

Universidad
Rey Juan Carlos

Escuela Técnica Superior
de Ingeniería Informática

Grado en Educación Primaria + Matemáticas

Curso 2023-2024

Trabajo Fin de Grado en matemáticas

**ALGORITMO PARA ENCONTRAR FIGURAS
SIMÉTRICAS CON LAS PIEZAS DEL TANGRAM**

Autor: Amara de Lucas del Cerro

Tutor: Clara Simón de Blas

Agradecimientos

Agradezco el apoyo, comprensión y cariño que he recibido por parte de mi familia para poder hacer frente a este proyecto. Por ayudarme y darme una mano cuando pensaba que no podría hacerlo.

Agradezco también el trabajo de mi tutora. Gracias a su guía este proceso ha sido mucho más llevadero. Además de proponerme un tema que me ha parecido muy interesante de investigar.

Por último, agradecer a mi novia Regi toda su dedicación para que yo pudiera dedicar tiempo a esta trabajo, por motivarme y hacer que quiera ser mi mejor versión.

Resumen

El tangram es un puzzle ancestral formado por siete figuras o *tans*. Este se usa en educación como material de apoyo para conceptos de geometría plana, pero también se emplea de forma recreativa. Un ejemplo de este último caso es encontrar figuras simétricas combinando los siete *tans*.

En este trabajo queremos determinar un algoritmo que facilite esto último, es decir, que permita obtener una figura simétrica con las piezas del tangram.

Para ello, es importante conocer el concepto de simetría. En este trabajo se quiere trabajar en el plano afín euclídeo, es decir, \mathbf{R}^2 . En este contexto, aparecen tres tipos de simetrías (traslación, rotación y reflexión), de los que solo se tendrá en cuenta el último de ellos. La reflexión se basa en figuras simétricas respecto a un eje de simetría.

El algoritmo gira entorno a la idea de que el romboide es la pieza que dificulta encontrar una figura simétrica. Por ello, se parte de su combinación con los demás *tans* y se añaden el resto siguiendo ciertos criterios.

Debido a que el algoritmo se focaliza en un caso tan concreto como reflexiones en \mathbf{R}^2 con las piezas del tangram, se puede buscar su generalización en próximos estudios tanto a piezas desconocidas como a un número indeterminado de piezas o a un contexto más amplio como \mathbf{R}^n

Palabras clave:

- Tangram
- Algoritmo
- Simetría
- Espacio afín euclídeo
- Reflexión

Índice de contenidos

Índice de algoritmos	1
1. Introducción	3
1.1. Objetivos	5
2. Metodología	6
2.1. Simetría	6
2.1.1. Espacio métrico	7
2.1.2. Espacio afín	9
2.1.3. Espacio afín euclídeo	11
3. Investigación	14
3.1. Hipótesis	14
3.2. Ejes de simetría	16
3.3. Figuras simétricas	18
3.4. Ejemplos gráficos del funcionamiento del algoritmo	21
3.4.1. Caso en el que es imposible encontrar una figura simétrica	21
3.4.2. Caso figura simétrica encontrada	26
4. Conclusiones	31
Bibliografía	33

Índice de algoritmos

1.	Algoritmo para determinar los vectores directores de los ejes de simetría	17
2.	Algoritmo para determinar las figuras simétricas con las piezas del tangram	18
3.	Algoritmo para añadir una pieza a la combinación	19
4.	Algoritmo para determinar segmento simétrico	20
5.	Algoritmo para determinar si una figura es simétrica	20
6.	Algoritmo para añadir una pieza a la combinación simétrica	20

1

Introducción

El tangram es un puzle formado por siete piezas, también denominadas “tans”, con las cuales se debe formar una figura siguiendo dos normas. La primera, se deben utilizar las siete piezas y, además, estas no se pueden solapar.

Tradicionalmente, se ha jugado con la figura requerida dada de antemano, por lo que el objetivo del juego consiste en descubrir la colocación de los “tans”. Sin embargo, se puede añadir dificultad si se le permite al jugador más libertad y busca figuras sin ningún patrón previo.

