Universidad Rey Juan Carlos

Grado en Ingeniería Ambiental

TEORÍA

Física I

Profesor:

Alexandre Rodríguez Nieto

2024

Índice general

Capítulo 1

Cálculo Vectorial

Ciertas magnitudes físicas quedan perfectamente determinadas utilizando únicamente un número y, por supuesto, sus correspondientes unidades. Estas magnitudes se denominan **escalares**. Algunos ejemplos pueden ser el tiempo; la temperatura de una habitación; la presión en el fondo de una piscina; la masa, volumen y densidad de un cuerpo; el voltaje y la potencia generados por una pila; etc. Sin embargo, en otros casos es necesario especificar, además de su valor numérico, su dirección y sentido. Estas magnitudes se denominan **vectoriales** y se representan utilizando vectores. Algunos ejemplos son la velocidad y aceleración de un cuerpo; las fuerzas como el rozamiento y el peso; el campo eléctrico; etc.

1.1. Representación de vectores

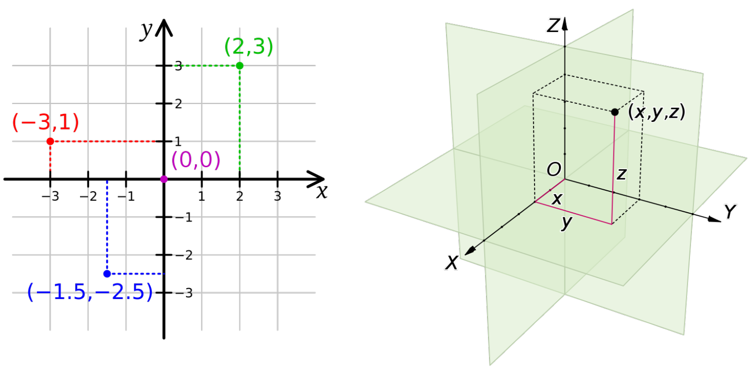


Figura 1.1. Coordenadas cartesianas en el plano y en el espacio.

Para representar un vector necesitamos definir primero un sistema de coordenadas. Típicamente utilizamos coordenadas cartesianas, también denominadas coordenadas rectangulares. En este caso se utilizan como referencia ejes perpendiculares entre sí y que se cortan en un punto que denominamos origen de coordenadas, O. Por lo tanto, podemos tener un sistema de coordenadas cartesiano en el plano (2 dimensiones) o en el espacio (3 dimensiones), tal y como se representa en Fig. 1.1.

Un vector $\vec{v}$ tiene una componente en cada uno de los ejes. Por lo tanto, en el plano cartesiano sus componentes serán v_x y v_y, mientras que en el espacio existirá una componente adicional v_z. Por simplicidad, vamos a explicar las nociones básicas en 2 dimensiones, si bien la generalización en 3 dimensiones es inmediata. El vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$ en el plano cartesiano se representa como una flecha que comienza en el origen $(0, 0)$ y termina en el punto (v_x, v_y). La longitud de la flecha es la magnitud o **módulo** del vector y se denota v o $|\vec{v}|$. Notando que v, v_x y v_y son la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, respectivamente, el módulo viene dado por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Si estamos trabajando en tres dimensiones simplemente tendremos que añadir una componente adicional v_z, de tal manera que el módulo del vector vendrá dado por $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

La línea recta pasante por el origen $(0, 0)$ y el punto (v_x, v_y) es la **dirección** del vector. La cabeza de la flecha del vector nos indica su **sentido**, es decir, su orientación en el espacio.

Además de utilizando coordenadas cartesianas, un vector cualquiera puede quedar perfectamente definido utilizando **coordenadas polares** (r, θ). En este sistema de coordenadas r es la distancia del origen de coordenadas al punto (v_x, v_y), es decir, en nuestro caso es el módulo del vector ($r = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$). θ es el ángulo comprendido entre el vector y un eje fijo. Típicamente consideramos como eje fijo la parte positiva del eje x y θ se mide en sentido antihorario. A la hora de resolver problemas, en general utilizaremos ambos sistemas de coordenadas. Utilizando nociones básicas de trigonometría encontramos que la relación entre las coordenadas cartesianas y las polares es

$$v_x = v\cos\theta \qquad v_y = v\sin\theta$$

También se cumplirá $\tan\theta = v_y/v_x$.

En lugar de utilizar la notación $\vec{v} = (v_x, v_y)$, en ocasiones es habitual expresar los vectores en términos de los **vectores unitarios**. Un vector unitario es un vector que tiene módulo unidad y la dirección de los ejes cartesianos. Estos son

$$\hat{\imath} = (1, 0) \qquad \hat{\jmath} = (0, 1)$$

donde el acento circunflejo hace referencia al carácter unitario de los vectores.

En tres dimensiones los vectores unitarios son

$$\hat{\imath} = (1, 0, 0) \qquad \hat{\jmath} = (0, 1, 0) \qquad \hat{k} = (0, 0, 1)$$

De esta manera, un vector cualquiera puede expresarse como

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} \qquad \text{(2D)}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \qquad \text{(3D)}$$

Muchos de los conceptos que acabamos de introducir se representan en Fig. 1.2, donde la línea punteada se corresponde con la dirección del vector.

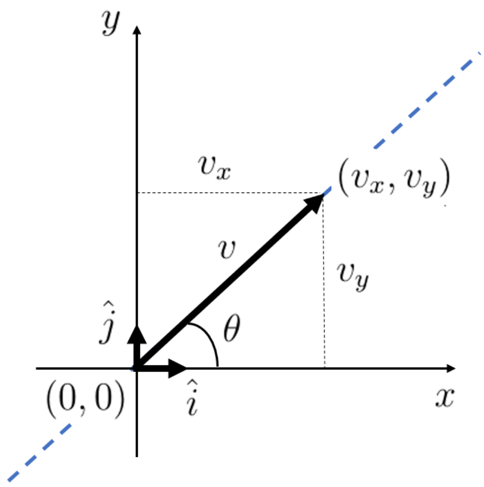


Figura 1.2. Elementos principales en la representación de vectores.

Cuando dos vectores tienen la misma dirección y sentido decimos que son **paralelos**. Cuando tienen la misma dirección pero sentido opuesto decimos que son **antiparalelos**. Dos vectores serán iguales cuando tengan la misma dirección, sentido y magnitud. Algunos ejemplos se representan en Fig. 1.3.

Figura 1.3. Ilustraciones intuitivas sobre magnitud, dirección y sentido.

1.2. Operaciones básicas

La suma (o resta) de dos vectores se obtiene simplemente realizando la suma (o resta) componente a componente

$$\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$
$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$$

Gráficamente podemos sumar vectores situando el segundo vector en el extremo final del primer vector, siendo el vector suma aquel cuyo origen coincide con el origen del primer vector y su final coincide con el final del segundo vector. Esto aplica también en el caso de que sumemos más de un vector, coincidiendo en este caso el final del vector resultante con el final del último vector que sumamos (ver Fig. 1.4). La suma de vectores cumple la propiedad conmutativa, es decir, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

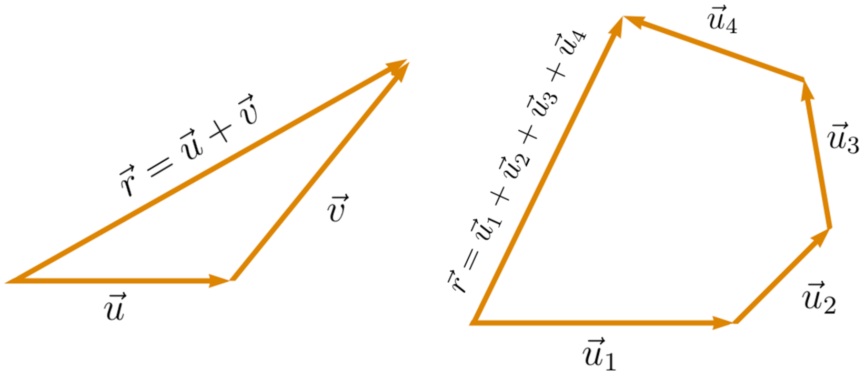


Figura 1.4. Suma de vectores.

La suma de vectores también cumple la propiedad asociativa, es decir, $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

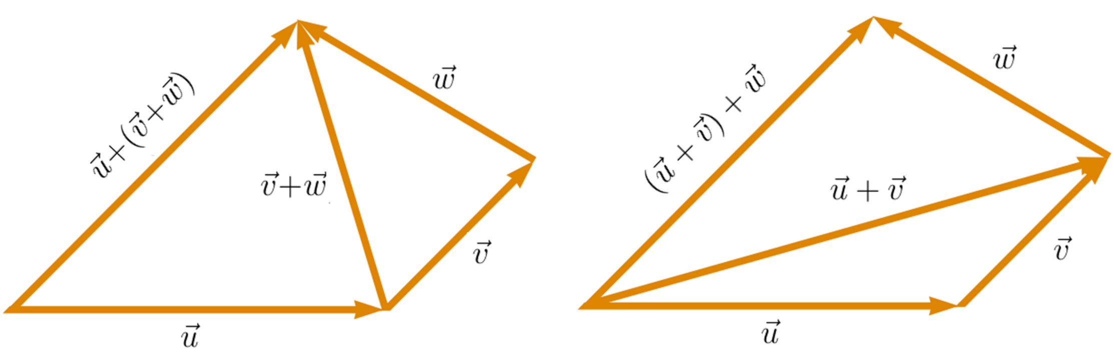


Figura 1.5. Verificación de la propiedad asociativa.

De forma gráfica, a la hora de realizar la resta $\vec{u}-\vec{v}$, obtenemos $-\vec{v}$ y procedemos a la suma $\vec{u}+(-\vec{v})$.

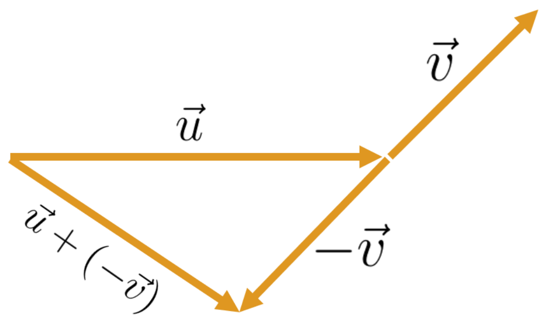


Figura 1.6. Resta de vectores.

La multiplicación de un vector $\vec{v}$ por un escalar k viene dada por

$$k\vec{v} = (kv_x, kv_y)$$

El vector resultante tendrá la misma dirección que $\vec{v}$ y su sentido será el mismo o el contrario dependiendo del signo de k.

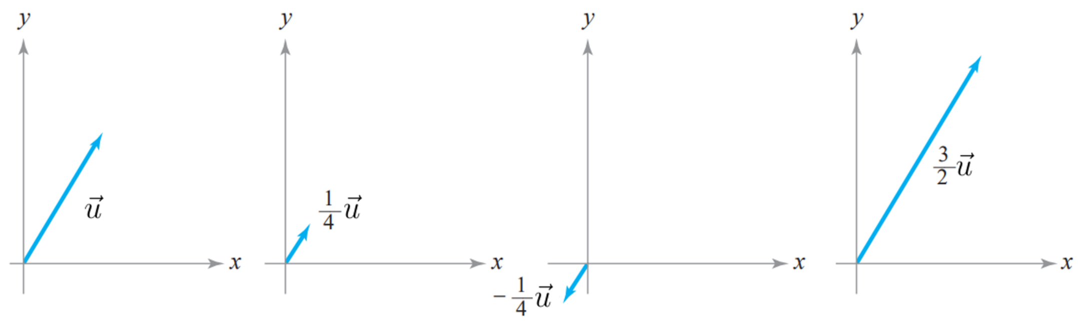


Figura 1.7. Multiplicación de un escalar por un vector.

1.3. Vector unitario en la dirección de un vector dado

De la misma manera que definimos los vectores unitarios en las direcciones de los ejes cartesianos, podemos definir un vector unitario $\hat{u}_v$ como aquel vector que, teniendo módulo unidad, tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$.

La forma de obtener $\hat{u}_v$ es dividiendo $\vec{v}$ entre su módulo. De esta manera se preserva la dirección y se ajusta el módulo a 1.

$$\hat{u}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

Ahora podemos expresar $\vec{v}$ en términos de su módulo y un vector unitario en su dirección.

$$\vec{v} = v\hat{u}_v$$

Por ejemplo, el vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$ tiene módulo $v = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Por lo tanto, el vector unitario en su dirección será

$$\hat{u}_v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

1.4. Vector que une dos puntos

Dados dos puntos $P = (P_x, P_y, P_z)$ y $Q = (Q_x, Q_y, Q_z)$, puede interesarnos conocer cuál es el vector que une dichos puntos, $\vec{PQ}$. Los vectores asociados a los puntos P y Q son $\vec{OP} = (P_x, P_y, P_z)$ y $\vec{OQ} = (Q_x, Q_y, Q_z)$. El vector que une los puntos viene dado por

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y, Q_z - P_z)$$

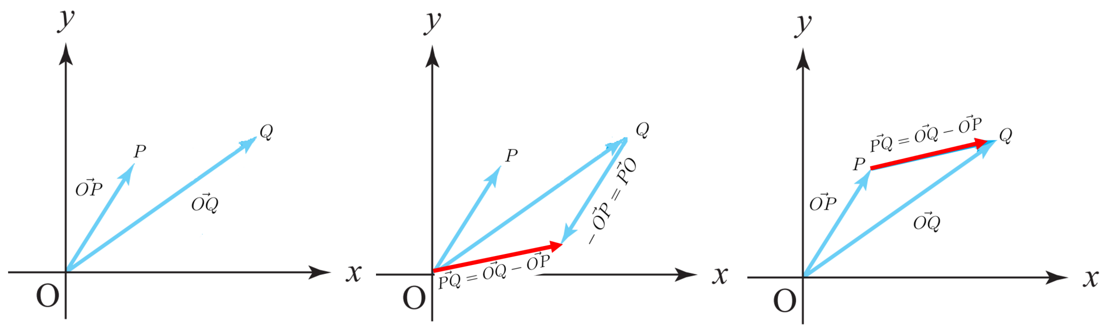


Figura 1.8. Vector que une dos puntos.

1.5. Producto escalar, vectorial y mixto

En esta sección vamos a estudiar algunas herramientas matemáticas que involucran vectores y aparecen de forma natural en numerosos problemas de física.

El **producto escalar** de dos vectores, denotado $\vec{u} \cdot \vec{v}$, es una cantidad escalar igual al producto del módulo de los vectores y el coseno del ángulo que forman.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = uv\cos\theta}$$

La presencia del término $\cos\theta$ implica que el producto escalar es máximo cuando los vectores son paralelos y es nulo cuando éstos son perpendiculares. Por lo tanto

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

Teniendo en cuenta las igualdades anteriores, podemos desarrollar y simplificar el producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}) \cdot (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}) =$$

$$u_xv_x(\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}) + \cancel{u_xv_y(\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath})} + \cancel{u_xv_z(\hat{\imath} \cdot \hat{k})} +$$

$$\cancel{u_yv_x(\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath})} + u_yv_y(\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}) + \cancel{u_yv_z(\hat{\jmath} \cdot \hat{k})} +$$

$$\cancel{u_zv_x(\hat{k} \cdot \hat{\imath})} + \cancel{u_zv_y(\hat{k} \cdot \hat{\jmath})} + u_zv_z(\hat{k} \cdot \hat{k})$$

Por lo tanto, el producto escalar puede expresarse

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z}$$

A partir de estas dos expresiones para el producto escalar podemos calcular el ángulo que forman dos vectores.

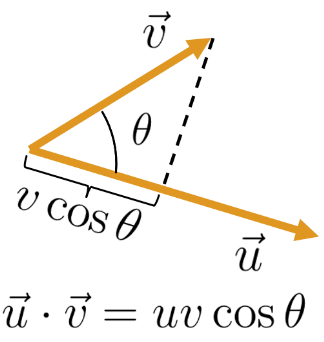


Figura 1.9. Producto escalar de dos vectores.

El **producto vectorial** de dos vectores en el espacio[1], denotado $\vec{u} \times \vec{v}$, es un vector perpendicular al plano generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. El vector resultante puede entenderse como el resultado de un determinante simbólico donde la primera fila viene dada por los vectores unitarios y las dos filas siguientes están ocupadas por los vectores.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

Desarrollando los determinantes de orden 2 obtenemos

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\hat{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\hat{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{k}$$

El módulo del vector resultante es igual al producto del módulo de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y el seno del ángulo que forman, es decir

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = uv \sin\theta$$

El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

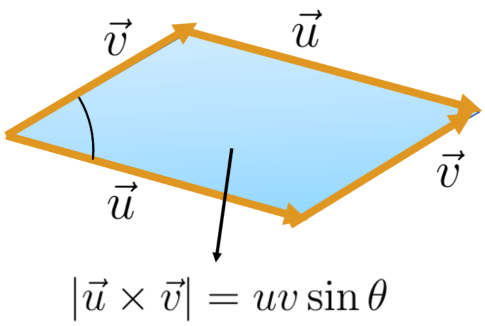


Figura 1.10. Producto vectorial y el área del paralelogramo formado por dos vectores.

De forma contraria al producto escalar, el producto vectorial es máximo cuando los vectores son perpendiculares y es nulo cuando éstos son paralelos.

El producto vectorial es anticonmutativo, es decir

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Para conocer el sentido del vector resultante $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ utilizamos la regla de la mano derecha: los cuatro dedos se sitúan sobre el vector $\vec{u}$ y se cierran sobre el vector $\vec{v}$, de tal manera que el pulgar nos indica el sentido de $\vec{w}$.

[1] El producto vectorial únicamente está definido para vectores en el espacio (en tres dimensiones), por lo que para calcular el producto vectorial de dos vectores en el plano XY tenemos que incluir una tercera componente z nula. El resultado será un vector paralelo al eje z.

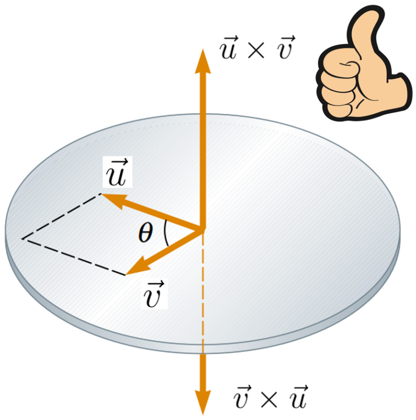


Figura 1.11. Producto vectorial y regla de la mano derecha.

El **producto mixto** de tres vectores es una operación que combina el producto escalar con el producto vectorial, dando como resultado una cantidad escalar.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

El producto mixto es el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

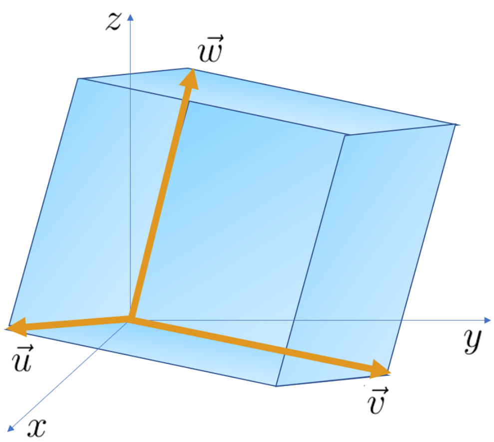


Figura 1.12. Paralelepípedo formado por tres vectores.

1.6. Formulario

Por simplicidad, algunas fórmulas se refieren al caso bidimensional. Su generalización en 3 dimensiones es inmediata.

