Universidad Rey Juan Carlos

Grado en Ingeniería Ambiental

SOLUCIONARIO

Física I

Profesor:

Alexandre Rodríguez Nieto

2024

Índice general

1. CÁLCULO VECTORIAL

1. a)

$$\vec{u} = (6, 0)$$

$$\vec{v} = (5 \cdot \cos(30°), 5 \cdot \sin(30°)) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\vec{w} = (4 \cdot \cos(120°), 4 \cdot \sin(120°)) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$$

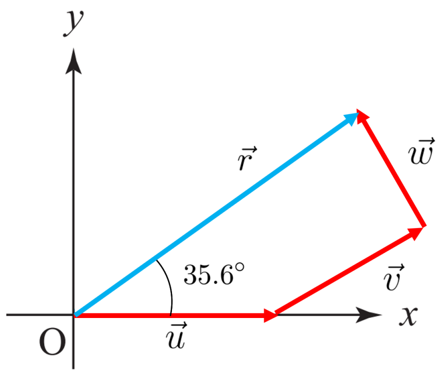
b)

$$\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \left(6 + \frac{5\sqrt{3}}{2} - 2, \frac{5}{2} + 2\sqrt{3}\right) = (8.330, 5.964)$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{8.330^2 + 5.964^2} = 10.245$$

c)

$$r_x = r\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{r_x}{r}\right) = \arccos\left(\frac{8.330}{10.245}\right) = 35.6°$$



---

2. Los vectores son

$$\vec{u} = (3 \cdot \cos(30°), 3 \cdot \sin(30°)) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{v} = (0, 3)$$

a)

$$\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{\left(3\sqrt{3}/2\right)^2 + (9/2)^2} = 3\sqrt{3}$$

El ángulo que forma con el eje $+x$ es

$$r_x = r\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{r_x}{r}\right) = \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}/2}{3\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

b)

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{\left(3\sqrt{3}/2\right)^2 + (3/2)^2} = 3$$

El ángulo que forma con el eje $+x$ es (notar que $r_y < 0$)

$$r_x = r\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \theta = -\arccos\left(\frac{r_x}{r}\right) = -\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}/2}{3}\right) = -\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -30°$$

O bien $360 - 30 = 330°$.

c)

$$\vec{r} = \vec{v} - \vec{u} = (v_x - u_x, v_y - u_y) = \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{\left(-3\sqrt{3}/2\right)^2 + (3/2)^2} = 3$$

El ángulo que forma con el eje $+x$ es

$$r_x = r\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{r_x}{r}\right) = \arccos\left(\frac{-3\sqrt{3}/2}{3}\right) = \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 150°$$

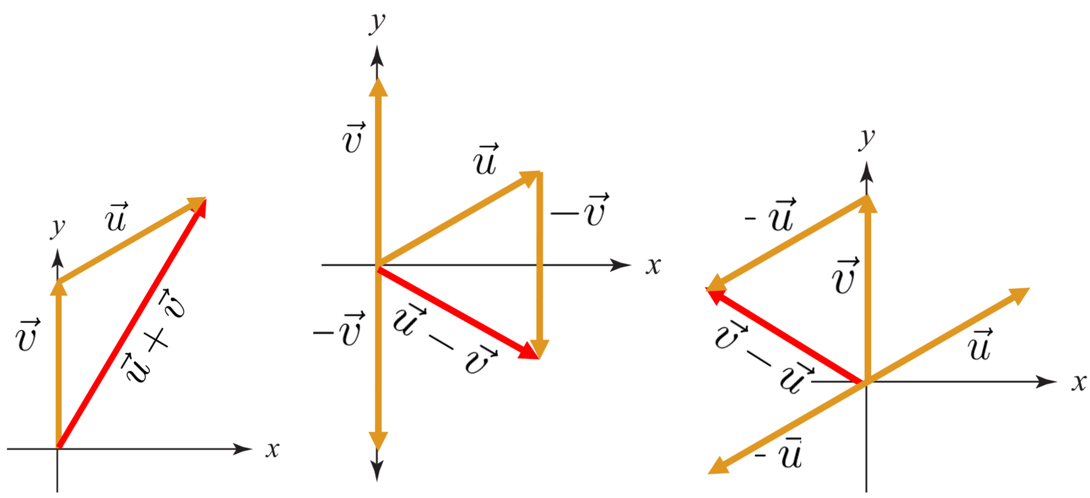


Figura 1: Vectores resultantes en los apartados a), b) y c).

---

3. Los vectores son

$$\vec{a} = (a\cos\theta_a, a\sin\theta_a) = (6\cdot\cos(45°), 6\cdot\sin(45°)) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$

$$\vec{b} = (b\cos\theta_b, b\sin\theta_b) = (3\cdot\cos(30°), 3\cdot\sin(30°)) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{c} = (c\cos\theta_c, c\sin\theta_c) = (4\cdot\cos(-60°), 4\cdot\sin(-60°)) = \left(2, -2\sqrt{3}\right)$$

El vector suma es

$$\vec{r} = (a_x + b_x + c_x, a_y + b_y + c_y) = (8.84, 2.28)$$

y su módulo es

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{8.84^2 + 2.28^2} = 9.13$$

El ángulo que forma con el eje $+x$ es

$$r_x = r\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{r_x}{r}\right) = \arccos\left(\frac{8.84}{9.13}\right) = 14.48^\circ$$

4.

$$\vec{r} = \vec{QP} = (P_x - Q_x, P_y - Q_y, P_z - Q_z) = (-1 - 2, 0 + 3, 2 + 5) = (-3, 3, 7)$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{67}$$

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{67}}(-3, 3, 7)$$

5.

$$\vec{v} = \vec{AB} = (B_x - A_x, B_y - A_y) = (3, -3)$$

$$\vec{w} = 8\vec{v} = (24, -24)$$

$$\vec{w} = \vec{PQ} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y)$$

Las coordenadas de Q serán

$$Q_x = w_x + P_x = 24 + 5 = 29 \qquad Q_y = w_y + P_y = -24 + 6 = -18$$

Por lo tanto $Q = (29, -18)$

---

6. a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3 + 1 - 28 = -24$

   b) $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} = -11\hat{\imath} - 19\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

   c) Comenzamos resolviendo $\vec{b} \times \vec{c}$.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (b_y c_z - b_z c_y)\hat{\imath} + (b_z c_x - b_x c_z)\hat{\jmath} + (b_x c_y - b_y c_x)\hat{k} = 55\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 25\hat{k}$$

   Finalizamos con el producto escalar

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_x, a_y, a_z) \cdot (55, -10, -25) = -55 - 10 - 100 = -165$$

   d) Podemos calcular el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a partir del producto escalar. El módulo de los vectores es

$$a = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18}$$

$$b = \sqrt{3^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{59}$$

   Por lo que el ángulo es

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}\right) = \arccos\left(\frac{-24}{\sqrt{18}\sqrt{59}}\right) = 137.43^\circ$$

---

7. El vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ es

$$\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}(4,-3) = (0.8,-0.6)$$

El vector $\vec{b}$ de módulo 8 en la dirección de $\vec{a}$ será

$$\vec{b} = b\hat{u}_a = 8(0.8,-0.6) = (6.4,-4.8)$$

---

8. De la condición de perpendicularidad tenemos

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = w_x - 3w_y = 0 \quad \longrightarrow \quad w_x = 3w_y$$

Ya que el vector es unitario se cumplirá

$$w_x^2 + w_y^2 = 1$$

Sustituyendo $w_x = 3w_y$ en esta ecuación obtenemos

$$9w_y^2 + w_y^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad w_y = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Por lo tanto

$$\vec{w} = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$$

---

9. Podemos resolver considerando cualesquiera 2 diagonales. Por ejemplo, consideremos la diagonal que va del punto $P = (1,0,1)$ al punto $Q = (0,1,0)$ y la diagonal que va del punto $R = (1,1,0)$ al punto $S = (0,0,1)$. Los vectores que unen dichos puntos son $\vec{v} = \vec{PQ} = (-1,1,-1)$ y $\vec{w} = \vec{RS} = (-1,-1,1)$. Podemos obtener el ángulo que forman estos vectores a partir de su producto escalar.

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = vw\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{vw}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{3}\right) = 109.47°$$

Tomando distintos vectores sobre las diagonales se obtiene $\theta = 70.53°$.

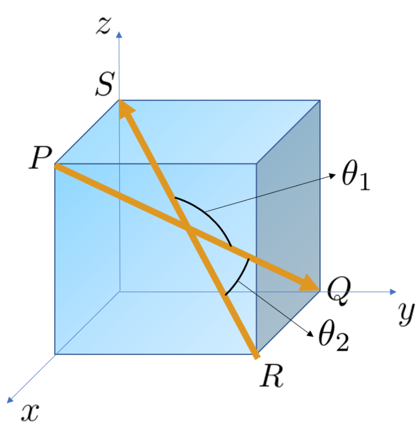


Figura 2: Ángulo formado por los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{RS}$ (θ_1) y por los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{SR}$ (θ_2).

10.
$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2} = \sqrt{a_x^2+b_x^2+2a_xb_x+a_y^2+b_y^2+2a_yb_y}$$

Notando que $a_x^2+a_y^2=a^2$, $b_x^2+b_y^2=b^2$ y $a_xb_x+a_yb_y=\vec{a}\cdot\vec{b}$ resulta

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

Por otra parte

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2} = \sqrt{a_x^2+b_x^2-2a_xb_x+a_y^2+b_y^2-2a_yb_y}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

Por lo tanto $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, es decir, si los vectores son perpendiculares.

---

11. Si $\vec{s}$ y $\vec{d}$ son perpendiculares, entonces $\vec{s}\cdot\vec{d}=0$.

$$\vec{s}\cdot\vec{d} = s_xd_x+s_yd_y = (a_x+b_x)(a_x-b_x)+(a_y+b_y)(a_y-b_y)$$
$$= a_x^2-\cancel{a_xb_x}+\cancel{a_xb_x}-b_x^2+a_y^2-\cancel{a_yb_y}+\cancel{a_yb_y}-b_y^2=0 \quad\longrightarrow\quad a^2=b^2$$

12.
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}\times\vec{b}| \quad\longrightarrow\quad ab\cos\theta=ab\sin\theta \quad\longrightarrow\quad \cos\theta=\sin\theta$$
$$\theta=45^\circ$$

2. CINEMÁTICA

1. Utilizando SI, la velocidad final (en $t_1 = 6$ s) es $v_f = 27.78$ m/s. La aceleración del coche es

$$v_f = \cancel{v_0} + at_1 \quad \longrightarrow \quad a = \frac{v_f}{t_1} = \frac{27.78}{6} = 4.63 \text{ m/s}^2$$

Conocida la aceleración, el tiempo t_2 que el coche tarda en recorrer $x_f = 1000$ m lo podemos obtener directamente

$$x_f = \cancel{x_0} + \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}at_2^2 \quad \longrightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2x_f}{a}} = 20.78 \text{ s}$$

---

2. La posición del coche en función del tiempo es

$$x_c = v_{c0}t - \frac{1}{2}a_c t^2$$

La posición de la moto en función del tiempo es

$$x_m = x_{m0} + v_{m0}t + \cancel{\frac{1}{2}a_c t^2} \qquad \text{(no acelera)}$$

Se producirá la colisión si existe un tiempo t_c en el que ambas posiciones son iguales. Imponiendo $x_m = x_c$ obtenemos un polinomio de segundo grado

$$v_{c0}t - \frac{1}{2}a_c t^2 = x_{m0} + v_{m0}t \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}a_c t^2 + (v_{m0} - v_{c0})t + x_{m0} = 0$$

cuyas raíces son

$$t_{1,2} = \frac{-v_{m0} + v_{c0} \pm \sqrt{(v_{m0} - v_{c0})^2 - 2a_c x_{m0}}}{a_c}$$

$$t_1 = \frac{-5 + 30 + \sqrt{(5-30)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 155}}{2} = 13.62 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{-5 + 30 - \sqrt{(5-30)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 155}}{2} = 11.38 \text{ s}$$

El tiempo en el que el coche arrolla a la moto por detrás es $t_2 = 11.38$ s. $t_1 = 13.62$ s se corresponde con el caso en el que el coche adelanta a la moto, pero sigue frenando, por lo que la moto choca con el coche por detrás.

Conocido el tiempo de colisión, calculamos directamente la distancia recorrida por el coche

$$x_c = v_{c0}t_2 - \frac{1}{2}a_c t_2^2 = 30 \cdot 11.38 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 11.38^2 = 211.90 \text{ m}$$

---

3. La posición de los coches viene dada por

$$x_A = v_{A0}t + \cancel{\frac{1}{2}a_A t^2} \qquad \text{(no acelera)} \tag{1}$$

$$x_B = \cancel{v_{B0}t} + \frac{1}{2}a_B t^2 \qquad \text{(parte del reposo)} \tag{2}$$

La velocidad de los coches es

$$v_A = v_{A0} + \cancel{a_A t} \qquad \text{(no acelera)}$$

$$v_B = \cancel{v_{B0}} + a_B t \qquad \text{(parte del reposo)}$$

Los coches tendrán la misma velocidad en el instante t_v, que obtenemos tras igualar velocidades

$$v_{A0} = a_B t_v \quad \longrightarrow \quad t_v = \frac{v_{A0}}{a_B}$$

Sustituyendo este tiempo en Ec.(1) y Ec.(2) obtenemos la posición de cada coche en el instante en que ambos tienen la misma velocidad

$$x_A = \frac{v_{A0}^2}{a_B}$$

$$x_B = \frac{v_{0A}^2}{2a_B}$$

Por lo tanto, la solución es $x_A = 2x_B$.

---

4. Podemos dividir el desplazamiento total en dos partes: el desplazamiento x_r que se recorre durante el tiempo de reacción y el desplazamiento x_b que se produce durante la frenada. Durante el tiempo de reacción no existe aceleración, por lo que

$$x_r = v_0 t_r - \cancel{\frac{1}{2}at_r^2}$$

Una vez el vehículo termina de frenar tenemos $v_f = 0$. Ya que no nos interesa el tiempo de frenada, expresamos la posición de forma independiente del tiempo.

$$x_b = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{v_f^2} - v_0^2}{a}\right) = \frac{v_0^2}{2a},$$

donde hemos considerado signo negativo delate del paréntesis, ya que el coche está frenando.

Sumando ambos desplazamientos se obtiene la expresión

$$x_t = x_r + x_b = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a}$$

---

5. Llamemos A al punto inicial, B al punto de máximo altura, C al punto donde la pelota regresa a la altura inicial y D al suelo.

a) Ya que en el punto de máxima altura B la velocidad es cero, tenemos que el tiempo necesario para llegar de A a B es

$$\cancel{v_b} = v_a - g t_{ab} \quad \longrightarrow \quad t_{ab} = \frac{v_a}{g} = \frac{20}{10} = 2.00 \text{ s}$$

b) La altura máxima alcanzada, y_b, es

$$y_b = y_a + v_a t_{ab} - \frac{1}{2} g t_{ab}^2 = 50 + 20 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 70.00 \text{ m}$$

c) El tiempo necesario para llegar de y_b a la altura $y_a = y_c = 50$ m es

$$y_c = y_b - \cancel{v_b t_{bc}} - \frac{1}{2} g t_{bc}^2 \quad \longrightarrow \quad t_{bc} = \sqrt{\frac{2(y_b - y_c)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (70 - 50)}{10}} = 2.00 \text{ s}$$

Nótese que en un lanzamiento vertical el tiempo de ascenso es igual al tiempo de descenso hasta la posición inicial, es decir, $t_{ab} = t_{ba}$.

El tiempo necesario para llegar a la posición inicial será $t_{ac} = t_{ab} + t_{bc} = 4.00$ s.

d) Ya que $v_b = 0$, la velocidad en C será

$$v_c = \cancel{v_b} - g t_{bc} = -10 \cdot 2 = -20 \text{ m/s}$$

De nuevo, nótese que en un lanzamiento vertical, la velocidad al regresar al punto de partida es igual a la velocidad inicial pero con signo contrario.

e) Ya que no nos piden el tiempo de caída entre los puntos C y D, podemos utilizar la expresión independiente del tiempo

$$\cancel{y_d} = y_c - \frac{1}{2} \left(\frac{v_d^2 - v_c^2}{g} \right) \quad \longrightarrow v_d = -\sqrt{v_c^2 + 2 g y_c} = -\sqrt{(-20)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 50} = -37.42 \text{ m/s},$$

donde hemos considerado el signo negativo delante de la raíz para dar cuenta de que la velocidad está dirigida hacia el sentido negativo del eje y.

---

6. Llamemos A al punto de lanzamiento, B al punto de altura máxima y C al suelo. Resolvemos el problema en dos partes: el ascenso de la bola hasta alcanzar la altura máxima (A→ B) y el descenso hasta el suelo (B→C).

Para el ascenso (A→ B) tenemos que $v_b = 0$, por lo que el tiempo de ascenso t_{ab} es

$$\cancel{v_b} = v_a - g t_{ab} \quad \longrightarrow \quad t_{ab} = \frac{v_a}{g} = \frac{55}{10} = 5.50 \text{ s}$$

Para poder calcular el tiempo de descenso necesitamos primero conocer la altura máxima y_b.

$$y_b = y_a + v_a t_{ab} - \frac{1}{2} g t_{ab}^2 = 25 + 55 \cdot 5.5 - \frac{10 \cdot 5.5^2}{2} = 176.25 \text{ m}$$

Para el descenso (B→C) tenemos $v_b = 0$ e $y_c = 0$. Obtenemos

$$\cancel{y_c} = y_b - \cancel{v_b} t_{bc} - \frac{1}{2} g t_{bc}^2 \quad \longrightarrow \quad t_{bc} = \sqrt{\frac{2y_b}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 176.25}{10}} = 5.94 \text{ s}$$

La bola está en el aire un total de $t_{ab} + t_{bc} = 11.44$ s.

A partir de t_{bc} obtenemos la velocidad con la que llega el suelo

$$v_c = \cancel{v_b} - g t_{bc} = -10 \cdot 5.94 = -59.40 \text{ m/s}$$

---

7. El problema es equivalente a considerar un lanzamiento vertical con $y_0 = 5$ m y $v_0 = 10$ m/s. Llamemos A al punto en el que se rompe el cable, B al punto de altura máxima y C al suelo. Dividimos el problema en dos partes: el ascenso (A→ B) y el descenso (B→ C)

   Para el tiempo de ascenso tenemos

$$v_b = v_a - g t_{ab} \quad \longrightarrow \quad t_{ab} = \frac{v_a}{g} = \frac{10}{10} = 1 \text{ s}$$

   La altura máxima alcanzada es

$$y_b = y_a + v_a t_{ab} - \frac{1}{2} g t_{ab}^2 = 5 + 10 \cdot 1 - \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 10 \text{ m}$$

   Conocida la altura máxima y_b, el tiempo de descenso t_{bc} será

$$\cancel{y_c} = y_b - \cancel{v_b t_{bc}} - \frac{1}{2} g t_{bc}^2 \quad \longrightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2y_b}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{10}} = 1.41 \text{ s}$$

   El tiempo total es $t_{ac} = t_{ab} + t_{bc} = 2.41$ s

---

8. Llamemos A al punto en que se deja caer la bola, B al punto situado 1 m por encima del suelo y C al suelo. Ya que tenemos información para el tramo B→C, comenzamos centrándonos en él. Podemos calcular la velocidad en B

$$\cancel{y_c} = y_b - v_b t_{bc} - \frac{1}{2} g t_{bc}^2 \quad \longrightarrow \quad v_b = \frac{y_b}{t_{bc}} - \frac{1}{2} g t_{bc} = \frac{1}{0.1} - \frac{10 \cdot 0.1}{2} = 9.5 \text{ m/s}$$

   Si quisiéramos expresar el sentido de la velocidad, escribiríamos $v_b = -9.5$ m/s.

   Cuando la piedra llega al suelo su velocidad será

$$v_c = -v_b - g t_{bc} = -9.5 - 10 \cdot 0.1 = -10.5 \text{ m/s}$$

   Conocida v_c calculamos la altura desde la que se dejó caer haciendo un balance entre los puntos A y C (también se podría hacer entre A y B y sumar 1 m) utilizando la expresión independiente del tiempo

$$\cancel{y_c} = y_a - \frac{1}{2} \left(\frac{v_c^2 - \cancel{v_a^2}}{g} \right) \quad \longrightarrow \quad y_a = \frac{v_c^2}{2g} = \frac{10.5^2}{2 \cdot 10} = 5.51 \text{ m}$$

---

9. Ya que no nos interesa el tiempo que transcurre hasta que se alcanza la altura máxima h, utilizamos la expresión independiente del tiempo. Para el primer cuerpo tenemos

$$h_1 = \cancel{y_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{v_f^2} - v_0^2}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g}$$

Para el segundo cuerpo tenemos $v_{02} = 2v_0$, de tal manera que

$$h_2 = \frac{(2v_0)^2}{2g} = \frac{4v_0^2}{2g} = 4h_1$$

---

10. El tiempo de caída de la primera piedra es t_1 y el de la segunda es $t_2 = t_1 - \Delta t$ ($\Delta_t = 1.6$) s. Haciendo un balance entre el lanzamiento y la llegada al suelo tenemos

$$\cancel{y_f} = h - \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \longrightarrow \quad h = \frac{1}{2}gt_1^2 \tag{3}$$

$$\cancel{y_f} = h - v_0t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \quad \longrightarrow \quad h = v_0(t_1 - \Delta t) + \frac{1}{2}g(t_1 - \Delta t)^2 \tag{4}$$

Igualando Ec.(3) y Ec.(4) y despejando t_1 obtenemos

$$t_1 = \frac{\Delta t(2v_0 - g\Delta t)}{2(v_0 - g\Delta t)} = \frac{1.6 \cdot (2 \cdot 32 - 10 \cdot 1.6)}{2 \cdot (32 - 10 \cdot 1.6)} = 2.40 \text{ s}$$

Usando t_1 en Ec.(3) calculamos la altura del acantilado, que resulta ser

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{10 \cdot 2.4^2}{2} = 28.80 \text{ m}$$

---

11. La altura desde la que se suelta el paquete es

$$h = y(2) = 3 \cdot 2^3 = 24.00 \text{ m}$$

En ese instante la velocidad es

$$v = \frac{dy}{dt} = 9t^2 \quad \longrightarrow \quad v_0 = v(2) = 36.00 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, el tiempo de caída será

$$\cancel{y_f} = h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \longrightarrow \quad t = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{-g} = \frac{-36 - \sqrt{36^2 + 2 \cdot 10 \cdot 24}}{-10} = 7.81 \text{ s}$$

donde hemos descartado una solución $t < 0$.

---

12. Utilizamos el subíndice 1 para referirnos al punto en el que se produce el fallo motor y 2 para la altura máxima. Desde que el cohete despega ($y_0 = 0$, $v_0 = 0$) hasta que se produce el fallo motor ($y_1 = 500$) la aceleración es positiva. La velocidad en ese instante es

$$y_1 = \cancel{y_0} + \frac{v_1^2 - \cancel{v_0^2}}{2a} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2ay_1} \tag{5}$$

Desde que se produce el fallo motor hasta que el cohete alcanza la altura máxima ($v_2 = 0$), la aceleración es negativa.

$$y_2 = y_1 - \frac{\cancel{v_2^2} - v_1^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} \tag{6}$$

Sustituyendo Ec.(5) en Ec.(6) obtenemos

$$y_2 = y_1 \left(1 + \frac{a}{g}\right) = 625 \text{ m}$$

donde hemos tomado $a = 2.5$ m/s^2 e $y_1 = 500$ m.

