.2. $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$
3. **Del condicional:**
   3.1. $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
   3.2. $\phi \to \psi \equiv \neg(\phi \wedge \neg\psi)$
   3.3. $\phi \to \psi \equiv \phi \leftrightarrow (\phi \wedge \psi)$
   3.4. $\phi \to \psi \equiv \psi \leftrightarrow (\phi \vee \psi)$
4. **Bicondicional:**
   4.1. $\phi \leftrightarrow \psi \equiv (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$
5. **Transposición:**
   5.1. $\phi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\phi$
   5.2. $\phi \leftrightarrow \psi \equiv \neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$
6. **Asociatividad ($Elim_{),(}$):**
   6.1. $(\phi \vee \psi) \vee \chi \equiv \phi \vee (\psi \vee \chi)$
   6.2. $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$
   6.3. $(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \equiv \phi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)$

Bonus track

7. **Distributividad:**
   7.1. $\phi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$
   7.2. $\phi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$
   7.3. $\phi \to (\psi \vee \chi) \equiv (\phi \to \psi) \vee (\phi \to \chi)$
   7.4. $\phi \to (\psi \wedge \chi) \equiv (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi)$
8. **Inferencia:**
   8.1. $\neg\phi \wedge (\phi \vee \psi) \models \psi$
   8.2. $\phi \wedge (\neg\phi \vee \neg\psi) \models \neg\psi$
9. ***Ponendo ponens*:**
   $(\phi \to \psi) \wedge \phi \models \psi$
10. ***Tollendo tollens*:**
   $(\phi \to \psi) \wedge \neg\psi \models \neg\phi$
11. **Transitividad (silogismo hipotético):**
   11.1. $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \models (\phi \to \chi)$
   11.2. $(\phi \leftrightarrow \psi) \wedge (\psi \leftrightarrow \chi) \models (\phi \leftrightarrow \chi)$
12. **Exportación:**
   $(\phi \wedge \psi) \to \chi \equiv \phi \to (\psi \to \chi)$
13. **Permutación:**
   $\phi \to (\psi \to \chi) \equiv \psi \to (\phi \to \chi)$
14. **Resolución:**
   $(\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \models \psi \vee \chi$

3 supuestas ventajas de DN frente a AA.AA.

1. Podemos definir las conectivas a través sus reglas de introducción (en el fondo es equivalente).
2. Estamos ante un método de prueba directo: los árboles analíticos probaban por reducción al absurdo, DN no (pero en el fondo, de nuevo, es equivalente, vía tablas de verdad).
3. Podemos ser **inferencialistas**: renunciar a una exposición axiomática que necesite justificación.

Aparentes ventajas

En el fondo son ventajas interpretativas: el cálculo es equivalente.

Demostraciones más frecuentes en matemáticas

1. **Deducción directa** (sobre todo por transitividad).
2. **Negación del consecuente** (mediante transposición).
3. **Reducción absurdo** (A.A.).
4. [**Principio de inducción**].

Álgebra de Boole

- Conectivas como puertas lógicas: circuitos y electrónica.
- Circuitos lógicos $\Longrightarrow$ Circuitos Integrados $\Longrightarrow$ Microprocesadores.
- Puertas lógicas cuánticas.
- Algoritmos e IAs.

$\mathcal{L}$ como cálculo base

Cálculos tipo $\mathcal{L}$ pueden ampliarse (combinando):

- Adición de más valores de verdad: lógicas trivalentes, n-valentes, difusas ...
- Adición de nuevas conectivas: primeros cálculos modales, relevantistas, cuánticos, ...
- Definición de nuevas semánticas (no veritativo-funcionales) especialmente por adición de operadores: lógicas modales (temporales, deónticas, aléticas, ...), ...
- Subida de *orden*: primer orden, segundo orden, teoría de modelos, many-sorted logics, ...

Ejercicios

1. Expresa la negación de las siguientes proposiciones y aplica las reglas de De Morgan para simplificar:
   1.1. $(\phi \wedge \psi) \vee \chi$
   1.2. $(\phi \vee \psi) \wedge \chi$
   1.3. $(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$
2. Simplifica las siguientes proposiciones a través de las leyes distributivas:
   2.1. $(\phi \vee \neg\psi) \wedge \neg\phi$
   2.2. $(\neg\phi \vee \neg\psi) \wedge (\phi \vee \psi)$
   2.3. $(\neg\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\chi) \vee (\phi \wedge \psi)$
3. Construye dos proposiciones distintas que posean una misma tabla de verdad para las interpretaciones ordenadas $i_1, \ldots, i_n$:
   a) 0011 b) 10110011 c) 01010101 d) 0110 e) 11000111

Ejercicios de Semántica

- Comprender en qué consisten los métodos de prueba de DN y AA.AA. e identificar su correcta construcción.
- Saber identificar cada una de las partes de una DN correctamente.
- Saber aplicar el método de cálculo de AA.AA para orden cero.
- Entender cuáles son las posibles vía de ampliación de un lenguaje formal.
- Aplicar reglas concretas de DN para realizar ejercicios de simplificación (dadas dichas reglas previamente).
- Construcción inversa de tablas de verdad.

Universidad
Rey Juan Carlos

Lógica Formal

Lógica de primer orden

José Alejandro Fernández
Cuesta

alejandro.fernandez@urjc.es

2023/2024

Índice

Sintaxis de $\mathcal{L}_{po}$

Alfabeto

0. Dominio: *Dom*, $\mathcal{U}$, $\mathcal{D}$.
1. Términos individuales.
   - 1.1. Constantes individuales: $\{a, b, c, ...\}$
   - 1.2. Variables individuales: $\{x, y, z, ...\}$
     - 1.2.1. Libres.
     - 1.2.2. Ligadas.
2. Términos predicativos: $\{P, Q, R, S, ...\}$
   - 2.1. Monádicos: $Pa, Pb, ..., Px, Py, ...$
   - 2.2. n-ádicos: $Raa, Rab, Rbb, ..., Rxx, Rxy, ..., Raaa, Raab, ...$
   - 2.3. Igualdad: $=$.
3. Alfabeto de $\mathcal{L}$ ampliado[a] con cuantificadores: $\forall$, $\exists$.

---

[a] Signos lógicos, constantes universales, cifras y delimitadores se mantienen. Por esto mismo $\mathcal{L}_{po}$ se dice que es una ampliación conservadora o restrictiva sobre $\mathcal{L}$.

Sintaxis de $\mathcal{L}_{po}$

Nociones preliminares

- **Dominio**: colección de objetos no vacía sobre la que trabajamos (separar teoría y realidad) cada uno de los cuales puede ser **asignado** por una **constante individual**. Ejemplos: $\mathbb{N}$, *decimales de* π, *factores primos de 30*, ...
- El dominio es lo más relevante porque cambiará los resultados (contexto): el formado por los factores primos de 30 no presenta dificultad porque podemos equiparar $30 \in \mathbb{N} = +30 \in \mathbb{Z} = +\frac{30}{1} \in \mathbb{Q}$ pero podría no ser así. Por ejemplo, $x^2 = 9$ en $\mathbb{N}$ devuelve $x = 3$ mientras que en $\mathbb{Z}$, $x = \pm 3$.
- **Asignación**: $\{\langle x, y\rangle | x \in Dom \wedge y \in Rang\}$.

Sintaxis de $\mathcal{L}_{po}$

Nociones preliminares

- El dominio es la extensión de un predicado: "todo factor primo de 30 es par" es falso y "todo factor primo de 64 es par" es verdadero. ¿Por qué? $=$ **¿Dónde?**
- "Todo" significa "cada uno por separado" y es comprobable. Puedo comprobarlo en los conjuntos $\{2, 3, 5\}$ y $\{2\}$ respectivamente. No hay problema de inducción pero...
- *Todo* $n \in \mathbb{N}$ *tiene un sucesor* (A2): ¡Dominio infinito!
- Introduciremos en el cálculo de orden cero: predicados, relaciones, dominios, cuantificadores, ...
- Tal y como hemos mencionado, definiremos un cálculo de primer orden y a partir de ahí introduciremos la teoría de conjuntos estándar.
- ¿Existe un *dominio universal*? Problema de la *generalidad absoluta*.

Fórmulas y enunciados/oraciones (sentencias) elementales

- Un **elemento proposicional** de $\mathcal{L}_{po}$ es una constante o variable individual sola. Se llaman **términos**. Un término es una parte de la proposición que carece de contenido proposicional: no tienen valor veritativo.
- Una **fórmula** de un lenguaje de primer orden es toda sucesión finita de símbolos de dicho lenguaje correctamente concatenados para formar fbfs según las reglas del propio cálculo y pueden ser:
  - Elementales: si tienen al menos un símbolo predicativo pero no tienen símbolos lógicos y son fbfs. Son 1 o 0.
  - Compuestas: tienen al menos un símbolo lógico y son fbfs. Son 1 o 0.
- Sean α, α' y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ términos de $\mathcal{L}_{po}$. Un enunciado, oración o fórmula **elemental** (antes p o ϕ) es toda fbf de la forma:
  1. $\alpha = \alpha'$. Fórmula elemental llamada *ecuación*.
  2. $\Pi(\alpha_i, ..., \alpha_j)_{j \in \mathbb{N} \wedge j \geq i : i=1}$.