Módulo y componentes de un vector

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = v\cos\theta \qquad v_y = v\sin\theta$$

Operaciones básicas

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_x \pm v_x, u_y \pm v_y)$$

$$k\vec{v} = (kv_x, kv_y)$$

Vector unitario

$$\hat{u}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

Vector que une dos puntos

$$\vec{PQ} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y)$$

Producto escalar, vectorial y mixto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv\cos\theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = uv\sin\theta$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\hat{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\hat{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{k}$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Capítulo 2

Cinemática

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos ignorando las causas que lo originan. Es decir, en este capítulo estudiaremos cómo se mueven los cuerpos y no el porqué se mueven. Esta última cuestión la abordaremos en el siguiente capítulo cuando se introduzca el concepto de fuerza. Los conceptos propios de la cinemática son los de posición, velocidad y aceleración. La comprensión de éstos nos permitirá estudiar distintos tipos de movimiento, entre los que destacan los movimientos unidimensionales y bidimensionales con aceleración constante y el movimiento circular.

2.1. Movimiento unidimensional

El movimiento de una partícula viene perfectamente determinado por su posición en todo instante de tiempo. La **posición** de una partícula es su localización en el espacio con respecto al origen de un sistema de coordenadas previamente fijado. El caso más sencillo es el movimiento unidimensional, en el cual la partícula se mueve en línea recta. Ya que el movimiento tiene lugar en una única dirección, las magnitudes que lo caracterizan son escalares.

La **velocidad** de una partícula se define como el cambio de su posición Δx en un cierto intervalo temporal Δt. Si dicho intervalo es infinitesimalmente pequeño ($\Delta t \to 0$) la velocidad viene dada por la derivada de la posición con respecto al tiempo

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Puesto que la derivada de una función en un punto equivale a la pendiente de la recta tangente en dicho punto, la velocidad es siempre tangente a la trayectoria (curva descrita por la evolución temporal de la posición).

Si una partícula se mueve en línea recta con velocidad constante decimos que el movimiento es rectilíneo uniforme (MRU). Sin embargo, lo más habitual es que la velocidad cambie con el tiempo. En este sentido, la **aceleración** se define como el cambio de la velocidad Δv en un cierto intervalo temporal Δt. De nuevo, si el intervalo temporal es suficientemente pequeño tenemos

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

De este modo, si conocemos la forma funcional de la posición, derivando podemos conocer la velocidad. Derivando una vez más conocemos la aceleración. De forma contraria, podemos obtener la velocidad y la posición integrando la expresión matemática de la aceleración.

2.1.1. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

La forma funcional de la posición, $x(t)$, puede ser tan complicada como uno quiera. Por ejemplo, la trayectoria descrita por un avión o por una hoja de un árbol al caer no va a venir dada por una función matemática trivial. En efecto, obtener las ecuaciones que explican el movimiento de un cuerpo puede ser una tarea sencilla o extremadamente ardua. Por simplicidad, en esta sección vamos a suponer que la partícula se mueve en línea recta con aceleración constante, es decir, describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). En el caso de que este movimiento sea horizontal, un ejemplo podría ser un coche que acelera de forma uniforme. En el caso de que el movimiento sea vertical, el ejemplo típico es la caída de un objeto mientras es acelerado por la gravedad.

Asumiendo en todo caso $a = \text{cte}$, podemos obtener las ecuaciones generales que describen este problema y que serán de utilidad a lo largo de todo el capítulo. Vamos a partir de la definición de aceleración y resolver la integral asociada

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \longrightarrow \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a dt \quad \longrightarrow \quad v - v_0 = at$$

Despejando obtenemos la expresión de la velocidad en función del tiempo

$$\boxed{v = v_0 + at} \tag{2.1}$$

Conocida ésta, podemos utilizar la definición de velocidad e integrar de nuevo

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \longrightarrow \quad v_0 + at = \frac{dx}{dt}$$
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at) dt \quad \longrightarrow \quad x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Despejando obtenemos la evolución de la posición en función del tiempo

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2} \tag{2.2}$$

A la hora de resolver ciertos problemas, puede interesarnos relacionar la posición con la velocidad de forma independiente del tiempo. Un ejemplo sería un problema en el que, conocida la aceleración, se nos pide la velocidad cuando la partícula se encuentra en una cierta posición x. Para tener a mano una ecuación útil en estos casos, podemos despejar t en Ec.(2.1) y sustituir en Ec.(2.2), obteniendo

$$t = \frac{v - v_0}{a} \quad \longrightarrow \quad x = x_0 + \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

Simplificando resulta

$$x = x_0 + \frac{\cancel{2v_0v} - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - \cancel{2v_0v}}{2a}$$

Entonces la expresión independiente del tiempo buscada es

$$\boxed{x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}} \tag{2.3}$$

En la mayoría de los problemas de cinemática la aceleración es un dato conocido. De hecho, lo más habitual es que es que estemos trabajando con la aceleración de la gravedad. Por esta razón no vamos a obtener una ecuación equivalente a Ec.(2.3) pero independiente de la aceleración. Si fuera necesario, esta expresión puede obtenerse despejando a en Ec.(2.1) y sustituyendo en Ec.(2.2).

Las ecuaciones Ec.(2.1), Ec.(2.2) y Ec.(2.3) son válidas para el MRUA. Sin embargo, como veremos más adelante, obtener ecuaciones equivalentes para el caso bidimensional o tridimensional es inmediato. Es suficiente con añadir ecuaciones idénticas para cada una de las dimensiones restantes. Por otra parte, estas ecuaciones pueden utilizarse como base para construir las ecuaciones de movimiento de casos restringidos. Por ejemplo, podemos obtener las ecuaciones para un MRU simplemente imponiendo $a = 0$ en las ecuaciones principales.

En conclusión, cualquier tipo de movimiento uniformemente acelerado seguirá unas ecuaciones similares a Ec.(2.1), Ec.(2.2) y Ec.(2.3).

2.1.2. Caída libre

En ausencia de resistencia del aire, todos los objetos caen hacia el centro de la Tierra con aceleración constante $g \approx 9.80$ m/s^2 (este valor varía con la altitud y la latitud). Un movimiento de caída libre consiste en el movimiento vertical de un objeto bajo la influencia de la gravedad, independientemente de su movimiento inicial. Esto último quiere decir que objetos lanzados verticalmente hacia arriba o hacia abajo también se mueven en caída libre. Por lo tanto, la caída libre es un MRUA y las ecuaciones Ec.(2.1), Ec.(2.2) y Ec.(2.3) definen el movimiento. Ya que la gravedad va dirigida en el sentido negativo del eje y (es decir, hacia abajo) simplemente debemos incluir un signo negativo delante de aceleración en dichas ecuaciones, obteniendo

$$\boxed{\begin{aligned} v &= v_0 - gt \\ y &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ y &= y_0 - \frac{v^2 - v_0^2}{2g} \end{aligned}}$$

donde utilizamos ahora la notación y para la posición en lugar de x para dar cuenta de que el movimiento es vertical. Además, dependiendo del problema en cuestión, tendremos que pensar si el signo delante de v_0 es positivo (lanzamiento hacia arriba) o negativo (lanzamiento hacia abajo).

2.2. Movimiento bidimensional

Por norma general los cuerpos no se mueven en línea recta, sino en el plano o en el espacio. En estos casos las magnitudes son vectoriales en lugar de escalares. En concreto, los vectores posición, velocidad y aceleración vienen dados por

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y) \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (v_x, v_y) \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = (a_x, a_y) \end{aligned}$$

Nótese que en el caso tridimensional únicamente tendríamos que añadir una componente z a cada vector.

Igual que el apartado anterior, vamos a considerar que la aceleración es constante, de tal manera que las ecuaciones de movimiento son esencialmente iguales a las del MRUA.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y &= y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ v_x &= v_{x0} + a_x t \\ v_y &= v_{y0} + a_y t \end{aligned}$$

2.2.1. Tiro parabólico

El tiro parabólico consiste en el lanzamiento de un objeto con un cierto ángulo en presencia de un campo gravitatorio. Si la aceleración de la gravedad es constante y no existe resistencia con el aire, el resultado es una trayectoria parabólica.

Si el ángulo de lanzamiento con respecto a la horizontal es θ, las componentes de la velocidad inicial $\vec{v_0} = (v_{x0}, v_{y0})$ en cada uno de los ejes son

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta \qquad v_{y0} = v_0 \sin\theta$$

En este problema la gravedad únicamente afecta en la coordenada y, donde las ecuaciones serán equivalentes a una caída libre con $v_0 = v_{y0} = v_0 \sin\theta$. Por otra parte, las ecuaciones de la coordenada x se corresponden con un MRU. Las ecuaciones para la posición y la velocidad serán entonces

$$\boxed{x = x_0 + v_0 \cos\theta t} \tag{2.4}$$

$$\boxed{y = y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2} \tag{2.5}$$

$$\boxed{v_x = v_0 \cos\theta} \tag{2.6}$$

$$\boxed{v_y = v_0 \sin\theta - gt} \tag{2.7}$$

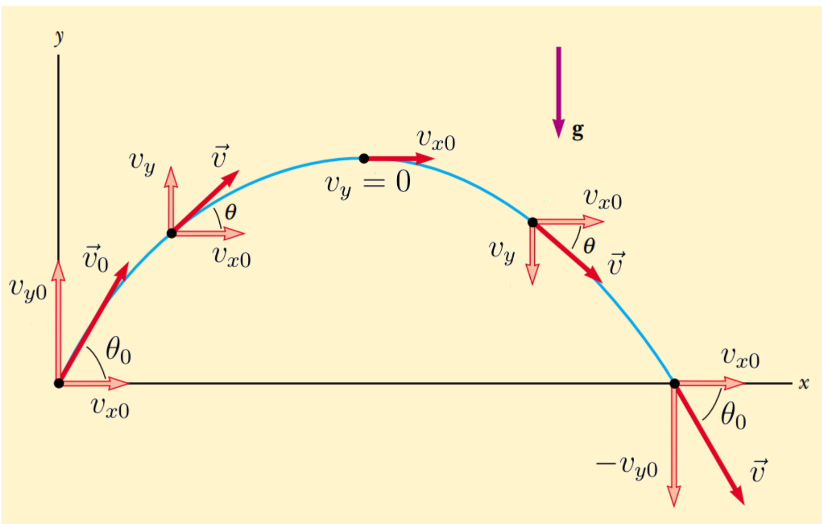


Figura 2.1. Vector velocidad y sus componentes en distintos puntos de la trayectoria descrita por una partícula durante un tiro parabólico.

A la hora de resolver problemas que involucren un tiro parabólico, nos interesará disponer de ecuaciones que describan el movimiento en ciertos puntos de interés. Uno de ellos es el punto en el que se alcanza la altura máxima y_m del tiro parabólico. Este punto viene caracterizado por $v_y = 0$ (ver Fig. 2.1). Imponiendo esta condición en Ec.(2.7) obtenemos que el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima es

$$t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Sustituyendo este tiempo en Ec.(2.5) y tomando $y_0 = 0$ resulta

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{\cancel{g} v_0^2 \sin^2\theta}{2g^{\cancel{2}}}$$

por lo que la altura máxima del tiro parabólico es

$$\boxed{y_m = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$

Otro punto de interés es el alcance máximo x_m, que viene caracterizado por $y = 0$. Imponiendo esta condición en Ec.(2.5) obtenemos el tiempo en el que la partícula alcanza la máxima distancia horizontal

$$t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

Sustituyendo este tiempo en Ec.(2.4) y tomando $x_0 = 0$ obtenemos

$$x_m = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

Esta ecuación puede simplificarse haciendo uso de la identidad trigonométrica $2\cos x \sin x = \sin 2x$, de tal manera que el alcance máximo es

$$\boxed{x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$

2.3. Movimiento circular

El movimiento circular es aquel en el que la trayectoria de la partícula describe una circunferencia. Dada la simetría del problema, es conveniente abordarlo utilizando coordenadas polares, es decir, describir el movimiento en términos del desplazamiento angular θ y el radio de la circunferencia R.

La distancia recorrida s está relacionada con el radio de la circunferencia y el desplazamiento angular según

$$\theta = \frac{s}{R} \tag{2.8}$$

Nótese que una vez la partícula ha recorrido toda la circunferencia $s = 2\pi R$, por lo que $\theta = 2\pi$.

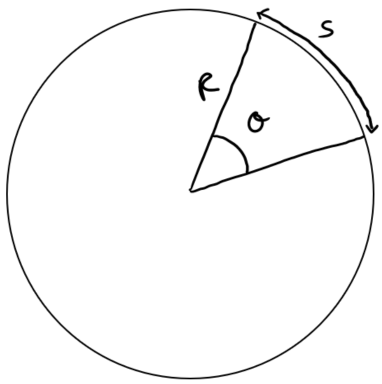


Figura 2.2. Magnitudes fundamentales en un movimiento circular.

De forma análoga al movimiento rectilíneo, podemos definir magnitudes como la **velocidad angular** y la **aceleración angular**, que serán equivalentes a la velocidad y la aceleración, pero en este caso relativas a los cambios por unidad de tiempo del ángulo y la velocidad angular, respectivamente. De esta manera la velocidad angular se define como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Si tenemos en cuenta Ec.(2.8) obtenemos

$$\omega = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

De la misma manera obtenemos la aceleración angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_t}{R} \tag{2.9}$$

Ya que las unidades de θ son rad, las unidades de ω son rad/s y las de α son rad/s^2.

En resumen, las tres ecuaciones principales que relacionan las magnitudes angulares con las lineales son

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \theta R \\ v &= \omega R \\ a_t &= \alpha R \end{aligned}}$$

Es importante notar que en Ec.(2.9) hemos añadido un subíndice t en la aceleración. Esto se debe a que en un movimiento circular resulta necesario descomponer la aceleración en dos contribuciones distintas denominadas **componentes intrínsecas de la aceleración**. Por un lado tenemos la aceleración normal, $\vec{a}_n$, que es la responsable del cambio de dirección del vector velocidad. Es decir, es la aceleración que hace que la trayectoria se curve. Si la aceleración normal es nula el movimiento es rectilíneo. Por otra parte tenemos la aceleración tangencial, $\vec{a}_t$, que es la responsable del cambio en la magnitud (módulo) de la velocidad. Es decir, es la causante de que la partícula gire cada vez más rápido (o más lento). Si no existe aceleración tangencial, la velocidad de la partícula se mantiene constante.

Como se puede ver en Ec.(2.9), el módulo de la aceleración tangencial es

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Podemos expresar el vector aceleración tangencial como $\vec{a}_t = a_t \hat{u}_t$, donde $\hat{u}_t$ es el vector unitario tangente y tiene la misma dirección que la velocidad (es decir, es tangente a la trayectoria).

En el caso de la aceleración normal, su módulo es

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

El vector aceleración normal es $\vec{a}_n = a_n \hat{u}_n$, donde $\hat{u}_n$ es perpendicular a la trayectoria. Ya que el movimiento es circular, esto implica que es un vector dirigido hacia el centro de la circunferencia.

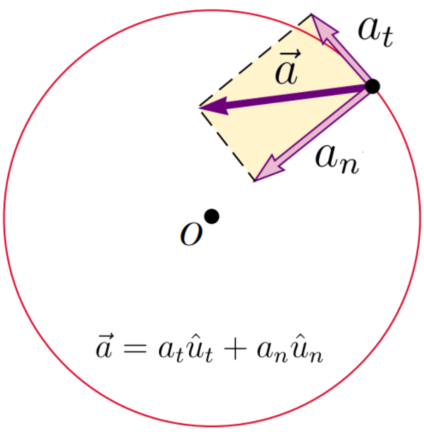


Figura 2.3. Componentes intrínsecas de la aceleración en una trayectoria circular.

Teniendo en cuenta que $\vec{a}_n \perp \vec{a}_t$, el módulo del vector aceleración ($\vec{a} = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$) puede expresarse como

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

De forma análoga al MRUA, un movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA) es aquel en el que la aceleración angular es constante ($\alpha = \text{cte}$). Las ecuaciones de movimiento que se obtienen son idénticas al caso rectilíneo.

$$\begin{aligned} \theta =& \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega =& \omega_0 + \alpha t \\ \theta =& \theta_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} \end{aligned}$$

Por otra parte, un movimiento circular uniforme (MCU) es aquel en el que la velocidad angular es constante ($\omega = \text{cte} \rightarrow \alpha = 0$). Si la velocidad angular es constante la partícula describirá circunferencias completas en intervalos de tiempo regulares. En consecuencia, es posible definir el período de movimiento T como el tiempo que emplea la partícula en describir una vuelta o revolución (rev) completa. La partícula recorre pues una distancia $2\pi R$ durante el tiempo T, de tal manera que podemos expresar su velocidad como

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Despejando obtenemos una expresión para el período

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

2.4. Componentes intrínsecas de la aceleración

El movimiento circular es un ejemplo concreto de un movimiento de rotación donde el centro y el radio de curvatura permanecen constantes. Cualquier movimiento se puede considerar como una rotación cuyo centro y radio de curvatura cambian en el tiempo (ver Fig. 2.4). Por ello, todo movimiento tiene asociadas aceleraciones normal y tangencial. Por ejemplo, en un MRUA únicamente existe aceleración tangencial, en un MCU únicamente existe aceleración normal y en un tiro parabólico tenemos tanto aceleración normal como tangencial.

En el caso de un movimiento que no sea circular, la aceleración normal se define en términos del radio de curvatura ρ, el cual en general será distinto en cada punto.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

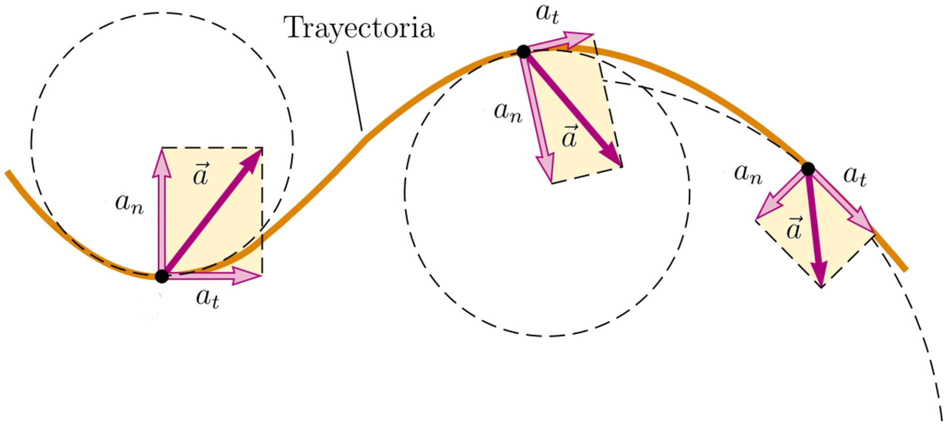


Figura 2.4. Componentes intrínsecas de la aceleración a lo largo de una trayectoria curva.