---

13. Comenzamos descomponiendo la velocidad

$$v_{x0} = v_0 \cos(55°), \quad v_{y0} = v_0 \sin(55°)$$

La posición x de la colisión será

$$x = v_{x0}t = v_0 \cos\theta t = 300 \cdot \cos(55°) \cdot 42 = 7227.06 \text{ m}$$

La posición y de la colisión será

$$y = v_{y0}t = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 = 300 \cdot \sin(55°) \cdot 42 - \frac{10 \cdot 42^2}{2} = 1501.32 \text{ m}$$

---

14. a) La distancia horizontal en la que la pelota alcanza el suelo será

$$x_f = v_{x0}t = v_0 \cos\theta t = 8 \cdot \cos(20°) \cdot 3 = 22.55 \text{ m}$$

b) La altura del edificio será

$$\cancel{y_f} = h - v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \longrightarrow \quad y_0 = v_{y0}t + \frac{1}{2}gt^2 = 8 \cdot \sin(20°) \cdot 3 + \frac{10 \cdot 3^2}{2} = 53.21 \text{ m}$$

Aquí hemos tomado un signo menos delante de v_{y_0} ya que la pelota se lanza hacia abajo. En este caso $\theta = 20°$. Perfectamente podríamos considerar un signo positivo delante de v_{y0} y tomar $\theta = -20°$.

---

15. La ecuación del alcance en un tiro parabólico es

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g},$$

por lo que el alcance es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial. Teniendo esto en cuenta, duplicar la velocidad implica cuadriplicar el alcance. Si x_m es el alcance cuando la velocidad inicial es v_0 y x'_m es el alcance cuando la velocidad inicial es $2v_0$, tenemos que

$$\frac{x'_m}{x_m} = \frac{(2v_0)^2}{v_0^2} = 4 \quad \longrightarrow \quad x'_m = 4x_m = 200 \text{ m}$$

---

16. El tiempo tras el cual impacta el chorro es

$$d = v_0 \cos\theta t \quad \longrightarrow \quad t = \frac{d}{v_0 \cos\theta} \tag{7}$$

La altura del chorro en el momento del impacto es

$$h = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{8}$$

Sustituyendo el tiempo dado por Ec.(7) en Ec.(8) obtenemos

$$h = \frac{\cancel{v_0} d \sin\theta}{\cancel{v_0} \cos\theta} - \frac{g d^2}{v_0^2 \cos^2\theta} = d \tan\theta - \frac{g d^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

---

17. El tiempo necesario para que el cuerpo alcance el suelo es (notar que ya que el disparo es horizontal $v_{x0} = v_0$)

$$d = v_0 t \quad \longrightarrow \quad t = \frac{d}{v_0} \tag{9}$$

Cuando el cuerpo alcanza el suelo se cumple

$$\cancel{y_f} = h + \cancel{v_{y0}} - \frac{1}{2} g t^2 \quad \longrightarrow \quad h = \frac{1}{2} g t^2 \tag{10}$$

Sustituyendo Ec.(9) en Ec.(10) y fijando $d = h$ obtenemos

$$\cancel{h} = \frac{h^{\cancel{2}} g}{2 v_0^2} \quad \longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}} \tag{11}$$

Para obtener la velocidad con la que llega al suelo, calculamos las componentes por separado

$$v_{xf} = v_{x0} = v_0$$
$$v_{yf} = \cancel{v_{y0}} - gt$$

Utilizando el tiempo obtenido en Ec.(9), la componente y de la velocidad final resulta

$$v_{yf} = -\frac{gd}{v_0} = -\frac{gh}{v_0}$$

Utilizando además la expresión para v_0 obtenida en Ec.(11) tenemos

$$v_{xf} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$
$$v_{yf} = -\sqrt{2gh}$$

Finalmente

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{\frac{gh}{2} + 2gh} = \sqrt{\frac{5gh}{2}}$$

---

18. Comenzamos expresando el tiempo en el que se produce la colisión t_c, es decir, el tiempo tras el que la bola lanzada por el primer niño alcanza la posición horizontal del segundo niño d. Ya que el lanzamiento es horizontal tenemos $v_{x0} = v_0$.

$$d = \cancel{x_0} + v_0 t_c \quad \longrightarrow \quad t_c = \frac{d}{v_0}$$

La altura de la primera bola en función del tiempo es (ya que el tiro es horizontal $v_{y0} = 0$)

$$y_1 = h + \cancel{v_{y0} t} - \frac{1}{2} g t^2$$

La altura de la segunda bola en función del tiempo es (recordar que la velocidad de la segunda bola es $2v_0$)

$$y_2 = \cancel{y_0} + 2v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para que se produzca la colisión $y_1 = y_2$ cuando $t = t_c$. Por lo tanto

$$y_1 = y_2 \quad \longrightarrow \quad h - \cancel{\frac{1}{2} g t_c^2} = 2v_0 t_c - \cancel{\frac{1}{2} g t_c^2} \quad \longrightarrow \quad h = \frac{2d\cancel{v_0}}{\cancel{v_0}} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{h}{2}$$

---

19. a) Antes de nada, expresamos la velocidad del avión (velocidad inicial v_0 de la bomba) en SI: $v_0 = 700$ km/h $= 194.44$ m/s. El tiempo que tarda la bomba el alcanzar el suelo será

$$\cancel{y_f} = y_0 - v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \longrightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin\theta - \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2 g y_0}}{-g}$$

$$t = \frac{194.44 \cdot \sin(45^\circ) - \sqrt{194.44^2 \cdot \sin^2(45^\circ) + 2 \cdot 10 \cdot 400}}{-10} = 2.65 \text{ s}$$

Nótese que no hemos considerado la solución $t < 0$.

b) Para calcular la velocidad final obtenemos cada una de sus componentes por separado

$$v_{xf} = v_0 \cos\theta = 194.44 \cdot \cos(45^\circ) = 137.49 \text{ m/s}$$

$$v_{yf} = -v_0 \sin\theta - g t = -194.44 \cdot \sin(45^\circ) - 10 \cdot 2.65 = -163.99 \text{ m/s}$$

La velocidad final es

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{137.49^2 + 163.99^2} = 214.00 \text{ m/s}$$

c) La distancia horizontal recorrida es

$$x_f = v_0 \cos\theta t = 194.44 \cdot \cos(45^\circ) \cdot 2.65 = 364.35 \text{ m}$$

---

20. a) Comenzamos calculando el tiempo en el que la flecha alcanza la posición del asistente ($x_f = 150$ m)

$$x_f = v_0 \cos\theta t \quad \longrightarrow \quad t = \frac{x_f}{v_0 \cos\theta} = \frac{150}{45 \cdot \cos 50°} = 5.19 \text{ s}$$

En ese instante, la altura de la flecha es

$$h = \cancel{y_0} + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 = 45 \cdot \sin(50°) \cdot 5.19 - \frac{10 \cdot 5.19^2}{2} = 44.23 \text{ m}$$

El enunciado nos dice que la manzana se lanza con la velocidad mínima necesaria para ser ensartada por la flecha, por lo que imponemos que la altura máxima alcanzada por la manzana sea $h = 44.23$ m. Es decir, buscamos que la velocidad de la manzana v_{mf} sea nula cuando $y_{mf} = h$.

$$h = \cancel{y_{m0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{v_{mf}^2} - v_{m0}^2}{g}\right) \quad \longrightarrow \quad v_{m0} = \sqrt{2hg} = \sqrt{2 \cdot 44.23 \cdot 10} = 29.74 \text{ m/s}$$

b) El tiempo de ascenso de la manzana es

$$\cancel{v_{mf}} = v_{m0} - g t_m \quad \longrightarrow \quad t_m = \frac{v_{0m}}{g} = 2.97 \text{ s}$$

Por lo tanto, la manzana debe lanzarse $\Delta t = t - t_m = 5.19 - 2.97 = 2.22$ s después.

---

21. El enunciado nos dice que $x_m = 3y_m$. Utilizando las expresiones para el alcance máximo y la altura máxima obtenemos

$$\frac{\cancel{v_0^2} \sin 2\theta}{\cancel{g}} = \frac{3\cancel{v_0^2} \sin^2\theta}{2\cancel{g}}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ a la izquierda de la igualdad simplificamos la expresión a

$$2\cancel{\sin\theta} \cos\theta = \frac{3 \sin^{\cancel{2}}\theta}{2} \quad \longrightarrow \quad \tan\theta = \frac{4}{3} \quad \longrightarrow \quad \theta = \arctan\frac{4}{3} = 53.13°$$

---

22. El alcance de un tiro parabólico es

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Vemos que el alcance será máximo cuando $\sin 2\theta$ sea máximo. $\sin x$ es máximo cuando $x = \pi/2$ ($x = 90°$). Por lo tanto

$$2\theta = 90°, \quad \theta = 45°$$

Otra forma de llegar a este resultado es imponer

$$\frac{dx_m}{d\theta} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g} = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos 2\theta = 0$$

$\cos x = 0$ cuando $x = \pi/2$. Por lo tanto

$$2\theta = 90° \quad \longrightarrow \quad \theta = 45°$$

---

23. El ángulo que maximiza el alcance es $\theta = 45°$. Por lo tanto, resolvemos de forma inmediata

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad \longrightarrow \quad g = \frac{v_0^2}{x_m} = \frac{9}{15} = 0.6 \text{ m/s}^2$$

---

24. El alcance de un tiro parabólico es

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Vemos que el alcance máximo será el mismo si $\sin 2\theta_1 = \sin 2\theta_2$. Utilizamos la propiedad de la función seno: $\sin(\pi - x) = \sin x$. De esta manera, utilizando grados en lugar de radianes

$$180 - 2\theta_1 = 2\theta_2 \quad \longrightarrow \quad \theta_2 = 20°$$

Otra posibilidad sería comenzar calculando el alcance de la primera bola

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_1}{g} = \frac{25^2 \cdot \sin(2 \cdot 70°)}{20} = 40.17 \text{ m}$$

A continuación, imponemos que el alcance de la segunda bola sea idéntico

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_2}{g} \quad \longrightarrow \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x_m g}{v_0^2}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{40.17 \cdot 10}{25^2}\right) = 20°$$

Nótese que este segundo método no serviría en caso de conocer $\theta_2 = 20°$ y buscar $\theta_1 = 70°$, ya que arcsin siempre nos devolverá el ángulo más pequeño que cumple la condición.

b) El tiempo de vuelo de la primera bola es

$$x_m = v_0 \cos\theta_1 t_1 \quad \longrightarrow \quad t_1 = \frac{x_m}{v_0 \cos\theta_1} = \frac{40.17}{25 \cdot \cos(70°)} = 4.70 \text{ s}$$

El tiempo de vuelo de la segunda bola es

$$x_m = v_0 \cos\theta_2 t_2 \quad \longrightarrow \quad t_2 = \frac{x_m}{v_0 \cos\theta_2} = \frac{40.17}{25 \cdot \cos(20°)} = 1.71 \text{ s}$$

Por lo tanto, la segunda bola debe lanzarse $\Delta t = t_1 - t_2 = 2.99$ s después.

---

25. Calcularemos la posición horizontal s del equipo cuando éste alcanza el agua ($y = 0$). Para ello primero obtenemos el tiempo necesario para llegar a dicha posición.

$$s = v_0 \cos\theta t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v_0 \cos\theta} \tag{12}$$

Utilizamos este tiempo en la ecuación para la altura cuando $y = 0$.

$$0 = h + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = h + s\tan\theta - \frac{g s^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \quad \Rightarrow \quad -0.0889 s^2 + \sqrt{3} s + 8.75 = 0$$

Que es un polinomio con soluciones $s_1 = -4.17$ m y $s_2 = 23.65$ m. La solución que nos interesa es s_2. Sustituyendo este valor de distancia en Ec.(12) obtenemos que el tiempo de vuelo es $t = 3.15$ s. Durante este tiempo el barco avanza una distancia $d = v_b t = 1.42$ m. Por lo tanto, $D = s_2 + d = 25.07$ m.

---

26. La altura de la manzana (y_m) y de la flecha (y_f) vienen dadas por

$$y_m = h + h' - \frac{1}{2}gt^2 \tag{13}$$

$$y_f = h' + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{14}$$

La flecha alcanza la coordenada $x = d$ donde chocaría con la manzana en un tiempo t_c.

$$d = v_0 \cos\theta t_c \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{d}{v_0 \cos\theta} \tag{15}$$

Sustituyendo este tiempo en Ec.(13) y Ec.(14) obtenemos la altura de la flecha y la manzana cuando la primera alcanza la coordenada x de la segunda

$$y_{mc} = h + h' - \frac{d^2 g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \tag{16}$$

$$y_{fc} = h' + d\tan\theta - \frac{d^2 g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \tag{17}$$

Habida cuenta de que h y d son los catetos de un triángulo rectángulo, resulta

$$\frac{d}{\cos\theta} = \frac{h}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad h = d\tan\theta$$

Por lo tanto, Ec.(16) y Ec.(17) son ecuaciones idénticas y las matemáticas nos dicen que la flecha alcanzará siempre a la manzana independientemente del valor de v_0. Sin embargo, la única solución física que tiene sentido es aquella en la que la colisión se produce antes de que la manzana llegue al suelo (es decir, $y_{mc} = y_{fc} \geq 0$). Para obtener el valor mínimo de v_0 que garantiza esta condición imponemos $y_{mc} = y_{fc} = 0$ en Ec.(16) o Ec.(17).

$$y_{md} = h + h' - \frac{d^2 g}{2v_0^2 \cos^2\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad h + h' = \frac{g(d^2 + h^2)}{2v_0^2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{g(d^2 + h^2)}{2(h + h')}} = 11 \text{ m/s}$$

donde en el primer paso hemos dado cuenta de que $\cos^2\theta = d^2/(d^2 + h^2)$.

La velocidad inicial de la flecha debe ser $v_0 \in [11, \infty)$.

---

27. Buscamos las componentes de la velocidad (v_{xp}, v_{yp}) en el punto de interés ($y_p = y_m/2$). Para ello calcularemos el tiempo que el proyectil tarda en llegar a dicho punto y, a continuación, la velocidad en dicho tiempo. La altura del punto de interés es

$$y_p = \frac{y_m}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{4g}$$

O, en función del tiempo,

$$y_p = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

Igualando ambas expresiones llegamos a un polinomio de segundo grado de la forma

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin\theta t + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{4g} = 0$$

con soluciones

$$t = \frac{v_0}{g}\left(\sin\theta \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$

Introducimos este tiempo en la ecuación para la componente y de la velocidad

$$v_{yp} = v_0 \sin\theta - gt = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \sin\theta$$

La componente x de la velocidad en dicho punto coincide con la componente x de la velocidad inicial ($v_{xp} = v_0 \cos\theta$).

Conocida entonces la velocidad en el punto de interés, simplemente imponemos la condición indicada en el enunciado.

$$v_p = \frac{3}{4}v_0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{v_{xp}^2 + v_{yp}^2} = \frac{3}{4}\sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} \quad \Rightarrow \quad v_{xp}^2 + v_{yp}^2 = \frac{9}{16}v_{x0}^2 + v_{y0}^2$$

$$v_0^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}v_0^2\sin^2\theta = \frac{9}{16}v_0^2\cos^2\theta + \frac{9}{16}v_0^2\sin^2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\sqrt{7} = 69.3°$$

---

28. La velocidad angular será

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ rad/s}$$

La aceleración tangencial nos la da el enunciado. La aceleración normal será

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 4.5 \text{ m}/s^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{0.5^2 + 4.5^2} = 4.53 \text{ m/s}^2$$

---

29. Podemos estimar la velocidad de traslación a partir del período, que sabemos que es 1 año ($365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3.154 \cdot 10^7$ s).

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

La aceleración normal es

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^{\cancel{2}}}{T^2 \cancel{R}} = \frac{4\pi^2 \cdot 1.496 \cdot 10^{11}}{(3.154 \cdot 10^7)^2} = 5.94 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

---

30. a) El período de rotación es de 24 h (86400 s). La aceleración normal es

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^{\cancel{2}}}{T^2 \cancel{R}} = \frac{4\pi^2 \cdot 6.378 \cdot 10^6}{(86400)^2} = 3.38 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

Nótese que esta aceleración equivale a únicamente el 0.3 % de la aceleración de la gravedad.

b) Un punto situado en el polo norte no se mueve durante la rotación de la Tierra, por lo que $a_n = 0$.

---

31. Expresamos la velocidad angular en SI

$$\omega = 2.51 \cdot 10^4 \text{ rev/min} = \frac{2\pi \cdot 2.51 \cdot 10^4}{60} \text{ rad/s} = 2628.47 \text{ rad/s}$$

La aceleración angular será

$$\omega = \cancel{\omega_0} + \alpha t \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2628.47}{3.2} = 821.40 \text{ rad/s}^2$$

El ángulo barrido será

$$\theta = \cancel{\theta_0} + \cancel{\omega_0 t} + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{821.40 \cdot 3.2^2}{2} = 4205.57 \text{ rad}$$

---

32. Utilizando SI, la velocidad angular de la centrifugadora es

$$\omega_0 = \frac{3600 \cdot 2\pi}{60} = 120\pi \text{ rad/s}$$

El ángulo recorrido tras 50 vueltas es

$$\theta = 2\pi \cdot 50 = 100\pi \text{ rad}$$

Ya que no nos interesa el tiempo que pasa hasta que se alcanza el reposo, utilizamos la expresión independiente del tiempo

$$\theta = \cancel{\theta_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{\omega^2} - \omega_0^2}{\alpha}\right) \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{\omega_0^2}{2\theta} = \frac{(120\pi)^2}{100\pi} = 72\pi \text{ rad/s}^2$$

Para dar cuenta de que la aceleración angular tiene sentido opuesto a la velocidad angular, indicamos $\alpha = -72\pi$ rad/s^2.

---

33. Primero de todo, expresamos el ángulo recorrido en SI.

$$\theta = 2\pi \cdot 37 = 74\pi \text{ rad}$$

La velocidad angular de la rueda viene dada por

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{18}$$

El ángulo barrido por la rueda es

$$\theta = \cancel{\theta_0} + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{19}$$

Nuestras incógnitas son ω_0 y α. Despejamos ω_0 en Ec.(19) y sustituimos en Ec.(18).

$$\omega_0 = \frac{\theta}{t} - \frac{1}{2}\alpha t \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{\theta}{t} - \frac{1}{2}\alpha t + \alpha t = \frac{\theta}{t} + \frac{1}{2}\alpha t$$

Despejando α obtenemos

$$\alpha = \frac{2}{t}\left(\omega - \frac{\theta}{t}\right) = \frac{2}{3}\left(98 - \frac{74\pi}{3}\right) = 13.67 \text{ rad/s}^2$$

---

34. a) Llamemos A al punto inicial en el que la plataforma comienza a acelerar, B al punto en el que deja de acelerar y comienza a moverse a velocidad angular constante, C al punto en el que comienza a frenar y D el momento en el que se frena por completo. El ángulo recorrido en B será

$$\theta_b = \cancel{\theta_a} + \cancel{\omega_a t_{ab}} + \frac{1}{2}\alpha_{ab}t_{ab}^2 = \frac{1.5 \cdot 4^2}{2} = 12 \text{ rad}$$

La velocidad angular en B, que se mantendrá constante hasta alcanzar el punto C, es

$$\omega_b = \alpha_{ab}t_{ab} = 1.5 \cdot 4 = 6 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto, el ángulo recorrido en C es

$$\theta_c = \theta_b + \omega_b t_{bc} + \cancel{\frac{1}{2}\alpha_{bc}t_{bc}^2} = 12 + 6 \cdot 30 = 192 \text{ rad}$$

Para calcular θ_d necesitamos conocer la aceleración angular α_{cd}. Ya que $\omega_c = \omega_c$ y $\omega_d = 0$

$$\cancel{\omega_d} = \omega_c - \alpha_{cd}t_{cd} \quad \longrightarrow \quad \alpha_{cd} = \frac{\omega_c}{t_{cd}} = \frac{6}{3} = 2 \text{ rad/s}^2 \text{ (frenando)}$$

Conocida $\alpha_c d$ calculamos θ_d.

$$\theta_d = \theta_c + \omega_c t_{cd} - \frac{1}{2}\alpha_{cd}t_{cd}^2 = 192 + 6 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 3^2}{2} = 201 \text{ rad}$$

El número de vueltas que da la plataforma es

$$n = \frac{\theta_d}{2\pi} = \frac{201}{2\pi} = 31.99$$

b) El espacio recorrido por un punto de la periferia es

$$s = \theta_d R = 201 \cdot 2 = 402 \text{ m}$$

c) En $t_1 = 2$ s la plataforma se encuentra entre A y B, es decir, acelerando a un ritmo de $\alpha_1 = \alpha_{ab} = 1.5$ rad/s^2. La velocidad angular es

$$\omega_1 = \alpha_1 t_1 = 1.5 \cdot 2 = 3 \text{ rad/s}$$

En consecuencia

$$v_1 = \omega_1 R = 3 \cdot 2 = 6 \text{ m/s}$$

$$a_{n1} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{6^2}{2} = 18 \text{ m/s}^2$$

$$a_{t1} = \alpha_1 R = 1.5 \cdot 2 = 3 \text{ m/s}^2$$

En $t_2 = 20$ s la plataforma se encuentra entre B y C, es decir, moviéndose a velocidad angular constante $\omega_2 = 6$ rad/s. Entonces

$$v_2 = \omega_2 R = 6 \cdot 2 = 12 \text{ m/s}$$

$$a_{n2} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{12^2}{2} = 72 \text{ m/s}^2$$

$$a_{t2} = 0 \qquad \text{(No hay aceleración angular)}$$

En $t_3 = 35$ s la plataforma se encuentra entre C y D, es decir, reduciendo su velocidad angular a un ritmo de $\alpha_3 = \alpha_{cd} = 2$ rad/s^2. Tras 1 segundo ($\Delta t = t_3 - t_{ac} = 1$ s) de desaceleración, su velocidad angular es

$$\omega_3 = \omega_c - \alpha_3 \Delta t = 6 - 2 \cdot 1 = 4 \text{ rad/s}$$

En consecuencia

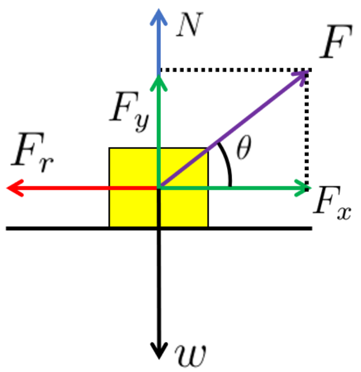
$$v_3 = \omega_3 R = 4 \cdot 2 = 8 \text{ m/s}$$

$$a_{n3} = \frac{v_3^2}{R} = \frac{8^2}{2} = 32 \text{ m/s}^2$$

$$a_{t3} = -\alpha_3 R = -2 \cdot 2 = -4 \text{ m/s}^2$$

3. DINÁMICA

1. La fuerza mínima que habría que aplicar para que la caja comience a moverse es aquella que tiene una componente x que iguala al rozamiento estático.