Sintaxis de $\mathcal{L}_{po}$

Fórmulas y enunciados/oraciones (sentencias) compuestas

A partir de un enunciado, oración o fórmula elemental se puede obtener todo enunciado, oración o fórmula compuesto, que llamaremos simplemente **enunciado**, a partir de las siguientes reglas:

1. Toda **fórmula elemental** es un enunciado y ningún **término** lo es.
2. Si ϕ es un enunciado, también lo es $\neg\phi$.
3. Si ϕ y ψ son enunciados, también lo es $\phi \diamond \psi$.
4. Si ϕ es un enunciado y α un término, $\forall\alpha(\phi)$ y $\exists\alpha(\phi)$ son enunciados.

Si el enunciado no tiene ninguna variable libre, además, decimos que es una **oración**[a].

[a] Representamos como *FreeVar*(ϕ) el conjunto de variables libres de una fórmula ϕ y, desde aquí, utilizamos indistintamente como símbolos meta-lógicos para referir a fbfs las letras griegas minúsculas del alfabeto griego y las del abecedario latino mayúsculas (se suele reservar estas para oraciones).

Teoría no-estricta (sintáctica)

Se puede definir, en este punto, la noción de teoría (sintáctica) como **cualquier conjunto finito de oraciones**. En una teoría no interesan las variables desconocidas. Ejemplo: teoría de grupos sintáctica.

Dada la estructura $\langle 1, \cdot, ^{-1} \rangle$:

- $\forall x, y, z\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$
- $\forall x\big((x \cdot 1 = x) \wedge 1 \cdot x = 1\big)$
- $\forall x\big((x \cdot x^{-1} = 1) \wedge (x^{-1} \cdot x = 1)\big)$

Variables

1. $\forall x \exists y (x, y \in \mathbb{N} \wedge y = x + 1)$
2. $\forall x \exists y (x, y \in \mathbb{N} \wedge y = x + 2)$

   $\vdots$

3. $\forall x \exists y (x, y \in \mathbb{N} \wedge y = x + \cdots)$

- La x representa todo elemento. Porque está **ligada** al cuantificador universal.
- La y representa algún elemento. Porque está **ligada** al cuantificador existencial.
- Los puntos suspensivos están por un, y sólo un, elemento del dominio.

En la expresión $\forall x \exists y (x, y \in \mathbb{N} \wedge y = x + z)$ decimos que las variables x e y están ligadas y que z está libre.

Variables

Distinguiremos dos tipos de variables individuales:

- Libres: aquellas variables presentes en una fórmula atómica o en toda fbf compuesta tal que en sus subfórmulas inmediatas sea siempre libre y en aquellas expresiones cuantificadas de la forma $\forall x(\Phi)$ y $\exists x(\Phi)$ siempre que sea libre en Φ y distinta de x.
- Ligadas: aquellas variables que no son libres.

Ejemplos

- Son términos: a, c, π, x, etc.
- Enunciados elementales: $x = y$, $a = b$, $c = c$, Rxc, Rxy, Pa, Qz, $Sxyz$, etc. Se gana claramente capacidad expresiva respecto de las semánticas de orden cero.
- Son enunciados: $\forall x \exists y(x, y \in \mathbb{N} \wedge y = x + z)$ donde z es una variable libre, $\neg x = y$; $\neg Px$; $(Px \rightarrow Rxy)$; $\forall x(Rxa \rightarrow y)$; etc.
- Son oraciones: $\forall x \exists y\big((x, y \in \mathbb{N}) \wedge (y = x + 1)\big)$; $\exists x \exists y \forall z\big((x \wedge y) \rightarrow z\big)$, etc.

Abreviación

- Los paréntesis que contengan las expresiones cuantificadas son necesarios para que no haya ambigüedad, si bien en ciertos casos se pueden omitir: $\exists xPx$ se puede leer con sobreentendimiento de paréntesis en $\exists x\big(P(x)\big)$. En otros casos se deberá de indicar el paréntesis: $\exists xPx \equiv \exists x(Px) \equiv \exists x\big(P(x)\big)$
- Cuando haya más de un cuantificador, podrán omitirse los paréntesis de los cuantificadores precedentes y conservar solamente los relativos al último cuantificador: $\exists x\forall y\forall z(...)$ es una fbf. **Pero no es lo mismo cuantificar sobre un cuantificador que sobre una fórmula:** $\forall x\exists y(Rxy) \not\equiv \forall x\big(\exists y(Rxy)\big)$.
- Se podrá escribir $\forall x_1, ..., x_n$ en lugar de $\forall x_1, ..., \forall x_n$.
- Un cuantificador podrá regir sobre otros tantos. Así, son fbfs: $\forall x\forall y(Px \rightarrow \exists y(Py \wedge y = x)$, $\forall xy(Px \rightarrow \exists yz(Qz \wedge Rzy)$.

Sustitución de variables libres

Si ϕ es un enunciado de primer orden, x una variable individual y a es una constante, la **sustitución** de x por a u otra variable en ϕ es la fórmula obtenida al reemplazar en ϕ cada aparición libre de x en ϕ por a o la variable correspondiente (las constantes representan objetos). Escribimos la fórmula cuyas variables sustituiremos entre paréntesis y como superíndice la variable a sustituir y como subíndice el término que la sustituirá, $(\Phi)^x_a$. Son ejemplos:

- $(Px)^x_y = Py$
- $(Py)^y_c = Pc$
- $(\forall x(Rxy \to Py))^y_c = \forall x(Rxc \to Pc)$
- $(\forall y(Ryx \to Px))^x_c = \forall y(Ryc \to Pc)$
- $(\forall y(Px \to Ryx))^x_y = \forall y(Py \to Qyy)$

Sustitución de variables libres

Una sustitución es simultánea si se sustituyen, respectivamente, las variables $x_1, \ldots, x_n$ por los términos $a_1, \ldots, a_n$ uno a uno y escribimos $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{a_1,\ldots,a_n}$. Otra notación igualmente extendida escribe $\Phi[x/a]$ para representar que en la fórmula Φ han de sustituirse las x libres por a. Debe tenerse en cuenta que $(\Phi)^{x_1,x_2}_{a_1,a_2}$ puede ser distinta de $((\Phi)^{x_1}_{a_1})^{x_2}_{a_2}$. Así, por ejemplo:

- $(Rxy)^{x,y}_{y,x} = Ryx$.
- $((Rxy)^{x}_{y})^{y}_{x} = (Ryy)^{y}_{x} = Rxx$.

Sustitución de variables libres: corolario

- $(\neg A)^x_a = \neg(A)^x_a$
- $(A \diamond B)^x_a = (A)^x_a \diamond (B)^x_a$
- $(\forall x(A))^x_a = \forall x(A)$
- $(\forall x(A))^y_a = \forall x((A)^y_a)$

$(B)^x_a$ es la única **subfórmula inmediata** de $\forall xB$. La definición de subfórmula se mantiene.

Ya no existe simetría en la composición/descomposición de una fórmula en forma de árbol y por tanto **no se satisface el lema de descomposición única** ¿Sabrías explicar por qué?

Ejercicio: clasificación de fórmulas

Di si las siguientes expresiones son fórmulas bien formadas o no y si, de serlo, son **enunciados elementales**, **enunciados** u **oraciones** y señala sus variables libres y ligadas:

1.1 Rxy

1.2 $\neg Rxyz$

1.3 $\forall x(Rxy)$

1.4 $\forall x \forall y \Big(((x \rightarrow y) \wedge x) \rightarrow y\Big)$

1.5 $x \exists \forall y(Px)$

1.6 $\forall x((Px \rightarrow (Qx \vee Rxy))$

1.7 $\forall x \exists y \forall z(Rxz \rightarrow y)$

1.8 $\forall x \exists y \exists z \forall (RPx \wedge z)$

Ejercicios

1. Añade paréntesis no triviales a la siguiente expresión para obtener la cuantificación universal de un condicional y la cuantificación universal de una cuantificación universal: $\forall x \forall y Rxy \rightarrow Ryx$.
2. Añade paréntesis a la siguiente expresión, $\forall x \neg \exists y Rxy \vee Rxz$ para obtener:
    2.1. Una disyunción
    2.2. Un condicional cuyo consecuente es una disyunción.
    2.3. Una disyunción cuyo primer miembro es una cuantificación universal.
    2.4. La cuantificación universal de una disyunción.
    2.5. La cuantificación universal de un condicional.
    2.6. La cuantificación universal de la cuantificación universal de un condicional.
    2.7. La cuantificación universal de un condicional cuyo consecuente es la cuantificación universal de una fórmula.

Ejercicio

Es fácil pasar de la fórmula Rxy a la fórmula Ryx mediante una sustitución simultánea $(Rxy)^{x,y}_{y,x}$. Sin embargo, las fórmulas $((Rxy)^{x}_{y})^{y}_{x}$, Ryx y $((Rxy)^{y}_{x})^{x}_{y}$ son distintas entre sí. No obstante, toda sustitución simultánea puede obtenerse mediante series de sustituciones individuales. Pasa de Rxy a Ryx y de $Sxyz$ a $Szyx$ mediante una serie de sustituciones individuales de variables.

Ejercicios de Sintaxis

- Clasificar fórmulas: términos, fórmulas elementales o compuestas, oraciones, señalar variables libres y ligadas, etc.
- Saber escribir ejemplos de cada elemento de la clasificación anterior.
- Sustituir variables de forma simultánea e individual correctamente.
- Añadir paréntesis no triviales.
- Conocer los conceptos y definiciones fundamentales a nivel teórico.

Semántica de $\mathcal{L}_{po}$

Función veritativa: ¿cómo evalúo un término?