Los “tans” colocados de una determinada manera forman un cuadrado. Debido a esto, suponiendo que dicho cuadrado es de tamaño 1×1 , las piezas son dos triángulos isósceles pequeños con hipotenusa de $\frac{1}{2}$ y lados de $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, un triángulo isósceles mediano con hipotenusa de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y lados de $\frac{1}{2}$, dos triángulos isósceles grandes con hipotenusa de 1 y lados de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, un cuadrado de lados $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ y un paralelogramo de lados $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

A pesar de que su origen no está recogido en ningún documento, se presume que tuvo lugar durante la Dinastía Song (960-1279) en China [1]. Originalmente, el juego constaba de seis piezas únicamente y, por último, se añadió uno de los triángulos.

Según la leyenda, su creación fue causada por la torpeza de un sirviente. Un emperador chino mandó fabricar un gran cuadrado de vidrio y uno de sus sirvientes, durante el transporte, rompió dicha pieza en siete más pequeñas. Asustado, intentó recomponer el gran cuadrado y, en el proceso, descubrió la cantidad de

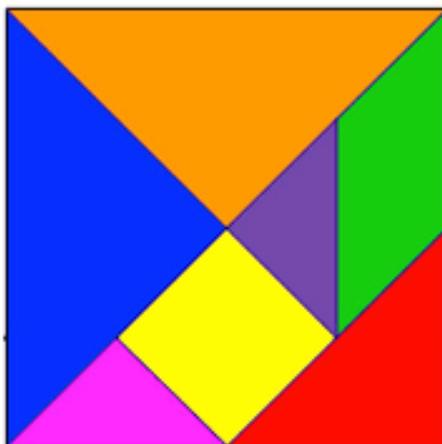


Figura 1.1: Tangram

figuras que era capaz de formar. Se presentó ante el emperador y le mostró su hallazgo, este quedó tan impresionado que perdonó el descuido del sirviente [2].

Otro misterio es el origen de la palabra “tangram”. Una de las versiones más aceptadas es la que defiende que está formada por dos términos independientes. Por un lado, “tang” que se puede traducir como “chino” y, por otro, “gram” que significa gráfico [3]. Entre las demás explicaciones destacan las que relacionan el rompecabezas con la Dinastía Tang o el río Tanka. La palabra fue usada por primera vez en un escrito por Thomas Hill en 1848.

Pasado mucho tiempo de su origen, llegó al mundo occidental a principios del siglo XIX de la mano de los barcos chinos y americanos. El primer ejemplo conocido es de 1802 y pertenecía al hijo del dueño de uno de estos barcos americanos. Los materiales utilizados para fabricar los tangrams van desde roca, hueso o barro originalmente a plástico o madera en la actualidad.

Actualmente, este puzle ha tomado mucha importancia en los campos de la psicología y la educación, sobre todo de las matemáticas con el objetivo de introducir conceptos de geometría plana.

Los aficionados del tangram son muchos y muy diversos, desde matemáticos como Lewis Carrol hasta el mismísimo Napoleón [4], pasando por Sam Loyd, autor en 1903 de una explicación fantástica sobre la creación del puzle a manos del dios Tan [5].

En lo referente a las matemáticas, en 1942 fue probado que solo se pueden formar 13 figuras convexas con las piezas del tangram gracias a Fu Tsiang Wang y Chuan-chin Hsiung [6].

La última curiosidad sobre este antiguo rompecabezas es que una mujer, Chien Yun-Chi, escribió una enciclopedia de 6 volúmenes con 1700 figuras propuestas

en 1858 [2].

1.1. Objetivos

Objetivo general

Desarrollar un algoritmo que determine figuras simétricas a partir de las piezas del tangram.