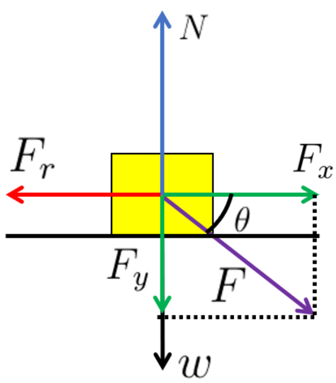
$$F_x = F_r \qquad \longrightarrow \qquad F\cos\theta = \mu N = \mu(w - F_y) = \mu(mg - F\sin\theta)$$

Despejando F obtenemos

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

---

2. El bloque deslizará con velocidad constante si $\sum F_x = 0$.



El equilibrio de fuerzas será

$$F_x = F_r \qquad \longrightarrow \qquad F\cos\theta = \mu N = \mu(w + F_y) = \mu(mg + F\sin\theta)$$

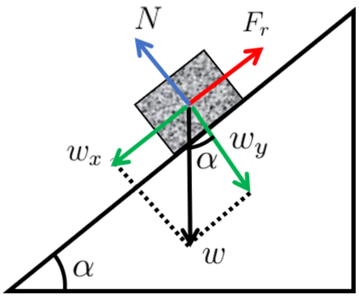
Despejando F obtenemos

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$

---

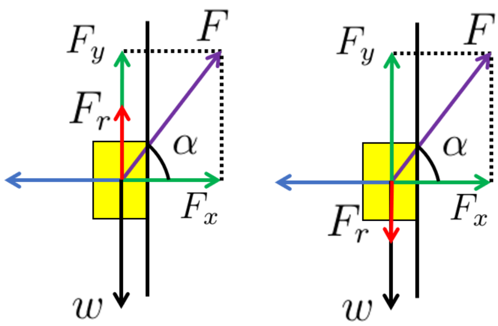
3. El ángulo mínimo necesario para que el cuerpo deslice es aquel para el cual $\sum F = 0$. Las únicas fuerzas que participan en el movimiento son la componente x del peso y el rozamiento.

$$mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \arctan\mu = \arctan 0.3 = 16.7^\circ$$



---

4. La fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento. Por lo tanto, en la situación del apartado a) el rozamiento se opone al peso, mientras que en la situación del apartado b) el rozamiento tiene el mismo sentido que el peso. En la figura se muestran los diagramas de fuerzas para las situaciones límite en las que el bloque comienza a deslizar hacia abajo (panel izquierdo) y hacia arriba (panel derecho). Por conveniencia, el ejercicio se resuelve considerando en lugar del ángulo θ su complementario $\alpha = 90^\circ - \theta$.



a) El cuerpo no deslizará hacia abajo por la pared cuando

$$F_y + F_r = w \quad \longrightarrow \quad F \sin\alpha + \mu N = w \quad \longrightarrow \quad F \sin\alpha + \mu F \cos\alpha = w$$

Despejando F obtenemos

$$F = \frac{w}{\sin\theta + \mu\cos\theta} = \frac{88.9}{\sin(50^\circ) + 0.56 \cdot \cos(50^\circ)} = 78.95 \text{ N}$$

b) El cuerpo comenzará a deslizar hacia arriba cuando

$$F_y = F_r + w \quad \longrightarrow \quad F \sin\alpha = \mu F \cos\alpha + w$$

Despejando F obtenemos

$$F = \frac{w}{\sin\theta - \mu\cos\theta} = \frac{88.9}{\sin(50^\circ) - 0.56 \cdot \cos(50^\circ)} = 218.92 \text{ N}$$

---

5. a) Comprobamos si la componente x de la fuerza es suficiente para poner el trineo en movimiento.

$$F_x = F\cos\theta = 100 \cdot \cos(40^\circ) = 76.60 \text{ N}$$

La fuerza de rozamiento estático es

$$F_{re} = \mu_e N = \mu_e(w - F_y) = \mu_e(mg - F\sin\theta) = 0.2 \cdot (50 \cdot 10 - 100 \cdot \sin(40^\circ)) = 87.14 \text{ N}$$

Ya que $F_{re} > F_x$, el trineo no se mueve y $F_r = F_x = 76.60$ N.

b) En este caso

$$F_x = F\cos\theta = 140 \cdot \cos(40^\circ) = 107.25 \text{ N}$$

$$F_{re} = \mu_e N = \mu_e(w - F_y) = \mu_e(mg - F\sin\theta) = 0.2 \cdot (50 \cdot 10 - 140 \cdot \sin(40^\circ)) = 82.00 \text{ N}$$

Ya que $F_x > F_{re}$, el trineo se mueve y el rozamiento dinámico gobernará el movimiento.

$$F_r = \mu_d N = \mu_d(w - F_y) = \mu_d(mg - F\sin\theta) = 0.15 \cdot (50 \cdot 10 - 140 \cdot \sin(40^\circ)) = 61.50 \text{ N}$$

De la segunda ley de Newton obtenemos la aceleración del trineo.

$$\sum F_x = ma_x \quad \longrightarrow \quad F_x - F_r = ma_x \quad \longrightarrow \quad a_x = \frac{F_x - F_r}{m} = \frac{107.25 - 61.50}{50} = 0.92 \text{ m/s}^2$$

---

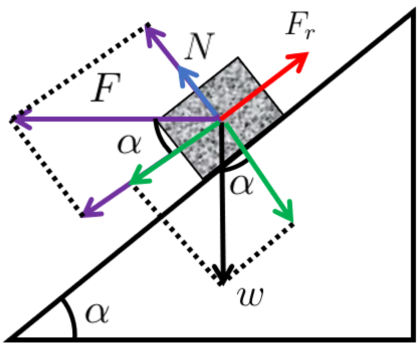
6. a) El bloque bajará deslizando a velocidad constante si $\sum F = 0$ y $N \geq 0$.

$$F_x + w_x - F_r = 0 \quad \longrightarrow \quad F\cos\theta + mg\sin\theta - \mu(mg\cos\theta - F\sin\theta) = 0$$

Despejando F obtenemos

$$F = \frac{mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

Esta fuerza hará que el cuerpo deslice hacia abajo siempre y cuando la componente y de la fuerza sea menor que la componente y del peso, es decir, si $N \geq 0$. Este extremo es justamente el que se nos pregunta en el apartado b).



b)

$$F_y = w_x \quad \longrightarrow \quad F\sin\theta = mg\cos\theta \quad \longrightarrow \quad F = \frac{mg}{\tan\theta} \tag{1}$$

c) Si $F_y = w_y$ entonces $N = F_r = 0$, por lo que las únicas fuerzas que actúan son F_x y w_x.

$$F_y + w_y = ma \quad \longrightarrow \quad F\cos\theta + mg\sin\theta = ma$$

Utilizando la expresión de F obtenida en Ec.(1) resulta

$$\frac{mg\cos^2\theta}{\sin\theta} + mg\sin\theta = ma$$

Multiplicando arriba y abajo por $\sin\theta$ obtenemos

$$mg\left(\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta}\right) = ma$$

Recordando que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ obtenemos una expresión sencilla para la aceleración.

$$a = \frac{g}{\sin\theta}$$

---

7. Haciendo un balance de fuerzas en el cuerpo de masa m obtenemos

$$T_3 = w = mg$$

La tensión T_3 del cable actuará sobre el punto de unión con los otros dos cables. El equilibrio de fuerzas en ambos ejes es

$$T_{x2} - T_{x1} = 0 \quad \longrightarrow \quad T_1\cos\alpha - T_2\cos\beta = 0 \tag{2}$$

$$T_{y2} + T_{y1} = T_3 \quad \longrightarrow \quad T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta = mg, \tag{3}$$

donde hemos dado cuenta de $T_3 = w = mg$.

Despejando T_2 en Ec.(2) resulta

$$T_2 = T_1\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

Sustituyendo esta expresión en Ec.(3) obtenemos

$$T_1\sin\alpha + T_1\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta} = mg$$

Despejando T_1 resulta

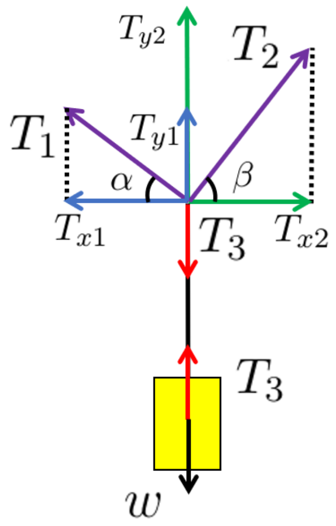
$$T_1 = \frac{mg}{\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta} + \sin\alpha} = \frac{mg\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta)$$

obtenemos el resultado sugerido en el enunciado.

$$T_1 = \frac{mg\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$



---

8. Consideramos como positivas aquellas fuerzas que apuntan en el sentido de movimiento (ver figura). Para el cuerpo de masa m_1 tenemos

$$\sum F = m_1 a \quad \longrightarrow \quad T - m_1 g = m_1 a \tag{4}$$

Y para el cuerpo de masa m_2

$$\sum F = m_2 a \quad \longrightarrow \quad m_2 g - T = m_2 a \tag{5}$$

Despejando T en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda obtenemos

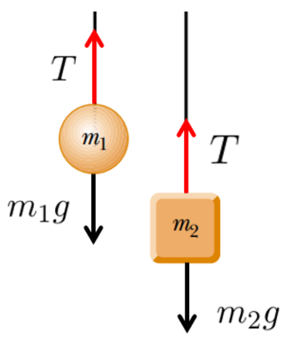
$$m_2 g - m_1 a - m_1 g = m_2 a$$

Despejando obtenemos la aceleración del sistema

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}$$

Sustituyendo esta aceleración en Ec.(4) o Ec.(5) obtenemos la tensión

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$



---

9. Para el bloque de masa m_1 tenemos

$$\sum F = 0 \quad \longrightarrow \quad T - m_1 g = 0 \tag{6}$$

Para el bloque de masa m_2 tenemos

$$\sum F = 0 \quad \longrightarrow \quad T - m_2 g \sin\theta = 0 \tag{7}$$

Por lo tanto

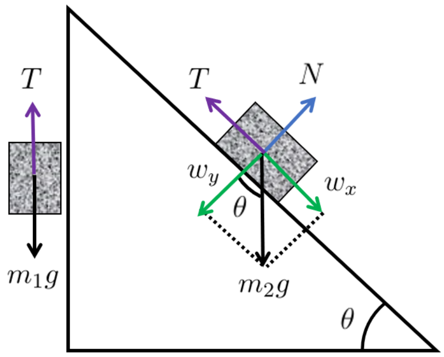
$$m_2 \sin\theta = m_1 \tag{8}$$

Si se rompe la cuerda, en el bloque de masa m_1 tendremos

$$\sum F = m_1 a_1 \quad \longrightarrow \quad m_1 g = m_1 a_1 \quad \longrightarrow \quad a_1 = g \tag{9}$$

En el bloque de masa m_2

$$\sum F = m_2 a_2 \quad \longrightarrow \quad m_2 g \sin\theta = m_2 a \quad \longrightarrow \quad a_2 = g\sin\theta \tag{10}$$



---

10. Para el cuerpo de masa m_1 tenemos

$$\sum F = m_1 a \quad \longrightarrow \quad T - m_1 g = m_1 a \tag{11}$$

Para el cuerpo de masa m_2 tenemos

$$\sum F = m_2 a \quad \longrightarrow \quad m_2 g \sin\theta - T = m_2 a \tag{12}$$

Despejando T en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda obtenemos

$$m_2 g \sin\theta - m_1 a - m_1 g = m_2 a$$

Despejando obtenemos la aceleración del sistema

$$a = \frac{(m_2 \sin\theta - m_1) g}{m_1 + m_2}$$

Sustituyendo esta aceleración en Ec.(11) o Ec.(12) obtenemos la tensión

$$T = \frac{m_1 m_2 g(\sin\theta + 1)}{m_1 + m_2}$$

---

11. El balance de fuerzas para el cuerpo A es

$$T - F_r - w_x = 0 \quad \longrightarrow \quad T - \mu mg \cos\alpha - mg \sin\alpha = 0 \tag{13}$$

En el caso del cuerpo B resulta

$$w_x - T - F_r = 0 \quad \longrightarrow \quad mg \sin\beta - T - \mu mg \cos\beta = 0 \tag{14}$$

Despejando T en Ec.(13) y sustituyendo en Ec.(14) obtenemos

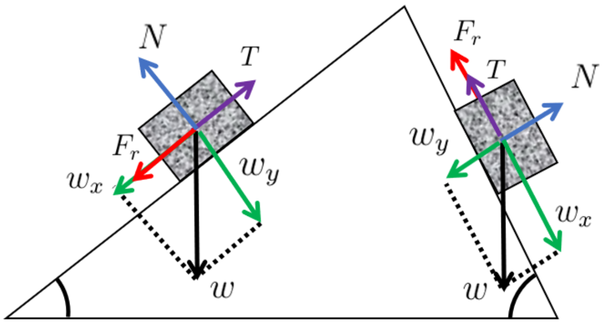
$$mg \sin\beta - \mu mg \cos - mg \sin\alpha - \mu mg \cos\beta = 0$$

Despejando obtenemos μ

$$\mu = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha} = \frac{\sin(40°) - \sin(23°)}{\cos(40°) + \cos(23°)} = 0.15$$

Sustituyendo este valor en Ec.(13) o Ec.(14) obtenemos la tensión. Por ejemplo, utilizando Ec.(13)

$$T = mg(\mu \cos\alpha + \sin\alpha) = 10 \cdot (0.15 \cdot \cos(23°) + \sin(23°)) = 5.29 \text{ N}$$



---

12. El enunciado no nos dice si el sistema se mueve con aceleración o si está en equilibrio. En caso de que se mueva, lo hará en la dirección del cuerpo que tenga mayor w_x. Ya que $m_1 g \sin\alpha = 25$ N y $m_2 g \sin\beta = 34.64$ N sabemos que, si el sistema se mueve, el cuerpo de masa m_2 descenderá y el cuerpo de masa m_1 ascenderá. Teniendo esto en cuenta, para el bloque de masa m_1 tenemos

$$\sum F = m_1 a \quad \longrightarrow \quad T - m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha = m_1 a \tag{15}$$

Para el cuerpo de masa m_2 tenemos

$$\sum F = m_2 a \quad \longrightarrow \quad m_2 g \sin\beta - T - \mu m_2 g \cos\beta = m_2 a \tag{16}$$

Sumando ambas expresiones (o despejando T en una y sustituyendo en la otra) obtenemos

$$m_2 g \sin\beta - \mu m_2 g \cos\beta - m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha = (m_1 + m_2) a$$

Reordenando términos y despejando obtenemos la aceleración

$$a = \frac{g[m_2(\sin\beta - \mu \cos\beta) - m_1(\mu \cos\alpha + \sin\alpha)]}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{10 \cdot [4 \cdot (\sin(60°) - 0.1 \cdot \cos(60°)) - 5 \cdot (0.1 \cdot \cos(30°) + \sin(30°))]}{5+4} = 0.37 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo este valor en Ec.(15) o Ec.(16) obtenemos la tensión. Por ejemplo, de Ec.(15) obtenemos

$$T = m_1[g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a] = 5 \cdot [10 \cdot (\sin(30°) + 0.1 \cdot \cos(30°)) + 0.37] = 31.18 \text{ N}$$

---

13. Para el cuerpo de masa m_2 tenemos

$$\sum F = m_2 a \quad \longrightarrow \quad T - m_2 g = m_2 a \tag{17}$$

Para el cuerpo de masa m_1 tenemos

$$\sum F = m_1 a \quad \longrightarrow \quad F\cos\theta - T - F_r = m_1 g$$

La fuerza normal es $N = m_1 g - F\sin\theta$, por lo que la fuerza de rozamiento es

$$F_r = \mu(m_1 g - F\sin\theta)$$

De este modo el balance de fuerzas desarrollado para el cuerpo de masa m_2 resulta

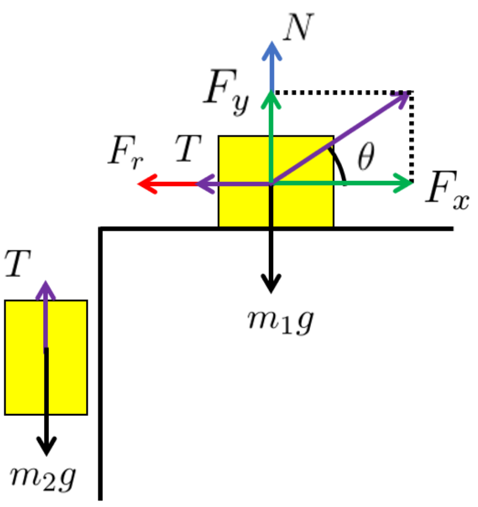
$$F\cos\theta - T - \mu(m_1 g - F\sin\theta) = m_1 g \tag{18}$$

Despejando T en Ec.(17) y sustituyendo en Ec.(18) obtenemos

$$F\cos\theta - m_2 a - m_2 g - \mu(m_1 g - F\sin\theta) = m_1 g$$

Despejando obtenemos la aceleración del sistema

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu\sin\theta) - g(m_2 + \mu m_1)}{m_1 + m_2}$$



---

14. El balance de fuerzas para cada uno de los cuerpos es

$$T_1 - m_1 g \sin\theta - \mu m_1 g \cos\theta = m_1 a \tag{19}$$

$$T_2 - T_1 - \mu m_2 g = m_2 a \tag{20}$$

$$F + m_3 g - T_2 = m_3 a \tag{21}$$

Sumando estas tres expresiones se eliminan las tensiones y resulta

$$F + g[m_3 - \mu m_2 - m_1(\sin\theta + \mu\cos\theta)] = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

Despejando F obtenemos

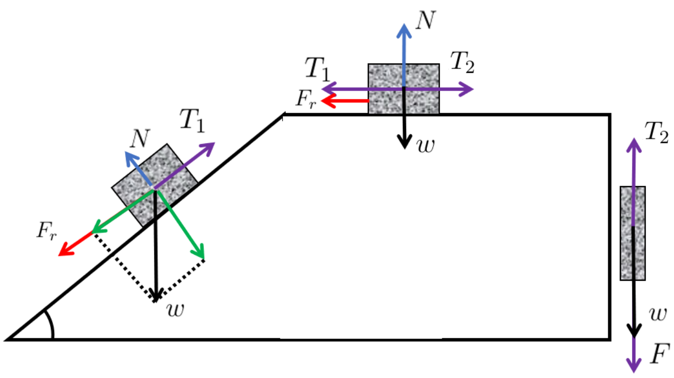
$$F = (20 + 24 + 16) \cdot 1.5 - 10 \cdot [16 - 0.2 \cdot 24 - 20 \cdot (\sin(36.7°) + 0.2 \cdot \cos(36.7°))] = 129.60 \text{ N}$$

El valor de T_1 lo obtenemos directamente de Ec.(19).

$$T_1 = m_1(a + g\sin\theta + \mu g\cos\theta) = 20 \cdot (1.5 + 10 \cdot \sin(36.7°) + 0.2 \cdot 10 \cdot \cos(36.7°)) = 181.60 \text{ N}$$

T_2 podemos obtenerlo de Ec.(20) o Ec.(21). Por ejemplo, utilizando Ec.(20):

$$T_2 = m_2 a + T_1 + \mu m_2 g = 181.60 + 24 \cdot 1.5 + 0.2 \cdot 24 \cdot 10 = 265.60 \text{ N}$$



---

15. a) La aceleración se puede obtener considerando que los tres cuerpos forman un único cuerpo de masa $m = m_1 + m_2 + m_3$.

$$F = ma \quad \longrightarrow \quad a = \frac{F}{m} = \frac{18}{9} = 2 \text{ m/s}^2$$

b) Para obtener las fuerzas de contacto debemos tener en cuenta que los bloques ejercen entre sí fuerzas de igual magnitud, pero de sentidos opuestos. Si llamamos P a la fuerza de contacto entre los bloques 1 y 2 y Q a la fuerza de contacto entre los bloques 2 y 3, tenemos

$$F - P = m_1 a \quad \text{(bloque 1)}$$

$$P - Q = m_2 a \quad \text{(bloque 2)}$$

$$Q = m_3 a \quad \text{(bloque 3)}$$

Nótese que resolviendo este sistema de ecuaciones con F como incógnita se obtiene el resultado del apartado a).

De la ecuación para el bloque 3 obtenemos que la fuerza de contacto es $Q = 8$ N. Podemos calcular P utilizando la ecuación para el bloque 1 o 2.

$$F - P = m_1 a \quad \longrightarrow \quad P = F - m_1 a = 18 - 2 \cdot 2 = 14 \text{ N}$$

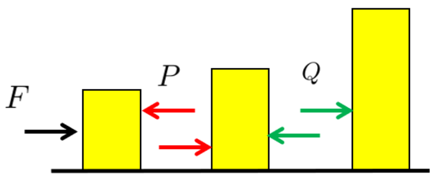
$$P - Q = m_2 a \quad \longrightarrow \quad P = Q + m_2 a = 8 + 3 \cdot 2 = 14 \text{ N}$$

c) Las fuerzas netas que actúan sobre cada bloque son

$$F - P = 18 - 14 = 4 \text{ N} \quad \text{(bloque 1)}$$

$$P - Q = 14 - 8 = 6 \text{ N} \quad \text{(bloque 2)}$$

$$Q = 8 \text{ N} \quad \text{(bloque 3)}$$



---

16. El agua no se verterá si la fuerza centrífuga iguala o supera al peso. Ya que nos pide el valor mínimo de la velocidad, la solución es aquella velocidad que genera una fuerza centrífuga que iguala al peso (es decir, $T = 0$).

$$mg = m\frac{v^2}{r} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{rg} = \sqrt{1 \cdot 10} = 3.16 \text{ m/s}$$

---

17. a) Cuando la masa se encuentra en el punto más alto de la circunferencia, la fuerza centrífuga debe ser igual o mayor que el peso para evitar que la masa caiga.

$$mg = m\frac{v^2}{r} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{rg} = \sqrt{0.8 \cdot 10} = 2.83 \text{ m/s}$$

b) Cuando la masa se encuentra en el punto más bajo de la circunferencia, la suma del peso y la fuerza centrífuga no deben superar el valor de tensión máxima que soporta la cuerda.

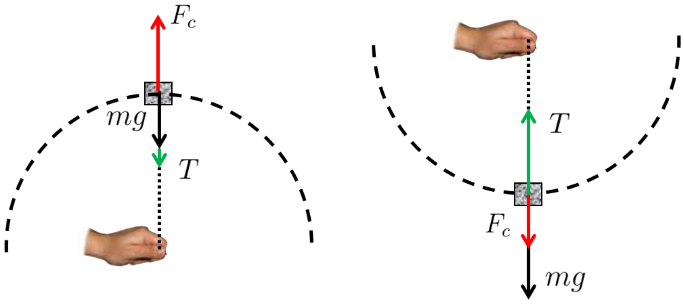
$$mg + m\frac{v^2}{r} = T \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{r(T - mg)}{m}} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot (110 - 2 \cdot 10)}{2}} = 6 \text{ m/s}$$

---

18. El diagrama de fuerzas considerando un sistema de referencia no inercial ubicado sobre la partícula se representa en la figura. El equilibrio de fuerzas es

$$T_y = mg$$

$$T_x = F_c = m\frac{v^2}{r}$$



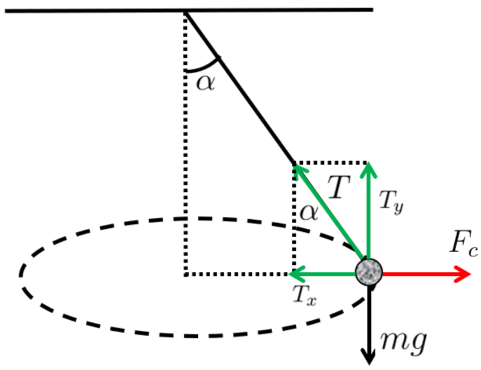
De la primera ecuación obtenemos la tensión.

$$T\cos\alpha = mg \quad \longrightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 23.09 \text{ N}$$

Sustituyendo esta expresión para T en la ecuación para la coordenada x obtenemos la velocidad.

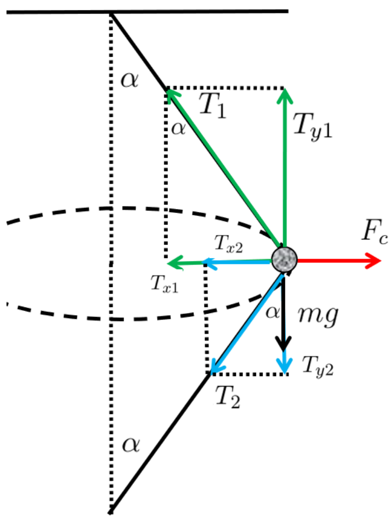
$$T\sin\alpha = m\frac{v^2}{r} \quad \longrightarrow \quad mg\tan\alpha = m\frac{v^2}{r} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{rg\tan\alpha} = 2.40 \text{ m/S}$$

donde hemos notado que $r = L\sin\alpha = 1$ m.



---

19. El diagrama de fuerzas considerando un sistema de referencia no inercial ubicado sobre la partícula se representa en la figura.



A partir de la longitud de la cuerda $l = 2$ m y de la distancia entre el centro de la circunferencia y el punto de anclaje $h = 1.5$ m obtenemos el radio de la circunferencia $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 1.32$ m.