¿Cómo evaluamos ahora las fbfs? Para interpretar $\mathcal{L}_{po}$ debo fijar, en primer lugar, un dominio $\mathcal{D}$ no vacío de objetos y, a continuación, definir las propiedades que interpretan los términos predicativos.
Este es el análisis basado en la distinción entre función y argumento: complejizamos la función veritativa para expresiones cuantificadas como una función de primer orden. Ya no asignamos valores de verdad a fórmulas directamente, evaluamos la satisfacción de términos individuales y esto lo capturamos en un lenguaje $\mathcal{L}_{po}$.

Cuantificadores

Para evaluar una fórmula **cuantificada** tendremos que *eliminar* el cuantificador sustituyendo correctamente las variables por constantes *en* la estructura.

Semántica de $\mathcal{L}_{po}$

Estructura para evaluar **fbfs**

Definimos una **interpretación** para un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_{po}$ como una dupla o par $\mathcal{E} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ en que

1. $\mathcal{D}$ es un conjunto no vacío llamado dominio, universo de discurso o universo de la estructura y
2. $\mathcal{F}$ es una función de asignación cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios de $\mathcal{L}_{po}$ tal que:
   2.1. Si P es un predicado de $\mathcal{L}_{po}$, $\mathcal{F}(P)$ devuelve un **subconjunto** de elementos de $\mathcal{D}$.
   2.2. Si R es una relación $n-$aria de $\mathcal{L}_{po}$ con $n \geq 1$, $\mathcal{F}(R(\alpha_1, ..., \alpha_n))$ devuelve un subconjunto de elementos $\mathcal{D}$ con una relación $n-$aria en $\mathcal{D}$, es decir, una serie de **elementos ordenados** bajo la relación[a].
   2.3. Si c es una constante en $\mathcal{L}_{po}$, $\mathcal{F}(c)$ es un elemento de $\mathcal{D}$.

---

[a] Si la relación es simétrica el orden es trivial. La igualdad, la suma o el producto, por ejemplo, son simétricas, pero el complemento, la resta o la división no lo son.

Semántica de $\mathcal{L}_{po}$

Interpretación

Ahora, si ϕ es una fbf propia de $\mathcal{L}_{po}$, $\mathcal{F}(\phi)$ será la **interpretación** de ϕ en la estructura $\mathcal{E}$ y, en lugar de $\mathcal{F}(\phi)$, escribimos $\phi^{\mathcal{E}}$ para referirnos a la interpretación de ϕ en $\mathcal{E}$, es decir, $\phi^{\mathcal{E}} = \mathcal{F}(\phi)$. Si c es una constante individual, $c^{\mathcal{E}}$ es la **denotación** o el **valor** de c en $\mathcal{E}$. Un mismo fragmento del lenguaje tendrá infinitas interpretaciones en distintas estructuras. Si solamente trabajamos con una estructura la señalamos y omitimos los súper-índices.

Ejemplo

Si definimos una estructura en $\mathcal{L}_{po}$ como el lenguaje cuyos símbolos propios son dos símbolos de predicado, P y Q, uno binario R y dos constantes c y d, representaremos una estructura para $\mathcal{L}_{po}$ del siguiente modo:

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{D}, P^{\mathcal{E}}, Q^{\mathcal{E}}, R^{\mathcal{E}}, c^{\mathcal{E}}, d^{\mathcal{E}}, \rangle$$

Diagramatización

Dibujamos un **diagrama** para representar nuestra estructura de la siguiente forma:

- El dominio lo dibujamos como un diagrama de Euler, Weise o Venn no vacío.
- Cada constante la dibujamos como un elemento en dicho diagrama.
- Los predicados monádicos los representamos con un súper-índice sobre las constantes que afectan o, indistintamente, como un subconjunto.
- Los predicados $n-$ádicos los representamos como flechas (son pares ordenados).

Ejemplo

Podemos definir una estructura como

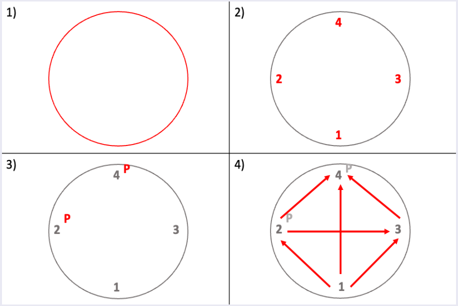
$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{D}, P^{\mathcal{E}}, Q^{\mathcal{E}}, R^{\mathcal{E}}, c^{\mathcal{E}}, d^{\mathcal{E}}, e^{\mathcal{E}} \rangle$$

tal que

- $D = \{1, 2, 3, 4\}$
- $P = \{1, 2\}$
- $Q = \varnothing$
- $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$

Semántica de $\mathcal{L}_{po}$

Ejemplo



Primero se dibuja el diagrama, luego se incluyen los objetos vía constantes. Finalmente añadimos los predicados monarios y $n-$arios.

Teoría de Grafos

Estos diagramas son **grafos dirigidos**.

Semántica de $\mathcal{L}_{po}$

Propiedades de orden superior

Si tomamos como *objeto* nuestras propiedades entonces estaremos en una lógica de segundo orden[a], `SOL` o $\mathcal{L}_{so}$.

[a] Estas las trabajaremos en su traducción a primer orden.

Clase de equivalencia ($\sim$)

Toda relación diádica que cumpla con las siguientes condiciones se llama clase de equivalencia y se abrevia con "$=$":

- Reflexividad: $\forall x(x\mathcal{R}x)$.
- Simetría: $\forall x \forall y(x\mathcal{R}y \to y\mathcal{R}x)$.
- Transitividad: $\forall x \forall y \forall z\Big(((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \to x\mathcal{R}z)\Big)$.

Existen otras muchas propiedades interesantes: antisimetría, distancia, desigualdad triangular, etc.

Semántica de $\mathcal{L}_{po}$

Ejercicios

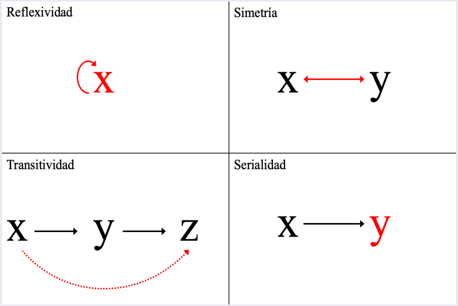
1. Demuestra que $\equiv$ es una clase de equivalencia y que se cumple que $\forall x, y\big((x \equiv y) \leftrightarrow x \sim y\big)$.
2. Dibuja un diagrama en que se recoja la relación de orden estricto, «ser-menor-que» sobre los 5 primeros naturales. ¿Es transitiva? ¿Por qué?

Ejercicio en Grupo 1

Encuentra el error en el siguiente razonamiento:

«Sea $\mathcal{R}$ una relación simétrica y transitiva en $\mathcal{D}$. Sea $\mathfrak{v}\big(\exists x, y(x\mathcal{R}y)\big) = 1$. De la simetría de $\mathcal{R}$ se deduce que $y\mathcal{R}x$. Por tanto, $\mathfrak{v}\big(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x\big)$. Y de la transitividad de $\mathcal{R}$ se obtiene que $x\mathcal{R}x$. Por tanto, la relación $\mathcal{R}$ es también reflexiva y como se trata de una relación cualquiera, toda relación que sea simétrica y transitiva es también reflexiva».

Diagramatización de algunas propiedades de segundo orden relevantes



Una relación es serial si cumple que $\forall x \exists y (x \mathcal{R} y)$

Fuerza y capacidad semántica

Ahora **en** nuestro lenguaje de primer orden tenemos infinitas estructuras que definiremos según nos interese e **interpretaremos** para cada caso concreto en que nos interese trabajar.

- Podemos definir una estructura para definir $\mathbb{N}$: debemos investigar qué propiedades mínimas nos sirven (**Axiomas de Peano**).
- Podemos definir una estructura para interpretarla como "los alumnos de una clase ordenados por su nota media" (para toda clase).
- Podemos definir una estructura para interpretarla como "los países reconocidos internacionalmente y la relación de *hacer frontera con*".

Las posibilidades son ilimitadas.

Fórmula verdadera en una estructura

Ahora cada posible interpretación lógica la determina cada estructura. Un cuantificador generará una fórmula verdadera si lo que se cuantifica se cumple para el dominio de nuestra estructura.

a) Para cualquier predicado n−ádico Π: $\mathfrak{v}(\Pi\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1$ syss $\langle\alpha_1, ..., \alpha_n\rangle \in \Pi^{\mathcal{E}}(n > 0)$.

b) Toda fórmula compuesta por conectivas preserva su definición veritativo-funcional igual que en $\mathcal{L}$ pero *en* una estructura:
   - b.1) $\mathcal{E} \models \neg\Phi \Leftrightarrow \mathcal{E} \not\models \phi$
   - b.2) $\mathcal{E} \models \Phi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \mathcal{E} \not\models \Phi$ o $\mathcal{E} \models \Psi$
   - b.3) $\mathcal{E} \models \Phi \wedge \Psi \Leftrightarrow \mathcal{E} \models \Phi$ y $\mathcal{E} \models \Psi$

c) $\mathfrak{v}\Big(\forall x(\Phi(x))\Big) = 1$ syss $\mathfrak{i}^x_a(\Phi) = 1$ para toda a en $\mathcal{D}$.

d) $\mathfrak{v}\Big(\exists x(\Phi(x))\Big) = 1$ syss existe un $a \in \mathcal{D}$: $\mathfrak{i}^x_a(\Phi) = 1$.