El radio de curvatura en un punto dado de la curva es el radio de la circunferencia osculatriz, que es aquella circunferencia cuyo centro se encuentra sobre la recta normal a la curva y tiene la misma curvatura que la curva dada en dicho punto (ver Fig. 2.5). La curvatura es una medida del cambio que sufre la dirección del vector tangente cuando nos movemos a lo largo de la curva. Viene dada por

$$\kappa = \frac{1}{v}\left|\frac{d\hat{u}_t}{dt}\right| = \frac{1}{\rho}$$

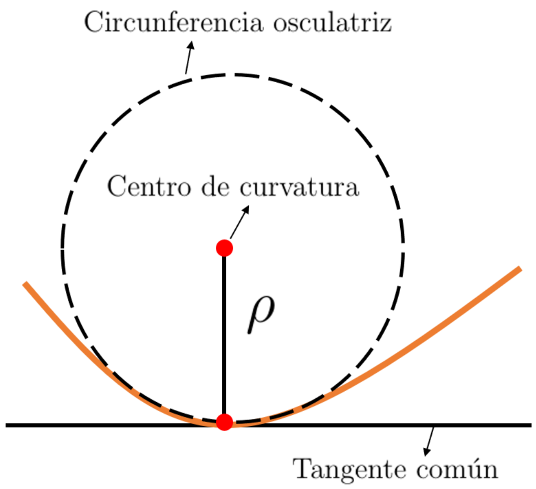


Figura 2.5. Centro y radio de curvatura.

2.5. Formulario

MRUA **MCUA**

$$v = v_0 + at \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \qquad \theta = \theta_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$$

En el MRUA, el signo delante de v_0 y a puede ser negativo en caso de que estas magnitudes vayan dirigidas hacia la izquierda (movimiento horizontal) o hacia abajo (movimiento vertical).

En el MCUA el signo delante de ω_0 será positivo o negativo en función de si el movimiento inicial es en sentido horario o antihorario. El signo delante de α será positivo o negativo en función de si el sistema acelera o frena.

Tiro parabólico

$$x = x_0 + v_0 \cos\theta t, \qquad y = y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x = v_0 \cos\theta, \qquad v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

En el eje x, el signo delante de v_0 será negativo si el disparo se produce hacia la izquierda. En el eje y, el signo deñante de v_0 será negativo si el disparo se produce por debajo de la horizontal.

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Movimiento circular

$$s = \theta R, \qquad v = \omega R, \qquad a_t = \alpha R, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} \qquad \text{(solo si } \omega = \text{cte)}$$

Capítulo 3

Dinámica

En el capítulo anterior hemos estudiado el movimiento de los cuerpos en una y dos dimensiones. Sin embargo, no nos hemos preocupado de las causas que generan o modifican el movimiento. En este capítulo responderemos a las preguntas "¿por qué los cuerpos comienzan a moverse?"y "¿por qué un cuerpo cambia la magnitud o dirección de su velocidad?". En la respuesta a estas preguntas se encuentra el concepto de **fuerza**: influencia capaz de modificar el estado de movimiento de un cuerpo. Una fuerza puede estar generada por nuestros músculos cuando tiramos de una cuerda, por la gravedad cuando una roca se desliza colina abajo (peso) o cuando un satélite orbita un planeta, por el suelo de una carretera sobre la que avanza un coche (rozamiento), etc. Ya que las fuerzas tienen una dirección y un sentido asociados, son magnitudes vectoriales.

3.1. Primera ley de Newton: ley de inercia

La primera ley de Newton establece que cuando no actúan fuerzas sobre un cuerpo o la fuerza neta es nula, éste permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme ($\vec{v} = \text{cte}$).

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

donde $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$.

Ya que las fuerzas son magnitudes vectoriales, la ecuación anterior implica que el sumatorio de fuerzas debe ser nulo en todas y cada una de las direcciones

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = \sum_{i}^{n} F_{yi} = 0$$

3.2. Segunda ley de Newton

Los cuerpos se resisten a cambiar su estado de movimiento, es decir, a ser acelerados. La propiedad intrínseca de los cuerpos que cuantifica la resistencia que éstos oponen a cambiar su velocidad es la **masa**. Su unidad en el SI es el kg.

La segunda ley de Newton establece que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa.

$$\boxed{\sum_{i}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

De nuevo, dado el carácter vectorial de la fuerza, tenemos

$$\sum_{i}^{n} F_{xi} = ma_x \qquad \sum_{i}^{n} F_{yi} = ma_y$$

A partir de las ecuaciones anteriores obtenemos que las unidades en SI de la fuerza son kg $\mathrm{m/s^2} \equiv \mathrm{N}$ (newton[1]).

3.3. Fuerzas de campo

Las fuerzas pueden clasificarse fundamentalmente en dos tipos: fuerzas de contacto y fuerzas de campo. Las fuerzas de campo son aquellas que se producen sin que exista contacto físico entre los objetos involucrados. Su existencia se debe a la presencia de un campo en la región del espacio en la que se encuentra el cuerpo. Existen cuatro fuerzas de este tipo: la fuerza gravitatoria, la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear fuerte y la fuerza nuclear débil. La fuerza gravitatoria es una fuerza de campo[2] que experimentan los cuerpos con masa cuando se encuentran en un campo gravitatorio, el cual es generado por cualquier otro cuerpo con masa. Esta fuerza actúa sobre ambos cuerpos y es proporcional a la masa de éstos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. El campo electromagnético es el responsable de las fuerzas atractivas y repulsivas que experimentan las partículas cargadas. La fuerza nuclear fuerte es la que confina ciertas partículas elementales (quarks) dentro de los protones y neutrones. Finalmente, la fuerza nuclear débil es la responsable de la radiactividad y participa en los procesos de fusión y fisión nuclear. La única fuerza de campo que estudiaremos en este curso es la fuerza gravitatoria.

Como hemos discutido en el capítulo anterior, cuando un cuerpo se deja caer cerca de la superficie terrestre, éste se acelera en la dirección del centro de la Tierra. Además, si no existe rozamiento con el aire, todos los cuerpos caen con la misma

[1] En honor a Sir Isaac Newton (1642-1727), físico y matemático inglés quien sentó las bases de la mecánica, la óptica y el cálculo.

[2] Nótese que la Luna no necesita estar en contacto con la Tierra para orbitar a su alrededor.

aceleración g independientemente de su masa. La fuerza que genera esta aceleración es la fuerza gravitatoria y en este contexto equivale al **peso** $\vec{w}$ del cuerpo.

$$\vec{w} = m\vec{g}$$

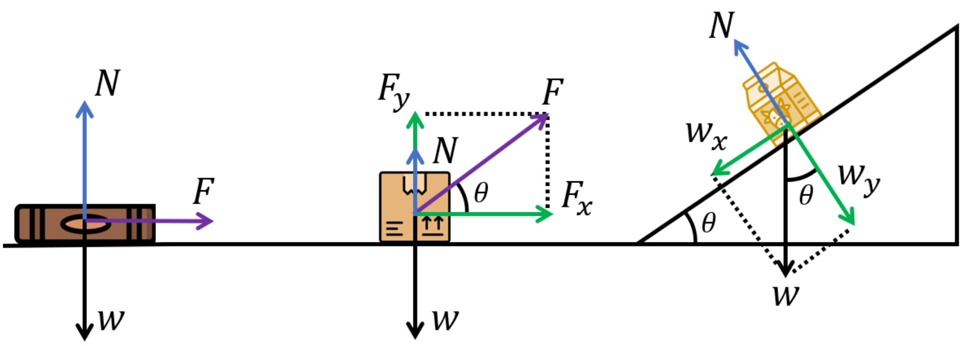
Pese a que la gravedad es una fuerza que cobra gran importancia en nuestro día a día, es con diferencia la más débil de todas ellas. Si utilizamos un imán para levantar un tornillo de una mesa, quiere decir que la fuerza electromagnética generada por el imán es mayor que la fuerza gravitatoria generada por todo el planeta Tierra.

3.4. Fuerzas de contacto

De forma contraria a las fuerzas de campo, las fuerzas de contacto son aquellas que solo actúan cuando los cuerpos involucrados están en contacto físico. Salvando la fuerza gravitatoria, estas serán las fuerzas que estudiemos en este capítulo. Veamos las fuerzas de contacto más importantes.

3.4.1. Fuerza normal

La fuerza normal $\vec{N}$ es aquella fuerza que ejerce una superficie sobre un cuerpo apoyado sobre ella. Esta fuerza es perpendicular (*normal*) a la superficie de contacto. Algunos ejemplos, junto con las correspondientes ecuaciones para el eje x e y, se muestran en Fig. 3.1.



$$N = mg \qquad N + Fsin\theta = mg \qquad N = mgcos\theta$$

$$F = ma \qquad Fcos\theta = ma \qquad mgsin\theta = ma$$

Figura 3.1. Fuerzas actuando sobre cuerpos situados en superficies sin rozamiento.

3.4.2. Fuerza de rozamiento

Cuando un cuerpo se mueve sobre una superficie suele experimentar una fuerza paralela a ésta y que se opone al movimiento. Esta fuerza se denomina rozamiento o fricción, se denota F_r y su magnitud es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza normal.

$$\boxed{F_r = \mu N}$$

donde $\mu \geq 0$ es el coeficiente de rozamiento.

Algunos ejemplos donde los cuerpos se mueven con aceleración se muestran en Fig. 3.2.

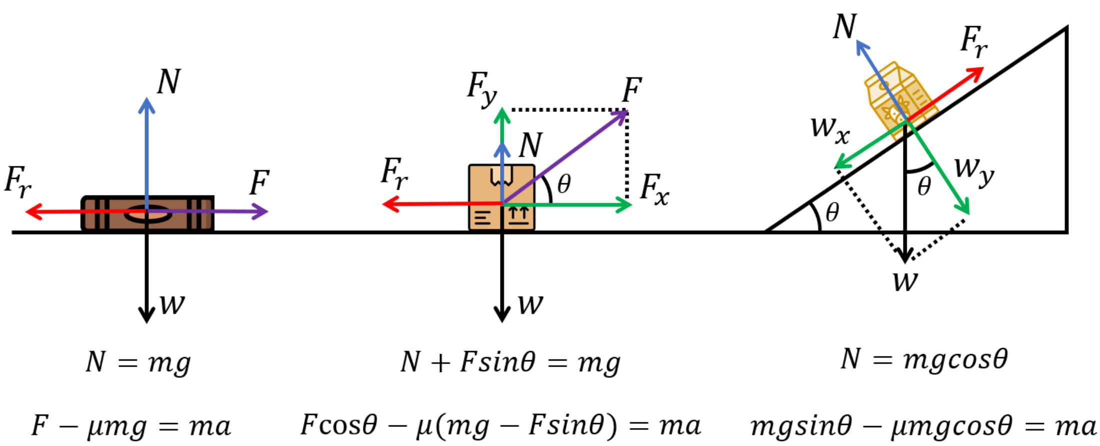


Figura 3.2. Fuerzas actuando sobre cuerpos situados en superficies con rozamiento.

En general, la fuerza necesaria para que un cuerpo comience a moverse es superior a aquella requerida para mantenerlo en movimiento. Por ello existe un coeficiente de rozamiento estático μ_e y un coeficiente de rozamiento dinámico μ_d tales que $\mu_e > \mu_d$[3]. El coeficiente de rozamiento estático nos dice cuál es la fuerza necesaria para poner un cuerpo en movimiento ($F = \mu_e N$), mientras que el coeficiente de rozamiento dinámico gobernará el movimiento del cuerpo en caso de que éste se mueva (es decir, si $F > \mu_e N$). Mientras la fuerza ejercida sea menor que el rozamiento estático, la fuerza de rozamiento será igual a la fuerza ejercida $F_r = F$, ya que de lo contrario el cuerpo se movería en sentido opuesto a la fuerza aplicada. Cuando la fuerza ejercida supera al rozamiento estático, la fuerza de rozamiento disminuye (ahora $F_r = \mu_d N$) y el cuerpo comienza a moverse (ver Fig.3.3).

[3]Cuando en un ejercicio no se especifica si el rozamiento es estático o dinámico asumiremos que $\mu_e = \mu_d \equiv \mu$.

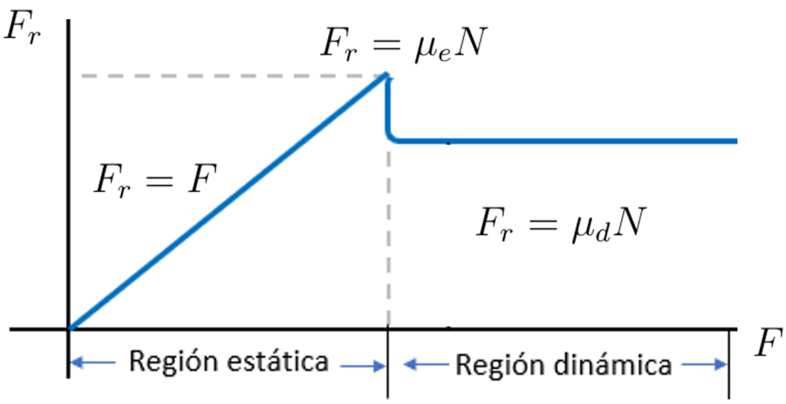


Figura 3.3. Evolución de la fuerza de rozamiento según se incrementa la fuerza aplicada.

3.4.3. Tensión

Consideremos la situación en la que un cuerpo está atado a una cuerda, o bien dos cuerpos están unidos entre sí a través de una cuerda. En este curso consideraremos siempre que las cuerdas no son elásticas y que además tienen masa despreciable. En el caso de cuerdas que pasan por una polea, consideraremos también que la polea no presenta rozamiento y que su masa es despreciable. Estas consideraciones nos permiten simplificar notablemente los problemas. La **tensión** $\vec{T}$ de una cuerda es la fuerza con la que ésta tira[4] de los cuerpos que están unidos a sus extremos. Bajo las consideraciones previamente mencionadas, la **tensión es idéntica en cualquier punto de la cuerda.** En Fig. 3.4 se muestra el diagrama de fuerzas y las ecuaciones de movimiento para un problema donde dos cuerpos, situados planos inclinados, están unidos a través de una cuerda pasante por una polea. Nótese que la aceleración y la tensión que afecta a ambos cuerpos es la misma.

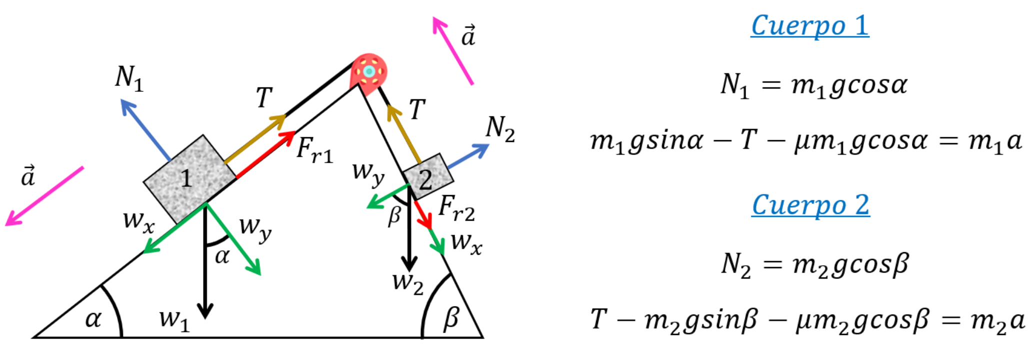


Figura 3.4. Fuerzas actuando sobre dos cuerpos unidos por una cuerda y situados en un plano inclinado con rozamiento.

[4]La tensión siempre *tira* de los cuerpos, nunca los *empuja*.

3.4.4. Fuerza elástica

Cuando un muelle es desplazado de su posición de equilibrio, éste ejerce una fuerza de sentido opuesto al desplazamiento y cuya magnitud es proporcional a éste. Esta ley se denomina ley de Hooke y podemos expresarla como

$$F = k\Delta x$$

donde Δx es el desplazamiento y k es la constante recuperadora del muelle.

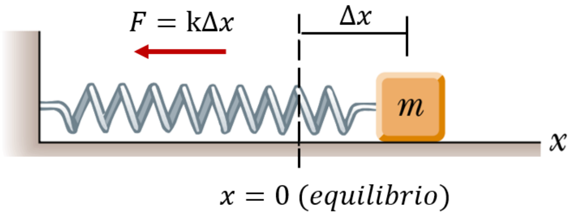


Figura 3.5. Fuerza experimentada por una masa unida a un muelle cuando éste es desplazado de su posición equilibrio.

Si tenemos una masa unida a un muelle y lo comprimimos hacia la izquierda, éste generará una fuerza opuesta al desplazamiento, haciendo que la masa acelere hacia la derecha. Sin embargo, una vez el muelle alcanza su máxima elongación posible, aparecerá una fuerza en sentido opuesto que hará que la masa regrese a la posición inicial, comenzando de nuevo el proceso. Por ello, el movimiento que se produce es oscilatorio y lo estudiaremos con detalle en el capítulo 5.

3.5. Tercera ley de Newton: ley de acción y reacción

La tercera ley de Newton establece que cuando dos cuerpos interactúan entre sí, la fuerza $\vec{F}_{12}$ ejercida por el cuerpo 1 sobre el 2 tiene igual magnitud y sentido opuesto a la fuerza $\vec{F}_{21}$ ejercida por el cuerpo 2 sobre el 1. Por lo tanto, las fuerzas siempre aparecen en pares. Si esto no fuera así las pistolas no tendrían retroceso al disparar una bala. Tampoco podríamos remar en una barca ni propulsarnos en la pared de una piscina.

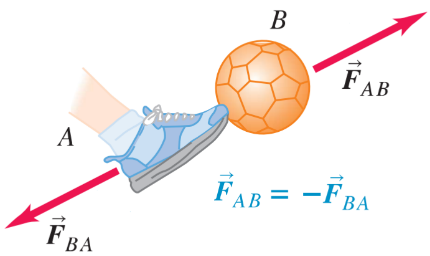


Figura 3.6. Cuando golpeamos una pelota con una fuerza $\vec{F}_{AB}$, ésta nos golpea a nosotros con una fuerza $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

3.6. Sistemas de referencia inerciales y no inerciales

Cualquier fenómeno físico se describe con respecto a un sistema de referencia. Decimos que un sistema de referencia es **inercial** cuando en él se cumplen las leyes de Newton. Para que esto ocurra, un sistema de referencia inercial debe estar en reposo absoluto o moverse a velocidad constante. Dado un sistema de referencia inercial, todo sistema de referencia que se mueva a velocidad constante con respecto a éste es también un sistema de referencia inercial. En cambio, todo sistema de referencia que se mueva de forma acelerada con respecto a un sistema de referencia inercial es un sistema de referencia **no inercial**. Recordemos que un movimiento acelerado se produce cuando cambia la magnitud o la dirección del vector velocidad. Un tren que acelera sobre una recta es un sistema de referencia no inercial. Un coche que toma una rotonda a velocidad constante también es un sistema de referencia no inercial. Típicamente utilizamos como sistema de referencia inercial la superficie terrestre, asumiendo que ésta se encuentra en reposo absoluto.

Supongamos que nos encontramos sobre patines dentro de un tren parado en el andén. Por simplicidad, vamos a considerar que no existe rozamiento entre las ruedas de los patines y el suelo del vagón. En un momento dado el tren acelera y observamos que nos movemos hacia atrás, incumpliendo flagrantemente las leyes de Newton (¿qué fuerza nos empuja hacia atrás?). Para poder explicar este fenómeno desde nuestro sistema de referencia no inercial (acelerado), tendremos que hacer uso de una **fuerza ficticia** que aparece en sentido contrario a la aceleración del tren. En cambio, una persona que nos mira desde el andén (sistema de referencia inercial) observará que estamos en reposo mientras el tren acelera y podrá explicar nuestro movimiento sin necesidad de incluir fuerzas ficticias. ¡No nos estamos moviendo hacia atrás, sino que el tren está acelerando!

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos definir un sistema de referencia inercial como aquel que nos permite describir el movimiento sin considerar fuerzas ficticias.