Objetivos específicos

1. Desarrollar un algoritmo que determine los ejes de simetría estudiados
2. Conocer las simetrías en el plano afín euclídeo
3. Conocer la historia y funcionalidad del tangram

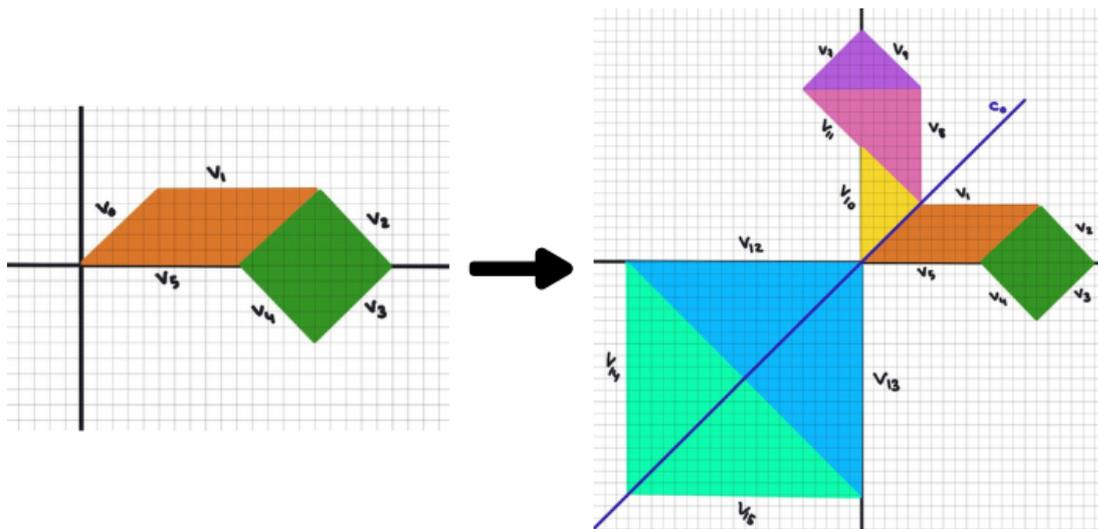


Figura 1.2: Ejemplo gráfico del objetivo del trabajo

2

Metodología

En el siguiente apartado se van a definir los conceptos matemáticos necesarios para poder determinar las simetrías presentes en el plano afín euclídeo y, con ello, sentar las bases para alcanzar los objetivos del TFG.

2.1. Simetría

El concepto de simetría es algo inherente al ser humano, desde que nacemos sentimos más atracción hacia los objetos que mantienen este tipo de estructuras.

Sin embargo, no cumple solo un objetivo estético. Por un lado, juega un papel fundamental en la determinación de la estructura y forma de los minerales en la cristalización y está relacionada con las propiedades ópticas. Por otro, en lo referente a la biología, que las flores sean simétricas sirve para atraer a los insectos y facilitarles el proceso de polinización, las hojas para optimizar la captura de luz durante la fotosíntesis y los humanos para generar movimiento equilibrado y coordinado debido a su distribución corporal.

En términos generales, una figura se dice simétrica si al moverla de una cierta manera se mantiene idéntica a la original. Algunos ejemplos fácilmente identificables en la naturaleza son las estrellas de mar, algunas flores, las mariposas y el propio ser humano.

Según la Real Academia Española (RAE), la simetría queda determinada como una “correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos



Figura 2.1: Ejemplos de simetrías en la naturaleza

de un cuerpo o figura con relación a un centro, un eje o un plano” [7]. Esta descripción está muy relacionada con la geometría, ya que utilizan como referencia los conceptos básicos de este ámbito de las matemáticas (centro, eje, plano).

Sin embargo, la simetría puede aplicarse a muchas más áreas y de forma mucho más global, entendiéndola como una transformación biyectiva de un conjunto sin estructura determinada en sí mismo, dando lugar a un grupo de permutaciones [8].