Semántica de $\mathcal{L}_{po}$

Verdad lógica

Decimos que un enunciado es verdadero universalmente, **lógicamente** o que es una tautología syss es verdadero en toda estructura para $\mathcal{L}_{po}$. Todo enunciado que tiene la forma de una tautología seguirá siendo una verdad lógica. Ahora, una tautología no solamente es verdadera en toda asignación o interpretación de la tabla de verdad: también lo es en toda interpretación para toda estructura.

Ejemplo

Una fórmula del tipo $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$ es una tautología. Por eso mismo lo será también $\big(\exists x(Px) \wedge \forall x(Qx)\big) \rightarrow \forall x(Qx)$. Esto se debe a que este tipo de enunciados son verdaderos en virtud de la semántica de conectivas. Pero habrá nuevos enunciados que también serán verdades lógicas en virtud de la semántica cuantificacional.

Ejemplos de nuevas tautologías

1. $\forall x(Px \to Px)$.
2. $\forall x(Px) \to Pc$.
3. $Pc \to \exists x(Px)$.
4. $\forall x(Px) \to \exists x(Px)$.
5. $\exists x \forall y(Rxy) \to \forall y \exists x(Rxy)$.
6. $\forall x(x = x)$.
7. $\forall x, y(x = y \to y = x)$.
8. $\forall x, y, z\big((x = y \wedge y = z) \to x = z\big)$.
9. $\forall x, y\big((Px \wedge x = y) \to Py\big)$.

Equivalencia lógica

Dos enunciados de un lenguaje de primer orden son **lógicamente equivalentes** si son sustituibles (por ser verdaderos y falsos respectivamente) en exactamente las mismas estructuras. Son ejemplos:

1. $\forall x(Px) \equiv \forall y(Py)$.
2. $\exists x(Px) \equiv \exists y(Py)$.
3. $\neg\forall x(Px) \equiv \exists x(\neg Px)$.
4. $\neg\exists x(Px) \equiv \forall x(\neg Px)$.
5. $\exists x(Px) \equiv \neg\forall x(\neg Px)$.
6. $\forall x(Px) \equiv \neg\exists x(\neg Px)$.
7. $\forall x(Px \wedge Qx) \equiv \forall x(Px) \wedge \forall x(Qx)$.
8. $\exists x(Px \vee Qx) \equiv \exists x(Px) \vee \exists x(Qx)$.

Definiciones semánticas fundamentales

Modelo de una fórmula

1. Dada una interpretación formada por una estructura y una función veritativa, $\langle \mathcal{E}, \mathfrak{v} \rangle$ y un enunciado de $\mathcal{L}_{po}$, si $\mathfrak{P}$ es un enunciado y es verdadero en $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ es un modelo de $\mathfrak{P}$ y escribimos $\mathcal{E} \models \mathfrak{P}$.
2. Si $\mathfrak{P}$ es una fórmula con variables libres $(x_1, \ldots, x_n)$ y es verdadera cuando dichas variables se interpretan como los individuos $a_1, \ldots, a_n$ del dominio, $\mathcal{E}$ es un modelo de $\mathfrak{P}$ y escribimos $\mathcal{E}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \models \mathfrak{P}$.

Modelo de un conjunto de fórmulas

Dada una interpretación $\mathfrak{i} = \langle \mathcal{E}, \mathfrak{v} \rangle$ y un conjunto Γ de fórmulas de $\mathcal{L}_{po}$, si cada $\gamma_i \in \Gamma$ es verdadera en $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ es un modelo de Γ y $\mathcal{E} \models \Gamma$.

Fórmula satisfacible

Una fórmula $\mathfrak{P} \in \mathcal{L}_{po}$ es satisfacible syss existe, al menos, una interpretación $\mathfrak{i} = \langle \mathcal{E}, \mathfrak{v} \rangle$ tal que $\mathfrak{i}(\mathfrak{P}) = 1$. Es decir, si $\mathfrak{P}$ tiene al menos un modelo o es verdadera en, al menos, una estructura.

Definiciones semánticas fundamentales

Teoría Estricta

- Entendemos que toda fórmula de un lenguaje de primer orden puede interpretarse en estructuras de dos clases: en aquellas en que es verdadera y en aquellas en que no lo es. Llamamos al conjunto del primer tipo de estructuras que hacen verdadera una fórmula ϕ el conjunto de modelos de ϕ y escribimos $MOD(\phi)$.
- Una teoría, en sentido estricto, es el conjunto de modelos que satisface un conjunto de fórmulas que definen dicha teoría y que llamamos axiomas[a]

$$TEOR = MOD(\Gamma)$$

- La «teoría de conjuntos» se definirá, por tanto, de manera axiomática.

[a] Esta noción de teoría incluye la idea de teoría no-estricta y es mucho más precisa y útil. La *teoría de modelos* recibe su nombre de esta idea. Todas las teorías que estudiaremos son teorías en sentido estricto.

Ejercicios de Semántica

- Definiciones teóricas y conceptos semánticos fundamentales.
- Evaluar fórmulas de primer orden en estructuras determinando si son modelos o no.
- Construir estructuras que sean modelos o no para una fórmula de primer orden.
- Diagramatizar una estructura concreta.
- Definir un diagrama como una estructura concreta.
- Evaluar propiedades de relaciones diádicas concretas.

Semántica de $\mathcal{L}_{po}$

Una teoria para gobernarlas a todas, una teoria para encontrarlas, una teoria para atraerlas a todas y atarlas en las tinieblas...

Ejemplo de formalización

Definimos como dominio el conjunto de los naturales, $\mathcal{D} = \mathbb{N}$. Tomemos el predicado P como el predicado *par* o *ser-par*; Q como el conjunto de los números primos, el predicado *ser-primo* o, simplemente, el predicado *primo*. La relación o predicado diádico R será la operación de la división. La relación S, ser menor que y asignamos al objeto 0 la constante c, al objeto 1, la constante d y al objeto 2 la constante e. Veamos ejemplos de formalizaciones:

Formalización

- Algún número es par y primo: $\exists x(Px \wedge Qx)$
- Todo número par es primo: $\forall x(Px \to Qx)$
- Ningún número par es primo: $\forall x(Px \to \neg Qx)$ o bien $\neg\exists x(Px \wedge Qx)$
- Todo número par es divisible por 2: $\forall x(Px \to Rex)$
- Un número es par si, y sólo si, es divisible por 2: $\forall x(Px \leftrightarrow Rex)$
- Para cada número hay uno mayor: $\forall x \exists y(Sxy)$
- Si un número divide a otro, es menor o igual que él:
  $\forall x, y(Rxy \to x = y \vee Sxy)$
- Para cada número primo, hay un número par mayor que él:
  $\forall x(Qx \to \exists y(Py \wedge Sxy))$

Formalización

- Los números primos son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad: $\forall x\Big(Qx \to ((Rxx \wedge Rdx) \wedge \forall y(Ryx \to (y = x \vee y = d)))\Big)$. Aquí afirmamos dos cosas: que los números primos son divisibles por sí mismos y por la unidad y que si un número divide a un primo, debe ser igual a él o a la unidad. Un modo más simple de expresar lo anterior es: $\forall x\Big(Qx \to \forall y\big(Ryx \leftrightarrow (y = x \vee y = d)\big)\Big)$.
- Un número es primo si, y sólo si, es divisible por sí mismo y por la unidad:
  - $\forall x\Big(Qx \leftrightarrow ((Rxx \wedge Rdx) \wedge \forall y(Ryx \to (y = x \vee y = d)))\Big)$
  - $\forall x\Big(Qx \leftrightarrow \forall y\big(Ryx \leftrightarrow (y = x \vee y = d)\big)\Big)$

Formalización

Enunciado para formalizar en $\mathcal{L}_{po}$

1. Se os da un dominio definido intensional o extensionalmente formado por:
    1.1. Objetos y una **función de asignación**.
    1.2. Constantes asignadas a elementos del dominio.
2. Se definen uno o varios predicados:
    2.1. Pueden ser monarios o monádicos.
    2.2. Pueden ser $n-$arios o $n-$-adicos.
3. Se estudian las relaciones dentro de dicho dominio.

Aplicaciones

Teoría informal de conjuntos

En sentido estricto para definir $\mathbb{N}$ y la función sucesión necesitamos de la teoría de conjuntos ($\mathcal{ZF}$) que veremos en el último tema. Las sobreentendemos en su versión natural para poder ver algunas aplicaciones relevantes de $\mathcal{L}_{po}$. Por tanto ahora lo definimos en sentido informal (naive set theory):

- **Conjunto:** toda colección arbitraria de objetos reunidos bajo predicado de inclusión ($\in$).
- $0 = \varnothing$ $(\exists x \forall y (\neg y \in x))$
- Definimos la unión como $x \in a \cup b \leftrightarrow x \in a \vee x \in b$ y la suma de la unidad como $n + 1 = n \cup \{n\}$ tal que $n = \{0, 1, ..., n - 1\}$.
- $\mathbb{N}$ es el conjunto más pequeño que contiene a 0 cerrado bajo s: $s(n) = n \cup \{n\}$.