El ángulo que forman las cuerdas con la vertical es $\alpha = \arccos(h/l) = 41.41°$.

El equilibrio de fuerzas es

$$m\frac{v^2}{r} = T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\alpha \tag{22}$$

$$mg + T_2 \cos\alpha = T_1 \cos\alpha \tag{23}$$

Despejamos T_1 en Ec.(23)

$$T_1 = T_2 + \frac{mg}{\cos\alpha} \tag{24}$$

Sustituyendo esta expresión en Ec.(22) resulta

$$m\frac{v^2}{r} = mg\tan\alpha + 2T_2 \sin\alpha$$

Despejando obtenemos T_2

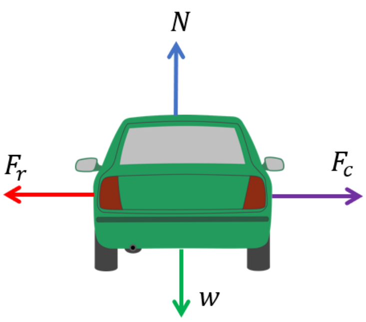
$$T_2 = \frac{mv^2}{2r\sin\alpha} - \frac{mg}{2\cos\alpha} = \frac{4\cdot 6^2}{2\cdot 1.32\cdot \sin(41.41°)} - \frac{4\cdot 10}{2\cdot\cos(41.41°)} = 55.80 \text{ N}$$

Sustituyendo este valor en Ec.(24) obtenemos T_1.

$$T_1 = 55.8 + \frac{4\cdot 10}{\cos(41.41°)} = 109.13 \text{ N}$$

---

20. Antes de nada, expresamos la velocidad en SI (54 km/h = 15.00 m/s).



El equilibrio de fuerzas es

$$N = mg$$

$$m\frac{v^2}{r} = \mu N$$

Despejando obtenemos la máxima velocidad con la que el coche puede tomar la curva

$$v = \sqrt{\mu r g}$$

Por lo que el coeficiente de rozamiento es

$$\mu = \frac{v^2}{rg} = \frac{15^2}{45\cdot 10} = 0.5$$

---

21. El equilibrio de fuerzas es

$$N = mg\cos\alpha + F_c \sin\alpha$$

$$mg\sin\alpha = F_c\cos\alpha$$

Sustituyendo la normal en la segunda ecuación y despejando F_c obtenemos

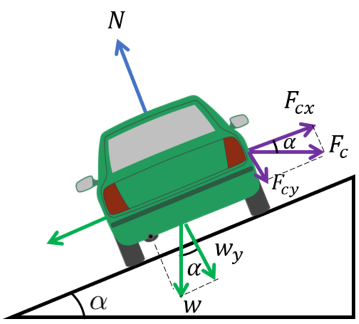
$$F_c = mg\tan\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

Entonces, la máxima velocidad con la que el coche puede tomar la curva es

$$v = \sqrt{rg\tan\alpha}$$

Por lo que el ángulo de inclinación de la carretera es

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v^2}{rg}\right) = \arctan\left(\frac{13.4^2}{50\cdot 10}\right) = 19.75^\circ$$



---

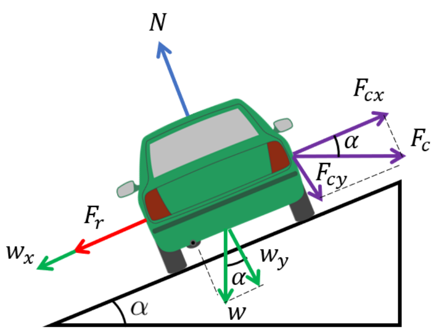
22. a) Usamos la expresión de la velocidad máxima obtenida en el ejercicio anterior

$$v = \sqrt{rg\tan\alpha} = \sqrt{200\cdot 10\cdot \tan 3} = 10.24\ \text{m/s}$$

b) El equilibrio de fuerzas es

$$N = mg\cos\alpha + F_c\sin\alpha$$

$$mg\sin\alpha + \mu N = F_c\cos\alpha$$



Sustituyendo la normal en la segunda ecuación y despejando F_c obtenemos

$$F_c = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = m\frac{v^2}{r}$$

Entonces, la máxima velocidad con la que el coche puede tomar la curva es

$$v = \sqrt{rg\left(\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\right)} = \sqrt{200 \cdot 10 \cdot \left(\frac{\sin(3^\circ) + 0.8 \cdot \cos 3}{\cos(3^\circ) - 0.8 \cdot \sin(3^\circ)}\right)} = 42.18 \text{ m/s}$$

---

23. Primero de todo, expresamos la velocidad en SI (30 km/h = 8.33 m/s). En ausencia de rozamiento, la velocidad máxima con la que el coche puede tomar la curva es (ver ejercicio 21)

$$v = \sqrt{rg\tan\alpha}$$

Por lo que el ángulo de inclinación de la carretera es

$$\alpha = \arctan\frac{v}{rg} = \arctan\frac{8.33^2}{400 \cdot 10} = 0.99^\circ$$

En presencia de rozamiento, la velocidad máxima es (ver ejercicio 22)

$$v = \sqrt{rg\left(\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\right)} = \sqrt{400 \cdot 10 \cdot \left(\frac{\sin(0.99^\circ) + 1 \cdot \cos(0.99^\circ)}{\cos(0.99^\circ) - 1 \cdot \sin(0.99^\circ)}\right)} = 64.35 \text{ m/s}$$

---

24. Puesto que no hay rozamiento, el peso y la fuerza normal del cuerpo 2 son irrelevantes. El equilibrio de fuerzas para el cuerpo 1 es

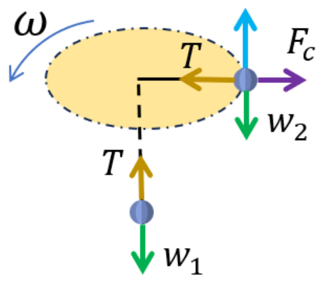
$$T = m_1 g$$

Para el cuerpo 2

$$T = m\frac{v^2}{R} = m_2\omega^2 R$$

Igualando ambas expresiones obtenemos

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 g}{m_2 R}}$$



---

25. El equilibrio de fuerzas en el eje x es

$$T\sin\alpha = m\omega^2 R \tag{25}$$

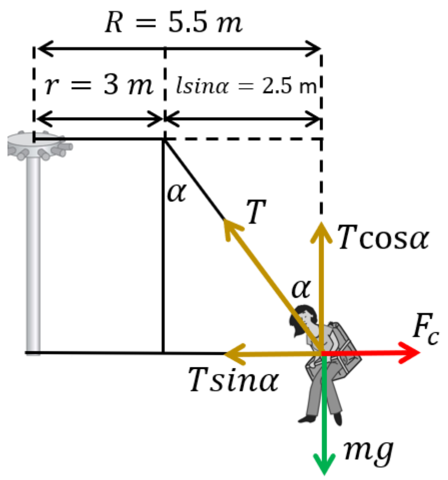
siendo R la distancia de la silla al eje de giro, es decir $R = r + l\sin\alpha = 5.5$ m.

Y en el eje y

$$T \cos \alpha = mg \tag{26}$$

Dividiendo Ec.(25) entre Ec.(26) se cancelan las tensiones y resulta

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 R}{g} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{R}} = 1.02 \text{ rad/s}$$



---

26. La fuerza centrífuga y la fuerza elástica se equilibran

$$kx = m\omega^2(L + x)$$

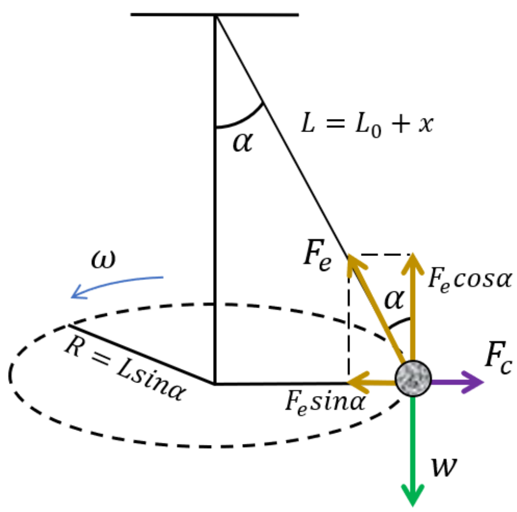
donde x es el desplazamiento del muelle con respecto al equilibrio. $(L+x)$ es la cantidad buscada. Despejando se obtiene

$$x = \frac{m\omega^2 L}{k - m\omega^2} = 0.05 \text{ m}$$

La longitud del muelle es entonces $L + x = 0.15$ m.

---

27. La velocidad angular es $\omega = 2\pi$ rad/s. La longitud del muelle es $L = L_0 + x$, donde x es la deformación del muelle con respecto al equilibrio.



El equilibrio de fuerzas en el eje y es

$$mg = kx\cos\alpha \tag{27}$$

En el eje x el equilibrio es

$$kx\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\omega^2(L_0 + x)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad kx = m\omega^2(L_0 + x)$$

donde hemos dado cuenta de que $R = (L_0 + x)\sin\alpha$.

Despejando obtenemos x

$$x = \frac{m\omega^2 L_0}{k - m\omega^2} = 0.09 \text{ m}$$

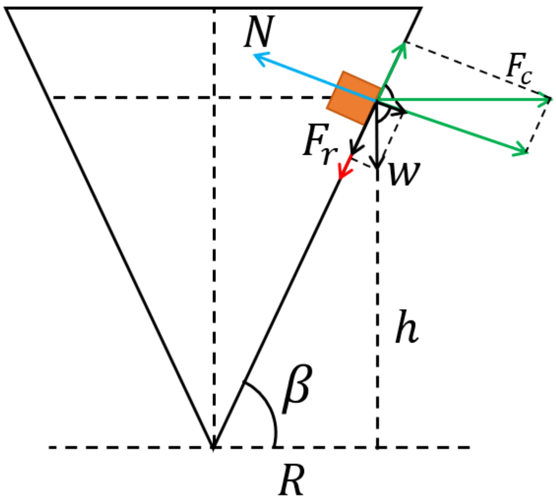
Entonces $L = L_0 + x = 0.57$ m

Utilizando $x = 0.09$ m en Ec.(27) se obtiene el ángulo

$$mg = kx\cos\alpha \quad \longrightarrow \quad \arccos\left(\frac{mg}{kx}\right) = 63.61^\circ$$

---

28. a)



Si el período es mínimo quiere decir que la velocidad es máxima. En esta situación límite la componente y de la fuerza centrífuga es mayor que la componente y del peso, de tal manera que la fuerza de rozamiento actúa hacia abajo (ver figura). Para que el cuerpo se mantenga a una altura h la fuerza neta debe ser nula. En el eje y tenemos

$$N = mg\cos\beta + m\frac{v^2}{R}\sin\beta$$

En el eje x

$$mg\sin\beta + \mu N = m\frac{v^2}{R}\cos\beta$$

Sustituyendo la expresión para N en la ecuación del eje x y despejando obtenemos la velocidad máxima.

$$v_{max}^2 = \frac{gR(\sin\beta + \mu\cos\beta)}{\cos\beta - \mu\sin\beta}$$

Notando que $v = 2\pi R/T$ y $R = h/\tan\beta$ obtenemos el período mínimo

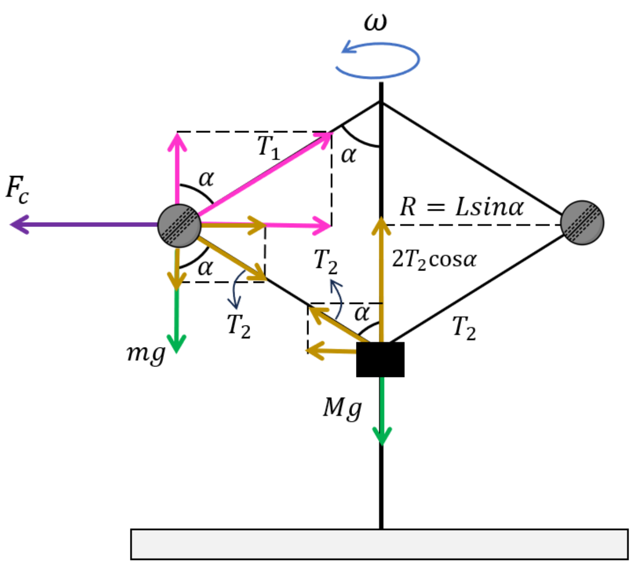
$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{h(\cos\beta - \mu\sin\beta)}{g\tan\beta(\sin\beta + \mu\cos\beta)}}$$

b) De forma contraria, si el período es máximo quiere decir que la velocidad es mínima. Ahora la componente y del peso es mayor que la componente y de la fuerza centrífuga. En consecuencia, la fuerza de rozamiento actúa hacia arriba. Podemos repetir cálculos equivalentes a los del apartado a) o notar que en esta nueva situación simplemente cambia el signo delante de μ. El resultado será pues

$$T_{max} = 2\pi\sqrt{\frac{h(\cos\beta + \mu\sin\beta)}{g\tan\beta(\sin\beta - \mu\cos\beta)}}$$

---

29. Dada la simetría del problema, la tensión T_1 de los dos cables superiores es igual. Lo mismo ocurre con la tensión T_2 de los cables inferiores. Además, el equilibrio de fuerzas en ambas bolas es idéntico. Ya que los 4 cables tienen la misma longitud, el ángulo α que forman con el eje debe ser el mismo. Los cables formarán un cuadrado cuando $\alpha = 45°$.



Para cualquiera de las bolas, el equilibrio en el eje y es

$$T_1\cos\alpha = T_2\cos\alpha + mg \tag{28}$$

Y en el eje x

$$T_1\sin\alpha + T_2\sin\alpha = m\omega^2 R = m\omega^2 L\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad T_1 + T_2 = m\omega^2 L \tag{29}$$

donde los términos $\sin\alpha$ se cancelan tras notar que que $R = L\sin\alpha$.

El equilibrio de fuerzas para el bloque de masa M en el eje x es simplemente $T_2\sin\alpha = T_2\sin\alpha$. El equilibrio en el eje y es

$$2T_2\cos\alpha = Mg \tag{30}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (28)-(29)-(30) se obtiene

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m+M)}{mL\cos\alpha}} = 6.51 \text{ rad/s}$$

4. TRABAJO Y ENERGÍA

1. En el sistema de referencia del suelo, la energía mecánica inicial E_{m1} es nula. La energía mecánica final es
$$E_{m2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$
El trabajo que hay que realizar es
$$W_N = \Delta E_m = E_{m2} - \cancel{E_{m1}} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4.5^2 + 7 \cdot 10 \cdot 3 = 280.88 \text{ J}$$

---

2. Llamemos h a la altura final.

a) El trabajo realizado por la fuerza es
$$W_F = Fh = 60 \cdot 2.5 = 150 \text{ J}$$
b) El trabajo realizado por el peso es
$$W_p = -\Delta U = -mgh = -5 \cdot 10 \cdot 2.5 = -125 \text{ J}$$
c) La variación de energía mecánica se debe al trabajo de las fuerzas no conservativas (W_F en este caso).
$$W_N = \Delta E_m = E_{m2} - \cancel{E_{m1}} = K_2 + mgh \quad \longrightarrow \quad K_2 = W_N - mgh = 150 - 125 = 25 \text{ J}$$

---

3. Tanto la energía mecánica inicial como la final provienen únicamente de la energía cinética.
$$W_N = \Delta E_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (2^2 - 10^2) = -768 \text{ J}$$

---

4. Inicialmente tenemos energía cinética. Una vez se ha frenado por completo toda la energía se ha perdido en fricción.
$$W_N = \Delta E_m \quad \longrightarrow \quad -\mu mgx = -\frac{1}{2}mv^2$$
Despejamos x
$$x = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{2^2}{2 \cdot 0.1 \cdot 10} = 2 \text{ m}$$

---

5. Llamemos θ al ángulo comprendido entre la cuerda y la horizontal.
a)
$$W_T = Tx\cos\theta = 540 \cdot 2 \cdot \cos 53 = 649.96 \text{ J}$$
b) La fuerza normal es $N = mg - T\sin\theta$
$$W_R = -\mu xN = -\mu x(mg - T\sin\theta) = -0.5 \cdot 2 \cdot (100 \cdot 10 - 540 \cdot \sin 53) = -568.74\text{J}$$

c) En este problema la energía potencial inicial y final son iguales. El trabajo de las fuerzas no conservativas (tensión y rozamiento) será pues igual a la variación de la energía cinética.

$$\Delta K = W_N = W_T + W_R = 649.96 - 568.74 = 81.22 \text{ J}$$

---

6. Tendremos que utilizar $\Delta E_m = W_N$. El trabajo (positivo) realizado por la fuerza es

$$W_F = Fx\cos\theta$$

El trabajo realizado por el rozamiento es (la normal es $N = F_y + mg$)

$$W_R = -\mu(F\sin\theta + mg)x$$

Por lo tanto

$$W_F + W_R = \Delta E_m \quad \longrightarrow \quad Fx\cos\theta - \mu(F\sin\theta + mg)x = \frac{1}{2}mv_2^2 - \cancel{\frac{1}{2}mv_1^2}$$

Despejando μ se obtiene

$$\mu = \frac{2Fx\cos\theta - mv_2^2}{2x(F\sin\theta + mg)} = \frac{2\cdot 265\cdot 2\cdot\cos 37 - 80\cdot 1^2}{2\cdot 2\cdot(265\cdot\sin 37 + 80\cdot 10)} = 0.2$$

---

7. a) Hacemos un balance de energías entre el punto de lanzamiento ($h = 0$, $U = 0$) y el punto de altura H, donde se ha detenido ($K = 0$). La relación entre H y la distancia recorrida es $H = x\sin\alpha$. El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es

$$W_R = -\mu x N = -\mu\frac{H}{\sin\alpha}mg\cos\alpha = -\frac{\mu mgH}{\tan\alpha}$$

Por lo tanto

$$\Delta E_m = W_R \quad \longrightarrow \quad mgH - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{\mu mgH}{\tan\alpha}$$

Despejando obtenemos

$$H = \frac{v_0^2\tan\alpha}{2g(\tan\alpha + \mu)} = \frac{12^2\cdot\tan 37}{2\cdot 10\cdot(\tan 37 + 0.25)} = 5.41 \text{ m}$$

b) Hacemos un balance entre el punto de altura H y el punto en que el cuerpo regresa a la base. De nuevo

$$\Delta E_m = W_R \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - mgH = -\frac{\mu mgH}{\tan\alpha}$$

Despejando obtenemos

$$v = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{\mu}{\tan\alpha}\right)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5.41\cdot\left(1 - \frac{0.25}{\tan 37}\right)} = 8.50 \text{ m/s}$$

c) El peso es una fuerza conservativa, por lo que no realiza trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada. También se puede llegar a esta conclusión observando que $W_p = -\Delta U = 0$. En el caso del rozamiento el trabajo es idéntico en el ascenso y en el descenso, ya que la distancia recorrida es la misma.

$$W_R = -\frac{2\mu mgH}{\tan\alpha} = -\frac{2\cdot 0.25\cdot 3\cdot 10\cdot 5.41}{\tan 37} = -107.69 \text{ J}$$

---

8. Inicialmente únicamente tenemos energía potencial elástica. En el momento en el que el cuerpo se detiene no hay energía. Por lo tanto, toda la energía ha sido disipada por la fricción.

$$\frac{1}{2}kx^2 = W_R = \mu mgs \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{kx^2}{2mgs} = \frac{4000 \cdot 0.05^2}{2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1.25} = 0.4$$

---

9. Si no hay rozamiento la energía mecánica se conserva

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{2gH}$$

En este caso la energía perdida se corresponde con el trabajo del rozamiento.

$$W_R = \frac{1}{2}mv_r^2 - mgH = \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

Sabiendo que $v_r = v/2$ y que $v = \sqrt{2gH}$ obtenemos

$$W_R = -\frac{3}{8}mv^2 = -\frac{3}{4}mgH$$

Otra forma de expresar el trabajo del rozamiento es

$$W_R = -\mu xN = -\mu\frac{H}{\sin\alpha}mg\cos\alpha = -\frac{\mu mgH}{\tan\alpha}$$

A partir de ambas expresiones podemos calcular el coeficiente de rozamiento.

$$\frac{3}{4}mgH = \frac{\mu mgH}{\tan\alpha} \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{3}{4}\tan\alpha$$

---

10. a)

$$W_R = -\mu xN = -\mu\frac{H}{\sin\alpha}mg\cos\alpha = -\frac{\mu mgH}{\tan\alpha} = -\frac{0.4 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 2}{\tan 53} = -301.42 \text{ J}$$

$$W_p = -\Delta U = mgH = 50 \cdot 10 \cdot 2 = 1000 \text{ J}$$

b)

$$\Delta U = -mgH = -1000 \text{ J}$$

$$\Delta E_m = W_R = -301.42 \text{ J}$$

$$\Delta E_m = \Delta K + \Delta U \quad \longrightarrow \quad \Delta K = \Delta E_m - \Delta U = -301.42 + 1000 = 698.55 \text{ J}$$

c)

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 698.55}{50}} = 5.29 \text{ m/s}$$

---

11. Una pendiente del 2 % significa que por cada 100 metros de desplazamiento horizontal se producen 2 m de desplazamiento vertical. El ángulo de inclinación será pues $\tan\alpha = 0.02$. Resolveremos el problema a través de $\Delta E_m = W_R$. Llamemos x_1 al desplazamiento de la vagoneta cuando desciende y x_2 al desplazamiento cuando asciende. Las altura inicial y la altura final son

$$H_1 = x_1 \sin\alpha, \qquad H_2 = x_2 \sin\alpha$$

En ambos casos la fuerza normal es $N = mg\cos\alpha$, por lo que el trabajo del rozamiento a lo largo de todo el recorrido es

$$W_R = -\mu x_1 mg\cos\alpha - \mu x_2 mg\cos\alpha = -\mu mg\cos\alpha(x_1 + x_2)$$

Ya que tanto en la situación inicial como en la final la vagoneta está en reposo, la variación de energía mecánica entre dichos puntos se debe a la pérdida de energía potencial.

$$\Delta E_m = U_2 - U_1 = mgH_2 - mgH_1 = mg\sin\alpha(x_2 - x_1)$$

Utilizando $\Delta E_m = W_R$ llegamos a

$$-\mu \cancel{mg}\cos\theta(x_1 + x_2) = \cancel{mg}\sin\alpha(x_2 - x_1) \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}\tan\alpha = \frac{300 - 50}{300 + 50} \cdot 0.02 = 0.014$$

---

12. a) En ausencia de rozamiento, la fuerza necesaria para mover el cuerpo es

$$F_\alpha = mg\sin\alpha, \qquad F_\beta = mg\sin\beta$$

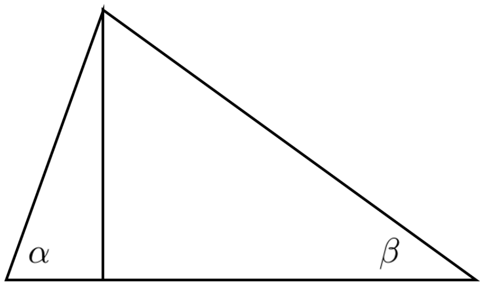
Ya que $\sin\alpha > \sin\beta$, se obtiene $F_\alpha > F_\beta$.

El trabajo es el mismo en ambos casos, $W_N = \Delta E_m = mgH$.

b) Tenemos en ambos casos

$$W_\alpha = mgH + \mu x_\alpha N_\alpha, \qquad W_\beta = mgH + \mu x_\beta N_\beta$$

Puesto que $x_\beta > x_\alpha$ y $N_\beta > N_\alpha$ se cumplirá $W_\beta > W_\alpha$.