2.1.1. Espacio métrico

Un componente relevante en este punto es el de espacio métrico, que se define como un par (X, d) donde X es un conjunto no vacío y d es una función real definida en $X \times X$, llamada *distancia* o *métrica*, y que satisface:

- $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$, y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$

Un ejemplo para comprender mejor lo anterior es el *espacio euclídeo* formado por el conjunto \mathbb{R}^n , donde si $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, y la *distancia* entendida como $d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

Para la demostración de la primera condición se parte de que la función está definida en el conjunto de los números reales, por lo que el resultado de $(y_i - x_i)^2$

es siempre mayor o igual que cero. Por lo consiguiente la raíz cuadrada de la suma de estos números también lo es. Por otro lado,

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = 0,$$

por lo que todos los sumandos se deben igualar a cero y, como consecuencia, $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, es decir, $x = y$.

Como resultado de elevar al cuadrado los n sumandos, se extrae que

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = d(y,x)$$

El origen de la demostración del tercer punto para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ es

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Utilizando la definición de función distancia en la desigualdad anterior, se obtiene

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}$$

En el paso siguiente se sustituye $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$, por consiguiente se llega a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Tras elevar al cuadrado en ambos lados de la desigualdad y usar la igualdad

notable $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, se llega a

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2} \\
 \iff \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2} \\
 \iff \sum_{i=1}^n a_i b_i &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2} \\
 \iff \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2
 \end{aligned}$$

Esta deducción ha concluido en lo que se conoce como la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz [9] y, como consecuencia, queda demostrado el tercer punto y, en general, que \mathbb{R}^n es un espacio métrico con la distancia definida [10].

2.1.2. Espacio afín

Dado un conjunto A no vacío (puntos) y un espacio vectorial T (traslaciones o direcciones) sobre un cuerpo de escalares K (escalares), decimos que A es un *espacio afín* sobre K con grupo de translaciones T si existe una operación externa $\psi : A \times T \rightarrow A$ definida por $\psi(P, v) = P + v$ con las siguientes propiedades:

1. $\psi(P, 0) = P, \forall P \in A$.
2. $\forall P, Q \in A, \exists! v \in T$ tal que $\psi(P, v) = Q$.
3. $\psi(P + v, w) = \psi(P, v + w), \forall P \in A, \forall v, w \in T$

Además, si se parte de dos espacios afines A_1 y A_2 sobre K con grupos de translaciones T_1 y T_2 , respectivamente, una aplicación $g : A_1 \rightarrow A_2$ es una *aplicación afín* si existe $f : T_1 \rightarrow T_2$ lineal (aplicación lineal asociada) tal que $f(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{g(P)g(Q)} \forall P, Q \in A_1$ [11].

En el caso de que los espacios fuesen afines euclídeos, la aplicación $g : A_1 \rightarrow A_2$ se define como *isometría* si g deja invariante la distancia entre los puntos.

Otro término que se utilizará en próximos apartados es el de *variedad afín* que se define como el conjunto $P + U = \{Q \in E | \overrightarrow{PQ} \in U\}$, donde P es un punto del espacio euclídeo y U es un subespacio vectorial de T (espacio vectorial asociado) [12].

El siguiente paso va a ser demostrar que el espacio euclídeo es un espacio afín. Para ello, se empieza determinando que los puntos y las traslaciones son los mismos en ambos conjuntos.

A continuación, se define la adición de un vector a un punto como la operación externa ψ , es decir, sean $P = (p_1, \dots, p_n), Q = (q_1, \dots, q_n)$ puntos de \mathbf{R}^n y $v = (v_1, \dots, v_n)$ vector de \mathbf{R}^n , entonces

$$\psi(P, v) = P + v = (p_1, \dots, p_n) + (v_1, \dots, v_n) = (p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n) = (q_1, \dots, q_n) = Q$$

1. La demostración del primer punto es obvia con la definición anterior.

$$\psi(P, 0) = P + v = (p_1, \dots, p_n) + (0, \dots, 0) = (p_1 + 0, \dots, p_n + 0) = (p_1, \dots, p_n) = P$$

2. Tomando $P, Q \in \mathbf{R}^n$, se va a proceder por reducción al absurdo, es decir, se supone que existen dos vectores diferentes tales que

$$\psi(P, v_1) = P + v_1 = Q$$

$$\psi(P, v_2) = P + v_2 = Q$$

Calculando la resta de las dos ecuaciones anteriores, se obtiene $P + v_1 - (P + v_2) = Q - Q$. Aplicando la propiedad de la resta de vectores en el espacio euclídeo, se simplifica a $v_1 - v_2 = 0$, donde 0 es el vector cero, por lo que, $v_1 = v_2$. Se concluye que solo existe un vector que satisface $\psi(P, v) = Q$.