Aplicaciones

Suma

$$a + 0 = a$$
$$a + s(b) = s(a + b)$$

Producto

$$a \cdot 0 = 0$$
$$a \cdot s(b) = a + (a \cdot b)$$

Desigualdad

$$a \leq b \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}(a + x = b)$$

Aplicaciones

Axiomas de Robinson

- $\forall x \big(0 \neq s(x)\big)$
- $\forall x, y \big(s(x) = s(y) \leftrightarrow x = y)$
- $\forall x (x + 0 = x)$
- $\forall x, y \big(x + s(y) = s(x + y)\big)$
- $\forall x (x \cdot 0 = 0)$
- $\forall x, y \big(x \cdot s(y) = x \cdot y + x\big)$
- Principio de inducción

Aplicaciones

Axiomas de Peano

$\langle \mathbb{N}, 0, s \rangle$ es un modelo de:

1. $0 \in \mathbb{N}$ (Naturales no está vacío).
   - $\forall x \Big(x \in \mathbb{N} \rightarrow x = x \Big)$ (Reflexividad Id.).
   - $\forall x_{\in \mathbb{N}} \forall y_{\in \mathbb{N}} \Big((x = y) \rightarrow (y = x) \Big)$ (Simetría Id.).
   - $\forall x_{\in \mathbb{N}}, y_{\in \mathbb{N}}, z_{\in \mathbb{N}} \Big(x = y \land y = z) \rightarrow x = z \Big)$ (Transitividad Id.).
   - $\forall x, y \Big((y \in \mathbb{N} \land x = y) \rightarrow x \in \mathbb{N} \Big)$ ($\mathbb{N}$ está cerrado bajo $=$).
2. $\forall x \Big(x \in \mathbb{N} \rightarrow s(x) \in \mathbb{N} \Big)$ ($\mathbb{N}$ está cerrado bajo s).
3. $\forall x, y \in \mathbb{N} \Big((s(x) = s(y)) \rightarrow x = y \Big)$ (s es inyectiva).
4. $\neg \exists x \in \mathbb{N} \Big(s(n) = 0 \Big)$ (0 es el mínimo).

Principio de Inducción

El **quinto axioma de Peano** lo definimos en **segundo orden**[a]:

Si Φ es una propiedad definida sobre $\mathbb{N}$ tal que

1. 0 satisface Φ ($\mathfrak{v}(\Phi_0) = 1$) y
2. Si n satisface Φ, entonces $\Phi(n)$ también,

Entonces todo número natural satisface también Φ.

$$\forall \Phi \left(\Phi(0) \wedge \forall x \Big(\Phi(x) \to \Phi\big(s(x)\big) \Big) \to \forall x \big(\Phi(x) \big) \right)$$

[a] También se puede incluir como esquema axiomático de primer orden.

Ejercicio

1. $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ en la axiomática de Peano.
2. Definimos:
   2.1. La operación suma como la operación que satisface que $n + 1 = s(n)$ y $n + s(m) = s(n + m)$
   2.2. La operación producto entre dos elementos m y n del dominio como la operación $mn = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.
3. Se pregunta el valor de verdad de las siguientes fórmulas:
   3.1. $\forall x \exists y (y = x + 1)$
   3.2. $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$
   3.3. $\exists x (x = 5 + 1)$
   3.4. $\forall x \exists y \big((x + y = z) \wedge (y + x = z)\big)$

Deducción natural: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

Eliminación del cuantificador universal (*Elim*$\forall$)

1	$\forall x(P(x))$
2	$\vdots$
3	$P(a)$

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$
2	$\vdots$
3	$P(a) \to Q(a)$

1	$\forall x_1, ..., x_n(\Phi(x_1, ..., x_n))$
2	$\vdots$
3	$\Phi(a_1), ..., \Phi(a_n)$

En dominios finitos justificado por la eliminiación de la conjunción.

Deducción natural: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

Introducción del cuantificador universal (*Intro*$\forall$)

1	$\vdots$
2	$\mid\ \alpha$
3	$\mid\ \vdots$
4	$\mid\ P(\alpha)$
5	$\forall x(Px)$

1	$\neg\exists x\neg(P(x))$
2	$\mid\ \alpha$
3	$\mid\ \mid\ \neg P(\alpha)$
4	$\mid\ \mid\ \exists x\neg(Px)$
5	$\mid\ \mid\ \exists\neg(Px) \wedge \neg\exists\neg(Px)$
6	$\mid\ \mid\ P(\alpha)$
7	$\forall x(Px)$

Ha de tratarse de un individuo, pero uno cualquiera: que no exista fuera del supuesto.

Deducción natural: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

Introducción del cuantificador existencial (*Intro*$\exists$)

1	$P(a)$
2	$\vdots$
3	$\exists x(Px)$

Eliminación del cuantificador existencial (*Elim*$\exists$)

No se puede realizar un paso como $\exists(\Phi x) \models \Phi(a)$:

- Existe al menos un número trascendente que coincide con la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro en geometría euclídea $\Rightarrow$ el número e es un número trascendente que coincide con la relación...
- Existe al menos un número natural que es impar $\Rightarrow$ el 2 es impar.

¿Qué hacemos? Existe un patrón de inferencia científico que se ha adaptado al siguiente modelo:

Hay un x tal que $P(x)$, sea a dicho individuo, ...

lo que equivale a decir *supongamos que a es ese individuo*... Estamos ante una hipótesis.

Deducción natural: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

Eliminación del cuantificador existencial (*Elim*$\exists$)

Pero ya sabemos cómo generar una hipótesis y deducir de ella. Ahora no se pasa de afirmar que algo satisfaga P a la afirmación sobre quién o qué en concreto es ese algo dentro del dominio (realizando una asignación). Simplemente suponemos que hay algo que satisface P y vemos qué sucede:

$$
\begin{array}{ll}
1 & \exists x\big(P(x)\big) \\
2 & \quad P(\alpha) \\
3 & \quad \vdots \\
4 & \quad A \\
5 & A
\end{array}
$$

Deducción natural: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

Intro =

1	$\forall x(x \in Dom \to x = x)$
2	$x = x$

1	$P(a)$
2	$\forall x(x = a \to P(x))$

Deducción natural: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

Elim $=$

1	$P(a)$
2	$\vdots$
3	$a = b$
4	$P(b)$

Deducción natural: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

Ejercicio en Grupo 2

1. Formaliza en $\mathcal{L}_{po}$ la demostración de Euclides por la que existen infinitos números primos comentada en clase. Utiliza el principio de inducción y un cálculo de DN.
2. Define en primer orden los axiomas para el producto y la división utilizando la axiomática de Peano en primer orden. Pista: necesitaréis los naturales e incluir subíndices.

Reglas γ: Elim $\forall$ y Elim $\neg\exists$

La constante individual (a) puede ser cualquiera de las usadas anteriormente en el árbol.

Inst.

Univ.

$$\begin{array}{ccc} \forall x(A) & \neg\exists x(A) & \neg\exists x(A) \\ | & | & | \\ (A)^x_a & \neg(A)^x_a & \forall x\neg(A) \end{array}$$

Reglas δ: Elim $\neg\forall$ y Elim $\exists$

La constante individual ($a*$) no ha podido ser usada en el árbol con anterioridad.

Inst.

Part.

$$\begin{array}{ccc} \exists x(A) & \neg\forall x(A) & \neg\forall x(A) \\ | & | & | \\ (A)^{x}_{a*} & \neg(A)^{x}_{a*} & \exists x\neg(A) \end{array}$$

Árboles analíticos: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

$\neg\forall x(Px) \wedge aRb \models \exists x(\neg Px)$

$$
\begin{array}{c}
1. \neg\forall x(Px) \wedge aRb \\
| \\
2. \neg(\exists x(\neg Px)) \\
| \\
3. \neg\forall x(Px) \\
| \\
4. aRb \\
| \\
5. \neg Pc \text{ (por 3)} \\
| \\
6. \neg\neg Pc \text{ (por 2)} \\
| \\
7. Pc \\
| \\
\#
\end{array}
$$

Árboles analíticos: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

$\vdash \forall x(A) \rightarrow \exists x(A)$

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall x(A) \rightarrow \exists x(A)) \\
| \\
\forall x(A) \\
| \\
\neg\exists x(A) \\
| \\
\forall x\neg(A) \\
| \\
(A)^x_a \\
| \\
\neg(A)^x_a \\
| \\
\#
\end{array}
$$

Árboles analíticos: ampliación del cálculo para $\mathcal{L}_{po}$

Resolución Inst. Univ.

Si uno está comprobando las líneas para cerciorar que ha terminado con todas las variables, no debe tachar la línea en que aparezca $\forall x(A)$, ya que es posible que se introduzca una nueva constante en la rama por una regla δ y habría que regresar para aplicar Inst. Univ. a la nueva constante. Un truco útil es, en lugar de marcar la línea, escribir al lado todas las constantes con las que podremos instanciar.

Nota

Las reglas se siguen aplicando a todo nodo: no a partes que contengan este. El siguiente árbol no es una aplicación de Inst. Univ.:

$$\neg(A \wedge \forall x B)$$
$$|$$
$$\neg(A \wedge (B))$$

Ejercicios

Demuestre o refute por medio de A.A. las siguientes inferencias:

1. $\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall xPx \rightarrow \forall xQx$
2. $\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x\forall y((Px \wedge Ryx)) \rightarrow (Qx \wedge Ryx))$
3. $\forall x(Px \rightarrow Qx); \exists x(Rx \wedge Px) \vdash \exists x(Rx \wedge Qx)$

Ejercicios de Formalización y Cálculos

- Saber leer fórmulas en primer orden.
- Saber formalizar en primer orden distintos enunciados aritméticos elementales.
- Los ejercicios relativos a aritmética estándar y demostración se reservan para trabajos grupales.
- Saber identificar cada una de las partes de una DN correctamente.
- Saber aplicar el método de cálculo de AA.AA para primer orden.