---

13. Tomamos como origen de coordenadas la posición inicial de la pelota. La energía mecánica inicial se debe únicamente a la energía potencial elástica.

$$E_{m1} = \frac{1}{2}kx^2$$

Cuando la bola se desprende del pulsador ésta tendrá energía cinética y potencial. La altura de la bola en ese punto es $h = x\sin\theta$. Por lo tanto

$$E_{m2} = \frac{1}{2}mv^2 + mgx\sin\theta$$

Ya que no actúan fuerzas no conservativas, la energía mecánica se conserva.

$$E_{m2} = E_{m1} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgx\sin\theta$$

Despejando v resulta

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gx\sin\theta} = \sqrt{\frac{120 \cdot 0.05^2}{0.1} - 2 \cdot 10 \cdot 0.05 \cdot \sin 10} = 1.68 \text{ m/s}$$

---

14. a) En el momento en el que el cuerpo se desprende ha recorrido $x = 0.08$ m sobre el plano inclinado. La energía mecánica inicial es puramente elástica. La energía mecánica final tendrá componente potencial gravitatoria debido a la altura del punto ($h = x\sin\alpha$) y cinética. La pérdida de energía se debe al rozamiento.

$$\Delta E_m = W_R \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgx\sin\alpha - \frac{1}{2}kx^2 = -\mu mgx\cos\alpha$$

Despejando v obtenemos

$$v = \sqrt{x\left(\frac{kx}{m} - 2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\right)}$$

$$v = \sqrt{0.08 \cdot \left(\frac{2200 \cdot 0.08}{1} - 2 \cdot 10 \cdot (\sin 30 + 0.2 \cdot \cos 30)\right)} = 3.61 \text{ m/s}$$

b) Hacemos un balance energético desde la situación inicial en la que el muelle está comprimido y la situación final en la que el cuerpo se ha detenido. Esto implica que la altura que calculemos ya incluye la altura que tiene el cuerpo cuando se desprende del muelle. La energía final es potencial gravitatoria y la inicial es elástica. La relación entre la distancia recorrida y la altura es $s = H/\sin\alpha$. Dicho esto:

$$\Delta E_m = W_R \quad \longrightarrow \quad mgH - \frac{1}{2}kx^2 = -\mu mgs\cos\alpha = -\frac{\mu mgH}{\tan\alpha}$$

Despejando H se obtiene

$$H = \frac{kx^2\tan\alpha}{2mg(\mu + \tan\alpha)} = \frac{2200 \cdot 0.08^2 \cdot \tan 30}{2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot (0.2 + \tan 30)} = 0.52 \text{ m}$$

---

15. a) Tras la colisión el muelle se comprime como consecuencia de la transferencia de la energía cinética del bloque. La compresión será máxima cuando toda la energía cinética se haya transmitido ($v = 0$). Ya que no actúan fuerzas no conservativas, recurrimos a la conservación de la energía mecánica

$$E_{m2} = E_{m1} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \longrightarrow \quad x = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 1.2\sqrt{\frac{0.8}{50}} = 0.15 \text{ m}$$

b) En este caso tenemos que considerar el trabajo realizado por la fricción. Decimos que la energía mecánica perdida se debe a las fuerzas no conservativas.

$$W_N = \Delta E_m \quad \longrightarrow \quad -\mu mgx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 + \mu mgx - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

Tenemos pues una ecuación de segundo grado. Descartando la solución negativa ya que no tiene sentido en nuestro problema, obtenemos

$$x = \frac{-\mu mg + \sqrt{(\mu mg)^2 + kmv^2}}{k}$$

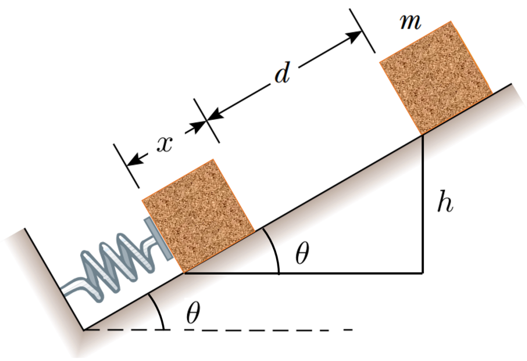
$$x = \frac{-0.5 \cdot 0.8 \cdot 10 + \sqrt{(0.5 \cdot 0.8 \cdot 10)^2 + 50 \cdot 0.8 \cdot 1.2^2}}{50} = 0.092 \text{ m}$$

Como es lógico, el resultado del apartado b) es menor que aquel del apartado a).

---

16. Tomamos como origen de coordenadas ($h = 0$) el punto en el que el bloque ha comprimido el muelle una distancia máxima x. Por lo tanto, la altura inicial será $(d + x)\sin\theta$ (ver figura). Ya que parte del reposo, la energía mecánica inicial será

$$E_{m1} = mg(d + x)\sin\theta$$



Cuando el muelle alcanza su compresión máxima no existe energía cinética ni tampoco energía potencial (ya que hemos tomado $h = 0$ en este punto). La energía mecánica será

$$E_{m2} = \frac{1}{2}kx^2$$

Por conservación de la energía tenemos

$$E_{m2} = E_{m1} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 = mg(d + x)\sin\theta$$

Despejando d obtenemos el resultado

$$d = \frac{kx^2}{2mg\sin\theta} - x$$

---

17. a) Hacemos un balance energético entre A y B.

$$W_R = \Delta E_m \quad \longrightarrow \quad W_R = \frac{1}{2}mv_b^2 - mgR = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3.5^2 - 1 \cdot 10 \cdot 1.5 = -8.88 \text{ J}$$

b) Hacemos un balance energético entre B y C.

$$W_R = \Delta E_m \quad \longrightarrow \quad -\mu mgx = -\frac{1}{2}mv_b^2$$

$$\mu = \frac{v_b^2}{2gx} = \frac{3.5^2}{2 \cdot 10 \cdot 2.4} = 0.26$$

---

18. El momento crítico del trayecto es el punto A. Para que la esfera logre pasar de ese punto la fuerza centrífuga debe ser mayor o igual que el peso.

$$m\frac{v_a^2}{R} = mg \quad \longrightarrow \quad v_a = \sqrt{Rg}$$

Haciendo un balance de energías entre el punto de altura h y el punto A, cuya altura es $2R$, obtenemos:

$$2mgR + \frac{1}{2}mv_a^2 = mgh$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión $v_a = \sqrt{Rg}$ resulta

$$2R\cancel{mg} + \frac{R\cancel{mg}}{2} = \cancel{mg}h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{5}{2}R$$

La fuerza normal en A es nula ya que el peso es igual a la fuerza centrífuga.
Para calcular la fuerza normal en B primero necesitamos conocer la velocidad. Podemos obtenerla a partir de un balance de energías entre el punto inicial y B (o también entre A y B):

$$\frac{1}{2}mv_b^2 = mgh \quad \longrightarrow \quad v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{5gR},$$

donde en el último paso hemos dado cuenta de que $h = 5R/2$.
Por lo tanto la fuerza normal será:

$$N = mg + m\frac{v_b^2}{R} = mg + \frac{5g\cancel{R}}{\cancel{R}} = 6mg$$

---

19. a) Entre O y A no hay rozamiento.

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad \longrightarrow \quad v_a = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3} = 2\sqrt{15} \text{ m/s}$$

Entre A y B hay rozamiento.

$$\Delta E_m = W_R \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -\mu mgx$$

$$v_b = \sqrt{v_A^2 - 2\mu gx} = \sqrt{60 - 2 \cdot 0.1 \cdot 10 \cdot 1} = \sqrt{58} \text{ m/s}$$

Entre B y C no hay rozamiento. La altura de C es el diámetro de la circunferencia ($2R$).

$$\frac{1}{2}mv_c^2 + 2mgR = \frac{1}{2}mv_b^2 \quad \longrightarrow \quad v_c = \sqrt{v_b^2 - 4gR} = \sqrt{58 - 4 \cdot 10 \cdot 1} = 3\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Debemos comprobar que la velocidad es suficiente como para que la bola describa la circunferencia y no caiga por razón de su peso. Igualando la fuerza centrífuga al peso obtenemos la velocidad mínima que debe tener la bola $v_{min} = \sqrt{Rg} = 3.16$ m/s. Vemos que $v_c > v_{min}$, por lo que la bola no cae y sigue su recorrido de vuelta al punto B.

Ya que en la circunferencia no hay rozamiento, v_b es la misma antes y después de pasar por el punto C. Entre B y D sí que hay rozamiento.

$$\Delta E_m = W_R \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_d^2 - \frac{1}{2}mv_b^2 = -\mu mgx$$

$$v_d = \sqrt{v_b^2 - 2\mu g x} = \sqrt{58 - 2 \cdot 0.1 \cdot 10 \cdot 1} = 2\sqrt{14} \text{ m/s}$$

b) En el punto C tenemos el peso y la normal hacia abajo y la fuerza centrífuga hacia fuera.

$$N_c + mg = m\frac{v_c^2}{R} \quad \longrightarrow \quad N_c = m\frac{v_c^2}{R} - mg = 0.3 \cdot \frac{18}{1} - 0.3 \cdot 10 = 2.4 \text{ N}$$

En el punto B tenemos el peso y la fuerza centrífuga hacia abajo y la normal hacia arriba.

$$N_b = m\frac{v_b^2}{R} + mg = 0.3 \cdot \frac{58}{1} + 0.3 \cdot 10 = 20.4 \text{ N}$$

c) Entre D y E no hay rozamiento.

$$mgh_2 = \frac{1}{2}mv_d^2 \quad \longrightarrow \quad h_2 = \frac{v_d^2}{2g} = \frac{56}{2 \cdot 10} = 2.8 \text{ m}$$

---

20. La velocidad máxima con la que la vagoneta puede llegar al punto B sin salirse de la pista es aquella para la cual la fuerza centrífuga es igual al peso.

$$m\frac{v^2}{R} = mg \quad \longrightarrow \quad v_m = \sqrt{Rg} \tag{1}$$

En A únicamente existe energía potencial, mientras que B hay energía potencial y cinética.

$$W_R = \Delta E_m = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2 - mgh_1$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad obtenida en Ec.(1) y sacando factor común llegamos a

$$W_R = mg\left(h_2 + \frac{R}{2} - h_1\right)$$

---

21. Tanto en A como en B la velocidad es nula. La altura de la pastilla en A es R. La altura H de la pastilla en el punto B es

$$H = R - R\sin\alpha$$

El trabajo del rozamiento será la variación de energía mecánica

$$W_R = \Delta E_m = U_B - U_A = mgR(1 - \sin\alpha) - mgR = -mgR\sin\alpha = -0.2 \cdot 10 \cdot 0.5 \sin 30 = -0.5 \text{ J}$$

---

22. El trayecto $B - C$ es un tiro parabólico con $\theta = 0°$. Utilizamos la coordenada x del tiro parabólico para obtener el tiempo de caída

$$d = v_b t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_b}$$

donde $d = 40$ m.

Utilizamos este tiempo en la ecuación para la coordenada y y así obtenemos la velocidad en el punto B.

$$y_c = y_b - \frac{1}{2}gt^2 = y_b - \frac{gd^2}{2v_b^2} \quad \Rightarrow \quad v_b = d\sqrt{\frac{g}{2(y_b - y_c)}} = 20 \text{ m/s}$$

Ya que no actúan fuerzas no conservativas, la energía mecánica en A y B es idéntica.

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_b^2 + mgH_b \quad \Rightarrow \quad v_a = \sqrt{v_b^2 + 2gH_b} = 42.43 \text{ m/s}$$

---

23. Cuando el muelle alcanza la compresión máxima el cuerpo únicamente posee energía potencial elástica. Inicialmente (punto A) el cuerpo tiene energía potencial gravitatoria y energía cinética. La diferencia de energía entre estos dos puntos se debe al rozamiento a lo largo de la distancia horizontal $d+x$, siendo $d = 100$ m y x la máxima compresión del muelle.

$$\Delta E_m = W_r \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 - mgH_a = -\mu mg(d+x)$$

Reordenando términos obtenemos un polinomio de segundo grado

$$\frac{1}{2}kx^2 + \mu mgx + m\left(\mu gd - gH_a - \frac{1}{2}v_a^2\right) = 0$$

con solución positiva $x = 16.22$ m.

---

24. Tanto en la posición inicial (altura h) como en la final (altura y_m), la energía mecánica proviene exclusivamente de la energía potencial. La diferencia entre estas energías se debe al trabajo realizado por la fricción a lo largo de la superficie del plano inclinado.

$$\Delta E_m = W_r \quad \Rightarrow \quad mgy_m - mgh = -\mu mg\cos\theta\frac{y_m}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad h - y_m = \frac{\mu y_m}{\tan\theta}$$

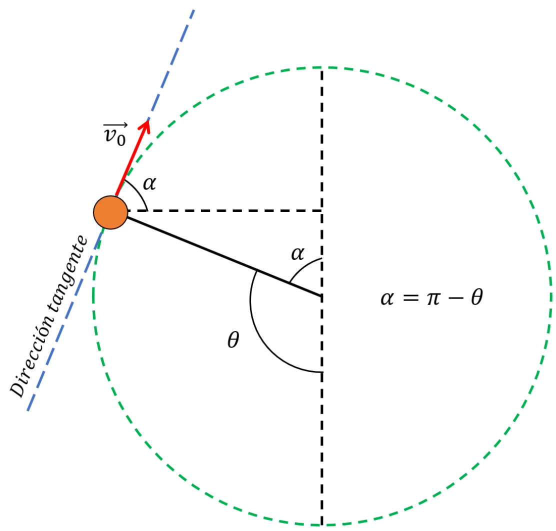
donde hemos dado cuenta de que la fuerza normal es $mg\cos\theta$ y la distancia recorrida por el cuerpo a lo largo del plano inclinado es $d = y_m/\sin\theta$.

Imponiendo $y_m = h/2$ se obtiene

$$\theta = \arctan\mu = 26.57°$$

---

25. La velocidad de la bola cuando sale disparada se obtendrá mediante argumentos energéticos. Conocida la velocidad, podrá imponerse que el tiro parabólico pase por centro de la circunferencia. En este problema existen dos ángulos de interés: el ángulo θ barrido por la bola y el ángulo α de lanzamiento con respecto a la horizontal. Estos ángulos estás relacionados entre sí mediante la relación $\alpha = \pi - \theta$.



Consideramos un sistema de coordenadas donde el origen está situado en el centro de la circunferencia. Igualamos la energía mecánica cuando la bola se encuentra en el punto más alto de la circunferencia a la energía mecánica en el momento en el que se rompe la cuerda.

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgR = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = 3gR - 2gR\cos\alpha \tag{2}$$

donde hemos dado cuenta de $v_i = \sqrt{Rg}$.

Conocida esta velocidad, nos centramos en el tiro parabólico. Imponiendo que la trayectoria pase por el punto $(x, y) = (0, 0)$ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$x_f = x_0 + v_0\cos\alpha t \quad \Rightarrow \quad 0 = -R\sin\alpha + v_0\cos\alpha t \tag{3}$$

$$y_f = y_0 + v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = R\cos\alpha + v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

Despejando t en Ec.(3) y sustituyendo en Ec.(4) se obtiene

$$\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{gR\sin^2\alpha}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

Multiplicando el primer término arriba y abajo por $\cos\alpha$ y recordando que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ se puede simplificar la expresión notablemente

$$2v_0^2\cos\alpha = gR\sin^2\alpha$$

En esta ecuación sustituímos la expresión de v_0^2 dada por Ec.(2) y obtenemos

$$6\cos\alpha - 4\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

Intentamos expresar la ecuación en términos de una única función trigonométrica sustituyendo $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. El resultado es un polinomio de segundo grado

$$3\cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6}$$

La solución $\cos\alpha = 1.816$ no es posible ya que el valor máximo de la función coseno es 1. La solución correcta es $\cos\alpha = 0.1835$. Por lo tanto, $\alpha = \arccos(0.1835) = 79.426°$ y, finalmente

$$\theta = \pi - \alpha = 100.57°$$

5. OSCILACIONES Y ONDAS

1. Simplemente observando la ecuación determinamos que la amplitud es $A = 4$ m, la frecuencia angular es $\omega = \pi$ rad/s y la fase es $\phi = \pi/4$. La velocidad máxima será pues

$$v_m = \pm\omega A = \pm 12.57 \text{ m/s}$$

y la aceleración máxima

$$a_m = \pm\omega A^2 = \pm 4\pi^2 = \pm 39.48 \text{ m/s}^2$$

---

2. La aceleración máxima en un MAS es $a_m = A\omega^2$. La relación entre la frecuencia angular y la frecuencia es $f = 2\pi\omega$. Por lo tanto, imponiendo $a_m = 10g$ obtenemos directamente el resultado.

$$4\pi^2 f^2 A = 10g \quad \longrightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10g}{A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100}{0.015}} = 13 \text{ Hz}$$

---

3. La energía mecánica es

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2.$$

Cuando el cuerpo se encuentra a una distancia s del equilibrio tenemos

$$E_m = \frac{1}{2}ks^2 + K.$$

Igualando ambas expresiones se obtiene

$$K = \frac{1}{2}k\left(A^2 - s^2\right).$$

Por lo tanto

$$\frac{K}{E_m} = \frac{\cancel{2k}(A^2 - s^2)}{\cancel{2k}A^2} = \frac{A^2 - s^2}{A^2} = \frac{0.06^2 - 0.04^2}{0.06^2} = \frac{5}{9}$$

---

4. Inicialmente el sistema masa muelle no tiene energía. Tras la colisión la energía es

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2.$$

Ya que toda la energía proviene de la energía cinética del cuerpo de masa m_2, podemos afirmar

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_2v^2 \quad \longrightarrow \quad v = A\sqrt{\frac{k}{m_2}} = 0.25\sqrt{\frac{600}{0.5}} = 8.66 \text{ m/s}$$

---

5. Para resolver el problema únicamente hay que notar que pese a que cuando el cuerpo se mueve un muelle se estira y el otro se comprime, la fuerza que generan tiene el mismo sentido en ambos casos. De la segunda ley de Newton tenemos

$$ma = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$

Que es la ecuación general de un MAS de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

y período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.25}{20 + 30}} = 0.44 \text{ s}$$

---

6. El período de un MAS no depende de la amplitud, por lo que ambos llegan a la vez.

---

7. Las frecuencias de oscilación son

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1, \qquad f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + m'}} = 0.5$$

donde $m' = 0.3$ kg. Se trata de un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

$$f_1 = 2f_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m + m'}} \quad \longrightarrow \quad m = \frac{m'}{3} = \frac{0.3}{3} = 0.1 \text{ kg}$$

Utilizando este valor podemos obtener k despejando en f_1 o en f_2. Por ejemplo, de f_1 obtenemos

$$k = 4\pi^2 m f_1^2 = 4\pi^2 \cdot 0.1 \cdot 1^2 = 3.95 \text{ N/m}$$

---

8. Por conservación de la energía mecánica entre el punto $x = A$ y un punto arbitrario, obtenemos

$$K + U_e = \frac{1}{2}kA^2$$

Ya que el enunciado nos dice que K y U_e son iguales ($K + U_e = 2U_e$), podemos obtener el resultado directamente

$$kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \longrightarrow \quad x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = \pm\frac{4}{\sqrt{2}} = \pm 2.83 \text{ m}$$

---

9. a) Obtenemos la masa directamente de la expresión para la frecuencia de oscilación

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \longrightarrow \quad m = \frac{k}{(2\pi f)^2} = \frac{1800}{(2\pi \cdot 5.5)^2} = 1.51 \text{ kg}$$

b) En la posición de equilibrio el peso y la fuerza recuperadora se igualan

$$ky = mg \quad \longrightarrow \quad y = \frac{mg}{k} = \frac{15.1}{1800} = 8.38 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

---

10. El período de oscilación es idéntico al caso de un muelle que oscila horizontalmente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El problema es que no conocemos ni k ni m. Sin embargo, conocemos g y el alargamiento del muelle en el equilibrio y. De la condición de equilibrio sabemos que

$$ky = mg \quad \longrightarrow \quad \frac{m}{k} = \frac{y}{g}$$

Por lo que podemos expresar el período en función de datos conocidos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{y}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.42}{10}} = 1.29 \text{ s}$$

Para obtener la ecuación de movimiento únicamente tenemos que usar la expresión general de un MAS

$$y(t) = -A\cos(\omega t + \phi) = -0.1\cos(4.87t) \text{ m}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\omega = 2\pi/T$ y que la fase es nula ya que $y(0) = -A$. La amplitud de oscilación es simplemente el desplazamiento inicial con respecto al equilibrio. El signo negativo delante de A proviene de considerar la altura como negativa por debajo de la horizontal. El signo perfectamente podría ser positivo si cambiamos de criterio.

---

11. A partir del estiramiento del muelle cuando se añade la nueva masa podemos obtener la constante recuperadora

$$k\Delta y = m_p g \quad \longrightarrow \quad k = \frac{m_p g}{\Delta y},$$

donde m_p es la masa de la piedra y Δy el estiramiento del muelle al añadir la piedra.

Ahora podemos sustituir esta expresión para k en la fórmula para la frecuencia del sistema con las dos masas

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_p + m_b}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_p g}{(m_p + m_b)\Delta y}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.03 \cdot 10}{(0.120 + 0.03)0.05}} = 1.01 \text{ Hz}$$

---

12. Obtenemos el equivalente en metros simplemente despejando la longitud en la ecuación del período de oscilación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \longrightarrow \quad L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{1^2 \cdot 9.81}{4\pi^2} = 0.2485 \text{ m}$$

---

13. El reloj medirá el tiempo de forma precisa si el período de movimiento es exactamente 2 s. Podemos comprobarlo a partir de los datos del problema

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9.87}} = 1.99996... \text{ s}$$

Ciñéndonos a los datos del enunciado, el segundo reloj dará el tiempo de forma precisa si $T_2 = T_1$.

$$2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g_2}} \quad \longrightarrow \quad l_2 = \frac{l_1 g_2}{g_1} = \frac{1 \cdot 9.78}{9.87} = 0.991 \text{ m}$$

---

14. Inicialmente la energía mecánica del sistema m_1-m_2-muelle es $E_m = \frac{1}{2}kA^2$, siendo $A = 0.2$ m la amplitud del MAS. Cuando m_1 alcanza el equilibrio, toda la energía potencial elástica se ha convertido en energía cinética

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \quad \Rightarrow \quad v = A\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 0.5 \text{ m/s}$$

En este instante ambos cuerpos tienen la misma velocidad v. m_2 mantendrá esa velocidad para siempre, mientras que m_1 se irá frenando debido a la fuerza $F = -kx$ que ejerce el muelle. Cuando m_1 alcance su máxima amplitud, toda su energía cinética se habrá convertido en energía potencial elástica

$$\frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m_1 v^2 \quad \Rightarrow \quad A' = v\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0.15 \text{ m}$$

donde A' es la amplitud del sistema m_1-muelle. Es lógico que $A' < A$, ya que en el momento en el que m_2 pierde contacto, el sistema pierde la energía que poseía este cuerpo.

Ya sabemos la posición de m_1 cuando ha alcanzado su máxima amplitud. Podemos calcular la distancia que ha recorrido m_2 notando que el tiempo transcurrido es un cuarto del período de movimiento de m_1, es decir,

$$d_2 = \frac{vT}{4} = \frac{v\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0.2356 \text{ m}$$

La distancia entre m_1 y m_2 es pues $D = d_2 - A' = 8.56$ cm.