3. Entendiendo $\psi(P, v) = P + v$, la demostración de este punto se resume en aplicar la propiedad asociativa.

Gráficamente, la figura 2.2 representa el cálculo $\psi(P, v + w)$. Primero se suman los vectores para obtener u , para después sumarlo al punto P .

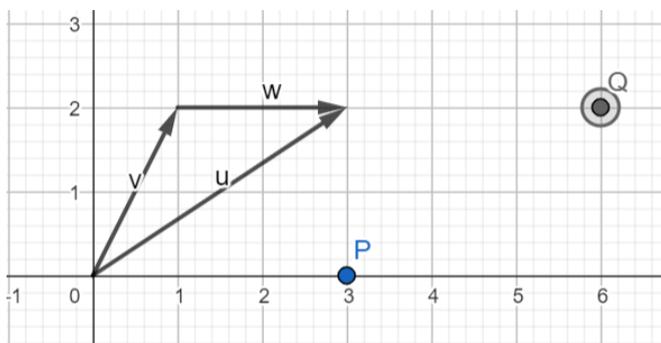


Figura 2.2: Ejemplo gráfico $\psi(P, v + w)$

De forma similar, como se observa en la imagen 2.3 se puede obtener el punto Q con la expresión $\psi(P + v, w)$, en la que primero se suma el vector

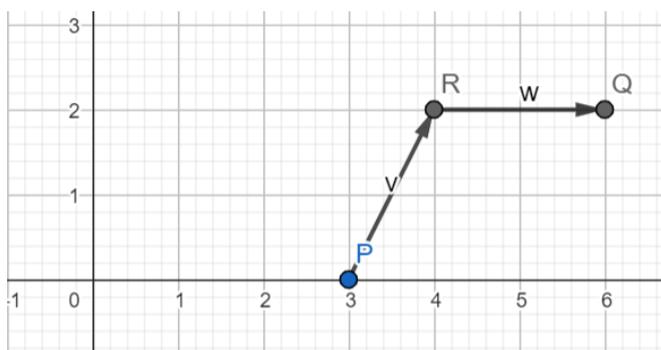


Figura 2.3: Ejemplo gráfico $\psi(P + v, w)$

v al punto P , llegando hasta R y, en el último paso, se suma el vector w al punto R .

En ambos casos, se concluye que $Q = (6, 2)$

2.1.3. Espacio afín euclídeo

Es importante destacar que se ha demostrado que \mathbf{R}^n es un espacio afín euclídeo. Por tanto, con la distancia definida anteriormente, se puede hablar de la isometría $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ que cumple que

$$d(P, Q) = d(g(P), g(Q)) \quad \forall P, Q \in \mathbf{R}^n$$

En otras palabras, g es una transformación lineal ortogonal, es decir, conserva la longitud de los vectores.

Por definición, sea A el determinante de la aplicación ortogonal, A^T la matriz traspuesta de A e I la matriz identidad, entonces $A.A^T = I$. Por tanto, $A.A^T = 1 \implies 1 = \det(I) = \det(A.A^T) = \det(A).\det(A^T) = \det(A).\det(A) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1$.

En particular, g se denomina movimiento porque es una isometría de un espacio afín en sí mismo. Este tipo de aplicaciones se pueden clasificar en dos grupos según el valor de su determinante.

1. **Movimientos directos:** $\det(A) = 1$. No modifica la orientación de la figura.