Lógica Formal

Filosofía de la lógica I

José Alejandro Fernández Cuesta

alejandro.fernandez@urjc.es

2023/2024

Índice

Punto de partida

Teoría de Conjuntos

- Entendemos que toda fórmula de un lenguaje de primer orden puede interpretarse en estructuras de dos clases: en aquellas en que es verdadera y en aquellas en que no lo es. Llamamos al conjunto del primer tipo de estructuras que hacen verdadera una fórmula ϕ el conjunto de modelos de ϕ y escribimos $MOD(\phi)$.
- Una teoría, en sentido estricto, es el conjunto de modelos que satisface un conjunto de fórmulas que definen dicha teoría y que llamamos axiomas

$$TEOR = MOD(\Gamma)$$

- La teoría de conjuntos se definirá, por tanto, de manera axiomática.

ZFC

Definimos una relación concreta entre los elementos del dominio de las estructuras de $MOD(\Gamma)$ que llamamos relación de pertenencia y escribimos $a \in b$ en lugar de $a\mathcal{R}b$ o $\mathcal{R}ab$ para indicar que el elemento a está relacionado por medio de la relación $\in$ con el elemento b.
¿Cómo se define entonces esta relación semánticamente? $\Rightarrow$ axiomas

Axioma del conjunto vacío

Axioma del conjunto vacío

$$\exists y \forall x (\neg(x \in y))$$

Escribimos $\phi \notin \psi$ en lugar de $\neg(\phi \in \psi)$ por lo que $\exists y \forall x (x \notin y)$.
Este axioma se lee afirmando que existe al menos un conjunto que no tiene elementos.
A este tipo de conjunto lo llamaremos conjunto vacío y escribiremos $\varnothing$.

Axioma de extensionalidad

Axioma de extensionalidad

$$\forall x \forall y \forall z ((z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y))$$

Es decir, si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales. Es decir, un conjunto está determinado extensionalmente.

Abreviamos $\exists x(\phi(x)) \wedge \forall x \forall y(\phi(x) \wedge \phi(y) \rightarrow x = y)$ como $\exists! x(\phi(x))$, es decir, existe un único x que satisface ϕ.
Abreviamos también $\forall x(x \in a \rightarrow \phi(x))$ como $\forall x \in a(\phi(x))$.

Axioma de extensionalidad

Lema: conjunto vacío

$$\exists! y \forall x (x \notin y)$$

El único conjunto cuya existencia se garantiza en este lema es *el conjunto vacío*, $\varnothing$.
(!) Nuestra ontología se basa en un único objeto: aquel que no tiene elementos: $\varnothing \neq$ «vacío», «nada» etc.

Demostración

Si hubiera dos conjuntos vacíos $\varnothing_1$ y $\varnothing_2$, siempre verificarían $a \notin \varnothing_1$ y $a \notin \varnothing_2$ para todo objeto a y sería verdad que

$$\forall x (x \in \varnothing_1 \leftrightarrow x \in \varnothing_2)$$

Y por axioma de extensionalidad $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

Clases

Lema: clases

Podemos hablar de un conjunto –pensad que ahora los elementos de los dominios de las estructuras de nuestra teoría de conjuntos son todos conjuntos– o conjuntos que satisfagan, a su vez, una cierta propiedad Φ. Esto son fbfs.
La reunión de todos los conjuntos que satisfacen una propiedad Φ, escrito como $\{x : \Phi(x)\}$ o $\{x|\Phi(x)\}$[a], es lo que llamaremos **clase**. Representamos directamente con letras minúsculas –como constantes– a las clases.

- Todo conjunto a puede ser tomado como una clase, en concreto, la asociada a $\Phi(x, a) \equiv x \in a$.
- Existen clases que no son conjuntos y las llamamos clases **propias**. Por ejemplo la clase $M = \{x : x \notin x\}$.

[a] Léase: «los x *tales que* satisfacen ϕ»

Clases

Clases: método de abreviación

En nuestra ontología solamente tenemos conjuntos. Como hay clases que no son conjuntos las *clases* se toman como abreviaciones de fórmulas de primer orden: objetos fantasma. Sean dos clases $a = \{x : \phi(x)\}$ y $b = \{x : \psi(x)\}$:

- $a \subseteq b$ abrevia $\forall x \big(\phi(x) \rightarrow \psi(x)\big)$
- $a \cup b$ abrevia $\{x : x \in a \lor x \in b\}$
- $a \cap b$ abrevia $\{x : x \in a \land x \in b\}$
- $\bigcup a$ abrevia $\{x : \exists y (y \in a \land x \in y)\}$
- $\bigcap$ abrevia $\{x : \forall y (y \in a \rightarrow x \in y)\}$
- $a - b$ abrevia $\{x : x \in a \land x \notin b\}$

Esquema axiomático de separación o especificación

Esquema axiomático de separación o especificación

- Sea $\Phi(z)$ un predicado con z como variable ligada.
- $\forall x \exists y \forall z \Big(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \Phi(z)) \Big)$

Esto introduce un axioma para cada fórmula del tipo $\Phi(z)$.
Si se permite que la variable aparezca libre, entonces $\forall x (z = \varnothing)$. El axioma del conjunto vacío es consecuencia del esquema de axiomas de separación.

«Hay al menos un conjunto, y tal que contiene todos los elementos de x que cumplen una propiedad cualquiera: para cualesquiera elementos y conjunto x».
Se pueden «separar» elementos en un conjunto en base a un predicado arbitrario.

Esquema axiomático de separación o especificación

Toda subclase de un conjunto es un conjunto

Sean $\Phi(x)$, un grupo de conjuntos $a_1, ..., a_n$ y $A = \{x : \Phi(x, a_1, ..., a_n)\}$. Si suponemos que $\exists y \forall x(\Phi(x, a_1, ..., a_n) \to x \in y)$, entonces A es un conjunto.

Importancia

- Para muchos autores este es el axioma más importante: libra de las paradojas conjuntistas.
- Es una versión limitativa del *Axioma de Frege* por el que es posible tener un conjunto cuyos elementos satisfacen una propiedad (en general).

Reducción de tamaño progresiva: tengo siempre conjuntos más pequeños de otros más grandes. No puedo tomar conjuntos grandes desde sí mismos: se bloquea paradoja de Russell.

Esquema axiomático de separación o especificación

«Esquema»

Es un esquema porque se introduce un axioma para cada fórmula $\Phi(z)$.
Por esto, **ZF** no es **finitamente axiomatizable**: mientras que **NBG**, sí.
Además, no es independiente del resto de axiomas: se deduce del *esquema axiomático de reemplazo*.
El axioma del conjunto vacío deriva de él.

Significado

- Debe notarse que, en el enunciado, y es un subconjunto de x.
- El esquema afirma que, dado cualquier conjunto x y un predicado –cualquiera– Φ, «podemos hallar un subconjunto y de x cuyos miembros sean, precisamente, aquellos de x que satisfagan Φ».

Definiciones

Lema: clase universal

$$\mathbf{V} = \{x : x = x\}$$

Es una clase propia.

Clases

Si a y b son conjuntos, las clases

$$\{x : x \in a \wedge x \in b\}$$
$$\{x : x \in a \wedge x \notin b\}$$

son conjuntos.

Definiciones

Conjunto intersección

$$a \cap b = \{x : (x \in a) \wedge (x \in b)\}$$

Dos conjuntos son **disjuntos** si $a \cap b = \varnothing$.

Conjunto diferencia

$$a - b = \{x : (x \in a) \wedge (x \notin b)\}$$

Conjunto intersección de los elementos de a

- $a \neq \varnothing$
- $\bigcap$ abrevia $\{x : \forall y(y \in a \to x \in y)\}$ es un conjunto. Lo mismo que $\bigcup a$ abrevia $\{x : \exists y(y \in a \wedge x \in y)\}$.

$\varnothing = \{x : x \neq x\}$.
$\bigcap \varnothing = \mathbf{V}$.

Con estos axiomas solamente podemos garantizar la existencia del conjunto vacío.

Axioma del par

Axioma del par

$$\forall x \forall y \exists z \forall a \big((a \in z) \leftrightarrow (a = x \vee a = y) \big)$$

Dados dos conjuntos cualesquiera, existe otro cuyos únicos elementos son estos dos. En otras palabras, si x e y son conjuntos, la clase $\{a : a = x \vee a = y\}$ es un conjunto.

Axioma del par

Lema: conjunto unitario (*singleton*)

- El **par no ordenado** de componentes de los conjuntos a y b, $\{a, b\}$, es la clase $\{x : x = a \vee x = b\}$.
- El axioma del par establece que dados dos conjuntos, a y b, la clase $\{a, b\}$ es también un conjunto.
- Si aplicamos el axioma a un solo conjunto a, tenemos $\{a, a\}$ y por axioma de extensionalidad, tenemos que la clase $\{a, a\}$, es el conjunto $\{a\}$. A este conjunto lo llamamos **conjunto unitario**.

Axioma del par

Extensión del axioma del par

Aplicando el axioma del par a la clase a, obtuvimos $\{a, a\}$ que escribimos $\{a\}$. A este último conjunto, podemos aplicarle de nuevo el axioma del par obteniendo $\{\{a\}, \{a\}\}$, que de nuevo escribimos $\{\{a\}\}$. Como el único conjunto que tenemos es $\varnothing$, podemos ahora construir conjuntos de, a lo sumo, dos elementos como $\{\{\{\varnothing\}\}\}$, $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$, etc.