---

15. a)

$$\omega = 2\pi f = 10\pi \text{ rad/s}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{\omega}{c} = \frac{10\pi}{20} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/m}$$

b)

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = 0.12\sin\left(\frac{\pi x}{2} - 10\pi t\right)$$

---

16. a) Conocemos k y ω.

$$\lambda = cT \quad \longrightarrow \quad \frac{\cancel{2\pi}}{k} = \frac{\cancel{2\pi} c}{\omega} \quad \longrightarrow \quad c = \frac{\omega}{k} = \frac{3.5}{2.2} = 1.59 \text{ m/s}$$

Atendiendo al signo dentro de la función seno vemos que la onda se mueve hacia la derecha.

b)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2.2} = 2.86 \text{ m}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.5} = 1.80 \text{ s}$$
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.80} = 0.56 \text{ Hz}$$

c) La amplitud $A = 0.03$ m nos la da el enunciado. La velocidad y aceleración máximas son iguales al caso del MAS (esto puede verse simplemente derivando $y(x,t)$ con respecto a t).

$$v_m = A\omega = 0.03 \cdot 3.5 = 0.105 \text{ m/s}$$

$$a_m = A\omega^2 = 0.03 \cdot 3.5^2 = 0.37 \text{ m/s}^2$$

---

17. Para obtener la función de onda simplemente necesitamos k y ω.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20} = 0.1\pi \text{ rad/m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda} = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$y(x,t) = 4\sin(0.1\pi x - 20\pi t)$$

---

18. El enunciado me está dando, a su manera, el período y la longitud de onda. Por lo tanto

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{2.5}{2} = 1.25 \text{ m/s}$$

19.

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{TL}{m}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 15}{0.08}} = 47.43 \text{ m/s}$$

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 47.43}{0.35} = 851.46 \text{ rad/s}$$

---

20. Tenemos que comprobar si el tiempo que necesita el gusano para recorrer los 2.5 cm es mayor o menor que le tiempo que necesita la onda para recorrer 20 m. La densidad lineal de la cuerda es $\mu = m/L = 0.25/25 = 0.01$ kg/m. Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10}{0.01}} = 31.62 \text{ m/s}$$

El tiempo en que la onda alcanza el extremo al que se dirige el gusano es

$$t_o = \frac{s_o}{c} = \frac{25}{31.62} = 0.79 \text{ s}$$

El tiempo que necesita el gusano para llegar al extremo es

$$t_g = \frac{s_g}{v_g} = \frac{0.025}{0.025} = 1 \text{ s}$$

Ya que $t_g < t_o$, el gusano será golpeado por la onda.

---

21. Si el muelle tiene longitud pero su masa es despreciable, su densidad lineal es nula ($\mu = m/L$). Esto nos lleva a que la velocidad de propagación de la onda es infinita.

---

22. Primero de todo expresamos la temperatura en kelvin. 0°C equivale a 273.15 K, mientras que 20° equivale a 293.15 K. Si asumimos que γ no varían sustancialmente con un incremento de temperatura de $20°C$, podemos decir

$$\frac{c_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{c_2}{\sqrt{T_2}} \quad \longrightarrow \quad c_2 = c_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 331\sqrt{\frac{293.15}{273.15}} = 342.9 \text{ m/s}$$

---

23. Resolvemos sabiendo que la relación entre la frecuencia y la longitud de onda es $\lambda = c/f$.

$$\lambda_- = \frac{c}{f_-} = \frac{340}{20} = 17 \text{ m}$$

$$\lambda_+ = \frac{c}{f_+} = \frac{340}{20000} = 0.017 \text{ m}$$

---

24. Para el sistema de una única mosca tenemos

$$\beta_1 = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Para el sistema de 10 moscas resulta

$$\beta_T = 10 \log \left(\frac{10I}{I_0} \right) = 10 \log 10 + 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 + \beta_1 = 11 \text{ dB}$$

Vemos que el dato de la distancia es innecesario.

---

25. El NIS de la orquesta es

$$\beta_T = 10 \log \left(\frac{250I}{I_0} \right) = 10 \log 250 + 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \log 250 + \beta_1$$

$$\beta_1 = \beta_T - 10 \log 250 = 56 \text{ dB}$$

---

26. El NIS total es

$$\beta_T = 10 \log \left(\frac{NI}{I_0} \right) = 10 \log N + 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \log N + \beta_1$$

$$\beta_T - \beta_1 = 10 \log N \quad \longrightarrow \quad N = 10^{\frac{\beta_T - \beta_1}{10}} = 10$$

---

27. Utilizamos la ecuación para la pérdida de NIS con la distancia.

$$\beta_1 - \beta_2 = 20 \log \frac{r_2}{r_1}$$

En el problema tenemos $r_1 = 0.5$ m, $r_2 = 3$ m y $\beta_1 = 111$ dB.

$$\beta_2 = \beta_1 - 20 \log \frac{r_2}{r_1} = 111 - 20 \log \frac{3}{0.5} = 95.44 \text{ dB}$$

---

28. a) La intensidad sonora a una distancia $r_1 = 10$ m es I_1 y a una distancia r_2 es I_2.

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}, \qquad I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$$

Dividiendo I_1 entre I_2 podemos obtener r_2.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cancel{4\pi P} r_2^2}{\cancel{4\pi P} r_1^2} \quad \longrightarrow \quad r_2 = r_1 \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = 10 \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-6}}} = 100 \text{ m}$$

b) Podemos obtener la potencia de I_1 o de I_2. Por ejemplo, utilizando I_1

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \quad \longrightarrow \quad P = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi 10^2 \cdot 10^{-4} = 0.126 \text{ W}$$

---

29. Llamemos β_1, β_2 y β_4 al NIS a una distancia de 1 m, 2 m y 4 m, respectivamente. La pérdida de NIS con la distancia entre los puntos situados a 1 m y 2 m es

$$\beta_1 - \beta_2 = 20 \log \frac{r_2}{r_1}$$

Ya que $\beta_1 = 2\beta_2$ resulta

$$\beta_1 - \frac{\beta_1}{2} = \frac{\beta_1}{2} = 20 \log \frac{r_2}{r_1} \quad \longrightarrow \quad \beta_1 = 40 \log \frac{r_2}{r_1} = 40 \log 2 = 12.04 \text{ dB}$$

La pérdida de NIS con la distancia entre los puntos situados a 1 m y 4 m es

$$\beta_1 - \beta_4 = 20 \log \frac{r_4}{r_1} = 20 \log 4 \quad \longrightarrow \quad \beta_4 = \beta_1 - 20 \log 4$$

Utilizando la expresión $\beta_1 = 40 \log 2$ tenemos

$$\beta_4 = 40 \log 2 - 20 \log 4 = 0 \text{ dB}$$

Si en lugar de utilizar $\beta_1 = 40 \log 2$ utilizamos $\beta_1 = 12.04$ dB obtendremos $\beta_4 = -0.0012$ dB. Este ejercicio nos sirve para darnos cuenta, una vez más, de la importancia de utilizar hasta el final las expresiones matemáticas y no los valores numéricos aproximados.

---

30. a) La variación anual de NIS es $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = 1$ dB.

$$\Delta\beta = 10 \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

Podemos expresar I_2 en términos del aumento porcentual de I_1, es decir, $I_2 = I_1(1 + x)$.

$$\Delta\beta = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log \frac{\cancel{I_1}(1 + x)}{\cancel{I_1}}$$

Despejando obtenemos x

$$x = 10^{\frac{\Delta\beta}{10}} - 1 = 10^{0.1} - 1 = 0.2589 \quad (25.89\,\%)$$

b) Ya que se produce un aumento anual de $\Delta\beta = 1$ dB, podemos expresar el NIS en el año a (año en el que se duplicará la intensidad sonora) como $\beta_a = \beta_1 + a\Delta\beta$.

$$\beta_1 + a\Delta\beta = 10 \log \frac{I_a}{I_0} = 10 \log \frac{2I_1}{I_0}$$

$$a\Delta\beta = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log 2$$

$$a = \frac{10}{\Delta\beta} \log 2 = 3.01 \text{ años}$$

---

31. Para el primer sonido tenemos

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \quad \longrightarrow \quad I_1 = I_0 10^{\frac{\beta_1}{10}} = 100 \text{ dB}$$

y para el segundo

$$\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} \quad \longrightarrow \quad I_2 = I_0 10^{\frac{\beta_2}{10}} = 50 \text{ dB}$$

Por lo tanto

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{\frac{\beta_1}{10}}}{10^{\frac{\beta_2}{10}}} = 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} \quad \longrightarrow \quad I_1 = 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} I_2 = 10^5 I_2$$

---

32. La potencia mecánica es $P_m = Fv = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3$ W. La potencia sonora es

$$\beta = 10 \log \frac{P_s}{4\pi r^2 I_0} \quad \longrightarrow \quad P_s = 4\pi r^2 I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = 4\pi 35^2 10^{-12} 10^6 = 0.0154 \text{ W}$$

El rendimiento de transmisión es

$$\frac{P_s}{P_m} = \frac{0.0154}{0.3} = 0.0513 \quad (5.13\,\%)$$

---

33. Cuando el coche se acerca tenemos

$$f_1' = \left(\frac{c}{c - v_f}\right) f$$

Cuando se aleja

$$f_2' = \left(\frac{c}{c + v_f}\right) f = 0.9 f_1$$

Dividiendo f_2' entre f_1' obtenemos

$$\frac{f_2'}{f_1'} = \left(\frac{c - v_f}{c + v_f}\right) = 0.9 \quad \longrightarrow \quad v_f = \frac{0.1c}{1.9} = 18.05 \text{ m/s}$$

---

34. Primero de todo, indicamos la velocidad de los vehículos en SI ($v_o = 24.6$ m/s y $v_f = 33.5$ m/s).
a)

$$f' = \left(\frac{c + v_o}{c - v_f}\right) f = \left(\frac{343 + 24.6}{343 - 33.5}\right) 400 = 475.09 \text{ Hz}$$

b)

$$f' = \left(\frac{c - v_o}{c + v_f}\right) f = \left(\frac{343 - 24.6}{343 + 33.5}\right) 400 = 338.27 \text{ Hz}$$

---

35. Cuando la atleta se acerca tenemos

$$f_1' = \left(\frac{c + v_o}{c}\right) f$$

Cuando se aleja

$$f_2' = \left(\frac{c - v_o}{c}\right) f = \frac{5}{6} f_1$$

Dividiendo f_2' entre f_1' obtenemos

$$\frac{f_2'}{f_1'} = \left(\frac{c - v_o}{c + v_o}\right) = \frac{5}{6} \quad \longrightarrow \quad v_o = \frac{c}{11} = \frac{325}{11} = 29.55 \text{ m/s}$$

---

36. 100 km/h son 27.78 m/s. Llamemos f_e a la frecuencia emitida por la bocina, f_m a la frecuencia de la onda cuando llega y se refleja en el muro, f_r a la frecuencia recibida por el conductor (eco). Ya que la fuente se mueve con velocidad v, la frecuencia de la onda cuando llega al muro (que aquí juega el papel de observador) es

$$f_m = \left(\frac{c}{c - v}\right) f_e$$

Cuando la onda regresa en forma de eco quien se mueve es el observador, no la fuente.

$$f_r = \left(\frac{c+v}{c} \right) f_m$$

Sustituyendo la expresión de f_m dada por la primera expresión en la segunda obtenemos el resultado

$$f_r = \left(\frac{c+v}{c-v} \right) f_e \quad \longrightarrow \quad f_e = \left(\frac{c-v}{c+v} \right) f_r = \left(\frac{343-27.78}{343+27.78} \right) 840 = 714.13 \text{ Hz}$$

6. ESTÁTICA DE FLUIDOS

1. Dentro de la cámara no hay presión. Fuera habrá una presión atmosférica que hay que vencer para abrir la puerta.

$$P_{at} = \frac{F}{A} \quad \longrightarrow \quad F = P_{at}A = 101325 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 25331 \text{ N}$$

---

2. Ya que nos pide el exceso de presión (presión manométrica), no consideramos la presión atmosférica en el cálculo

$$P_{ex} = \rho_m gh = 1027 \cdot 10 \cdot 5 = 51350 \text{ Pa}$$

Ya que el pescador bucea hasta la misma profundidad en ambos casos, el exceso de presión será mayor cuanto mayor sea la densidad. Por lo tanto su tímpano sufrirá más en el mar. El exceso de presión en el río es

$$P_{ex} = \rho_r gh = 1000 \cdot 10 \cdot 5 = 50000 \text{ Pa}$$

---

3. La presión aumenta con la profundidad, por lo que el espesor de la presa debe aumentar para evitar romperse.

---

4. La uña puede aproximarse por un cuadrado de lado 1 cm, de tal manera que su área es 10^{-4} m^2. Por lo tanto la fuerza ejercida por la presión atmosférica es aproximadamente

$$F = P_{at}A = 101325 \cdot 10^{-4} = 10 \text{ N}$$

Esto es equivalente a tener un cartón de leche encima de la uña.

---

5. La presión ejercida sobre el suelo es

$$P = \frac{mg}{A} = \frac{50 \cdot 10}{\pi \cdot 0.005^2} = 6.37 \cdot 10^6 \text{ Pa} \qquad \text{(mujer)}$$

$$P = \frac{mg}{A} = \frac{5000 \cdot 10}{\pi \cdot 0.25^2} = 2.55 \cdot 10^5 \text{ Pa} \qquad \text{(elefante)}$$

La mujer ejerce una presión aproximadamente 25 veces mayor que el elefante.

---

6. La Tierra es aproximadamente una esfera, por lo que su área total en la superficie (nivel del mar) es $A = 4\pi r^2$. La presión atmosférica a nivel del mar es 1 atm =101325 Pa. Con estos datos podemos obtener directamente su masa.

$$P_{at} = \frac{mg}{A} \quad \longrightarrow \quad m = \frac{P_{at}4\pi r^2}{g} = \frac{101325 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (6.37 \cdot 10^6)^2}{10} = 5.17 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

Esta cifra parece enorme, pero no debemos olvidar que la masa terrestre es aproximadamente $5.97 \cdot 10^{24}$ kg. Esto quiere decir que la atmósfera supone menos de una millonésima parte de la masa de la Tierra.

---

7. La presión sobre el submarino será

$$P = P_{at} + \rho gh = 101325 + 1027 \cdot 10 \cdot 1000 = 1.04 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

Ya que la presión dentro del submarino es P_{at}, la fuerza que debe contrarrestar el militar es aquella debida a la presión manométrica

$$F = P_m A = \rho gh\pi r^2 = 1027 \cdot 10 \cdot 1000 \cdot \pi \cdot 0.7^2 = 1.58 \cdot 10^7 \text{ N}$$

A la vista del resultado parece que el militar no podrá salir a darse un chapuzón.

---

8. La presión en el fondo será la suma de 4 contribuciones: (1) la presión atmosférica actúa sobre la tapa, que transmite la presión al fluido, (2) la presión que genera el peso de la placa, (3) la presión debida a la profundidad y (4) la presión asociada a la fuerza que ejerce el pistón. Vamos a expresar todas ellas por separado para observar cuál es el su orden de magnitud. La presión atmosférica $P_{at} = 101325$ Pa es conocida.

La presión que genera la placa debido a su peso será $P_{al} = mg/A$. No conocemos la masa de la placa, pero podemos relacionar m/A con la densidad tal que

$$\rho_{al} = \frac{m}{V} = \frac{m}{AL},$$

donde L es el espesor de la placa. Por lo tanto la presión será

$$P_{al} = \rho_{al} gL = 2700 \cdot 10 \cdot 0.15 = 4050 \text{ Pa}$$

La presión debida a la profundidad es

$$P = \rho_a gh = 1000 \cdot 10 \cdot 4 = 40000 \text{ Pa}$$

Finalmente, la presión debida a la fuerza es

$$P_F = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{20000}{\pi \cdot 1^2} = 6366 \text{ Pa}$$

La presión total es $P_t = P_{at} + P_{al} + P + P_F = 151741$ Pa.

---

9. Se trata de una prensa hidráulica. La fuerza necesaria para levantar el coche será $F_2 = mg = 13300$ N. La fuerza ejercida por el aire comprimido será pues

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} = F_2 \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = 13300 \cdot \frac{0.05^2}{0.15^2} = 1477.78 \text{ N}$$

---

10. Tenemos una prensa hidráulica donde $F_2 = mg$. Ya que $r_2 = 10r_1$, tenemos que $A_2 = 100A_1$. Por lo tanto, la fuerza necesaria será

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} = \frac{mg}{100} = 230 \text{ N}$$

---

11. Si hubiera utilizado agua la altura de la columna en el tubo sería

$$P_{at} = \rho g h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{P_{at}}{\rho g} = \frac{101325}{1000 \cdot 10} = 10.13 \text{ m}$$

Esta gran altura supone un problema práctico. Además, el punto de ebullición del mercurio es de 357°C, lo que permite en mayor medida mantener la condición de vacío en la parte superior del tubo.

---

12. La respuesta es idéntica al ejercicio anterior ($h = 10.13$ m). El agua asciende por la pajita porque Maruja succiona el aire de su interior, haciendo que la presión dentro del tubo sea menor que fuera. En consecuencia, el agua asciende. En el mejor de los casos Maruja será capaz de succionar todo el aire y así reproducir el experimento de Torricelli. ¡No es recomendable hacer este experimento en casa con mercurio!

---

13. La presión a la profundidad de la interfase agua-aceite es igual en ambas columnas. Por lo tanto la presión de la columna de agua es igual a la presión de la columna de aceite.

$$\rho_a g h_a = \rho_c g h_c \quad \longrightarrow \quad \frac{\rho_c}{\rho_a} = \frac{h_a}{h_c} = \frac{0.16}{0.2} = 0.8$$

---

14. La presión en la interfase agua-mercurio y en un punto situado a la misma profundidad en la rama de la derecha es la misma. Es decir,

$$\rho_a g h_a = \rho_g g h_g + \rho_h g \Delta h$$

h_g es desconocida, pero podemos expresarla como $h_g = h_a - \Delta h$.

$$\rho_a g h_a = \rho_g g (h_a - \Delta h) + \rho_h g \Delta h$$

Despejando Δh se obtiene

$$\Delta h = \frac{h_a(\rho_a - \rho_g)}{\rho_h - \rho_g} = \frac{0.43(1000 - 700)}{13600 - 1000} = 0.01 \text{ m}$$

---

15. Igualamos la presión en un punto A situado en la interfase agua-mercurio y otro punto B situado a la misma altura en la rama derecha. La presión en la rama izquierda se debe a las columnas de agua y aceite. La presión en la rama derecha se debe a la columna de líquido desconocido de espesor h y a la columna de mercurio de espesor $h/20$.

$$\rho_c g h + \rho_a g h = \rho_d g h + \frac{\rho_h g h}{20}$$

donde los subíndices c, a, d y h hacen referencia al aceite, agua, líquido desconocido y mercurio, respectivamente. Despejando obtenemos ρ_d

$$\rho_d = \rho_c + \rho_a - \frac{\rho_h}{20} = 1120 \text{ kg/m}^3$$

---

16. Al introducir la columna de agua, el nivel de mercurio desciende una altura y en la rama 2 y asciende una altura h en la rama 1. Podemos establecer la igualdad de presiones entre los puntos A y B (ver figura)

$$P_A = P_B \quad \longrightarrow \quad \rho_h g(h+y) = \rho g h_a \tag{1}$$

donde ρ_h y ρ son las densidades del mercurio y el agua, respectivamente.

En la ecuación anterior tenemos 3 incógnitas (h_a, y, h). h_a podemos obtenerla directamente de los datos del enunciado, que nos dice que la masa de agua introducida es de 100 g.

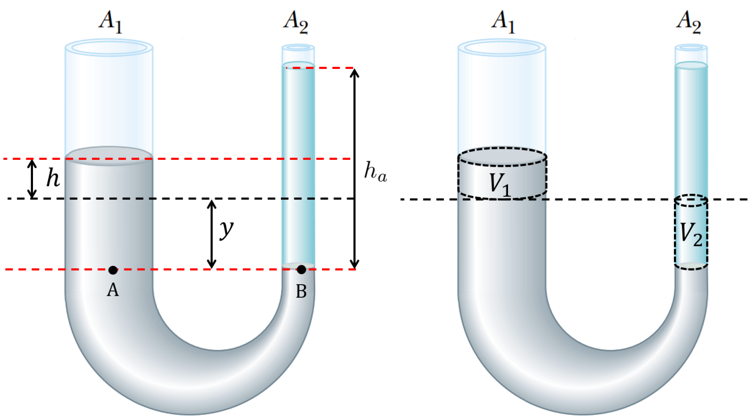
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{h_a A_2} \quad \longrightarrow \quad h_a = \frac{m}{\rho A_2} = \frac{0.1}{1000 \cdot 0.0005} = 0.2 \text{ m}$$

En el caso de la altura y, cuyo valor no nos interesa, podemos expresarla en términos de h_a (conocido) y h (nuestra altura objetivo) simplemente notando que el volumen de mercurio desplazado por el agua en la rama 2 coincide con el volumen de mercurio que asciende en la rama 1 (ver figura derecha). Esto es así porque no se ha añadido ni retirado mercurio del tubo.

$$V_1 = V_2 \quad \longrightarrow \quad A_1 h = A_2 y \quad \longrightarrow \quad y = \frac{A_1 h}{A_2}$$

Sustituyendo esta expresión para y en Ec.(1) y despejando obtenemos h.

$$\rho_h g\left(h + \frac{A_1 h}{A_2}\right) = \rho g h_a \quad \longrightarrow \quad h = \frac{\rho h_a A_2}{\rho_h (A_1 + A_2)} = \frac{1000 \cdot 0.2 \cdot 0.0005}{13600 \cdot 0.0015} = 0.0049 \text{ m}$$



17. a) Una vez se alcanza el equilibrio, la presión en el fondo de cada depósito debe ser igual, es decir

$$\rho g h_1' = P_{at} + \rho g h_2' \quad \longrightarrow \quad h_1' - h_2' = \frac{P_{at}}{\rho g} = 10 \text{ m}, \tag{2}$$

donde h_1' y h_2' son las alturas del agua en los depósitos izquierdo y derecho, respectivamente.

El volumen total de agua no cambia al abrir la llave de paso y es

$$V = h_1 A_1 + h_2 A_2 = 15 \cdot 10 + 10 \cdot 20 = 350 \text{ m}^3,$$

donde h_1, A_1 y h_2, A_2 son las alturas iniciales y la secciones transversales de los depósitos izquierdo y derecho, respectivamente.

Por conservación del volumen, una vez se abre la llave de paso tendremos

$$h_1' A_1 + h_2' A_2 = V$$

Resolviendo esta ecuación conjuntamente con Ec.(2) obtenemos h_A

$$h'_1 = \frac{V + 10A_2}{A_1 + A_2} = 18.33 \text{ m}$$

h'_2 se obtiene a partir de Ec.(2)

$$h'_2 = h'_1 - 10 = 8.33 \text{ m}$$

b) El volumen inicial en el depósito izquierdo es $V_0 = 15 \cdot 10 = 150$ m^3. El volumen final en el depósito es $V_f = 18.33 \cdot 10 = 183.3$ m^3. Por lo tanto han pasado 33.33 m^3 del depósito derecho al izquierdo.

---

18. Para poder establecer igualdades de presiones, vamos a centrarnos en puntos que se encuentran sobre las líneas que pasan por las interfases agua-aire (punto A), agua-aceite (punto B) y aceite-mercurio (punto C). De este modo todos los puntos que se encuentran en una de estas líneas tendrán la misma presión.

    La presión del agua en el punto B es la presión del aire P_A más la presión asociada a la columna de agua de longitud h_1 .

    $$P_B = P_A + \rho_a g h_1,$$

    La presión de un punto en la interfase aceite-mercurio será P_B más la presión asociada a la columna de aceite de longitud h_2.

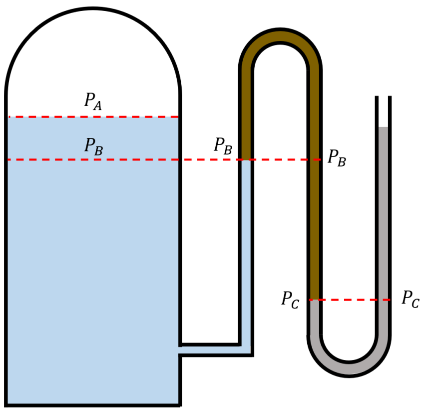
    $$P_C = P_B + \rho_c g h_2$$

    La presión del mercurio en el punto C es la presión atmosférica más la presión asociada a la columna de mercurio de longitud h_3 .

    $$P_C = P_{at} + \rho_h g h_3$$

    Resolviendo el sistema de ecuaciones para P_A se obtiene

    $$P_A = P_{at} + g(\rho_h h_3 - \rho_c h_2 - \rho_a h_1) = 85600 + 10 \cdot (13600 \cdot 0.35 - 850 \cdot 0.2 - 1000 \cdot 0.1) = 130.5 \text{ kPa}$$



---

19. (Ver figura) La presión en A y en B es idéntica. La presión en C y B también es idéntica. No debemos caer en el error de igualar las presiones en B y en C. Aunque en ambos casos se trata de mercurio, los dos volúmenes no están en contacto, es decir, no son el mismo fluido.