Volvamos al ejemplo del tren. Tras unos segundos de aceleración, el tren se mueve a velocidad constante y se dispone a tomar una curva. Ya que en un movimiento curvo la dirección del vector velocidad cambia, nuestro sistema de referencia dentro del tren vuelve a ser acelerado y, por lo tanto, no inercial. En este caso observaremos que aparece una fuerza ficticia que nos empuja en la dirección normal a la curva. Esta fuerza ficticia se denomina **fuerza centrífuga** y no hay ningún agente que la produzca (por eso es ficticia). El cambio de dirección del vector velocidad en la curva se debe a la existencia de una fuerza real, la **fuerza centrípeta**, dirigida hacia el centro de curvatura y que en este caso está generada por la fricción de las ruedas del tren sobre las vías. Si el rozamiento desapareciera el tren saldría despedido en la dirección tangente a la curva, no perpendicular a ésta. Esto evidencia que no existe una fuerza centrífuga real que nos empuje hacia fuera. En el fondo, los pasajeros del tren simplemente tienden a moverse en línea recta y es el tren en su movimiento acelerado el que nos hace sentir que nos movemos hacia fuera. Si el tren fuera la suficientemente grande como para que no chocáramos con las paredes, un observador inercial flotando en el aire fuera del tren vería que nos movemos en línea recta.

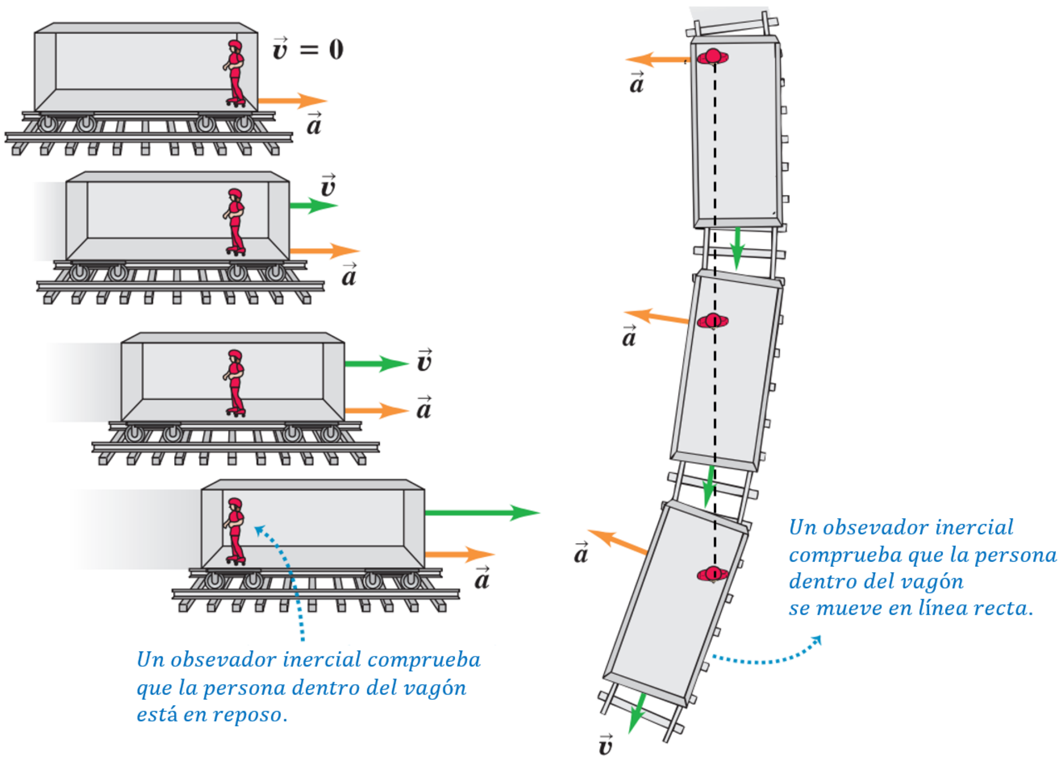


Figura 3.7. Observación desde de un sistema de referencia inercial del movimiento de una persona en un vagón cuando éste se mueve con aceleración.

Unas líneas atrás hemos dicho que consideramos que la superficie terrestre se encuentra en reposo absoluto y, en consecuencia, es un sistema de referencia inercial. Sin embargo, como bien dijo Galileo, la Tierra *si mouve*. Por una parte tenemos la velocidad de rotación sobre su eje, que es de unos 465 m/s en el Ecuador. Por otra parte tenemos el movimiento de traslación alrededor del Sol, que se produce a una velocidad de aproximadamente 29 km/s. En ambos movimientos la dirección del vector velocidad de un punto sobre la superficie terrestre cambia, convirtiendo el sistema en no inercial. Además de los movimientos anteriores, el Sistema Solar también se mueve con respecto al centro de la Vía Láctea y a su vez ésta también rota. De hecho, todas las galaxias se alejan unas de las otras de forma acelerada. Por lo tanto, podemos decir que en realidad no existen sistemas de referencia inerciales. Por suerte, para estudiar muchos de los fenómenos que tienen lugar dentro de la Tierra, podemos asumir que su superficie es un sistema de referencia inercial.

3.7. Leyes de Newton en movimientos circulares

Existen numerosas situaciones físicas en las que la trayectoria de un cuerpo es perfectamente circular. Para que el sistema describa este movimiento debe existir una fuerza dirigida hacia el centro de la circunferencia. Esta fuerza puede ser de lo más variado: rozamiento, fuerza elástica, peso, tensión, etc. Cuando un **observador inercial** trata de explicar el movimiento, utilizando la segunda ley de Newton obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = m\frac{v^2}{R}$$

donde a la derecha de la igualdad tenemos la fuerza centrípeta. Nótese que esta fuerza no es otra cosa que $F_n = ma_n$, siendo a_n la aceleración normal estudiada en el capítulo anterior. A la izquierda de la igualdad tendremos que introducir las fuerzas dirigidas hacia el centro de la circunferencia. Por ejemplo, cuando un coche se mueve en una rotonda la fuerza centrípeta es generada por el rozamiento entre las ruedas y el asfalto.

Un **observador no inercial** no es consciente de que está describiendo una trayectoria curva, por lo que la ecuación anterior no le satisface. Para entender esto imaginemos que el observador se encuentra, con los ojos cerrados, dentro de un coche que traza una rotonda. Por una parte, siente una fuerza que tiende a alejarlo del centro de la circunferencia, es decir, que tiende a expulsarlo hacia una de las puertas. Esta fuerza es la fuerza centrífuga y tiene la misma magnitud que la fuerza centrípeta, pero sentido opuesto. Sin embargo, el pasajero no sale despedido del coche, sino que está en equilibrio. Debe pues existir una fuerza que se opone a la fuerza centrífuga y termina por anularla. En este ejemplo esa fuerza es la que ejerce la puerta del coche sobre su hombro o bien, si la curva no es muy pronunciada, el rozamiento entre los pantalones y el asiento. En conclusión, el observador no inercial planteará que existe un equilibrio de fuerzas

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$$

donde una de las fuerzas que aparecen en el sumatorio debe ser la fuerza centrífuga

$$\boxed{F_c = m\frac{v^2}{r}}$$

Cualquier problema de dinámica que involucre un movimiento circular puede resolverse indistintamente considerando un observador inercial o no inercial. En el primer caso decimos que existen una serie de fuerzas que, en su conjunto, generan una fuerza centrípeta. En el segundo caso decimos que existen una serie de fuerzas que, en su conjunto, anulan la fuerza centrífuga. El resultado es el mismo.

Como una imagen vale más que mil palabras, en las siguientes figuras se muestran las fuerzas principales que actúan en 4 casos distintos. En todos ellas se considera un sistema de referencia no inercial. Si se quiere un sistema inercial simplemente cámbiese el sentido de F_c.

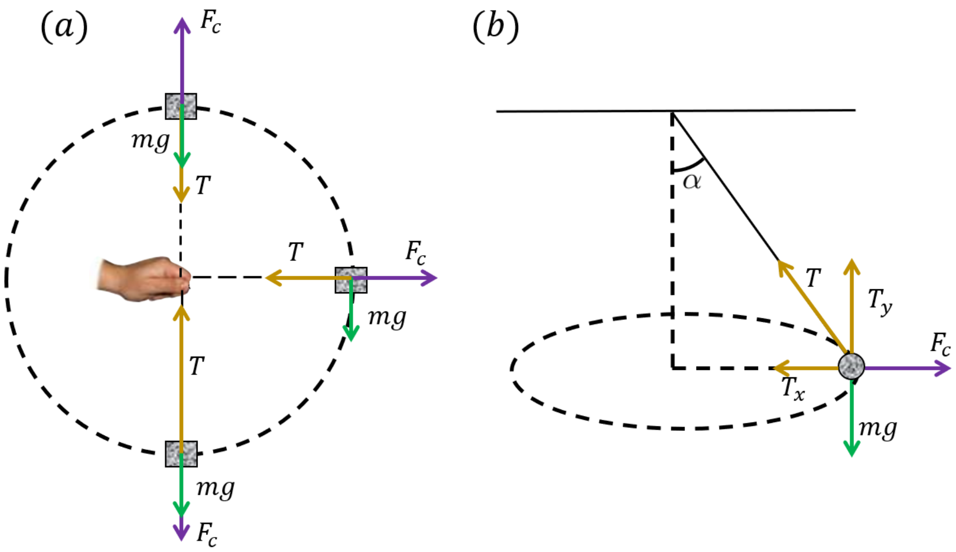


Figura 3.8. Fuerzas actuando sobre (a) un cuerpo que describe un movimiento circular vertical atado a una cuerda y (b) un péndulo cónico.

En Fig. 3.8(a) se representa un bloque atado a una cuerda que describe una trayectoria circular vertical. Se puede ver que la tensión siempre se opone a la fuerza centrífuga. En cambio, el rol del peso es diferente en distintos puntos de la circunferencia. Esto hace que la tensión de la cuerda cambie a lo largo de la trayectoria.

En Fig. 3.8(b) tenemos un péndulo cónico, consistente en una masa puntual unida a una cuerda que describe una circunferencia horizontal. La componente x de la tensión anula la fuerza centrífuga, mientras que la componente y de la tensión es igual al peso.

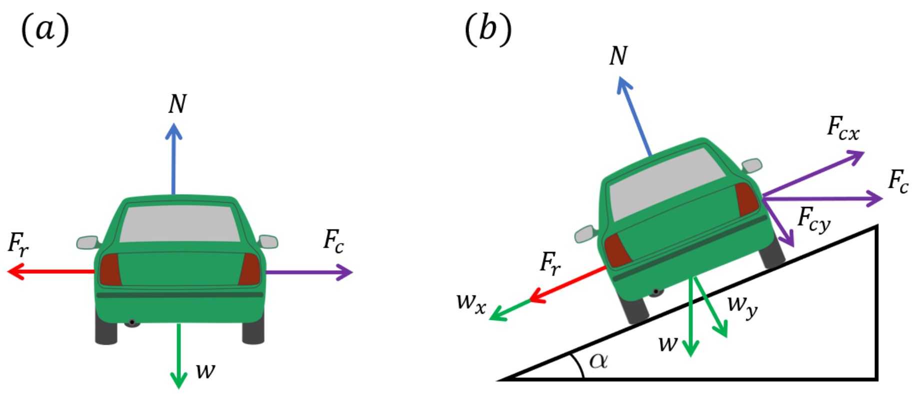


Figura 3.9. Fuerzas actuando sobre un coche (a) en una curva plana y (b) en una curva peraltada.

En Fig. 3.9(a) se representa un coche trazando una curva plana. La fuerza que contrarresta la fuerza centrífuga es el rozamiento, que en este caso es proporcional al peso del coche ($F_r = \mu N = \mu mg$).

En Fig. 3.9(b) se representa de nuevo un coche trazando una curva, pero en este caso la carretera está peraltada (inclinada). Esta inclinación permite aumentar la velocidad máxima con la que el coche puede trazar la curva. Nótese que la fuerza centrífuga va dirigida en la dirección normal a la trayectoria descrita por el coche y no en la dirección paralela a la superficie de la carretera. Por ello ahora únicamente la componente x de la fuerza centrífuga tiende a expulsar al coche de la carretera. El rozamiento y la componente x del peso contrarrestan a la componente x de la fuerza centrífuga. El rozamiento ahora es proporcional a la suma de las componentes y del peso y la fuerza centrífuga.

3.8. Formulario

Este capítulo contiene pocas ecuaciones, pero muchos conceptos que deben aplicarse con buen criterio para resolver los ejercicios.

La ecuación fundamental es la segunda ley de Newton

$$\sum_{i=0}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

donde $a = 0$ si existe equilibrio de fuerzas.

Otras ecuaciones importantes son

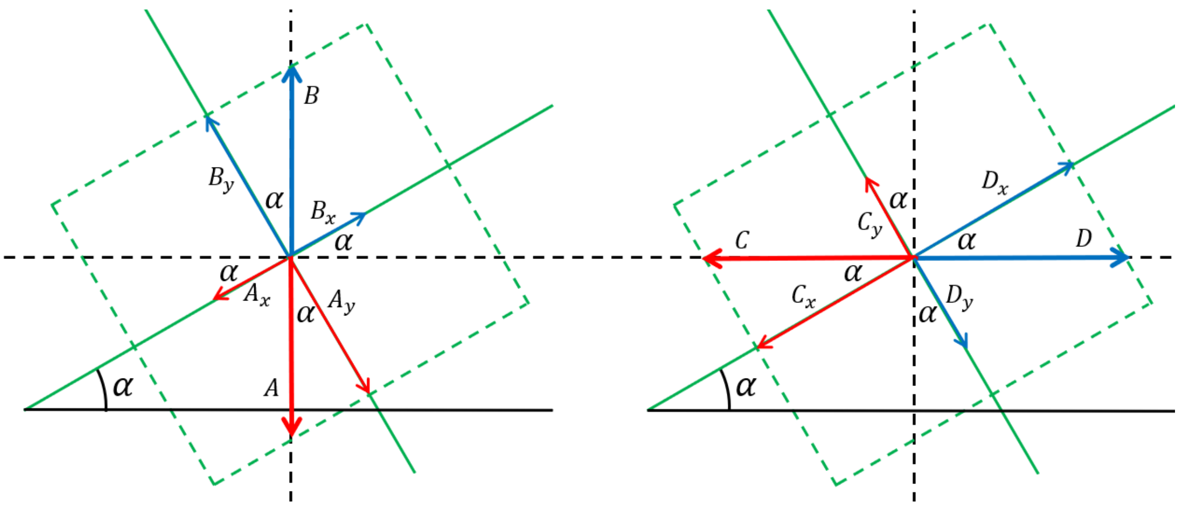
$$w = mg$$

$$F_r = \mu N$$

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

La expresión matemática de la fuerza normal N y la tensión T dependerá del problema en cuestión.

Descomposición de fuerzas en componentes paralelas y perpendiculares a un plano inclinado.



$A_x = A\sin\alpha \qquad A_y = A\cos\alpha \qquad\qquad C_x = C\cos\alpha \qquad C_y = C\sin\alpha$

$B_x = B\sin\alpha \qquad B_y = B\cos\alpha \qquad\qquad D_x = D\cos\alpha \qquad D_y = D\sin\alpha$

Capítulo 4
Trabajo y Energía

En nuestro día a día usamos constantemente el concepto de energía. Sabemos que necesitamos obtener energía de la comida para así poder llevar a cabo los procesos fisiológicos que nuestro cuerpo requiere. Sabemos que la gasolina, a través de ciertos mecanismos que tienen lugar en el motor, utiliza energía para poner un vehículo en movimiento. Utilizamos la energía solar, nuclear o hidráulica para producir electricidad. Y así un larguísimo etcétera. A partir de los ejemplos anteriores comprendemos que la energía es una propiedad importante en diversos campos de la física como la mecánica, la termodinámica o el electromagnetismo. De hecho, todos los procesos que tienen lugar en el universo involucran transferencia o transformación de energía. En este curso estudiaremos la energía en el contexto de la mecánica. En asignaturas futuras se volverá a hablar de energía, pero dentro del contexto del electromagnetismo y la termodinámica.

Pese a que está presente en nuestras vidas, el concepto de energía es un concepto abstracto que se muestra esquivo a la hora de ser inequívocamente definido. De forma vaga podemos decir que la energía es la capacidad de un cuerpo para cambiar su propio estado o el estado de otro cuerpo. La manera en que desarrollaremos una idea intuitiva del concepto de energía será a través de los ejemplos.

4.1. Energía cinética y potencial

La **energía cinética** K de un cuerpo es aquella que posee por el hecho de estar en movimiento y viene dada por

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$$

donde v es la velocidad del cuerpo y m su masa.

La **energía potencial gravitatoria**[1] U_g de un cuerpo es aquella que posee debido a su posición relativa en un campo gravitatorio. Dicho de otro modo, es aquella que el cuerpo posee por encontrarse a una cierta altura h con respecto a un sistema de referencia (el suelo, por ejemplo). Viene dada por

$$U_g = mgh$$

Cuando desplazamos un muelle (u otro cuerpo elástico) de su posición de equilibrio, se produce una acumulación de **energía potencial elástica** U_e. Esta viene dada por

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2$$

donde k es la constante recuperadora del muelle y x es el desplazamiento con respecto a su posición de equilibrio.

Como se puede comprobar en todas las ecuaciones anteriores, la energía es una magnitud escalar. Realizando un análisis dimensional para cualquiera de los tipos de energía observamos que sus unidades son N·m $\equiv$ J (julio o *joule*[2]).

4.2. Trabajo realizado por una fuerza constante

Acabamos de ver que, dentro del contexto de la mecánica, un cuerpo puede poseer tres tipos de energía. Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, un tipo de energía puede transformarse en otro, o bien el cuerpo puede ganar o perder energía. Siempre que ocurre una de estas situaciones decimos que la fuerza realiza trabajo sobre el cuerpo. El trabajo W realizado por una fuerza constante sobre un cuerpo viene dado por

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x} = F \Delta x \cos\theta \tag{4.1}$$

donde Δx es el desplazamiento del cuerpo durante el tiempo de aplicación de la fuerza y θ es el ángulo comprendido entre el vector fuerza y el vector desplazamiento. Nótese que la unidad del trabajo (igual que la energía) también es el julio.

De la ecuación anterior deducimos que el trabajo es positivo si la proyección de la fuerza en la dirección del desplazamiento tiene el mismo sentido que éste. De la misma manera, el trabajo será negativo si la proyección de la fuerza en la dirección del desplazamiento tiene sentido contrario a éste. Finalmente, el trabajo será nulo si F y Δx son perpendiculares (ver Fig. 4.1).

[1] Cuando no exista confusión con la energía potencial elástica, nos referiremos a la energía potencial gravitatoria simplemente como energía potencial y la denotaremos U.

[2] En honor a James Joule (1818-1889), físico inglés quien descubrió la relación entre el trabajo mecánico y el calor.

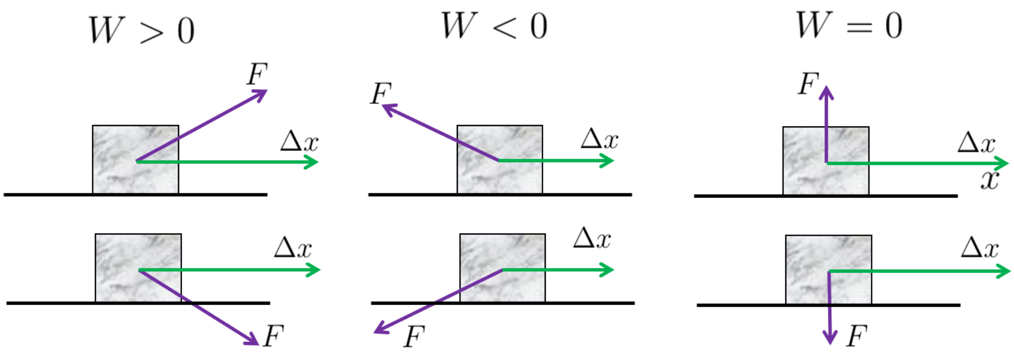


Figura 4.1. Trabajo realizado por una fuerza constante.