Axioma de la unión

Axioma de la unión

$$\forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow \exists a(a \in x \land z \in a)\big)$$

Significado

«Un conjunto cualquiera (z) pertenece al menos a otro (y) solamente si existe una clase (a) que pertenece a otro conjunto cualquiera (x) y el primero (z) pertenece a dicha clase (a)». Esto no parece obvio al principio, pero debe pensarse como el asegurar que existe un conjunto con todos los elementos que pertenecen a los elementos de cualquier conjunto: definimos $\bigcup a = \{x : \exists y(y \in a \land x \in y)\}$[a], este conjunto, como la **unión de los elementos de a**.

[a] Adaptación de la parte derecha del axioma.

Unión de dos elementos

- $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$
- $\forall x\Big((x \in (a \cup b)) \leftrightarrow ((x \in a) \vee (x \in b))\Big)$
- $\bigcup\{a\} = a$

A veces no es fácil ver que $\{x : \exists y(y \in a \wedge x \in y)\}$ se corresponde con la operación *unión* a la que estamos acostumbrados. Veámoslo con más calma.

Axioma de la unión

Ejemplo: $\{x : \exists y(y \in a \wedge x \in y)\}$

Para $\bigcup\{a, b\} = a \cup b : a = \{1, 2, 3\}, b = \{4, 5\}$:

$$\begin{aligned}
\bigcup\{\{1,2,3\},\{4,5\}\} &= \Big\{x : \exists y(y \in \{\{1,2,3\},\{4,5\}\} \wedge x \in y)\Big\} \\
&= \big\{x : x \in \{1,2,3\} \vee x \in \{4,5\}\big\} \\
&= \{1,2,3\} \cup \{4,5\} \\
&= \{1,2,3,4,5\}
\end{aligned}$$

Se captura la idea de *elementos* x de *elementos* y.

Hacia la definición conjuntista de número

Podemos garantizar ahora la existencia de conjuntos que tengan $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ elementos:
$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Axioma de la unión

Posibilidad de incluir $\mathbb{N}$

- Solo aseguramos su posibilidad: existencia con axioma del infinito.
- Axioma del par: $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \left\{\{\{\varnothing\}\}\right\}, \ldots$ desde $\{x \ : \ x = a \vee x = b$.
- Axioma de la unión:

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \cup \varnothing &&= \varnothing = 0 \cup 0 \\
1 &= \varnothing \cup \{\varnothing\} &&= \{\varnothing\} = 0 \cup \{0\} \\
2 &= \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} &&= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = 1 \cup \{1\} \\
3 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} &&= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = 2 \cup \{2\} \\
4 & &&= 3 \cup \{3\} \\
\ldots \\
s(n) & &&= n \cup \{n\}
\end{aligned}
$$

Axioma de la unión

Subconjuntos

Dados dos conjuntos a y b, decimos que a es **subconjunto** de b y escribimos $a \subseteq b$ si, y sólo si:
$\forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$
Si $a \subseteq b$ y a es distinto de b, entonces a es un **subconjunto propio** de b.

Subconjunto y elemento

Es muy importante no confundir la relación de pertenencia con la relación de subconjunto.
Para el conjunto $A = \{a, \{a, b\}, c\}$, es cierto que $\{a, b\} \in A$, pero no es cierto $\{a, b\} \subseteq A$, ya que $b \notin A$.

Axioma de las partes o del conjunto potencia

Axioma del conjunto potencia

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

El conjunto partes de a o **conjunto potencia** del conjunto a es la clase $\mathcal{P}(a) = \{z : z \subseteq x\}$. El axioma permite asegurar que esta clase es también un conjunto.
El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto y por tanto elemento de $\mathcal{P}(a)$ y por tanto $\forall x(\mathcal{P}(x) \neq \varnothing)$.
Además, todo conjunto es elemento de su propio conjunto potencia, $\forall x(x \in \mathcal{P}(x))$.

Corolario: par ordenado

Par ordenado (Kuratowski)

Dados dos conjuntos x e y, el par ordenado de componentes x e y, escrito como $\langle x, y\rangle$ es la clase $\{x, \{x, y\}\}$:

$$\langle x, y\rangle = \{x, \{x, y\}\}$$

Dos pares ordenados serán iguales siempre que los elementos que ocupen cada posición respectiva sean iguales entre sí:

$$\forall x, y, z, t\big((\langle x, y\rangle = \langle z, t\rangle) \leftrightarrow ((x = z) \wedge (y = t))\big)$$

Producto cartesiano

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos a y b, el producto cartesiano, escrito como $a \times b$, se define como sigue:

$$a \times b = \{\langle x, y \rangle : x \in a \wedge y \in b\}$$

Como $a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$, el producto cartesiano es un conjunto.

Generalización

1. $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle \langle x_1, x_2 \rangle, x_3 \rangle$.
2. $\langle x_1, ..., x_n \rangle = \langle \langle x_1, ..., x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$.
3. Abreviamos:
   3.1. $a^1 = a$.
   3.2. $a^2 = a \times a$.
   3.2. $a^3 = a \times a \times a$.
   3.3. Y, en general, $a^n = a_1 \times \cdots \times a_n$

Producto cartesiano

Ejemplos

- $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$:
  $A \times B = \{\{1, a\}, \{1, b\}, \{2, a\}, \{2, b\}, \{3, a\}, \{3, b\}\}$.
- $B \times A = \{\{a, 1\}, \{a, 2\}, \{a, 3\}, \{b, 1\}, \{b, 2\}, \{b, 3\}\}$.
- Un punto en un plano, dotado de un sistema de referencia, se localiza como un par ordenado de números reales (a, b). Es obvio que el punto $(4, 2)$ representa otro punto diferente de $(3, 3)$.
- $\mathbb{Z}$ es la recta numérica, $\mathbb{Z}^2$ el plano cartesiano, $\mathbb{R}$ la recta real, $\mathbb{R}^2$ el plano de coordenadas reales, $\mathbb{R}^3$ el plano real euclídeo completo.
- La mecánica clásica suele representarse en un *espacio de fase* $\Sigma = \mathbb{R}^6$.

Relación

Una **relación binaria** es una clase en que todos sus elementos son pares ordenados.
Una relación **n-aria** es una clase cuyos elementos son n-tuplas ordenadas.
En lugar de escribir $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$, abreviamos escribiendo $\mathcal{R}xy$ o $x\mathcal{R}y$ para afirmar que x está relacionado con y a partir de $\mathcal{R}$.

- Para dos conjuntos cualesquiera, todo subconjunto de $a \times b$ es una relación.
- $\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$ no son relaciones.
- **Dominio:** $dom(\mathcal{R}) = \{x : \exists y(\langle x, y\rangle \in \mathcal{R})\}$.
- **Rango:** $rang(\mathcal{R}) = \{y : \exists x(\langle x, y\rangle \in \mathcal{R})\}$.
- **Campo:** $campo(\mathcal{R}) = dom(\mathcal{R}) \cup rang(\mathcal{R})$.

Relaciones

Relación inversa

Una relación inversa de $\mathcal{R}$ es la clase $\mathcal{R}^{-1}\{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle\}$

Composición de relaciones

La composición de dos relaciones, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, es la clase $\{\langle x, y\rangle : \exists z(\langle x, z\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle z, y\rangle \in \mathcal{S})\}$

Ejemplos

Algunas relaciones se representan con símbolos especiales como $\leq, \geq, >, <$, etc. Otras, sin embargo, se definen para ciertos fines específicos, como el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, que en el plano se representa como una circunferencia de centro en el punto $(0, 0)$ y radio uno. El conjunto de todas las relaciones entre dos conjuntos cualesquiera, A y B, es el conjunto potencia $\mathcal{P}(A \times B)$, por lo que toda relación puede definirse *extensiva* o *intensivamente*.

Relación de equivalencia

Una relación de equivalencia es aquella que satisface las propiedades:

1. Reflexiva: $\forall x(x\mathcal{R}x)$
2. Simétrica: $\forall x, y(x\mathcal{R}y \rightarrow y\mathcal{R}x)$
3. Transitiva: $\forall x, y, z((x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z)$

Clase imagen

La clase imagen de un conjunto A por la relación $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}[A]$, es la clase formada por los elementos de A que se relacionan con x por medio de $\mathcal{R}$, es decir, $\{x : \exists y(y \in A \wedge y\mathcal{R}x)\}$.

Clase de equivalencia

Dada una relación $\sim$ de equivalencia, y el $[x] = \{y \in \mathcal{U} : x \sim y\}$. También se escribe $x \sim y = x\mathcal{E}y$.

Relaciones de orden

Relación de orden parcial (p.o.)

Una relación de orden parcial es aquella que satisface las propiedades:

1. Reflexiva: $\forall x(x\mathcal{R}x)$
2. Antisimétrica: $\forall x, y((x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y)$
3. Transitiva: $\forall x, y, z((x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z)$

Relación de orden total (t.o.)

Una relación de orden total es aquella relación de orden parcial que además satisface la propiedad:

4. Conexa: $\forall x, y\big((x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)\big)$

Buenos órdenes

Una relación $\mathcal{R}$ en una clase, *a*, es un *buen orden* syss:

- $\mathcal{R}$ es un orden total.
- $\mathcal{R}$ tiene un elemento mínimo. Un elemento $a \in A$ es mínimo si cumple
  - $a \in A$
  - $\forall b(b \in A \to a \leq b)$

También se puede decir que un conjunto es un buen orden si está totalmente ordenado y **bien fundado** (provisto de elemento mínimo).