    Denotemos P_m y P_p a la presión del metano y el propano, respectivamente. Igualamos presiones en A y B.

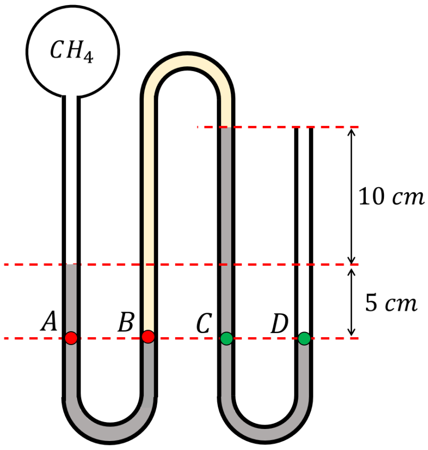
    $$P_m + \rho g h_1 = P_p$$

Igualamos presiones en C y D.

$$P_p + \rho g(h_1 + h_2) = P_{at}$$

Sustituyendo la expresión de P_p dada por la primera ecuación en la segunda, obtenemos

$$P_m = P_{at} - \rho g(2h_1 + h_2) = 101325 - 13600 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 0.05 + 0.1) = 74125 \text{ Pa}$$



---

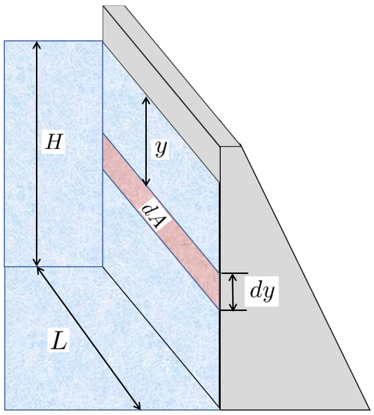
20. Ya que la presión aumenta con la profundidad, la fuerza del agua sobre cada pequeño elemento de la presa también aumentará con la profundidad. Lo que tendremos que hacer es sumar todas esas fuerzas que se ejercen sobre los pequeños elementos en los que podemos descomponer la presa. Matemáticamente esto se reduce a hacer una integral. Vamos a imaginar que el área total de la presa está formada por infinitos elementos de altura dy y longitud L, de tal manera que el área de cada uno de ellos es $dA = Ldy$ (ver figura). La fuerza que actúa sobre cada uno de estos elementos dependerá de la profundidad a la que se encuentren

$$dF = PdA = \rho g y dA = \rho g L y dy$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse directamente por integración

$$F = \rho g L \int_0^H y dy = \frac{1}{2}\rho g L H^2$$

Nótese que no consideramos la presión atmosférica ya que ésta actúa a ambos lados de la presa.



---

21. Por el principio fundamental de la hidrostática sabemos que para un fluido incompresible la dependencia de la presión con la altitud viene dada por $P = P_0 + \rho g h$. En el caso del aire, al tratarse de un fluido compresible, debemos tener en cuenta que la densidad va a ser variable. El enunciado nos dice que ésta es directamente proporcional a la presión. Podemos pues decir

$$\rho = \beta P,$$

$$\rho_0 = \beta P_0,$$

donde β es una constante de proporcionalidad. Dividiendo una expresión entre la otra obtenemos

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0} \quad \longrightarrow \quad \rho(P) = \frac{\rho_0}{P_0} P.$$

Un aumento infinitesimal de la altura generará una disminución infinitesimal de la presión siguiendo la expresión

$$dP = -\rho g dy.$$

Sustituyendo la expresión de $\rho(P)$ obtenida resulta

$$dP = -\frac{\rho_0 g P}{P_0} dy.$$

Esta ecuación diferencial puede integrarse directamente

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} dy \quad \longrightarrow \quad \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} \int_0^y dy. \quad \longrightarrow \quad \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} y$$

Tomando exponenciales a ambos lados resulta

$$P = P_0 e^{-\alpha y},$$

con $\alpha = \rho_0 g / P_0$.

---

22. Ya que el volumen sumergido se relaciona con el volumen del cuerpo a través de la densidad relativa

$$V_s = \frac{\rho_c}{\rho_f} V_c$$

el volumen sumergido será mayor cuanto menor sea la densidad del fluido. En este caso la densidad del agua dulce es menor, por lo que el volumen sumergido será mayor en el lago.

---

23. El empuje será idéntico ya que depende de la densidad del fluido, no de la densidad del cuerpo sumergido.

---

24. Puede introducir ambos cuerpos por separado en un recipiente lleno de agua. Ya que tienen el mismo peso, si el volumen desplazado es el mismo quiere decir que su densidad es la misma. Esto permitiría al presidente confirmar que ha sido engañado, pero no asegurarse de que la corona es de oro, ya que pueden existir materiales distintos con densidad idéntica.

---

25. La presión aumenta con la profundidad. Al tratarse de un material compresible, al descender en el agua su volumen disminuirá y en consecuencia su densidad aumentará. A menor volumen menor empuje, por lo que el cuerpo se hundirá hasta el fondo del recipiente.

---

26. La diferencia entre el peso de un objeto y su peso aparente (peso cuando está completamente sumergido en un fluido) es el empuje. Conocido el peso y el peso aparente podemos calcular el volumen del anillo

$$w - w_a = \rho_a g V \quad \longrightarrow \quad V = \frac{w - w_a}{\rho_a g}$$

Conocido el volumen podemos obtener la densidad del material a partir de su peso

$$w = \rho g V \quad \longrightarrow \quad \rho = \frac{w}{gV} = \frac{w\rho_a}{w - w_a} = \frac{0.158 \cdot 1000}{0.158 - 0.150} = 19750 \text{ kg/m}^3$$

Sabemos pues que la densidad del material del anillo es la misma que la densidad del oro. Sin embargo, no podemos descartar que el vendedor haya utilizado una aleación metálica de densidad igual a la del oro.

27.

$$\frac{V_s}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho_f} = \frac{920}{1027} = 0.896$$

Por lo tanto sobresale un $1 - 0.896 = 10.4\,\%$.

---

28. 0.0084 g/cm^3 equivale a 84 kg/m^3. Un diámetro de 3.8 cm implica que el radio es de 0.019 m. La fuerza necesaria para mantener la pelota sumergida es aquella que contrarresta la resultante del peso y el empuje, es decir

$$F + w = E \quad \longrightarrow \quad F = E - w = gV(\rho - \rho_p) = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_p)$$

$$F = \frac{4}{3}\pi 0.019^3 g(1000 - 84) = 0.263 \text{ N}$$

---

29. Para calcular el empuje necesitamos el volumen y podemos obtenerlo a partir del peso.

$$w = \rho_p g V \quad \longrightarrow \quad V = \frac{w}{\rho_p g}$$

El peso en agua (peso aparente w_a) será el peso menos el empuje

$$w_a = w - E = w - \rho g V$$

Sustituimos la expresión para el volumen obtenida anteriormente

$$w_a = w - \frac{\rho w}{\rho_p} = w\left(1 - \frac{\rho}{\rho_p}\right) = 80\left(1 - \frac{1}{11.3}\right) = 72.92 \text{ N}$$

---

30. Si apenas flota en el agua, cuando la pelota está totalmente sumergida el empuje es igual al peso. De esta igualdad podemos obtener directamente el radio externo R.

$$mg = \rho_a g \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho_a}} = 0.067 \text{ m}$$

Conocido el radio externo, podemos conocer el radio interno r a partir de la definición de densidad

$$\rho_{al} = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi(R^3 - r^3)} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{R^3 - \frac{3m}{4\pi\rho_{al}}} = 0.0574 \text{ m}$$

También se podría obtener este resultado igualando el peso y el empuje. En la expresión del peso debemos expresar la masa en términos del volumen y la densidad ($m = \rho_{al}\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$)

$$\rho_{al} g \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \rho_a g \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad r = R\sqrt[3]{\frac{\rho_{al} - \rho_a}{\rho_{al}}} = 0.0574 \text{ m}$$

---

31. a) El peso y la tensión van dirigidos hacia abajo, mientras que el empuje va hacia arriba. Por lo tanto

$$E = w + T \quad \longrightarrow \quad mg = E - T = \rho g V - T \quad \longrightarrow \quad m = \rho V - \frac{T}{g} = 1027 \cdot 0.3 - \frac{900}{10} = 218.1 \text{ kg}$$

b) Podemos obtener la densidad media de la esfera a partir de su masa y volumen. Entonces el volumen sumergido será

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_c}{\rho} = \frac{m}{\rho V} = \frac{218.1}{1027 \cdot 0.3} = 70.8\,\%$$

---

32. Cuando la roca está en el aire el empuje es despreciable

$$mg = T_1$$

Cuando la roca está sumergida en agua

$$mg - \rho_a g V = T_2$$

Cuando la roca está sumergida en el líquido desconocido

$$mg - \rho g V = T_3$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\rho = \frac{(T_1 - T_3)\rho_a}{T_1 - T_2} = 1638.89 \text{ kg/m}^3$$

---

33. El enunciado nos está dando el peso aparente del bloque (peso menos empuje).

$$w_a = w - E \quad \longrightarrow \quad w_a = \rho_h g V - \rho_f g V \quad \longrightarrow \quad \rho_f = \rho_h - \frac{w_a}{gV}$$

No conocemos el volumen del bloque, pero podemos expresarlo en términos de los datos conocidos de la masa y la densidad del hierro.

$$\rho_f = \rho_h - \frac{w_a \rho_h}{mg} = \rho_h \left(1 - \frac{w_a}{mg}\right) = 7960\left(1 - \frac{6.16}{5 \cdot 10}\right) = 6979.33 \text{ kg/m}^3$$

---

34. El empuje debe compensar el peso del globo w_h y el peso de la masa que se quiere elevar w.

$$E = w_h + w \quad \longrightarrow \quad \rho_a g V = \rho_h g V + mg \quad \longrightarrow \quad V(\rho_a - \rho_h) = m$$

$$V = \frac{m}{\rho_a - \rho_h} = \frac{200}{1.29 - 0.178} = 179.86 \text{ m}^3$$

---

35. En ambas situaciones el peso iguala al empuje. En el océano tenemos

$$\rho_o g V_s = m_b g + m_c g \quad \longrightarrow \quad V_s = \frac{m_b + m_c}{\rho_r},$$

donde m_b y m_c son la masas del barco y la carga, respectivamente.

En el río tenemos

$$\rho_r g V_s = m_b g \quad \longrightarrow \quad V_s = \frac{m_b}{\rho_o}$$

Podemos igualar ambas expresiones y despejar m_b

$$m_b = \frac{m_c \rho_r}{\rho_o - \rho_r} = \frac{10^6 \cdot 1000}{1027 - 1000} = 3.70 \cdot 10^7 \text{ kg}$$

---

36. La condición de que Tom Hanks no se moje los pies nos dice que la plataforma puede estar completamente sumergida. El empuje debe igualar la masa de Tom y la de la plataforma.

$$\rho g h A = \rho_m g h A + mg,$$

donde $hA = V$ es el volumen de la plataforma, ρ_m es la densidad de la madera y ρ es la densidad del agua del mar. Despejando A se obtiene

$$A = \frac{m}{h(\rho - \rho_m)} = \frac{70}{0.1(1027 - 240)} = 0.89 \text{ m}^2$$

---

37. El peso aparente, que es $3P/4$, será el peso menos el empuje.

$$\frac{3}{4}P = P - \rho g V \quad \longrightarrow \quad V = \frac{P}{4\rho g}$$

Utilizando este volumen en la definición de densidad, notando que $m = P/g$ obtenemos

$$\rho_o = \frac{m}{V} = 4\rho$$

---

38. Para el primer cuerpo tenemos

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{2}$$

Para el segundo

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_2}{\rho} = \frac{3}{4}$$

Dividiendo la primera expresión entre la segunda resulta

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2}{3}$$

---

39. La única dificultad del ejercicio es darse cuenta de que el empuje es una fuerza ascendente, por lo que el empuje del agua y el de la gasolina tiene el mismo sentido (hacia arriba). Sería un error conceptual el pensar que el bloque de hielo se mantiene entre los dos líquidos porque de alguna manera se compensan sus empujes. El bloque de hielo se mantiene entre los dos líquidos porque es más denso que la gasolina y menos denso que el agua. Dicho esto, el equilibrio de fuerzas es

$$w = E_g + E_a \quad \longrightarrow \quad \rho_h g V = \rho_g g V_g + \rho_a g V_a,$$

donde V_a y V_g es el volumen del cubo sumergido en agua y gasolina, respectivamente.

Notando que $V_a + V_g = V$ podemos resolver el sistema para V_a obteniendo

$$\frac{V_a}{V} = \frac{\rho_h - \rho_g}{\rho_a - \rho_g} = \frac{0.9 - 0.7}{1 - 0.7} = \frac{2}{3}$$

---

40. En el primer caso tenemos que el empuje del agua sobre el cuerpo A debe compensar el peso de ambos cuerpos.

$$\rho_a g V_{As} = m_A g + \rho_B g V_B,$$

donde V_{As} es el volumen sumergido del cuerpo A.

En el segundo caso el empuje del aceite sobre los cuerpos A y B debe compensar el peso de ambos cuerpos.

$$\rho_c g V_{As} + \rho_c g V_B = m_A g + \rho_B g V_B.$$

Podemos igualar ambas expresiones y despejar V_{As}.

$$\rho_a g V_{As} = \rho_c g V_{As} + \rho_c g V_B \quad \longrightarrow \quad V_{As} = \frac{\rho_c V_B}{\rho_a - \rho_c} = \frac{800 \cdot 0.001}{1000 - 800} = 0.004 \text{ m}^3$$

Conocido V_{As} podemos volver a la primera ecuación y obtener m_A

$$\rho_a g V_{As} = m_A g + \rho_B g V_B \quad \longrightarrow \quad m_A = \rho_a V_{As} - \rho_B V_B = 1000 \cdot 0.004 - 500 \cdot 0.001 = 3.5 \text{ kg}$$

---

41. Si la profundidad de la capa de agua es h, el volumen sumergido en agua es $L^2 h$. El volumen sumergido en mercurio es $L^2(L-h)$. Igualando el peso al empuje generado por el mercurio y el agua obtenemos

$$\rho_c g L^3 = \rho_h g L^2 (L - h) + \rho_a g L^2 h$$

Despejando se obtiene

$$h = \frac{L(\rho_h - \rho_c)}{\rho_h - \rho_a} = 0.046 \text{ m}$$

---

42. El empuje sobre el volumen del cubo que asciende al retirar el bloque es igual al peso del bloque.

$$\rho g L^2 (h - h') = mg \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{\frac{m}{\rho(h - h')}} = 0.1 \text{ m} \tag{3}$$

El problema se puede resolver también de forma más larga. Inicialmente, el empuje sobre el volumen sumergido es igual al peso del cubo (Mg) más el peso del bloque (mg).

$$mg + Mg = \rho g L^2 h \tag{4}$$

Cuando se retira el bloque, el empuje sobre el volumen sumergido es igual al peso del cubo.

$$Mg = \rho g L^2 h' \tag{5}$$

Restando las ecuaciones Ec.(4) y Ec.(5) se obtiene Ec.(3).

---

43. La masa del aire contenido en la vejiga natatoria es despreciable, por lo que el problema se reduce a calcular cuál tiene que ser el volumen del pez para que su densidad sea igual a la del agua.

$$\frac{m_p}{V_p + V_v} = \rho,$$

donde m_p es la masa del pez (como hemos dicho, esta masa prácticamente no cambia al añadir el aire), V_p es el volumen del vez cuando la vejiga no tiene aire, V_v es el volumen de la vejiga y ρ es la densidad del agua.

Despejando V_v resulta

$$V_v = \frac{m_p}{\rho} - V_p.$$

No conocemos el volumen inicial del pez, pero sí su masa y densidad ρ_p cuando la vejiga está vacía, por lo que podemos expresar el resultado en función de datos conocidos.

$$V_v = m_p \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_p} \right) = 0.825 \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1050} \right) = 3.929 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 39.29 \text{ mL}$$

Vamos a resolver ahora el problema considerando la masa del aire dentro de la vejiga natatoria. En este caso expresamos la densidad del pez como

$$\frac{m_p + m_v}{V_p + V_v} = \rho,$$

La masa de aire dentro de la vejiga será $m_v = \rho_a V_v$, donde ρ_a es la densidad del aire. Igual que antes, expresamos también el volumen del pez (vejiga vacía) como $V_p = m_p/\rho_p$. Con ello la ecuación es

$$\frac{m_p + \rho_a V_v}{\frac{m_p}{\rho_p} + V_v} = \rho.$$

Si despejamos V_v obtenemos

$$V_v = \frac{m_p(\rho_p - \rho)}{\rho_p(\rho - \rho_a)} = \frac{0.825 \cdot (1050 - 1000)}{1050 \cdot (1000 - 1.29)} = 3.934 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 39.34 \text{ mL}$$

---

44. a) Igualamos el peso al empuje, notando que el volumen total es L^3 y el volumen sumergido es $L^2 h$.

$$\rho_h g L^3 = \rho g L^2 h \quad \longrightarrow \quad h = L\frac{\rho_h}{\rho} = 2 \cdot \frac{917}{1000} = 1.834 \text{ m}$$

b) Ahora el peso debe igualarse al empuje del agua más el empuje del alcohol. El enunciado nos dice cuál es la altura del cubo sumergida en alcohol (0.5 cm).

$$\rho_h g L^3 = \rho g L^2 h + \rho_a g L^2 h_a \quad \longrightarrow \quad h = \frac{\rho_h L - \rho_a h_a}{\rho} = \frac{917 \cdot 2 - 806 \cdot 0.5}{1000} = 1.431 \text{ m}$$

c) El balance de fuerzas es idéntico al apartado anterior

$$\rho_h g L^3 = \rho g L^2 h + \rho_a g L^2 h_a$$

Desconocemos tanto la altura sumergida en alcohol h_a como la altura sumergida en agua h. Sin embargo, la condición de que el cuerpo esté completamente sumergido nos dice que $h_a + h = L$. Ya que buscamos h_a, expresamos $h = L - h_a$ en el equilibrio de fuerzas, obteniendo

$$\rho_h g L^3 = \rho g L^2 (L - h_a) + \rho_a g L^2 h_a$$

Despejando h_a obtenemos el resultado

$$h_a = \frac{L(\rho - \rho_h)}{\rho - \rho_a} = \frac{2 \cdot (1000 - 917)}{1000 - 806} = 0.856 \text{ m}$$

---

45. El peso real de la persona es

$$w = \rho_c g V$$

y el peso aparente es

$$w_a = \rho_c g V - \rho g V = \alpha w,$$

donde ρ_c y ρ son la densidad del cuerpo y la densidad del agua, respectivamente. $\alpha = 0.05$ es el porcentaje que supone el peso aparente con respecto del real. V es el volumen total del cuerpo.

Dividiendo el peso aparente entre el peso obtenemos una expresión que nos permite calcular la densidad del cuerpo.

$$\frac{w_a}{w} = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = \alpha \quad \longrightarrow \quad \rho_c = \frac{\rho}{1 - \alpha} \tag{6}$$

Perfectamente podríamos obtener aquí un valor numérico $\rho_c = 1052.63$ kg/m^3, pero vamos a dejar el resultado en función de α hasta el final.

Conocida ρ_c debemos buscar una forma de relacionarla con la densidad de la grasa y del tejido magro. Una forma es a través del volumen total, que será la suma del volumen magro y el volumen del tejido

$$V = V_m + V_g \quad \longrightarrow \quad \frac{m}{\rho_c} = \frac{m_m}{\rho_m} + \frac{m_g}{\rho_g}, \tag{7}$$

donde los subíndices g y m hacen referencia a la grasa y al tejido magro, respectivamente.

Podemos expresar la masa de grasa y la masa magra en función de la masa total y la fracción del total que supone cada una de ellas, es decir, $m_m = F_m m$ y $m_g = F_g m$. Expresando las masas de esta manera se cancela la masa total y Ec.(7) se simplifica a

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{F_m}{\rho_m} + \frac{F_g}{\rho_g}$$

Utilizando la expresión de ρ_c obtenida en Ec.(6) se obtiene

$$\frac{1 - \alpha}{\rho} = \frac{F_m}{\rho_m} + \frac{F_g}{\rho_g}$$

Seguimos teniendo dos incógnitas (F_g y F_m), pero podemos relacionarlas tal que $F_m = 1 - F_g$ obteniendo

$$\frac{1 - \alpha}{\rho} = \frac{1 - F_g}{\rho_m} + \frac{F_g}{\rho_g}$$

Despejando F_g obtenemos el resultado final

$$F_g = \frac{\rho_g(\rho_m(1 - \alpha) - \rho)}{\rho(\rho_m - \rho_g)} = \frac{900(1100(1 - 0.05) - 1000)}{1000(1100 - 900)} = 0.2025 = 20.25\,\%$$

7. DINÁMICA DE FLUIDOS

1. Tomamos nuestra línea de referencia a la altura de entrada del agua. Tomamos como punto A la entrada del agua y como punto B la altura $h = 12$ m. La velocidad en B se puede obtener directamente por continuidad.

$$v_B = v_A \frac{A_A}{A_B} = v_A \frac{r_A^2}{r_B^2} = 0.4 \frac{0.05^2}{0.02^2} = 2.5 \text{ m/s}$$

La presión en B se obtiene utilizando la ecuación de Bernoulli entre A y B

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h \quad \longrightarrow \quad P_B = P_A - \rho g h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_A^2 - v_B^2)$$

$$P_B = 400000 - 1000 \cdot 10 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (0.4^2 - 2.5^2) = 276.96 \text{ kPa}$$

---

2. A partir de la ecuación de continuidad calculamos el caudal de agua

$$Q = vA = v\pi r^2 = 0.8 \cdot \pi \cdot 0.05^2 = 6.283 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Conocido el caudal, calculamos el volumen de agua que fluye en 2 horas

$$V = 7200Q = 45.24 \text{ m}^3$$

La altura del agua en el depósito cilíndrico será

$$V = \pi R^2 h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{45.24}{\pi 2^2} = 3.6 \text{ m}$$

La presión manométrica en el fondo del depósito será por lo tanto

$$P = \rho g h = 1000 \cdot 10 \cdot 3.6 = 36 \text{ kPa}$$

---

3. Tomamos nuestra línea de referencia a la profundidad $h = 0.13$ m por debajo del grifo, que es el punto en el que queremos calcular el radio del chorro. Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre la salida del grifo (punto 1) y el chorro en la línea de referencia (punto 2).

$$P_{at} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Tras cancelar la presión atmosférica y las densidades resulta

$$gh + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}v_2^2$$

Podemos obtener el caudal a partir de los datos del enunciado

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{125 \cdot 10^{-6}}{16.3} = 7.669 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

Conocido éste podemos obtener la velocidad de salida del agua por el grifo

$$v_1 A_1 = Q \quad \longrightarrow \quad v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi r_1^2} = \frac{7.669 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot 0.0048^2} = 0.106 \text{ m/s}$$

Conocida la velocidad de salida podemos regresar a la ecuación de Bernoulli, donde ahora nuestra única incógnita es v_2, que a su vez podemos expresar como $v_2 = Q/A_2 = Q/\pi r_2^2$

$$gh + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\pi^2 r_2^4}$$

Despejamos r_2

$$r_2 = \sqrt[4]{\frac{Q^2}{\pi^2(v_1^2 + 2gh)}} = \sqrt[4]{\frac{(7.669 \cdot 10^{-6})^2}{\pi^2(0.106^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0.13)}} = 1.23 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

---

4. a) En SI, el caudal es de 0.01 m^3/s. A partir de éste, utilizando la ecuación de continuidad, obtenemos las velocidades en la parte ancha A y en la boquilla B

$$v_a = \frac{Q}{A_a} = \frac{Q}{\pi r_a^2} = \frac{0.01}{\pi 0.065^2} = 0.75 \text{ m/s}$$

$$v_b = \frac{Q}{A_b} = \frac{Q}{\pi r_b^2} = \frac{0.01}{\pi 0.038^2} = 2.20 \text{ m/s}$$

b) La presión máxima que soportará el tapón es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1500}{\pi 0.05^2} = 190986 \text{ Pa}$$

Podemos suponer que la presión atmosférica actúa a ambos lados del tapón, por lo que no tenemos que considerarla en el cálculo. La altura que genera la presión hidrostática P es

$$P = \rho g h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{P}{\rho g} = \frac{190986}{10000} = 19.10 \text{ m}$$

Esto equivale a un volumen de agua $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 19.10 = 240.02 \text{ m}^3$. Por lo tanto, el tiempo en que se alcanza este volumen es

$$Q = \frac{V}{t} \quad \longrightarrow \quad t = \frac{V}{Q} = \frac{240.02}{0.01} = 24002 \text{ s} = 6.67 \text{ h}$$

Si consideramos que la presión atmosférica no actúa por debajo del tapón se obtiene $t = 3.13$ h.