- a) **Traslación.** Se define la traslación del vector arbitrario \vec{v} , como el movimiento $\tau_v : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ dado por $\tau_v(P) = P'$ si $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$. En \mathbf{R}^3 ,

para cualquier punto $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, se define $\vec{v} = (a, b, c)$ tal que

$$\tau_v = (x + a, y + b, z + c) = (a, b, c) + (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Se calcula fácilmente que el determinante de la matriz asociada es 1. Por último, en el plano euclídeo, \mathbf{R}^2 , la traslación se puede entender como un deslizamiento sobre el plano. En este caso, el movimiento queda determinado por

$$\tau_v = (x + a, y + b) = (a, b) + (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Sin embargo, la traslación no se tendrá en cuenta en la investigación actual porque se enfoca en la figura resultante y no en el punto del plano que se coloca dicha figura. En consecuencia, la original y la alterada por una traslación se considerarán la misma.

- b) **Rotación.** En este caso se necesita un punto $O \in \mathbf{R}^n$ (*centro*) y un número α (*ángulo*), para definir la rotación como el movimiento $\rho_{O,\alpha} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ que satisface que $\rho_{O,\alpha}(P) = P'$ si $d(O, P) = d(O, P')$ y $\widehat{POP'} = \alpha$. Una propiedad que se extrae de esta definición es que si $\alpha \neq 0$, entonces el único punto fijo que deja la rotación es el propio centro O . Poniendo énfasis en el plano euclídeo y siendo $O = (x_0, y_0)$, la rotación se describe como

$$\rho_{O,\alpha} = (x_0, y_0) + (x - x_0, y - y_0) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Por ende, si se elige como centro de la rotación O el origen de coordenadas $(0, 0)$, la imagen (x', y') de cualquier punto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ con respecto a $\rho_{O,\alpha}$ está determinada por

$$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

2. Movimientos inversos: $\det(A) = -1$. Modifica la orientación de la figura.

- a) **Reflexión.** Sea $\mathcal{A}' = (P_0; S)$ una variedad afín, la reflexión o simetría ortogonal respecta a ella queda determinada por la función $\sigma_{\mathcal{A}'} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ con $\sigma_{\mathcal{A}'}(P) = P' = P + 2\vec{PQ}$, donde Q es la proyección ortogonal de P' sobre \mathcal{A}' . En lo referente al plano euclídeo, la subconjunto vectorial S coincide con la mediatriz del segmento PP' y sería una recta que se puede llamar r . Si esta recta pasa por el punto

(x_0, y_0) y forma un ángulo α con el eje x , entonces

$$\sigma_r(x, y) = (x_0, y_0) + (x - x_0, y - y_0) \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Como se ha comentado anteriormente, la colocación de la figura en el plano se puede realizar de forma arbitraria, así que suponiendo que la recta respecto a la que se hace la reflexión r pasa por el origen de coordenadas, entonces

$$\sigma_r(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

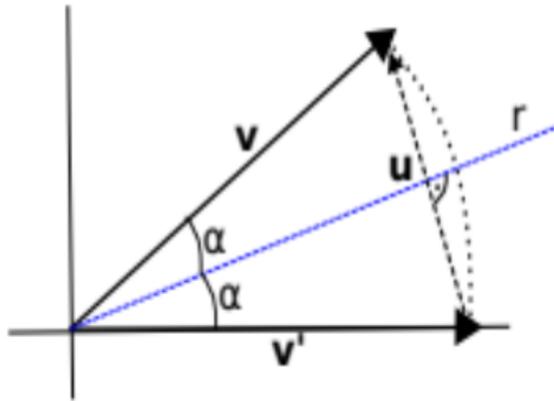


Figura 2.4: Representación gráfica de simetría ortogonal

Por ejemplo, si se toma el eje x como r , el ángulo α es 0 y la matriz asociada sería

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2 \cdot 0 & \sin 2 \cdot 0 \\ \sin 2 \cdot 0 & -\cos 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \sin 0 & -\cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo que, cogiendo cualquier punto del plano, en este caso el $(1, 2)$, su punto simétrico respecto a r se obtiene con

$$\sigma_r(1, 2) = (1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 0, 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)) = (1, -2)$$

3

Investigación

En esta sección se busca desarrollar dos algoritmos para encontrar las figuras simétricas.