Para entender mejor el concepto de trabajo vamos a utilizar un ejemplo. Imaginemos que tiramos horizontalmente de un cuerpo con una fuerza $\vec{F}$ de módulo constante, de tal manera que se desliza por el suelo sin rozamiento. Inicialmente el cuerpo está en reposo en el suelo y carece de energía. Tras la aplicación de la fuerza, el cuerpo se mueve con una cierta velocidad y en consecuencia adquiere una cierta energía cinética. Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza se traduce en un aumento de su energía, que en este caso es exclusivamente cinética. Imaginemos ahora que la fuerza deja de actuar y el cuerpo continúa moviéndose horizontalmente hasta alcanzar un plano inclinado. Lo que observamos es que el cuerpo comienza a ascender por el plano, a la vez que reduce su velocidad hasta pararse. Desde un punto de vista energético, lo que ha ocurrido es que la energía cinética se ha ido transformando en energía potencial. En el momento en el que el cuerpo se para, la energía potencial es máxima y la energía cinética es nula. A continuación, la energía potencial volverá a transformarse en energía cinética según el cuerpo desciende de nuevo por el plano inclinado. La fuerza que ha generado esta transformación de energía cinética en potencial (y viceversa) es el peso. Mientras la pelota se movía de forma horizontal el trabajo realizado por el peso era $W_p = 0$, ya que el desplazamiento y la fuerza eran perpendiculares. En general, el trabajo realizado por el peso equivale a la pérdida de energía potencial

$$W_p = -\Delta U_g = U_i - U_f$$

Por lo tanto, cuando el cuerpo asciende por el plano inclinado hasta la máxima altura h tenemos $W_p = mg\cos\pi = -mgh$. El signo negativo es lógico ya que el peso es antiparalelo al desplazamiento. El trabajo durante el descenso es $W_p = mg\cos 0 = mgh$ (ahora el peso es paralelo al desplazamiento).

Volviendo al ejemplo de la caja que desliza sobre el suelo, imaginemos que otra persona comienza a tirar de ella en sentido contrario, pero no con la fuerza suficiente como para contrarrestar nuestra fuerza y que el movimiento cambie de sentido. En este caso nosotros estamos realizando un trabajo positivo, mientras que la otra persona está realizando un trabajo negativo.

La típica fuerza que realiza un trabajo negativo es el rozamiento, ya que siempre tiene sentido contrario al del desplazamiento. Utilizando Ec.(4.1) obtenemos que el trabajo realizado por el rozamiento es

$$W_r = -F_r \Delta x = -\mu N \Delta x$$

donde el término $\cos\theta$ del producto escalar no aparece ya que el rozamiento siempre es paralelo al desplazamiento.

En caso de que la fuerza que actúa no sea constante, el cálculo del trabajo se complica significativamente. De forma general, el trabajo realizado por una fuerza en un trayecto $A \to B$ viene dado por

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{r}$ es el vector desplazamiento. Nótese que imponiendo $\vec{F} = \text{cte}$ se obtiene Ec.(4.1).

4.3. Fuerzas conservativas y no conservativas

En el ejemplo del cuerpo que subía y bajaba por el plano inclinado, quizás hayas notado que el trabajo realizado por el peso a lo largo del proceso completo (subida más bajada) es nulo. La razón es que $W_p(A \to B) = -W_p(B \to A)$. Podemos preguntarnos, ¿ocurriría lo mismo en caso de que el cuerpo regresara hasta la altura inicial siguiendo otro camino? Pensemos, por ejemplo, en un cuerpo que asciende por un plano inclinado y regresa a la altura inicial tras salir disparado desde el punto de máxima altura (ver Fig. 4.2).

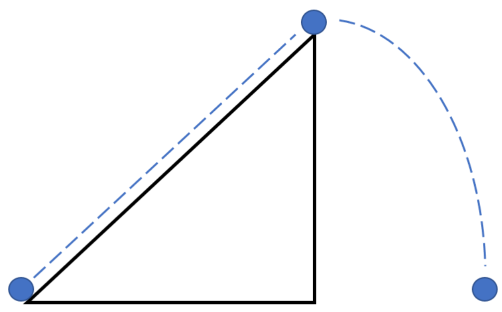


Figura 4.2. Un cuerpo asciende por un plano inclinado y sale proyectado.

Puedes comprobar que la respuesta es afirmativa y la razón es que el campo gravitatorio es un campo conservativo y, en consecuencia, el peso es una **fuerza conservativa**. Para definir de forma más elegante el concepto, podemos hacer las siguientes afirmaciones:

a. *El trabajo realizado por una fuerza conservativa al mover un cuerpo entre dos puntos es independiente del camino seguido.*

b. *El trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo.*

Esto se ejemplifica en Fig. 4.3, donde el trabajo realizado por una fuerza conservativa al mover un cuerpo a lo largo del camino azul es igual que a lo largo del camino naranja. Además, $W(A \to B \to A) = 0$.

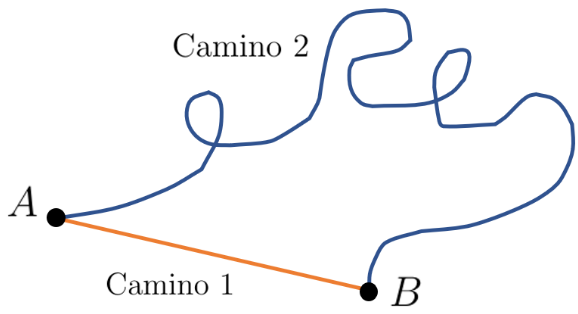


Figura 4.3.

Como hemos visto, el peso es una fuerza conservativa. También lo es la fuerza elástica. El resto de fuerzas con las que nos podemos encontrar en un problema de mecánica son **fuerzas no conservativas**, es decir, no cumplen las 2 afirmaciones anteriores. En general, cualquier fuerza que haga que el sistema gane o pierda energía es una fuerza no conservativa.

Para comprobar si una fuerza es conservativa, basta con calcular el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada. Por ejemplo, cuando un cuerpo se mueve sobre una superficie horizontal con rozamiento de un punto A a un punto B tendremos $W_r(A \to B) = -\mu mg\Delta x$. Cuando se mueve desde el punto B al punto A obtendremos de nuevo $W_r(B \to A) = -\mu mg\Delta x$, por lo que $W_r(A \to B \to A) = -2\mu mg\Delta x \neq 0$. Esto demuestra que la fuerza de rozamiento no es conservativa.

4.4. Conservación de la energía mecánica

La suma de la energía cinética y la energía potencial (gravitatoria y elástica) de un sistema se denomina energía mecánica, E_m.

$$E_m = K + U$$

El teorema de conservación de la energía mecánica dice que cuando sobre un sistema únicamente actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica se conserva, es decir

$$E_m = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_m = 0$$

Por otra parte, si sobre un sistema actúan fuerzas no conservativas, el trabajo realizado por dichas fuerzas, W_N, es igual a la variación de la energía mecánica.

$$\boxed{W_N = \Delta E_m}$$

Dicho de otro modo, si el sistema ha ganado o perdido energía, quiere decir que alguna fuerza no conservativa ha realizado trabajo. Cuando el sistema gana energía tendremos $W_N > 0$ y cuando pierde energía $W_N < 0$.

4.5. Potencia

En ciertas situaciones físicas no es suficiente con conocer cuánta energía ha ganado o perdido un cuerpo, sino que necesitamos conocer cuánta energía se ha transferido en un cierto intervalo de tiempo. Por ejemplo, no basta con saber que el motor de un coche puede suministrar 50 kJ de energía, pues no es lo mismo que lo haga en 1 segundo que en 1 hora. La magnitud física que utilizamos en estos casos es la **potencia**, que se define justamente como la energía consumida por unidad de tiempo o, equivalentemente, el trabajo suministrado por unidad de tiempo. De esta manera, la potencia P viene dada por

$$P = \frac{dW}{dt}$$

donde en el numerador perfectamente podemos considerar energía E en lugar de trabajo W.

En el caso de que la fuerza que genera el trabajo sea constante, podemos desarrollar la expresión anterior para obtener otra más concreta

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{F}\cdot\vec{x}\right) = \cancel{\vec{x}\cdot\frac{d\vec{F}}{dt}} + \vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

donde $d\vec{F}/dt = 0$ porque la fuerza es constante.

Las unidades de la potencia son J/s $\equiv W$ (vatio o *watt*[3]).

[3]En honor a James Watt (1736-1819), ingeniero inglés quien inventó la máquina de vapor, que resultaría clave en el desarrollo de la primera Revolución Industrial.

4.6. Formulario

Trabajo realizado por una fuerza constante

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}$$

$$W_p = -\Delta U_g$$

$$W_R = -\mu N \Delta x$$

Energía mecánica

$$E_m = U_g + K + U_e = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

No actúan fuerzas no conservativas

$$\Delta E_m = 0$$

Actúan fuerzas no conservativas

$$\Delta E_m = W_N \qquad \text{(caso general)}$$

$$\Delta E_m = W_R = -\mu N \Delta x \qquad \text{(solo actúa rozamiento)}$$

Capítulo 5
Oscilaciones y Ondas

El movimiento oscilatorio es un movimiento periódico que se produce cuando un sistema es perturbado de su estado de equilibrio estable. Algunos ejemplos cotidianos podrían ser la vibración de las cuerdas de una guitarra, un barco mecido por las olas o un reloj de péndulo. Como en alguno de los ejemplos anteriores, una fuente oscilante puede generar ondas mecánicas que se propagan por un cierto medio, que puede ser sólido, líquido o gaseoso.Por ejemplo, las olas se propagan por el mar, las ondas sísmicas se propagan a través de la corteza terrestre y las ondas sonoras se propagan por cualquier medio material. Existen otro tipo de ondas, denominadas electromagnéticas, que no necesitan un medio por el que propagarse, es decir, pueden propagarse por el vacío. Las ondas de radio, la luz, las microondas, la señal Wifi o los rayos X pertenecen a este tipo de ondas. En este curso estudiaremos ondas mecánicas, pero no ondas electromagnéticas.

5.1. Movimiento armónico simple

El tipo más sencillo de movimiento oscilatorio es el movimiento armónico simple (MAS), el cual se produce cuando la fuerza restauradora (fuerza que busca que el sistema regrese al equilibrio) es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio. A partir de la segunda ley de Newton obtenemos que la ecuación general de un movimiento armónico simple es

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{5.1}$$

donde ω es una constante y el signo negativo da cuenta de que la fuerza se opone al desplazamiento, es decir, busca que el sistema regrese al equilibrio.

Este tipo de ecuaciones que relacionan una función con sus derivadas se conocen como ecuaciones diferenciales y su resolución se escapa de los objetivos del curso[1].

[1]En el capítulo 2, cuando obtuvimos por integración las ecuaciones del MRUA, estábamos resolviendo el caso más sencillo de ecuación diferencial.

En este caso nos basta con saber que la solución general de esta ecuación es

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{5.2}$$

donde A es la **amplitud** de oscilación, es decir, la máxima distancia del equilibrio a la que se puede encontrar el sistema. ω es la **frecuencia angular**, que es equivalente a la velocidad angular estudiada en el capítulo 2. ϕ se denomina **fase** y da cuenta de que el sistema no necesariamente se encuentra en $x = A$ cuando $t = 0$.

Un **período** de oscilación T finaliza cuando el cuerpo oscilante regresa a la posición original $x(0) = A\cos\phi$, es decir, cuando $x(T) = A\cos(\omega T + \phi) = A\cos\phi$. Esto ocurrirá cuando $\omega T = 2\pi$, de tal manera que el período de un movimiento armónico simple es

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Por otra parte, la **frecuencia** de oscilación f se define como la inversa del período y, por lo tanto, su significado es el número de oscilaciones que se producen por segundo. Sus unidades son $s^{-1} \equiv$ Hz (hercio o *hertz*[2]).

$$f = \frac{1}{T}$$

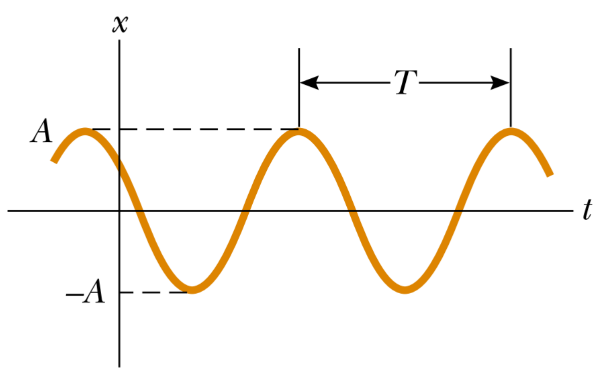


Figura 5.1. Amplitud y período de un MAS.

Derivando una vez Ec.(5.2) obtenemos la velocidad de un MAS

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

Derivando de nuevo obtenemos la aceleración

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

[2]En honor a Heinrich Hertz (1857-1894), físico alemán quien demostró la propagación de las ondas electromagnéticas predichas por Maxwell y descubrió las ondas de radio y el efecto fotoeléctrico.

5.1.1. Movimiento de un objeto unido a un muelle

Consideremos un sistema masa-muelle situado sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Cuando el sistema es desplazado de su posición de equilibrio, la masa describe un movimiento oscilatorio. Utilizando la ley de Hooke y la segunda ley de Newton obtenemos la ecuación de movimiento

$$F = -kx = ma \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Esta ecuación es idéntica a Ec.(5.1) y, en consecuencia, la masa describe un MAS de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y período

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \tag{5.3}$$

Un hecho quizás contraintuitivo que surge en la oscilación de un muelle (y en general en cualquier MAS) es que **el período de oscilación es independiente de la amplitud**. Esto puede comprobarse de forma inmediata en Ec.(5.3). Cuando aumenta la amplitud de oscilación también aumentan la velocidad y la aceleración máximas, pero el período se mantiene constante.

Resulta interesante notar que las expresiones para la posición, velocidad y aceleración se simplifican notablemente en ciertos puntos de interés. En $x = 0$ tenemos que la aceleración es nula y la velocidad es máxima ($v = \omega A$ o $v = -\omega A$ según si el movimiento es hacia la derecha o hacia la izquierda, respectivamente). En $x = A$ o $x = -A$ la velocidad es nula y la aceleración es $a = -\omega^2 A$ o $a = \omega^2 A$, respectivamente. Estos casos se representan de forma gráfica en Fig. 5.2.

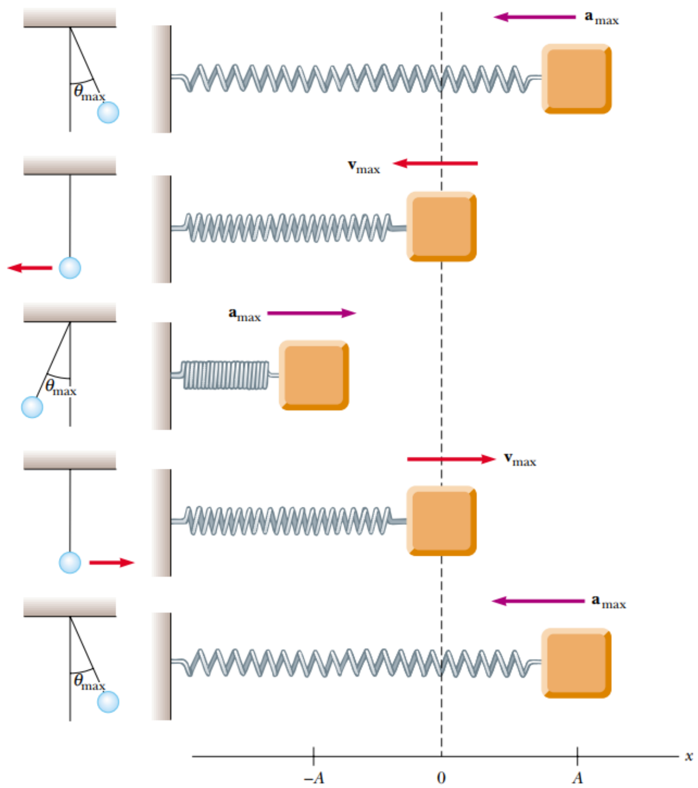
Ya que en un MAS no existe rozamiento ni actúan otras fuerzas no conservativas, la energía mecánica del sistema es constante. Por ello podemos obtenerla en cualquier instante de tiempo o posición x que nos convenga. En el punto $x = A$ el cuerpo únicamente tiene energía potencial elástica, por lo que

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kA^2}$$

Este mismo resultado se puede obtener tomando como referencia el punto $x = 0$, donde el cuerpo únicamente tiene energía cinética.

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

donde en el primer paso hemos sustituido $v = \omega A$ y en el segundo $\omega = \sqrt{k/m}$.



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Figura 5.2. Magnitudes cinemáticas y energías en distintos puntos de interés del sistema masa-muelle. A la izquierda se representa la analogía con un péndulo.

En lugar de un sistema masa-muelle que oscila horizontalmente, podemos pensar en otro sistema equivalente en el que la masa cuelga verticalmente del muelle y el sistema es desplazado del equilibrio. La situación es idéntica, siendo la única diferencia que la posición de equilibrio y_0 cuando no hay masa se ve desplazada por efecto del peso. Concretamente, la nueva posición de equilibrio es $y_0' = y_0 + \Delta y$, donde Δy será aquel desplazamiento que permite que la fuerza ejercida por el muelle sea igual al peso, es decir

$$k\Delta y = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{mg}{k} \tag{5.4}$$

En este sistema la frecuencia angular del movimiento es igual al caso horizontal. Ahora la amplitud vendrá dada por el desplazamiento inicial de la masa con respecto al equilibrio y_0'.

El estudio energético es ligeramente distinto al caso horizontal, ya que aquí tenemos que considerar la energía potencial gravitatoria.

5.1.2. El péndulo simple

Un péndulo simple consiste en una masa puntual m que está suspendida de un punto a través de un hilo inextensible, tal y como se muestra en Fig. 5.3. Cuando el péndulo es desplazado de su posición de equilibrio $\theta = 0$ describe un movimiento oscilatorio. Si el rozamiento con el aire es despreciable, de la segunda ley de Newton obtenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

Ya que el desplazamiento x se produce a lo largo de un arco de circunferencia, podemos expresar $x = l\theta$ y, teniendo en cuenta la longitud l es constante resulta

$$\frac{d^2x}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Utilizando este resultado podemos expresar la ecuación de movimiento en términos del ángulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

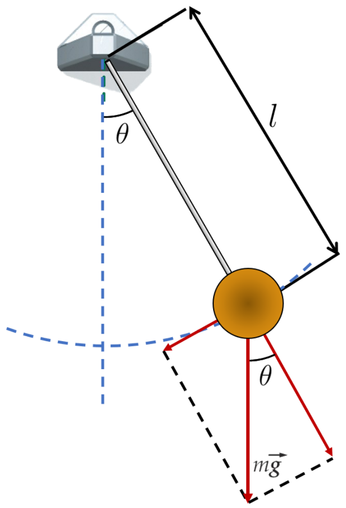


Figura 5.3. Magnitudes fundamentales en un péndulo simple.