Relación funcional

- Una relación, $\mathcal{R}$, es *funcional* syss a cada elemento que se relaciona con otro le corresponde únicamente otro. La clave es que cada elemento del domino solamente podrá estar relacionado con un único elemento del rango —dos pueden relacionarse con el mismo—.
- $\forall x, y, z\Big((\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle x, z\rangle \in \mathcal{R}) \rightarrow y = z\Big)$.
- Los elementos que se relacionan se llaman *dominio* y aquellos con los que se relacionan *rango, imagen, codominio* o *recorrido* de $\mathcal{R}$.
- Bourbaki: función como aplicación siempre que *dom* y *rang* sean números.

$\forall x \exists ! y (x \mathcal{R} y)$.

Notación: $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \equiv f(x) = y$.
Prueba de la recta vertical: solamente debe cortar en un punto.

Aplicaciones

Función inyectiva

- No hay dos elementos del *dom* con el mismo *rang* —aunque puede haber elementos del rango sin relacionar—.
- $\forall x, y, z\Big((\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \land \langle z, y\rangle \in \mathcal{R}) \to x = z\Big)$
- $\forall y \exists! x (x\mathcal{R}y) \equiv \forall y \exists! x (f(x) = y)$

Prueba de la recta horizontal: solamente debe cortar en un punto.

Función sobreyectiva o exhaustiva

- Rango y dominio coinciden: no hay miembros del rango ni del dominio sin relacionar —aunque puede haber varios que compartan elemento del dominio: dos elementos del dominio con misma imagen—.
- $\forall y \exists x(\langle x, y\rangle \in \mathcal{R})$.
- $\forall y \exists x\big(f(x) = y\big)$.
- No es cierto que exista un único x para cada y, por lo que se puede dar el caso de que la función sea sobreyectiva y no inyectiva: compartiendo dos elementos del rango un mismo elemento del dominio pero estando todos los elementos del rango relacionados.

Aplicaciones

Función biyectiva

- Una función es biyectiva si es, al mismo tiempo, inyectiva y sobreyectiva: todos los elementos del dominio están relacionados con un único elemento del rango y no hay elementos del rango sin relacionar.
    - Función: todos los elementos del dominio están relacionados con uno único del rango.
    - Inyectiva: no hay dos elementos del dominio que compartan rango.
    - Sobreyectiva: todos los elementos se relacionan con al menos otro.
- Se dice que están en relación *uno-a-uno* o en correspondencia.

Esquema axiomático de reemplazo

Esquema axiomático de reemplazo

La imagen de un conjunto por una función definida a través de otra fórmula también es un conjunto. Dada una oración de primer orden $\Pi(a, b)$ tal que, para cualquier elemento $a \in x$, existe un $y = \{b : \Pi(a, b)$, entonces existe una función $f : x \longrightarrow y$ definida por $f(a) = b$. No podemos cuantificar sobre la propia función.

$$\underbrace{\forall x, y, z\Big((\Pi(x, y) \wedge \Pi(x, z)) \to y = z\Big)}_{\Pi \text{ es una función}} \to \underbrace{\forall x \exists y \forall z\Big(z \in y \leftrightarrow \exists w\big(w \in x \wedge \Pi(w, z)\big)\Big)}_{\text{Para todo conjunto } x\text{, existe su } \textit{conjunto imagen } y}$$

Clase transitiva

Una clase, a, es transitiva si todo elemento de la clase es un subconjunto de ella, es decir, $\forall x(x \in a \rightarrow x \subseteq a)$

- La clase universal es transitiva.
- Los conjuntos 0, 1 y 2 lo son.
- $\{1\}$ no lo es.
- Un conjunto x es transitivo syss $\bigcup x \subseteq x \Leftrightarrow x \subseteq \mathcal{P}(x)$

Función sucesión

El conjunto sucesor de un conjunto x lo escribimos como $s(x)$, x' o x^+ y se define como:
$s(x) = x \cup \{x\}$

- $0 = \emptyset, 1 = s(0), 2 = s(1), ...$
- $1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, ..., n + 1 = \{0, 1, ..., n\}$

Ordinales

La clase *Ord*

Un conjunto x es un ordinal syss es un conjunto transitivo y está bien ordenado por la relación $\in_x$ de pertenencia en x. Se llama **Ord** u $\mathfrak{Ord}$ a la clase cuyos elementos son todos ordinales:
$\mathfrak{Ord} = \{x : x \text{ es un ordinal}\}$

1. $0, 1, 2$ son ordinales.
2. $\{1\}$ no lo es.
3. $\{0, 1, \{1\}\}$ es transitivo, pero no es un ordinal pues $\in_a$ no es conexa.

Propiedades ordinales interesantes

- $\forall x \in \mathfrak{Ord}(x \notin x)$
- Todo elemento de un ordinal es un ordinal.
- Si un conjunto es ordinal, su sucesor también.

Ordinales

Orden usual en $\mathfrak{Ord}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{Ord}\big(\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta\big)$
Es un orden parcial.

Ordinal sucesor y límite

- α es un ordinal sucesor syss $\exists \beta \in \mathfrak{Ord}(\alpha = s(\beta))$
- α es un ordinal límite syss $\alpha \neq 0$ y α no es sucesor.
- **Un número natural** es aquel ordinal α que se llama «finito» y cumple:
$$\forall \beta\Big((\beta \leq \alpha) \rightarrow (\beta = 0 \vee \beta \text{ es un ordinal sucesor})\Big)$$
- Una clase, a, es **inductiva** syss
$$0 \in a \wedge \Big(\forall y\big(y \in a \rightarrow s(y) \in a\big)\Big)$$

Axioma del infinito

Axioma del infinito

$$\exists x\left(0 \in x \wedge \left(\forall y((y \in x) \rightarrow s(y) \in x)\right)\right)$$

- Existe un conjunto al que pertenece el conjunto vacío y, además, está cerrado por el paso al siguiente.
- Se postula un conjunto inductivo y se asegura la existencia de los naturales al modo habitual.

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, ...\}$$

RECUERDA

RECUERDA

- Ahora puedes volver al tema de primer orden y repasar la aritmética de Peano.
- Ahora puedes volver al tema de primer orden y repasar el principio de inducción.

Ya los podemos caracterizar exhaustivamente en nuestra teoría formal estricta axiomática sin paradojas.

Aritmética estándar

$\mathbb{N}$

- La clase $\mathbb{N}$ es transitiva y es un conjunto.
- Si a es un conjunto inductivo, $\mathbb{N} \in a$
- $\mathbb{N} = \bigcup\{x : x \text{ es un conjunto inductivo}\}$
- $\mathbb{N}$ es un ordinal (si lo tratamos como ordinal escribimos ω y para relacionarlo con la hipótesis del continuo como el primer *aleph*, $\aleph_0$).
- ω es el menor ordinal no finito y el menor ordinal límite.

Aritmética estándar

Axiomas de Peano

$\langle \mathbb{N}, 0, s \rangle$ es un modelo de:

1. $0 \in \mathbb{N}$ (Naturales no está vacío).
   - $\forall x \Big(x \in \mathbb{N} \to x = x \Big)$ (Reflexividad Id.).
   - $\forall x_{\in\mathbb{N}} \forall y_{\in\mathbb{N}} \Big((x = y) \to (y = x) \Big)$ (Simetría Id.).
   - $\forall x_{\in\mathbb{N}}, y_{\in\mathbb{N}}, z_{\in\mathbb{N}} \Big(x = y \land y = z) \to x = z \Big)$ (Transitividad Id.).
   - $\forall x, y \Big((y \in \mathbb{N} \land x = y) \to x \in \mathbb{N} \Big)$ ($\mathbb{N}$ está cerrado bajo $=$).
2. $\forall x \Big(x \in \mathbb{N} \to s(x) \in \mathbb{N} \Big)$ ($\mathbb{N}$ está cerrado bajo s).
3. $\forall x, y \in \mathbb{N} \Big((s(x) = s(y)) \to x = y \Big)$ (s es inyectiva).
4. $\neg \exists x \in \mathbb{N} \Big(s(n) = 0 \Big)$ (0 es el mínimo).

Matemática estándar

Teoría de conjuntos

- Con lo que tenemos hasta ahora hemos construido $\mathcal{ZF}^-$, es decir, sin regularidad ni axioma de elección. Basta para construir numerosas estructuras matemáticas.
- Ahora introducimos brevemente estos dos últimos axiomas.

Regularidad

Axioma de regularidad

$\forall x \exists y ((x \neq \varnothing \wedge y \in x) \rightarrow (x \cap y = \varnothing))$

- Se propone eliminar aquellos conjuntos patológicos como los que se contengan a sí mismos.
- Todos los conjuntos son regulares (bien fundados bajo pertenencia como orden parcial con elemento mínimo).
- Se bloquean conjuntos de la forma $x \ni y \ni z \ni \ldots$ (como un conjunto que es su propio elemento o dos conjuntos definidos como $x = \{y\} \wedge y = \{x\}$.
- Es independiente del resto de axiomas.

Axioma de elección

Axioma de elección

$$\forall x \exists f : x \longrightarrow \bigcup x,\ \forall y \Big((y \in x \wedge y \neq \varnothing) \rightarrow (f(y) \in y) \Big)$$

- No es constructivo.
- Para cada familia de conjuntos no vacíos existe siempre otro que contiene un elemento de cada uno de aquellos.
- Zermelo lo formuló para probar que todo conjunto podía ser bien ordenado.
- Es independiente del resto de axiomas.
- HC implica AC, pero no al revés.

RECUERDA

RECUERDA

Repasa ahora el tema introductorio