---

5. Llamemos A al punto en el que se encuentra la bomba, B al punto a nivel del suelo y C al punto de máxima altura del agua. Llamemos $h_1 = 3$ m a la profundidad de la bomba con respecto al suelo y $h_2 = 12$ m a la altura del chorro con respecto al suelo. Apliquemos la ecuación de Bernoulli entre los 3 puntos. En el punto A tenemos la presión de la bomba y una cierta velocidad. En B la presión es la atmosférica y además tenemos energía cinética y potencial. En C la presión también es la atmosférica y tenemos energía potencial (la cinética es nula, ya que se trata del punto de máxima altura).

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_1 = P_{at} + \rho g(h_1 + h_2)$$

De la igualdad de energías entre B y C podemos obtener la velocidad de salida del agua en B

$$P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_1 = P_{at} + \rho g(h_1 + h_2) \quad \longrightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh_2}$$

En la igualdad de energías entre A y B tenemos dos incógnitas, P_A y v_A, pero podemos expresar v_A en términos de v_B a partir de la ecuación de continuidad.

$$v_A = v_B \frac{A_B}{A_A}$$

De esta manera resulta

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_1 \quad \longrightarrow \quad P_A = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \left(1 - \frac{A_B^2}{A_A^2}\right) + \rho g h_1$$

Sustituyendo la expresión $v_B = \sqrt{2gh_2}$ y expresando $A_B^2/A_A^2 = r_B^4/r_A^4$ obtenemos la presión de la bomba

$$P_A = P_{at} + \rho g h_2 \left(1 - \frac{r_B^4}{r_A^4}\right) + \rho g h_1$$

$$P_A = P_{at} + 1000 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \left(1 - \frac{0.005^4}{0.01^4}\right) + 1000 \cdot 10 \cdot 3 = P_{at} + 142.5 \text{ kPa}$$

---

6. A partir del caudal y el área de la sección transversal de la aguja obtenemos la velocidad de la sangre en la aguja. Utilizando SI, el caudal es de $6.67 \cdot 10^{-8}$ m^3/s.

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-8}}{\pi \cdot 0.0003^2} = 0.531 \text{ m/s}$$

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre un punto situado en la superficie del recipiente (B) y la vena (A). Tomamos nuestro nivel de referencia en la vena.

$$P_{at} + \rho_s g h = P_A + \frac{1}{2}\rho_s v^2 \quad \longrightarrow \quad h = \frac{P_A - P_{at}}{\rho_s g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{110000 - 101325}{1050 \cdot 10} + \frac{0.531^2}{20} = 0.84 \text{ m}$$

---

7. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre dos puntos situados a la misma altura y situados en las posiciones de medida de la presión, obtenemos

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

A partir de la ecuación de continuidad podemos expresar v_1 en términos de v_2 y el área de las secciones transversales.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \longrightarrow \quad v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Bernoulli obtenemos

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho \frac{A_2^2}{A_1^2} v_2^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Despejando v_2 obtenemos el resultado buscado

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)A_1^2}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

---

8. Utilizando exactamente los mismos argumentos que en el ejercicio anterior llegamos a

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)A_1^2}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (80000 - 60000) \cdot 0.002^2}{1000 \cdot (0.002^2 - 0.0015^2)}} = 9.56 \text{ m/s}$$

Utilizando la ecuación de continuidad obtenemos v_1

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \longrightarrow \quad v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \frac{0.0015}{0.002} \cdot 9.56 = 7.17 \text{ m/s}$$

---

9. De aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 (sección ancha) y 2 (sección estrecha) obtenemos

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

donde tanto las velocidades como las presiones son desconocidas.

De la ecuación de continuidad entre los puntos 1 y 2 obtenemos

$$v_2 A_2 = v_1 A_1 \quad \longrightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = r v_1$$

Nos centramos ahora en el manómetro. La presión en la interfase agua-mercurio en la columna de la izquierda debe ser igual a la presión a la misma altura en la columna de la derecha. En consecuencia,

$$P_1 + \rho g h = P_2 + \rho_h g h$$

Si a esta ecuación le restamos la primera (Bernoulli) se cancelan las presiones y obtenemos

$$\rho g h - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho_h g h - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

En esta expresión no nos interesa v_2, por lo que la sustituimos por el resultado de la ecuación de continuidad $v_2 = r v_1$

$$\rho g h - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho_h g h - \frac{1}{2}\rho r^2 v_1^2$$

Si despejamos v_1 obtenemos

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh(\rho_h - \rho)}{\rho(r^2 - 1)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 0.06 \cdot (13600 - 1000)}{1000 \cdot (16 - 1)}} = 1.00 \text{ m/s}$$

---

10. a) Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre la superficie del líquido en el recipiente y la salida a través del sifón. Nuestro nivel de referencia se encuentra en la salida. En el primer punto no hay energía cinética, el término potencial es $\rho g h$ y la presión es P_{at}. En el segundo punto hay energía cinética, pero no energía potencial debido a nuestra elección de nivel de referencia. La presión también es la atmosférica.

$$\cancel{P_{at}} + \rho g h = \cancel{P_{at}} + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1} = 2\sqrt{5} \text{ m/s}$$

b) Para que haya drenaje de líquido, el punto de máxima altura en el sifón debe tener una cierta presión no nula. Tomamos ahora nuestro nivel de referencia en la altura del líquido en el recipiente (punto A) y aplicamos la ecuación de Bernoulli entre este punto y el punto B situado en la parte más alta del sifón.

$$P_{at} = P_B + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Ya que la sección del tubo es constante, la ecuación de continuidad nos dice que la velocidad en el punto B es la misma que en la salida del tubo, es decir, $v_B = \sqrt{2gh}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Bernoulli obtenemos

$$P_{at} = P_B + \rho g(y + h)$$

Imponiendo $P_B = 0$ resulta

$$y = \frac{P_{at}}{\rho g} - h = \frac{101325}{1000 \cdot 10} - 1 = 9.13 \text{ m}$$

Por supuesto, debe cumplirse en todo caso $h > 0$.

---

11. El enunciado nos dice que la sección del depósito es mucho mayor que la del orificio. Esta condición, bastante habitual en este tipo de problemas, implica que la altura del agua en el depósito no desciende debido a la pérdida de agua a través del orificio. De lo contrario, la velocidad de salida del agua iría disminuyendo a medida que se vacía el depósito.

    Vamos a aplicar la ecuación de Bernoulli entre dos puntos situados a la altura h (altura a la que se encuentra el orificio). Si nuestro nivel de referencia se encuentra a esta altura, ninguno de los puntos tendrá energía potencial. El punto 1 está dentro del depósito y el punto 2 en el orificio. En el punto 1 tenemos que la presión es la suma de la presión atmosférica P_{at} y la presión hidrostática $\rho g(H - h)$. En este punto no hay energía cinética ni potencial. En el punto 2, que está abierto al aire, la presión es P_{at} y existe una cierta energía cinética. Por lo tanto,

$$\cancel{P_{at}} + \rho g(H - h) = \cancel{P_{at}} + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{2g(H - h)}$$

    Vemos que, bajo estas condiciones, la velocidad de salida del chorro es $v = \sqrt{2gz}$, siendo z la profundidad del orificio con respecto a la altura del agua.

    Las ecuaciones cinemáticas para la posición del chorro en el momento de llegar al suelo son

$$\cancel{y_f} = h - \frac{1}{2}gt^2, \qquad d = vt,$$

    donde la velocidad no tiene componente y ya que la salida del agua es horizontal.

    Despejando t en la coordenada x y sustituyendo en la coordenada y obtenemos

$$h = \frac{gd^2}{2v^2} = \frac{d^2}{4(H - h)},$$

    donde en el primer paso hemos sustituido $v = \sqrt{2g(H - h)}$

    Si despejamos h obtenemos una ecuación de segundo grado

$$4h^2 - 4Hh + d^2 = 0,$$

    con soluciones

$$h_{1,2} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - d^2}}{2}$$

    Para el caso concreto $H = 10$ m y $d = 8$ m se obtiene $h = 2$ y $h = 8$.

---

12. Comenzamos con el caso en que únicamente hay agua. Utilizando la ecuación de Bernoulli entre un punto sobre la superficie del agua y el fondo del depósito (orificio), tomando este último punto como nivel de referencia, se obtiene

$$P_{at} + \rho g h = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad \longrightarrow \quad h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{2.42^2}{20} = 0.293 \text{ m}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los mismos dos puntos, pero en el caso en que hay agua y petróleo, se obtiene

$$P_{at} + \rho g h + \rho_p g h' = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \longrightarrow \quad h' = \frac{\rho}{\rho_p}\left(\frac{v_2^2}{2g} - h\right) = \frac{1000}{800}\left(\frac{3^2}{20} - 0.293\right) = 0.196 \text{ m}$$

---

13. a) Es un problema muy similar al ejercicio 11. La única diferencia es que ahora la presión dentro del depósito a la altura del orificio es $P + \rho g h$, mientras que en el orificio la presión es P_{at}. En este caso la presión atmosférica no se cancela. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre ambos puntos obtenemos

$$P + \rho g h = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P - P_{at}) + 2gh},$$

La observación más llamativa al comparar con el caso en que el recipiente está abierto es que en esta situación la velocidad de salida depende de la densidad del fluido.

b) Como hemos visto en el ejercicio 11, si el depósito está abierto a la atmósfera la velocidad de salida del chorro es $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}$. Siguiendo el mismo procedimiento obtenemos las ecuaciones cinemáticas para la posición del chorro en el momento de llegar al suelo

$$\cancel{y_f} = y_1 - \frac{1}{2}gt^2, \qquad x = vt,$$

Despejando t en la coordenada x y sustituyendo en la coordenada y obtenemos

$$y_1 = \frac{gx^2}{2v^2} = \frac{x^2}{4(y_2 - y_1)}$$

donde hemos sustituido $v^2 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}$. En esta expresión podemos despejar el alcance.

$$x^2 = 4y_1(y_2 - y_1)$$

Para maximizar el alcance tendremos que igualar a cero su derivada con respecto a y_1. El mismo valor de y_1 que maximiza x maximizará x^2, por lo que optamos por esta segunda opción ya que reduce la dificultad de la derivada.

$$\frac{\partial x^2}{\partial y_1} = 4y_2 - 8y_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad y_2 = 2y_1.$$

---

14. Tomamos como nivel de referencia la línea que atraviesa la tubería (línea roja punteada en la figura). En A la velocidad es nula y la presión es $P = P_{at} + \rho g h_1 = 121325$ Pa. En el punto B existe una cierta velocidad y una presión desconocida P_B. En C existe una cierta velocidad y la presión es P_{at}. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre estos tres puntos obtenemos

$$P_{at} + \rho g h_1 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

Por continuidad sabemos que $v_B = v_C$, lo que a su vez implica que $P_B = P_{at}$. Por lo tanto,

$$\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_B^2 = \frac{1}{2}\rho v_C^2 \quad \longrightarrow \quad v_B = v_C = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{10} \text{ m/s}$$

Físicamente, lo que ha ocurrido es que el exceso de presión $\rho g h_1$ entre los puntos A y C se traduce en un incremento de la velocidad, que es lo que permite que el agua fluya a través de la tubería.

---

15. a) La presión manométrica en B y O es meramente hidrostática.

$$P_B = \rho_c g h_1 = 800 \cdot 10 \cdot 0.5 = 4 \text{ kPa}$$

$$P_0 = P_B + \rho_a g(h_2 + h_3) = 4000 + 1000 \cdot 10 \cdot (2+1) = 34 \text{ kPa}$$

b) Tomamos como nivel de referencia la línea que atraviesa la tubería (línea roja punteada en la figura). Vamos a aplicar la ecuación de Bernoulli entre tres puntos: (1) un punto situado en el interior del depósito a la misma altura que C y D; (2) el punto C, que se encuentra dentro de la tubería; (3) el punto D, que se encuentra abierto a la atmósfera. Dentro del depósito la presión es la atmosférica más la hidrostática. En el punto C tenemos una presión desconocida y una cierta velocidad. En el punto D tenemos la presión atmosférica y una cierta velocidad.

$$P_{at} + \rho_c g h_1 + \rho_a g h_2 = P_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho_a v_D^2$$

De la primera ecuación (depósito) y la última (D), podemos obtener la velocidad en D

$$v_D = \sqrt{\frac{2g(\rho_c h_1 + \rho_a h_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot (800 \cdot 0.5 + 1000 \cdot 2)}{1000}} = 6.93 \text{ m/s}$$

Conocida la velocidad en D, podemos obtener la velocidad en C por continuidad

$$v_C = v_D \frac{A_D}{A_C} = v_D \frac{r_D^2}{r_C^2} = 6.93 \cdot \frac{0.02^2}{0.04^2} = 1.73 \text{ m/s}$$

Utilizando este valor en la ecuación de Bernoulli, podemos obtener P_C

$$P_C + \frac{1}{2}\rho_a v_C^2 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho_a v_D^2 \quad \longrightarrow \quad P_C = P_{at} + \frac{1}{2}\rho_a (v_D^2 - v_C^2)$$

$$P_C = 101325 + \frac{1000}{2}(6.93^2 - 1.73^2) = 123.84 \text{ kPa}$$

c) La posición del chorro en el momento de impactar contra el suelo es

$$\cancel{y_f} = h_3 - \frac{1}{2}gt^2, \qquad d = v_D t,$$

Despejando t en la coordenada x y sustituyendo en la coordenada y obtenemos

$$h_3 = \frac{gd^2}{2v_D^2} \quad \longrightarrow \quad d = v_D\sqrt{\frac{2h_3}{g}} = 6.93\sqrt{\frac{2 \cdot 1}{10}} = 3.1 \text{ m}$$

---

16. Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre un punto A situado en el inicio del tubo por el que saldrá el chorro y otro punto B situado en el orificio de salida del tubo. Tomamos nuestra línea de referencia en la altura del punto A. En A la energía se debe a la presión atmosférica y a la presión hidrostática. En B la presión es la atmosférica y además existirá una cierta energía cinética y potencial.

$$P_{at} + \rho g h = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g L \sin\theta \quad \longrightarrow \quad v_B = \sqrt{2g(h - L\sin\theta)}$$

La altura máxima del tiro parabólico es

$$y_m = \frac{v_B^2 \sin^2\theta}{2g} = (h - L\sin\theta)\sin^2\theta = (10 - 2\sin 30)\sin^2 30 = 2.25 \text{ m}$$

Resulta llamativo que la altura máxima no depende de la aceleración de la gravedad. En la Luna el chorro saldría con menor velocidad, pero llegaría hasta la misma altura que en la Tierra.

Nótese que el problema se resolvería de forma idéntica considerando como punto A aquel punto situado en la superficie del agua en el depósito, donde la presión es P_{at} y el término potencial $\rho g h$.

---

17. Utilizamos la ecuación de Bernoulli entre un punto situado en la superficie del agua en el extintor y un punto situado en la boquilla de salida. Nuestra línea de referencia se encuentra en la superficie del agua en el extintor.

$$P = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$$

La presión manométrica P_m es el exceso de presión con respecto a la presión atmosférica. Por lo tanto,

$$P - P_{at} = P_m = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \frac{1}{2}1000 \cdot 30^2 + 1000 \cdot 10 \cdot 0.5 = 455 \text{ kPa}$$

---

18. a) La velocidad de salida del agua puede obtenerse aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del agua A y el punto de salida C.

$$P_{at} + \rho g h_a = P_{at} + \rho g h_c + \frac{1}{2}\rho v_c^2 \quad \longrightarrow \quad v_c = \sqrt{2g(h_a - h_c)} = 14.70 \text{ m/s}$$

b) La presión en B la obtenemos tras utilizar la ecuación de Bernoulli entre los puntos B y C. Tomamos como nivel de referencia la altura de dichos puntos.

$$P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_c^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_b^2 \quad \longrightarrow \quad P_B = P_{at} + \frac{1}{2}\rho(v_c^2 - v_b^2),$$

donde v_b podemos obtenerla a partir de la ecuación de continuidad

$$v_b = v_c \frac{A_c}{A_b} = v_c \frac{r_c^2}{r_b^2} = 14.70 \cdot \frac{0.04^2}{0.1^2} = 2.352 \text{ m/s}$$

En consecuencia,

$$P_B = 101325 + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (14.70^2 - 2.352^2) = 206604 \text{ Pa}$$

c) En el fondo del tubo vertical tenemos

$$P_B = P_{at} + \rho g h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{P_B - P_{at}}{\rho g} = \frac{206604 - 101325}{\rho g} = 10.53 \text{ m}$$

---

19. Utilizamos la ecuación de Bernoulli entre el orificio de salida (punto 1) y un punto sobre la superficie del agua en el recipiente (punto 2)

$$\cancel{P_{at}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y = \cancel{P_{at}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2,$$

donde y es la altura del agua en un instante arbitrario t.

A partir de la ecuación de continuidad, deducimos que si $R \ll r$ entonces $v_1 \gg v_2$. Esto implica que $v_1^2 - v_2^2 \approx v_1^2$, por lo que la ecuación de Bernoulli nos lleva a la expresión habitual de la velocidad de salida del agua en un depósito

$$v_1 = \sqrt{2gy},$$

donde aquí esta velocidad dependerá de la altura del agua y.

Utilizando la ecuación de continuidad en el orificio, sabemos que el volumen que se pierde por unidad de tiempo (caudal) es igual al producto del área del orificio y la velocidad de salida ($v_1 = \sqrt{2gy}$)

$$\frac{dV}{dt} = -\pi r^2 v_1 = -\pi r^2 \sqrt{2gy},$$

donde el signo negativo da cuenta de la pérdida de volumen.

El mismo volumen que sale por el orificio es el volumen que se pierde dentro del recipiente. Por lo tanto, la variación de volumen puede expresarse en términos del área del depósito y de la velocidad de variación de la altura del agua

$$\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \frac{dy}{dt}$$

Podemos igualar ambas expresiones e integrar directamente

$$\pi R^2 \frac{dy}{dt} = -\pi r^2 \sqrt{2gy} \quad \longrightarrow \quad \int_H^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\int_0^t dt \quad \longrightarrow \quad -2\sqrt{H} = -\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}t$$

Despejando obtenemos el tiempo en que se vaciará el depósito

$$t = \frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

---

20. Utilizaremos el subíndice 2 para referirnos a la superficie del agua en el depósito y el subíndice 1 para referirnos al orificio de salida. El volumen perdido por unidad de tiempo a través del orificio es

$$\frac{dV}{dt} = -\pi r^2 v_1 = -\pi r^2 \sqrt{2gy}.$$

La pérdida de volumen por unidad de tiempo en el recipiente es

$$\frac{dV}{dt} = \pi x^2 v_2 = \pi x^2 \frac{dy}{dt}.$$

Podemos igualar ambas expresiones e integrar, pero no sin antes expresar x en términos de y. Esto podemos hacerlo a través de trigonometría (ver figura), resultando

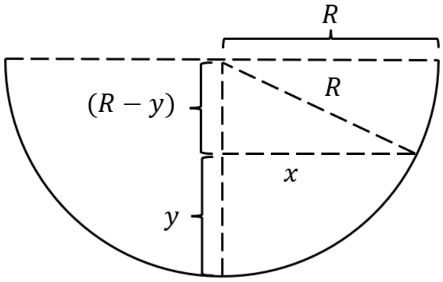
$$x^2 + (R-y)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2Ry - y^2$$

De esta manera la ecuación diferencial a resolver es

$$\pi(2Ry - y^2)\frac{dy}{dt} = -\pi r^2\sqrt{2gy} \quad \Rightarrow \quad \int_R^0 (2R\sqrt{y} - y^{3/2})dy = -r^2\sqrt{2g}\int_0^t dt,$$

que puede integrarse directamente, resultando

$$\frac{14}{15}R^{5/2} = r^2\sqrt{2g}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{14R^{5/2}}{15r^2\sqrt{2g}}$$



---

21. Utilizando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y B obtenemos

$$P_A = P_B + \frac{1}{2}\rho_a v_B^2,$$

de donde se deduce que, en contra de la intuición, la presión del aire disminuye cuando éste está en movimiento.

La presión en un punto situado en la superficie del mercurio en la columna de la izquierda y en un punto situado a la misma altura en la columna de la derecha es la misma

$$P_A = P_B + \rho_h g\Delta h.$$

Combinando ambas ecuaciones se deduce

$$\frac{1}{2}\rho_a v_B^2 = \rho_h g\Delta h \quad \longrightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{2\rho_h g\Delta h}{\rho_a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 13600\cdot 10\cdot 0.05}{1.29}} = 102.68 \text{ m/s}$$

---

22. Conocido el caudal, la velocidad en los tramos A y B puede obtenerse por continuidad

$$v_A = \frac{Q}{\pi r_A^2} = \frac{0.0002}{\pi\cdot 0.002^2} = 15.915 \text{ m/s}$$

$$v_B = \frac{Q}{\pi r_B^2} = \frac{0.0002}{\pi\cdot 0.02^2} = 0.15915 \text{ m/s}$$

Ya que $v_B < v_A$, sabemos que $P_A < P_B$, siendo $P_B = P_{at}$. Esto garantiza que el agua ascenderá por el tubo vertical, ya que la presión en la superficie del depósito es $P_{at} > P_A$. El agua ascenderá hasta que la presión de la columna de agua compense la diferencia de presiones $P_{at} - P_A$. Si nos situamos en dos puntos a la altura de la superficie del agua, uno dentro del tubo vertical y otro fuera, obtenemos la relación que acabamos de mencionar. En el fondo del tubo tendremos la presión del punto A más la presión de la columna de agua. En la superficie del depósito tendremos la presión atmosférica.

$$P_A + \rho_w gh = P_{at},$$

donde ρ_w es la densidad del agua (reservamos ρ_a para el aire.)

Para poder obtener h necesitamos conocer P_A, que puede despejarse de la ecuación de Bernoulli entre A y B

$$P_A + \frac{1}{2}\rho_a v_A^2 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho_a v_B^2 \quad \longrightarrow \quad P_A = P_{at} - \frac{1}{2}\rho_a \left(v_A^2 - v_B^2\right)$$

Utilizando esta expresión de P_A en la ecuación obtenida anteriormente resulta

$$P_A + \rho_w g h = P_{at} \quad \longrightarrow \quad P_{at} - \frac{1}{2}\rho_a \left(v_A^2 - v_B^2\right) + \rho_w g h = P_{at}$$

Cancelando los términos P_{at} y despejando obtenemos h

$$h = \frac{\rho_a (v_A^2 - v_B^2)}{2\rho_w g} = \frac{1.29 \cdot (15.915^2 - 0.15915^2)}{2 \cdot 1000 \cdot 10} = 0.0163 \text{ m}$$