La solución de esta ecuación, aparentemente sencilla, es realmente complicada. Para obtener un resultado trivial podemos considerar el caso en que la amplitud de las oscilaciones es muy pequeña. Si $\theta \ll 1$ podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$, obteniendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

donde identificamos la ecuación de un MAS de período

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Igual que ocurre en el caso del sistema masa-muelle, el período de oscilación del péndulo es independiente de la amplitud (siempre que ésta sea pequeña).

5.2. Ondas mecánicas

En la sección anterior hemos estudiado el movimiento oscilatorio de cuerpos en torno a su posición de equilibrio. El concepto de onda está ciertamente relacionado con el de oscilación. Una onda mecánica[3] es una perturbación que se propaga en un medio, transportando energía pero no materia. Para comprender esto vamos a imaginar una pelota de playa que se encuentra en un mar en calma. Si lanzamos una piedra al mar, observaremos como ésta genera olas (ondas) que se propagan por la superficie del agua. Cuando las olas alcanzan la pelota, ésta describirá un movimiento oscilatorio, desplazándose hacia arriba y hacia abajo de forma periódica. Ya que la pelota estaba en reposo y ahora se mueve con una cierta velocidad, vemos que la onda ha transmitido energía a la pelota. Sin embargo, si no hay viento u otros factores, la pelota no se desplazará en la dirección de la onda, es decir, no se acercará o alejará de la playa. Por lo tanto, vemos que no ha existido desplazamiento neto. Otro ejemplo ilustrativo consiste en el movimiento de una cuerda dispuesta horizontalmente que, siendo agarrada por un extremo, se hace oscilar a través de un movimiento periódico y vertical con la mano. Esto genera una onda que se propaga en la dirección horizontal. Cualquier punto de la cuerda estará describiendo un movimiento oscilatorio vertical, si bien no existe movimiento en la dirección horizontal (ver Fig. 5.5).

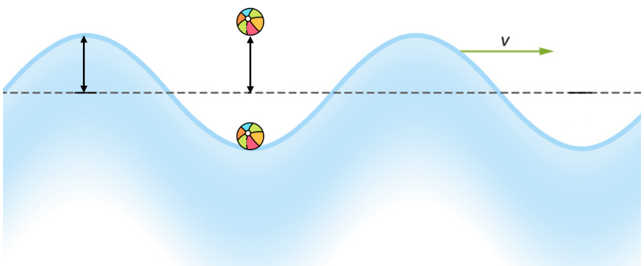


Figura 5.4. Propagación de una onda en el mar, generando un movimiento oscilatorio en una pelota de playa.

Como se puede deducir de los ejemplos anteriores, las ondas mecánicas necesitan (1) una perturbación que las genere y (2) un medio por el que propagarse. En el caso de la pelota de playa, la perturbación es el cambio en la presión generado por la caída de la piedra. El medio de propagación es el agua. En el caso de la cuerda, la perturbación es el movimiento oscilatorio de nuestra mano, mientras que el medio de propagación es la propia cuerda.

[3]De aquí en adelante, para referirnos a ondas mecánicas utilizaremos sencillamente el término "onda".

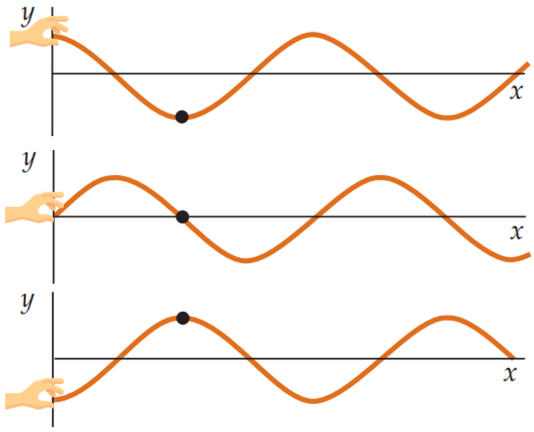


Figura 5.5. Onda mecánica propagándose por una cuerda.

Dependiendo de la relación entre la dirección de la perturbación y de propagación distinguimos dos tipos de ondas. En una **onda longitudinal** la dirección de propagación es paralela a la perturbación. En una **onda transversal** la dirección de propagación es perpendicular a la perturbación. Las ondas mecánicas pueden ser transversales o longitudinales, mientras que las ondas electromagnéticas son siempre transversales. El mejor ejemplo de onda mecánica transversal es el sistema mano-cuerda que acabamos de mencionar. Mientras que la perturbación (oscilación de la mano) se mueve en la dirección vertical, la onda se propaga en la dirección horizontal. En general, la perturbación consiste en la oscilación de las partículas del medio (líquido, sólido o gaseoso). La oscilación de las partículas se produce por cambios de presión en el medio. Por ejemplo, cuando emitimos un sonido la vibración de nuestras cuerdas vocales hace que las moléculas del aire oscilen.

En Fig. 5.6 se representan dos ejemplos de ondas longitudinales. En el panel superior se representa una onda propagándose a través de un muelle. La oscilación horizontal de la mano genera una onda que se propaga también horizontalmente. En el panel inferior se ilustra una onda propagándose por el aire debido a una perturbación generada por un altavoz.

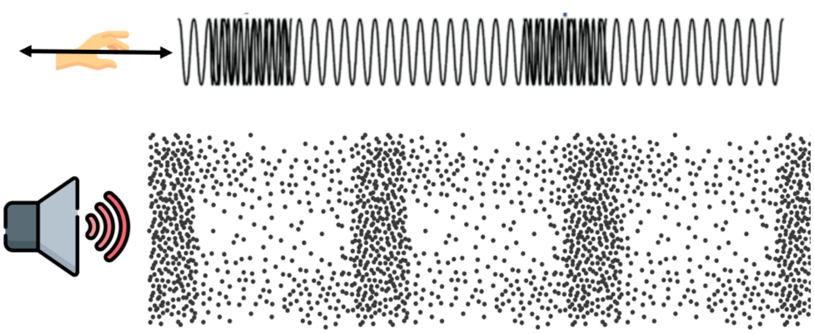


Figura 5.6. Ejemplos de ondas longitudinales.

5.3. Ondas armónicas

Una vez hemos comprendido qué es una onda mecánica, vamos a estudiar un caso concreto. Cuando la oscilación de las partículas del medio describe un MAS, entonces la onda que se propaga recibe el nombre de **onda armónica**. Como ejemplo vamos a considerar el caso de una onda transversal, si bien las ecuaciones serían idénticas en el caso longitudinal.

Imaginemos una onda armónica que se propaga de izquierda a derecha con velocidad c. Si en dos instantes de tiempo $t_0 = 0$ y t capturamos el estado de la onda obtenemos un resultado como el de Fig. 5.7. Es importante estudiar el sistema en función de los dos tipos de movimientos principales: el movimiento de la onda y el movimiento de las partículas del medio. En el tiempo t la onda habrá recorrido una distancia $x = ct$. Si nos fijamos en las partículas del medio, por ejemplo la que se encuentra en $x = 0$, vemos que se ha desplazado hacia abajo describiendo un MAS.

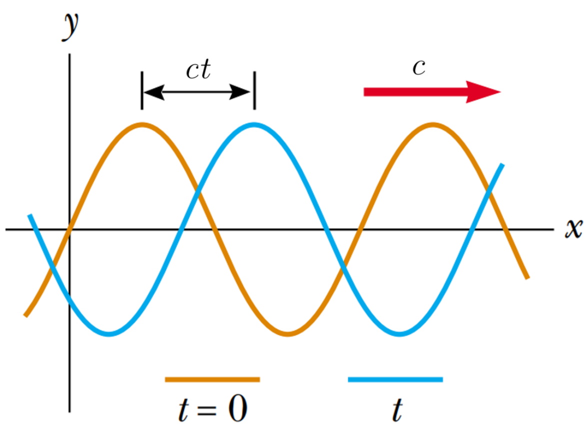


Figura 5.7. Onda armónica transversal capturada en dos instantes de tiempo diferentes.

El punto x en el que el desplazamiento de una partícula con respecto a su posición normal $y = 0$ es máxima se denomina **cresta** de la onda. La distancia entre dos crestas se denomina **longitud de onda** y se denota con la letra griega λ. Ya que es una medida de distancia, necesariamente se mide en metros. Si esperamos el tiempo suficiente, veremos que las crestas de la curva azul en Fig. 5.7 coinciden con las crestas de la curva naranja. En ese instante la onda habrá completado un período. Por lo tanto, se cumple

$$\boxed{\lambda = cT}$$

También podemos definir la frecuencia de una onda como el número de crestas que pasan por un punto dado en una unidad de tiempo. Como vimos anteriormente, $f = 1/T$. Nótese que tanto el período como la frecuencia de la onda coinciden con el período y la frecuencia de la oscilación armónica de una partícula del medio.

De forma idéntica al MAS, la amplitud A de la onda es el máximo desplazamiento con respecto al equilibrio. En Fig. 5.8 se representan algunas de estas magnitudes en gráficas $y(x)$ (onda) e $y(t)$ (partícula).

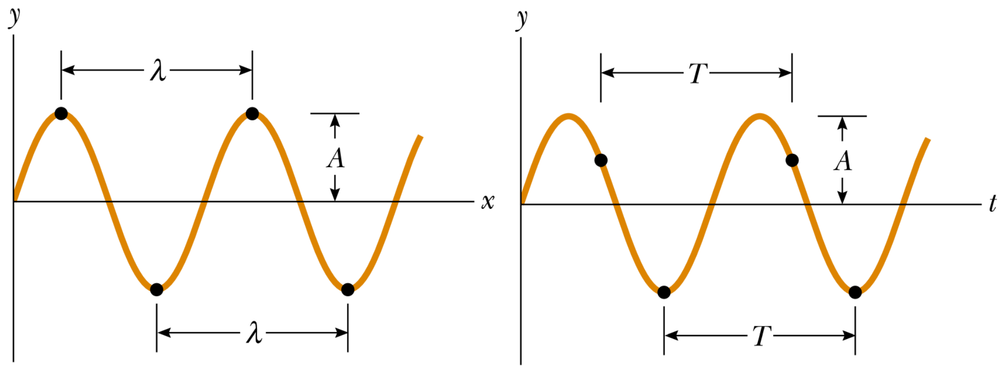


Figura 5.8. Evolución espacial y temporal de una onda armónica transversal.

Para poder describir el problema de forma matemática necesitamos encontrar una expresión $y(x,t)$. La forma de hacer esto resolviendo una ecuación diferencial en derivadas parciales conocida como ecuación de onda.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

donde $\partial y/\partial x$ denota la derivada parcial de y con respecto a x.

Para evitar la complejidad matemática, vamos a obtener la solución de forma heurística. Ya que una partícula del medio describe un MAS, sabemos que la solución $y(x,t)$ debe ser una función proporcional al seno o al coseno. Podríamos utilizar cualquiera de las dos, pero vamos a optar por el seno. La razón es que en general podemos escoger en qué momento comenzamos a contar el tiempo. Por ello impondremos $y(0,0) = 0$, de tal maneara que la función seno nos ahorra el estar añadiendo siempre una fase $\phi = \pi/2$. En el caso del MAS habíamos optado por el coseno ya que, en general, habíamos considerado $x(0) = A$.

Vamos a comenzar centrándonos en la onda en un cierto instante de tiempo, por ejemplo $t = 0$. De esta manera estaríamos estudiando una fotografía de la onda (Fig. 5.8 izquierda), sin preocuparnos de su movimiento y el de las partículas del medio. La solución tendrá la forma

$$y(x', 0) = A \sin(ax') \tag{5.5}$$

donde la expresión de a debe ser determinada. Esta ecuación permitiría a un observador que se encuentra sobre la onda, moviéndose con ella, conocer la altura de la onda a una cierta distancia x'. Dicho de otro modo, un observador que se mueve con la onda no es consciente de que ésta se mueve, así que puede explicar la altura de la onda sin recurrir a la variable temporal.

Ec.(5.5) debe satisfacer que la altura sea nula cuando $x' = \lambda/2$. Por lo tanto

$$y\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right) = A\sin\left(\frac{a\lambda}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a\lambda}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{5.6}$$

La solución para $t = 0$ será pues

$$y(x', 0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x'\right) \tag{5.7}$$

No es buena idea tratar de explicar el movimiento de la onda desde un sistema de referencia que se mueve con ella, pues estaríamos perdiendo información. Para ello, como es habitual, vamos a analizar el problema desde un sistema de referencia fijo en el origen de coordenadas. Es decir, estamos quietos en $x = 0$ y vemos la onda pasar. Consideremos que nos fijamos en punto que se encuentra a una distancia x con respecto a nuestro sistema de referencia. Un observador que se mueve con la onda también se fija en el mismo punto, que para él se encuentra en la posición x'. ¿Cuál es la relación entre nuestras observaciones? Ya que el observador se mueve con velocidad c tendremos $x = x' + ct$, donde ct es la distancia que se ha alejado de nosotros el segundo observador en el tiempo t. Si la onda se moviera hacia la izquierda, la relación entre observaciones sería $x = x' - ct$. Realizando este cambio de sistema de referencia, Ec.(5.7) se convierte en

$$y(x, t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right) \qquad \text{(la onda se mueve hacia la derecha)}$$

$$y(x, t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x + ct)\right) \qquad \text{(la onda se mueve hacia la izquierda)}$$

Sabiendo que $\omega = 2\pi/T$ y que $\lambda = cT$, comprobamos que $2\pi c/\lambda = \omega$. Además definimos una nueva cantidad

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

denominada **número de onda**. Del mismo modo que ω se define como el número de radianes por unidad de tiempo, el número de onda se define como el número de radianes por unidad de longitud. Es decir, ω es para T lo que k es para λ. Utilizando estas expresiones obtenemos la ecuación general de una onda armónica

$$y(x, t) = A\sin(kx \pm \omega t)$$

donde el signo será $+$ si la onda viaja hacia la izquierda y $-$ si viaja hacia la derecha. Si fuera necesario, habría que incluir dentro de la función seno una fase ϕ.

5.4. Velocidad de una onda

La velocidad de propagación de una onda depende de las propiedades del medio, pero es independiente del movimiento de la perturbación que la genera. Por ejemplo, la velocidad del sonido depende de las propiedades del aire, no de nuestras cuerdas vocales. Por lo tanto, dependiendo de cuál sea el medio de transmisión la velocidad de las ondas variará. A continuación veremos, dejando de un lado el formalismo matemático, la expresión de la velocidad de propagación de una onda en distintos medios.

La velocidad de propagación de una onda en una **cuerda** es

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

donde T es la tensión de la cuerda y μ es la densidad lineal (masa por unidad de longitud). Esto quiere decir que independientemente de cómo hagamos vibrar la cuerda, un pulso se propagará por ella con la misma velocidad. Cuanto mayor sea la tensión de la cuerda, mayor será la velocidad.

La velocidad de propagación de una onda en un **gas** es

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

donde T es la temperatura del gas medida en kelvin[4] (K), M es la masa molar de gas (es decir, la masa de 1 mol de gas) y γ es el coeficiente adiabático del gas. El valor de $R = 8.3145$ J/(mol·K) es constante. El valor de γ depende del tipo de gas.

En el caso de líquidos y sólidos la velocidad de propagación sigue una expresión muy similar a las anteriores

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \text{(líquido)}$$

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \text{(sólido)}$$

donde ρ es la densidad (masa por unidad de volumen) del material. B (módulo de compresibilidad) y Y (módulo de Young) son parámetros que dependen del material y cuantifican su resistencia a ser comprimido (B) o deformado (Y).

[4] En honor a Lord Kelvin (1824-1907), físico y matemático británico quien formuló la primera y segunda ley de la termodinámica.

A la luz de las ecuaciones anteriores, podemos concluir que la velocidad de propagación de una onda viene dada por la raíz cuadrada de una fracción donde en el numerador tenemos una propiedad elástica y en el denominador una propiedad inercial.

5.5. Ondas sonoras

Las ondas sonoras se propagan a través de cualquier medio con una velocidad que dependerá de las propiedades de éste. En esta sección estudiaremos el caso de ondas sonoras propagándose por el aire. Si la fuente que genera las ondas vibra de forma armónica entonces las variaciones de presión también son armónicas y pueden ser estudiadas utilizando el aparato matemático del apartado anterior. Sin embargo, en general las ondas sonoras consisten en la superposición de muchas ondas de distinta frecuencia. ¡Qué aburrida sería la música si constara de una única onda armónica! Pese a todo, esto no quiere decir que los conceptos relativos a las ondas armónicas sean inútiles en casos generales. A principios del siglo XIX, el matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) demostró que toda función periódica puede expresarse como la suma finita o infinita de funciones armónicas. Esto quiere decir que dado un sonido cualquiera, podemos descomponerlo en un conjunto de ondas armónicas de distinta frecuencia (eso es lo que hace cualquier aparato electrónico que recibe o emite un sonido). En este curso no vamos a estudiar los métodos de Fourier, pero sí algunas propiedades importantes de las ondas sonoras.

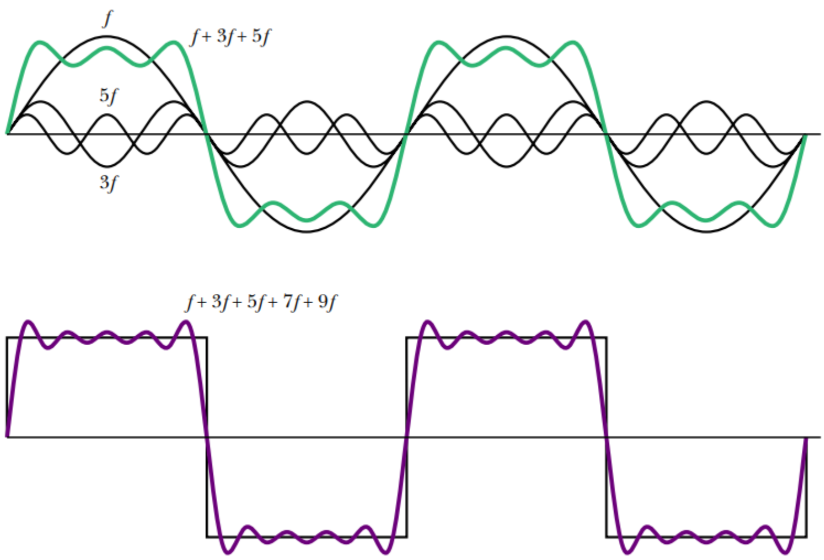


Figura 5.9. Onda cuadrada aproximada a partir de la suma de ondas armónicas utilizando una serie de Fourier.

5.5.1. Intensidad de las ondas sonoras

Las ondas sonoras se propagan con la misma velocidad en todas las direcciones, por lo que son **ondas esféricas**. Imaginemos que en $t = 0$ una onda sonora comienza a propagarse por el aire. En un instante arbitrario t, el frente de onda estará alcanzando partículas que se encuentran a una cierta distancia r de la fuente. Esto puede visualizarse como una esfera de radio r centrada en la fuente. Según avanza el tiempo, la superficie del frente de onda aumenta. Si bien la potencia de la fuente (energía transmitida por unidad de tiempo) puede mantenerse constante, es evidente que la potencia recibida por una unidad de superficie disminuye. Esta es una de las razones por las cuales nos cuesta escuchar un sonido cuanto más alejados estamos de la fuente emisora. La **intensidad sonora** se define como la potencia transmitida por unidad de superficie ($I = P/S$). En una onda esférica la superficie es $4\pi r^2$, así que la intensidad sonora es

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

El umbral de audición humano es la intensidad sonora mínima que un humano promedio es capaz de escuchar. Su valor, conocido como intensidad de referencia, es $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Utilizando esta intensidad se define el **nivel de intensidad sonora (NIS)**

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Como se detecta en la ecuación, se trata de una medida de cuán grande es una intensidad sonora en comparación con el valor de referencia. Ya que el rango normal de variación de la intensidad sonora es inmenso[5], resulta conveniente utilizar la escala logarítmica para así reducir dicho rango. La unidad del NIS es el dB (decibelio[6]).

Puede interesarnos disponer de una ecuación que exprese la pérdida de NIS con la distancia. Supongamos que medimos el NIS en dos puntos situados a distintas distancias r_1 y r_2 de la fuente, siendo $r_2 > r_1$. La diferencia de NIS entre ambos puntos es

$$\beta_1 - \beta_2 = 10 \log \left(\frac{P}{4\pi r_1^2 I_0} \right) - 10 \log \left(\frac{P}{4\pi r_2^2 I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \right)$$

donde en el último paso hemos utilizado la propiedad $\log a - \log b = \log(a/b)$.

[5] Los seres humanos pueden percibir sonidos en el rango $I \in [10^{-12}, 10]$ W/m^2 o, equivalentemente, $\beta \in [0, 130]$ dB. Por debajo de este intervalo los sonidos no son detectados, mientras que intensidades superior dañan el oído.

[6] Esta unidad debe su nombre al inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847-1922). El prefijo *deci* hace referencia a que 1 dB son 0.1 belios. Igual que el radian, el decibelio no es una unidad de medida del SI.

Si además utilizamos la propiedad $\log x^a = a \log x$ obtenemos

$$\beta_1 - \beta_2 = 20 \log \frac{r_2}{r_1}$$

5.5.2. Efecto Doppler

Quizás alguna vez hayas observado que el sonido que emite la sirena de una ambulancia cambia al pasar a tu lado. Esto ocurre porque la frecuencia de la onda sonora cambia en función de la velocidad relativa entre la fuente (ambulancia) y el observador (tú). Cuando la fuente y el observador se acercan la frecuencia aumenta, mientras que cuando la fuente y el observador se alejan la frecuencia disminuye. Este fenómeno es un ejemplo de **efecto Doppler**[7].

Para comprender mejor el fenómeno vamos a salir de la ciudad y desplazarnos hasta una barca que se encuentra anclada en mitad de una ría. Estando en reposo con respecto al fondo del mar, tomamos nuestro reloj y observamos que una ola (cresta de la onda) golpea el casco exactamente cada 2 s. Sabemos entonces que la frecuencia de las olas es de 0.5 Hz. Si encendemos el motor y nos movemos con una cierta velocidad en sentido contrario a las olas observaremos que ahora chocan contra el casco en intervalos de tiempo de menores, 1 s por ejemplo. En esta situación la frecuencia a aumentado a 1 Hz. Del mismo modo, si nos movemos en el sentido de las olas veremos que la frecuencia disminuye.

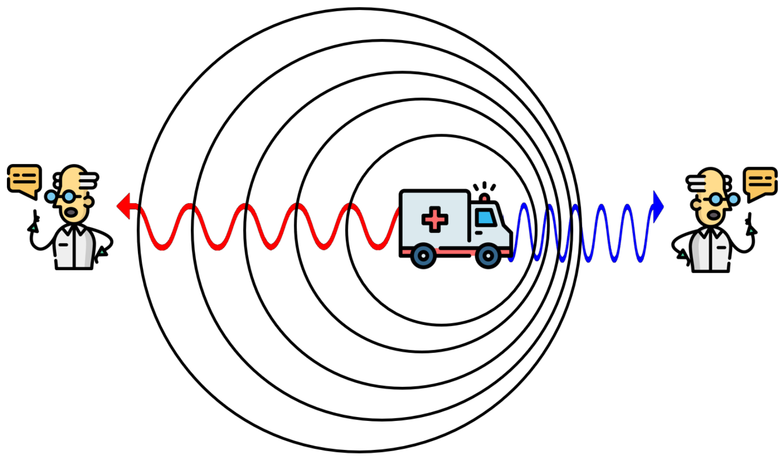


Figura 5.10. Dos observadores estáticos perciben sonidos emitidos por una fuente móvil.

El efecto Doppler se caracteriza por una variación en la frecuencia de onda que percibe un observador. La situación será diferente dependiendo de si el que se mueve es la fuente o el observador. Veamos los casos uno por uno.

[7]En honor al físico y matemático austriaco Christian Doppler (1803-1853). Curiosamente, Doppler nació en la misma calle en la que vivió el famoso compositor Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791).

Observador móvil, fuente estática: imaginemos que un observador (un ciclista por ejemplo) se aproxima con velocidad v_o a una fuente estática (un coche pitando en un semáforo). Para el ciclista, la velocidad de la onda será la velocidad del sonido más su propia velocidad, es decir, $c' = c + v_o$. Ya que la fuente no se mueve, la longitud de onda no se ve afectada y la frecuencia f' que detecta el observador es

$$f' = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c + v_o}{\lambda}$$

y ya que $\lambda = c/f$ podemos expresar la frecuencia recibida en función de la frecuencia emitida tal que

$$f' = \left(\frac{c + v_o}{c}\right) f \qquad \text{(observador se acerca)}$$

Por supuesto, el signo delante de v_o será negativo si el observador se aleja de la fuente en lugar de alejarse.

Fuente móvil, observador estático: pongámonos ahora en el pellejo de un conductor que, mientras se encuentra tranquilamente esperando en el semáforo, escucha como se aproxima un ciclista gritando como un energúmeno. Debido al movimiento de la fuente, la longitud de onda que recibe el observador se reduce. Durante un período de oscilación la fuente se habrá desplazado una distancia $v_f T = v_f/f$. Por lo tanto, la longitud de onda se reducirá exactamente en esa cantidad. Tenemos pues que la longitud de onda que recibe el observador es

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_f}{f} = \frac{c - v_f}{f}$$

Para el observador, la velocidad de propagación es la velocidad del sonido c, por lo que podemos expresar la frecuencia recibida como $f' = c/\lambda'$ y finalmente

$$f' = \left(\frac{c}{c - v_f}\right) f \qquad \text{(fuente se acerca)}$$

Si la fuente se aleja del observador, el signo delante de v_f será positivo.

La fórmula general si tanto el observador como la fuente se mueven es

$$f' = \left(\frac{c \pm v_o}{c \pm v_f}\right) f$$

donde los signos variarán según el caso.

En resumen, cuando se mueve el observador la frecuencia recibida cambia como consecuencia del cambio en la velocidad de propagación de la onda con respecto al observador (λ no cambia). Cuando se mueve la fuente, la frecuencia cambia por razón del cambio en la longitud de onda (c no cambia).

5.6. Formulario

MAS

$$x = A\cos(\omega t+\phi) \qquad x_m = \pm A$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \qquad v_m = \pm\omega A$$
$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \qquad a_m = \pm\omega^2 A$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Muelle horizontal

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad E_m = \frac{1}{2}kA^2$$

Péndulo simple

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ondas armónicas

$$y(x,t) = A\sin(kx \pm wt + \phi) \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = cT$$

Velocidad ondas

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{(cuerda)} \qquad c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad \text{(gas)}$$

Intensidad ondas sonoras

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad \beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \beta_1 - \beta_2 = 20\log\frac{r_2}{r_1}$$

Efecto Doppler

$$f' = \left(\frac{c \pm v_o}{c \pm v_f}\right) f$$

Capítulo 6

Estática de Fluidos

Un fluido es un líquido o un gas formado por partículas que se atraen débilmente. Por ello un fluido se deforma bajo la acción de cualquier fuerza, por pequeña que sea, que tienda a alterar su forma. En el caso de los líquidos, éstos tienden a ocupar las posiciones más bajas dentro del recipiente que los contiene. En cambio los gases tienden a ocupar todo el espacio en el que están confinados. Otra forma de diferenciar líquidos y gases es a través de su capacidad para ser comprimidos. Decimos que los líquidos son **fluidos incompresibles**, ya que su densidad no varía al aplicar una presión. De forma contraria, los gases son fluidos compresibles, ya que su densidad puede aumentar o disminuir según la presión a la que están sometidos. Esto quiere decir que si introducimos un líquido en una jeringuilla cerrada, no podremos reducir ni aumentar su volumen aplicando una fuerza en el émbolo. En el caso del gas sí podremos modificar el volumen.

A partir de las características anteriores comprendemos que los líquidos no tienen una forma definida, pero sí un volumen definido. Los gases no tienen ni forma ni volumen definido. Finalmente, los sólidos tienen tanto una forma como un volumen perfectamente definido. Podríamos decir pues que un fluido es un material sin volumen definido.

En este capítulo y en el siguiente nos centraremos en el estudio de fluidos incompresibles, es decir, líquidos. En algunos ejercicios aparecerán también gases (principalmente aire), pero en todo caso se considerará que en las condiciones dadas éstos pueden ser tratados como fluidos incompresibles.

6.1. Principios fundamentales de la hidrostática

La presión se define como la fuerza por unidad de superficie (F/A) y sus unidades de medida en el SI son $\mathrm{N/m^2} \equiv \mathrm{Pa}$ (pascal[1]). Otras unidades de presión habituales (no SI) son:

[1] En honor al físico, matemático y filósofo francés Blaise Pascal (1623-1662).

a) Atmósfera (atm): es la presión que ejerce la atmósfera terrestre al nivel del mar. 1 atm = 101325 Pa.

b) Bar (bar): 1 bar = 10^5 Pa

c) Milímetro de mercurio (mmHg): es la presión ejercida en la base de una columna de mercurio de 1 mm de altura cuando la aceleración de la gravedad tiene un valor $g = 9.80665$ m/s^2.
1 mmHg = 1/760 atm.

d) Torricelli (torr): es prácticamente idéntico al mmHg.
1 mmHg $\approx$ 1 torr

La experiencia cotidiana nos dice que la presión de un fluido aumenta con la profundidad. Es por ello que nos duelen los oídos y nos cuesta respirar si buceamos hasta una profundidad considerable en el mar. Para buscar una relación matemática entre presión y profundidad, vamos a pensar en las fuerzas que actúan sobre un elemento de agua (altura h y sección transversal A) cuya parte superior se encuentra a una profundidad d (la parte inferior estará pues a una profundidad $d + h$). El esquema de este sistema se presenta en Fig. 6.1. La fuerza que actúa en la parte superior será P_0A, donde P_0 es la presión a una profundidad d. En la parte inferior tenemos la presión P en dicho punto y el propio peso del elemento de agua. Ya que el fluido no se mueve, sabemos que existe un equilibrio entre estas tres fuerzas tal que

$$PA = P_0A + mg$$

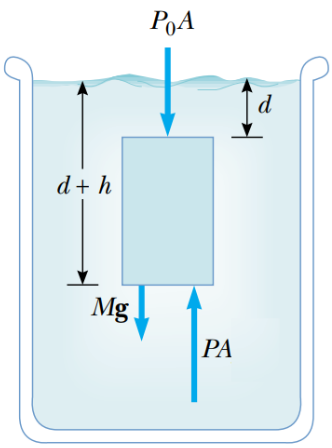


Figura 6.1. Fuerzas actuando sobre un elemento de fluido.

Podemos expresar la masa en términos de la densidad ρ y volumen V del elemento de agua ($m = \rho V = \rho hA$). Al sustituir esta expresión en la ecuación anterior se cancelan las áreas y se obtiene la **ecuación fundamental de la hidrostática**

$$\boxed{P = P_0 + \rho gh}$$

Es importante notar que en esta fórmula la altura h no es la profundidad del punto, sino la diferencia de altura entre los dos puntos en los que estamos comparando la presión. Esta fórmula nos dice que la diferencia de presiones entre dos puntos ($\Delta P = P_B - P_A$) es proporcional a la densidad del fluido, la aceleración de la gravedad y la diferencia de altura entre ellos. En muchas ocasiones tomaremos como punto de referencia la superficie del fluido, por lo que P_0 será la presión atmosférica P_{at} y h será directamente la profundidad del punto. Por otra parte, cuando abordemos problemas donde la presión atmosférica afecta por igual a los distintos puntos, no nos interesará la presión total sino la **presión manométrica** o **presión de gauge**, que es la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica ($P_m = P - P_{at}$). Por ejemplo, la presión de manométrica de un punto en la superficie del mar es nula. La presión manométrica de un punto a una profundidad h es $P_m = \rho g h$.

Una de las consecuencias inmediatas de la ecuación fundamental de la hidrostática es que la presión en puntos situados a igual profundidad es idéntica. De aquí se deduce que, en contra de la intuición, si comunicamos varios recipientes abiertos y de distinta forma, el nivel del agua será el mismo en todos ellos (ver Fig. 6.2).

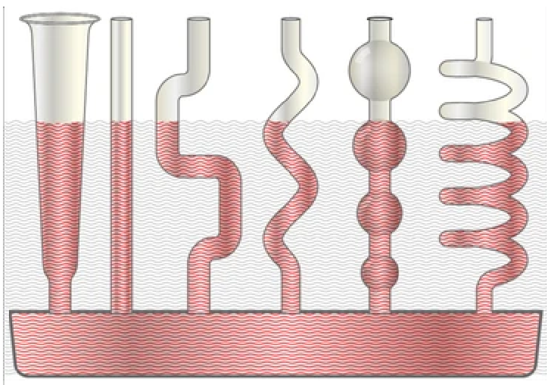


Figura 6.2. Vasos comunicantes ilustrando el principio fundamental de la hidrostática.

Pensemos ahora que utilizamos un émbolo para presionar un recipiente con agua como el de Fig. 6.1. Si la sección transversal del émbolo y el vaso es A y la fuerza aplicada es F, entonces se producirá un incremento de presión $\Delta P = F/A$. El **principio de Pascal** nos dice que el incremento de presión será el mismo en todos los puntos del fluido. Dicho de forma elegante: *la presión ejercida sobre un fluido incompresible y en equilibrio dentro de un recipiente de paredes indeformables se transmite con igual intensidad en todas las direcciones y en todos los puntos del fluido y a las propias paredes del recipiente.*

Una aplicación importante del principio de Pascal es lo que conocemos como **prensa hidráulica**. Dos tubos de distinta sección transversal $A_1 < A_2$ contienen un líquido y están conectados entre sí a través de un conducto. En la parte superior de cada tubo hay un pistón en contacto con la superficie del líquido (ver Fig. 6.3). Cuando aplicamos una fuerza F_1 sobre el pistón conectado al tubo de sección pequeña

A_1, una presión $P = F_1/A_1$ se transmite por todo el fluido. En el punto de sección grande A_2 esta presión se traduce en una fuerza vertical y ascendente

$$F_2 = PA_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

Ya que $A_2 > A_1$, entonces $F_2 > F_1$. Este sencillo mecanismo permite elevar cuerpos muy pesados utilizando fuerzas pequeñas.

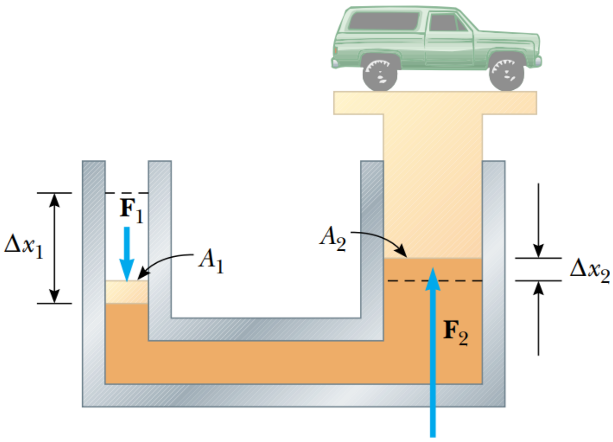


Figura 6.3. Esquema de fuerzas en el funcionamiento de una prensa hidráulica.

6.2. Instrumentos de medida de la presión

Al inicio de este capítulo hemos dicho que la presión atmosférica al nivel del mar es de 101325 Pa. Sin embargo, no nos hemos preguntado acerca de cómo se puede obtener este valor. En esta sección describiremos brevemente algunos instrumentos que nos permiten medir la presión atmosférica y, en general, cualquier presión desconocida.

En el siglo XVII el físico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) realizó uno de los experimentos más celebrados de la historia de la física. Habiendo introducido mercurio en un tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro, Torricelli invirtió el tubo sobre una cubeta llena de mercurio. Una vez alcanzado el equilibrio, la altura del mercurio en el tubo se estabilizó en 760 mm. Con este sencillo experimento, Torricelli había obtenido la primera medida de la presión atmosférica. Ya que la presión en puntos situados a la misma altura en el seno de un fluido es idéntica, sabemos que la presión en un punto A situado dentro del tubo debe ser la misma que la presión en un punto B situado sobre la superficie del mercurio en la cubeta (ver Fig.6.4). Por lo tanto

$$P_{at} = \rho_h g h$$

En este experimento reside el origen de las unidades mmHg y torr, ambas aproximadamente 1/760 atm.

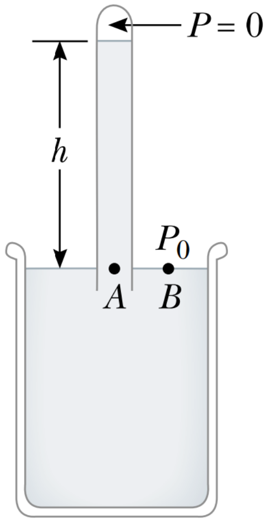


Figura 6.4. Esquema del experimento de Torricelli.

A partir de la genial idea de Torricelli podemos obtener cualquier presión desconocida utilizando dispositivo experimental similar. Un **manómetro de tubo abierto** nos permite medir la presión de un gas que se encuentra dentro de un recipiente cerrado. El dispositivo consiste en un tubo en U conectado al final del recipiente que contiene el gas. Dentro del tubo en U se vierte un líquido de densidad conocida y la presión se obtiene a partir de la altura observada (ver Fig. 6.5).

$$P = P_0 + \rho g h$$

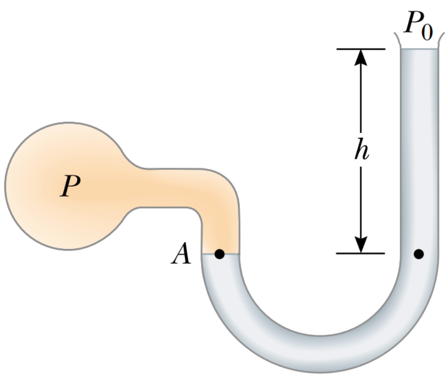


Figura 6.5. Manómetro de tubo abierto.

6.3. Flotación y principio de Arquímedes

Quizás alguna vez hayas notado que es extremadamente difícil sumergir una pelota de playa en el mar. Esto ocurre porque el agua ejerce una fuerza notable sobre la pelota cuando intentamos introducirla en el fluido. Esta fuerza se denomina **empuje** (E) y fue descrita por primera vez por Arquímedes de Siracusa (287 a.C - 212 a.C), quien nació, vivió y murió en Sicilia. El **principio de Arquímedes** establece que todo cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascensional igual al peso del fluido desplazado.

Imaginemos que tenemos un cuerpo de volumen V completamente sumergido en un fluido. La fuerza total que experimenta el cuerpo es

$$F = w - E = m_c g - m_f g = \rho_c g V - \rho_f g V$$

$$F = gV(\rho_c - \rho_f)$$

donde los subíndices c y f hacen referencia al cuerpo y al fluido, respectivamente.

Vemos que si $F > 0$, es decir, si $\rho_c > \rho_f$, el cuerpo adquirirá una cierta aceleración y se hundirá. En caso de que $\rho_c < \rho_f$ el cuerpo adquirirá una aceleración dirigida hacia arriba. Una vez el cuerpo alcanza la superficie del fluido se producirá un equilibrio entre el peso y el empuje, de tal manera que el cuerpo terminará parcialmente sumergido. En el equilibrio tenemos

$$w = E \quad \Rightarrow \quad \rho_c g V_c = \rho_f g V_s$$

donde ahora el empuje es proporcional al volumen sumergido y no al volumen total del cuerpo. Despejando V_s obtenemos

$$V_s = \frac{\rho_c}{\rho_f} V_c$$

donde vemos que el volumen sumergido es proporcional a la densidad relativa[2] del material. Por ejemplo, si un material tiene una densidad relativa de 0.9, entonces un 90 % de su volumen estará sumergido en agua.

[2] Cociente entre la densidad del material y la densidad otra sustancia de referencia, típicamente el agua ($\rho = 1000$ kg/m^3).

6.4. Formulario

Este capítulo contiene pocas ecuaciones, pero muchos conceptos que deben aplicarse con buen criterio para resolver los ejercicios.

Definición de presión

$$P = \frac{F}{A}$$

Presión hidrostática

$$P = P_0 + \rho g h$$

Empuje

$$E = \rho_f g V_s$$

Capítulo 7
Dinámica de Fluidos

En el capítulo anterior hemos estudiado fluidos en reposo. En este capítulo nos centraremos en la comprensión de las leyes físicas que gobiernan el movimiento de los fluidos. El comportamiento de un fluido en movimiento es muy complejo, por lo que encontrar fórmulas analíticas que describan casos generales es tedioso y, en muchas ocasiones, directamente imposible. Es por ello que haremos una serie de consideraciones que nos permitirán hacer una aproximación razonablemente amena a la dinámica de fluidos.

7.1. Clasificación de los fluidos

En ausencia de corrientes de aire, cuando se apoya un cigarrillo encendido o una vela sobre una superficie, se observa que inicialmente el humo asciende siguiendo una línea recta, pero llegado un punto surgen remolinos y el movimiento del humo se vuelve desordenado. La densidad del humo es menor que la del aire, por lo que las partículas que lo componen ascienden de forma acelerada. Inicialmente, cuando la velocidad es baja, el flujo es **laminar** y el ascenso del humo es recto y ordenado. Una vez la velocidad supera un cierto umbral, el flujo pasa a ser **turbulento** y el ascenso del humo se vuelve complejo.

De forma más general, decimos que un flujo es laminar cuando las trayectorias de las partículas del fluido, llamadas líneas de corriente, nunca se cortan. De esta manera podemos imaginar un flujo laminar como una serie de láminas paralelas que fluyen sin molestarse unas a otras, como lo harían las cartas de una baraja. De forma contraria, en un flujo turbulento las líneas de corriente (y en consecuencia las capas adyacentes) se cruzan, generando un comportamiento difícil de estudiar. Nótese que estamos hablando de *flujo* y no de *fluido*. Esto se debe a que un mismo fluido puede generar un flujo laminar o turbulento dependiendo de su velocidad, tal y como pasa con el humo de la vela.

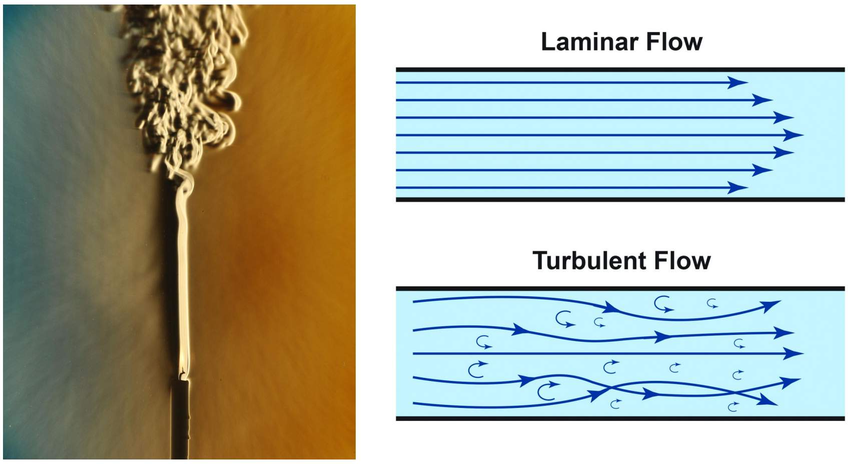


Figura 7.1. Los dos tipos de régimen en los que se puede mover un fluido se pueden observar en una simple vela.

Otra característica importante que nos permite distinguir distintos tipos de fluidos es la **viscosidad**. En un fluido real como puede ser el agua, las capas adyacentes de fluido presentan una cierta fricción entre ellas. Por esta razón el fluido pierde energía mecánica y, por ejemplo, no podemos bombear petróleo a lo largo de un oleoducto utilizando una presión arbitrariamente pequeña.

La tercera característica más relevante de los fluidos/flujos es su capacidad para ser comprimidos, pero esto ya lo hemos discutido en el capítulo anterior.

A la vista de las definiciones anteriores, resulta claro que los fluidos más difíciles de estudiar serán los fluidos compresibles y viscosos que se mueven en régimen turbulento. Hasta que se diga lo contrario, estudiaremos **fluidos ideales**, los cuales son incompresibles, no viscosos y se mueven en régimen laminar. Además, en un fluido ideal el flujo es **estacionario**, lo que implica que la velocidad del fluido en un punto dado se mantiene constante en el tiempo. Por ejemplo, el flujo de agua cuando una persona se está duchando es aproximadamente estacionario ya que la velocidad del agua en un punto del chorro (a la altura de la alcachofa, por ejemplo) es constante. El flujo dejará de ser estacionario si alguien se pone a fregar en la cocina.

7.2. Ecuación de continuidad

Vamos a comenzar nuestro análisis de la dinámica de fluidos obteniendo una de sus ecuaciones clave a través de un razonamiento de lo más intuitivo. Imaginemos un flujo a través de una tubería cuya sección transversal se va agrandando (ver Fig. 7.2). Ya que el fluido es incompresible, la masa de fluido que entra en la tubería en un cierto intervalo de tiempo Δt tendrá que ser idéntica a la masa que sale ($m_1 = m_2$). Puesto que la densidad del fluido no ha cambiado, la conservación de la masa implica directamente la conservación del volumen, por lo que podemos decir que el volumen que entra y que sale en un cierto intervalo de tiempo es el mismo. Esta cantidad, *volumen por unidad de tiempo*, es el **caudal** Q y por razones obvias juega un papel relevante en la dinámica de fluidos. Si expresamos el volumen en términos del área de la sección transversal de la tubería y la distancia Δx que recorre una partícula del fluido en el tiempo Δt tenemos

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$$

Si dividimos entre Δt para obtener el caudal resulta

$$A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = A_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = Q$$

Notando que $\Delta x / \Delta t$ es la velocidad del fluido, obtenemos la **ecuación de continuidad**

$$\boxed{Av = Q = \text{cte}}$$

Esta ecuación no es otra cosa que una ecuación de conservación de la masa. Ecuaciones similares aparecen en electromagnetismo y mecánica cuántica.

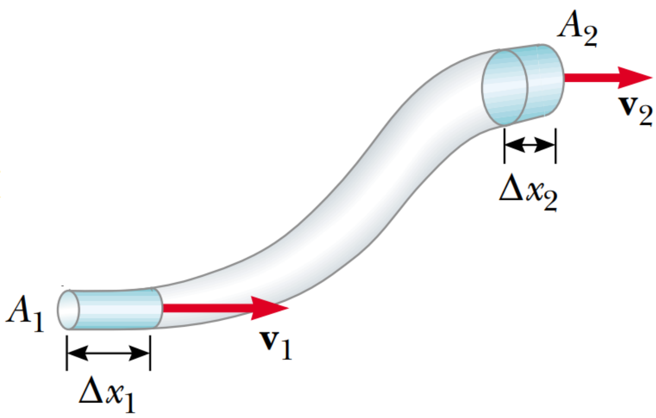


Figura 7.2. Flujo a lo largo de una tubería de sección variable.

7.3. Ecuación de Bernoulli

La segunda ecuación fundamental de la dinámica de fluidos es una ecuación de conservación de la energía, muy similar de hecho a la estudiada en el capítulo 4. Vamos a pensar en un fluido que se mueve a lo largo de una tubería cuya sección transversal y altura cambian a lo largo del recorrido. Además, vamos a considerar que en cada extremo actúa una presión diferente. Esta es la situación más general posible. Ya que el fluido no es viscoso, la energía total debe conservarse y por lo tanto debe ser igual en los dos extremos (y, en general, en cualquier punto) de la tubería. Esta situación se representa en Fig. 7.3, donde el movimiento del fluido es de izquierda a derecha.

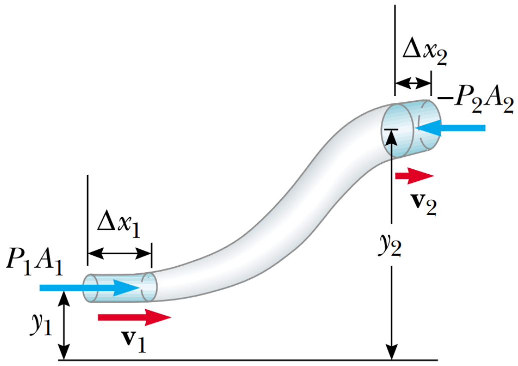


Figura 7.3. Presiones y velocidades en los extremos de una tubería de sección variable.

Igual que hicimos en el apartado anterior, vamos a pensar en un cierto volumen de fluido que se mueve a lo largo de la tubería. Si existe movimiento quiere decir que las fuerzas ejercidas por el fluido son mayores en un extremo que en otro. El trabajo realizado sobre el elemento de fluido en un intervalo de tiempo Δt es

$$W = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2$$

donde $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$ ya que las secciones transversales son diferentes. Además, el trabajo realizado por F_2 es negativo, pues se opone al movimiento. Simplemente expresando la fuerza en términos de la presión, obtenemos el trabajo total realizado por las presiones

$$W = P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 = (P_1 - P_2)V$$

donde hemos dado cuenta de que el volumen se conserva ($A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = V$).

Ya que la velocidad del fluido no va a ser igual en ambos extremos (ecuación de continuidad), existirá una variación de energía cinética

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Al tratarse de un fluido, nos interesa expresar la masa en términos del volumen y de la densidad, por lo que resulta

$$\Delta K = \frac{1}{2} \rho V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V v_1^2 = \left(\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right) V$$

Puesto que la altura del fluido también cambia, existirá una variación de energía potencial.

$$\Delta U = mgh_2 - mgh_1$$

donde de nuevo vamos a expresar la masa en términos de la densidad y el volumen, obteniendo

$$\Delta U = (\rho g h_2 - \rho g h_1)V$$

Como bien sabemos, el trabajo realizado sobre el sistema es igual a la variación de energía mecánica. Por lo tanto

$$W = \Delta K + \Delta U \quad \Rightarrow \quad (P_1 - P_2)V = \left(\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2\right)V + (\rho g h_2 - \rho g h_1)V$$

Los volúmenes que aparecen a ambos lados de la igualdad se cancelan y obtenemos la **ecuación de Bernoulli**[1]

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

O bien, de forma más general

$$\boxed{P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{cte}}$$

Un error habitual a la hora de plantear un problema de dinámica de fluidos utilizando la ecuación de Bernoulli es considerar que h es la profundidad del punto y no su altura. El término $\rho g h$ es la energía potencial de una partícula del fluido, por lo que h es la altura a la que se encuentra dicha partícula. En el tema anterior hemos visto que la presión aumenta con la profundidad, por lo que h era la profundidad del punto. El término de la ecuación de Bernoulli que da cuenta de la presión hidrostática es el término P, no el término potencial.

La ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad, junto con los principios de la hidrostática, permiten resolver cualquier problema de dinámica de fluidos ideales.

7.4. Fluidos viscosos

De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, cuando un fluido se mueve a lo largo de una tubería horizontal de sección transversal constante, la presión del fluido es idéntica en todo punto. En la práctica esto no ocurre, sino que observamos una pérdida de presión a lo largo de la dirección del flujo. Esto se debe a que existe una fricción interna entre las capas del fluido, así como entre éste y las paredes de la tubería. Esta resistencia al flujo se conoce como viscosidad y es también la responsable de que la velocidad de los cuerpos que caen (o ascienden) en un fluido no aumente de forma indefinida. Para encontrar un ejemplo de fluido viscoso no hace falta recurrir a la miel o a algún aceite extraño, sino que el agua es también un fluido viscoso. Esto quiere decir que si reprodujéramos experimentalmente muchos de los problemas en los que se consideró que el agua era un fluido ideal, la realidad arrojaría resultados distintos a los obtenidos. De hecho, los fluidos en general y los líquidos en particular son muy

[1] En honor a Daniel Bernoulli (1700-1782), físico y matemático suizo. Es posible que en otras disciplinas de la física y las matemáticas veas el apellido Bernoulli, aunque quizás se trate de su padre, sus hermanos o sobrinos. Daniel Bernoulli nació en los Países Bajos Españoles, pero su familia emigró a Suiza tras la persecución a los cristianos protestantes.

difíciles de estudiar de forma analítica. Es por ello que una buena parte de las ecuaciones conocidas al respecto son leyes empíricas obtenidas a través de la experimentación.

El principal parámetro que nos permite caracterizar el comportamiento viscoso de un fluido newtoniano[2] es el número de Reynolds. En el caso de una tubería de sección circular, viene dado por

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

donde ρ es la densidad del fluido, v su velocidad, D el diámetro de la tubería y μ la viscosidad dinámica del fluido medida en $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$.

El número de Reynolds permite determinar el carácter turbulento o laminar de un flujo. Si $Re < 2100$ el flujo será laminar y si $Re > 4000$ el flujo será turbulento[3]. Entre estos dos valores decimos que el régimen es crítico y la mayoría de las ecuaciones conocidas fallan en sus predicciones.

Figura 7.4. Flujo laminar y turbulento en un grifo.

En lo que resta de sección vamos a estudiar brevemente algunas leyes básicas que resultan de utilidad en casos concretos.

7.4.1. Ley de Hagen-Poiseuille

Consideremos un fluido newtoniano que se mueve en régimen laminar a lo largo de una tubería cilíndrica horizontal. Si situamos sobre la tubería una serie de capilares, observaremos que el nivel que alcanza la columna de líquido en ellos disminuye según el fluido avanza (ver Fig. 7.5). La diferencia de altura Δh (pérdida de carga hidráulica) entre dos capilares cualesquiera nos permite determinar la pérdida de presión ΔP entre dichos puntos, ya que $\Delta P = \rho g \Delta h$. La ley de Hagen-Poiseuille establece que la caída de presión viene dada por

$$\Delta P = \frac{8 \mu L}{\pi r^4} Q$$

[2] Un fluido newtoniano es un fluido que tiene viscosidad constante.

[3] Estos intervalos varían según la bibliografía que se consulte.

donde L es la distancia entre los dos puntos considerados y r es el radio de la tubería.

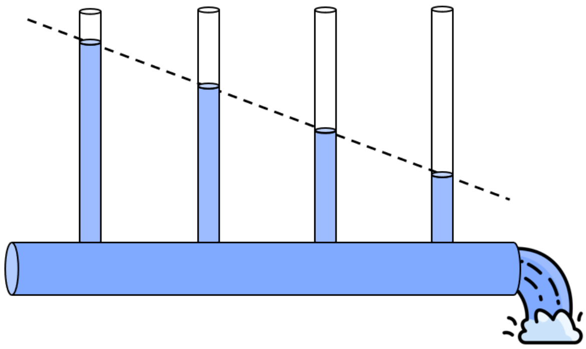


Figura 7.5. Pérdida de carga hidráulica en una tubería.

Desde otro punto de vista, la ecuación interior nos dice cuál es la diferencia de presiones necesaria para generar un cierto caudal, $\Delta P = RQ$, donde $R = 8\mu L/(\pi r^4)$ es un parámetro de resistencia al flujo. Existe una fuerte analogía entre esta ecuación y la ley de Ohm ($\Delta V = RI$), donde la diferencia de potencial juega el papel de la diferencia de presiones y la intensidad de corriente el papel del caudal. Si se conectan diversas tuberías en serie y/o paralelo, las leyes de asociación son equivalentes al caso de un circuito eléctrico.

7.4.2. Fuerza de arrastre y ley de Stokes

En el año 2012 el paracaidista Felix Baumgartner saltó al vacío desde una altura de 39 km. Utilizando argumentos meramente cinemáticos, sabemos que la máxima velocidad que se debió alcanzar es $v = \sqrt{2gy} \approx 3150$ km/h. Sin embargo, la velocidad alcanzada fue de "únicamente"1322 km/h, es decir, unas 2.3 veces menos de la que habría alcanzado si se tratase de una bola de volumen despreciable. No podemos echar la culpa del resultado a la aceleración de la gravedad, puesto que a la altura del salto su valor no es significativamente menor que en la superficie terrestre. La verdadera razón es que **el aire ofrece resistencia** al movimiento de los objetos a través de él. De forma similar a la fricción dinámica que aparecía en los problemas de dinámica, cuando un cuerpo se mueve a través de un medio (líquido o gaseoso) surgen **fuerzas de arrastre** que se oponen al movimiento y son típicamente proporcionales a la velocidad (a mayor velocidad, mayor fuerza de arrastre). Igual que ocurre con el movimiento de fluidos en tuberías, cada caso particular tiene una expresión matemática asociada distinta. De nuevo, la mayoría de ellas se obtienen de forma empírica y no a través de demostraciones matemáticas. Como a los físicos lo que nos interesa principalmente es el segundo método (analítico) y no el primero (empírico), simplemente diremos que en todo caso la fuerza de arrastre viene dada por $F_d = kv$ o bien $F_d = kv^2$. La expresión de k puede ser tan complicada como uno quiera, mientras que la dependencia es lineal o cuadrática según si la velocidad es "pequeña"o "grande", respectivamente. Así pues, cuando el cuerpo comienza su descenso desde el reposo su aceleración es g, pero inmediatamente aparece una fuerza de arrastre que se opone al peso, provocando en consecuencia una disminución de la aceleración. En el caso de Felix Baumgartner, donde podemos asumir una fuerza de arrastre cuadrática, su aceleración sería

$$a = g - \frac{k}{m}v^2$$

En esta ecuación se puede detectar que existirá una cierta velocidad para la cual la fuerza de arrastre iguala al peso y el movimiento pasa a ser un MRU. Esta velocidad, conocida como **velocidad límite** o velocidad terminal, sería pues

$$g = \frac{k}{m}v_t^2 \quad \Rightarrow \quad v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Un caso concreto que resulta particularmente sencillo consiste en el movimiento de partículas esféricas de pequeño tamaño en el seno de un fluido viscoso con bajo número de Reynolds[4]. Bajo estas condiciones la fuerza de arrastre viene dada por la ley de Stokes

$$F_d = 6\pi\mu Rv$$

donde R es el radio de la esfera y v su velocidad. Nótese que esta ecuación es de la forma $F_d = kv$.

[4]Pese a que en esta situación el fluido está quieto y es el objeto esférico el que se mueve a través de él, cuando la velocidad es constante la situación es físicamente idéntica al caso en que el fluido se mueve y el objeto está quieto, por lo que podemos definir igualmente un número de Reynolds asociado.

7.5. Formulario

Este capítulo contiene pocas ecuaciones, pero muchos conceptos que deben aplicarse con buen criterio para resolver los ejercicios.

$$Q = \frac{V}{t}$$

$$Av = Q = \text{cte}$$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{cte}$$