En la RAE, un algoritmo se define como un “conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema” [13].

3.1. Hipótesis

La investigación se sustenta sobre la idea de que la pieza del tangram que dificulta encontrar una figura simétrica es el romboide. Por tanto, el primer paso será generar las combinaciones entre este y todas las demás.

Este conjunto se ve rápidamente que es infinito. Sin embargo, se puede reducir a aquellas en las que las figuras tengan vértices en común.

Las posibilidades con el cuadrado que se tienen en cuenta en la investigación se observan en la siguiente figura.

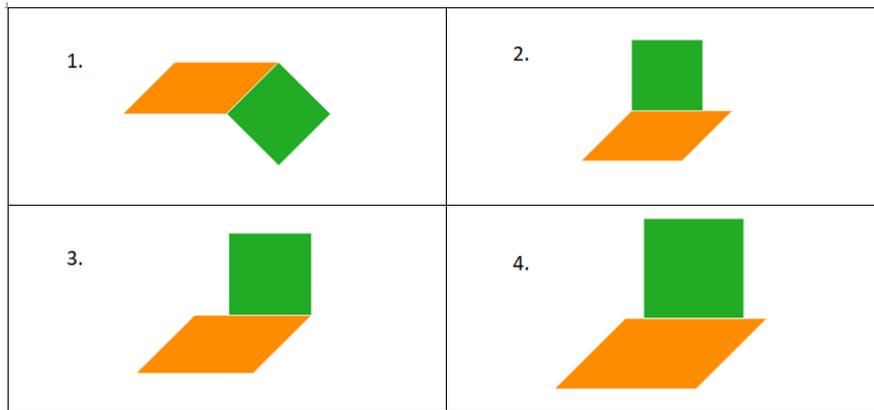


Figura 3.1: Posibles combinaciones entre el cuadrado y el romboide

Por otro lado, las combinaciones con el triángulo mediano estudiadas son las siete que se muestran en la figura 3.2.

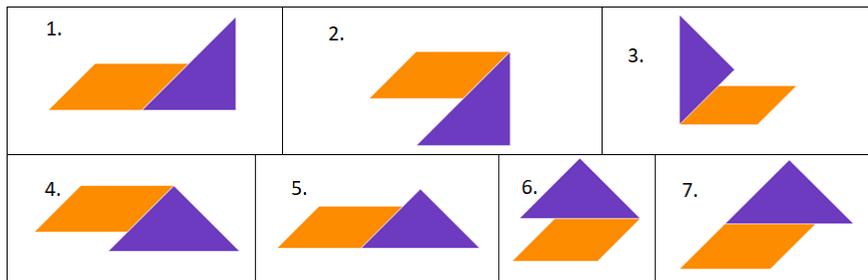


Figura 3.2: Posibles combinaciones entre el romboide y el triángulo mediano

Con respecto al triángulo grande, se puede combinar con el romboide de diez formas diferentes que resulten interesantes para el objetivo de la investigación.

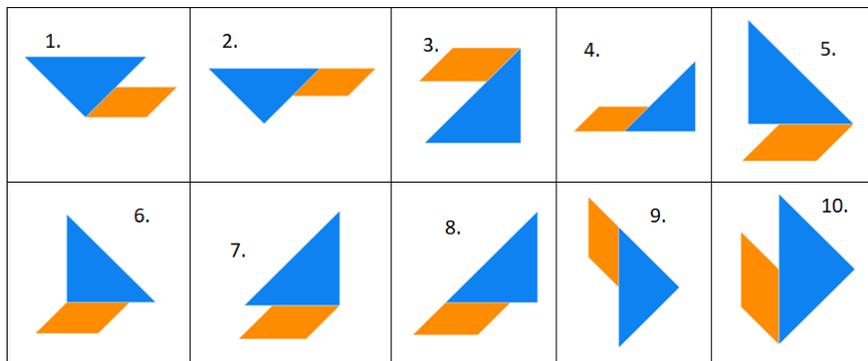


Figura 3.3: Posibles combinaciones entre el romboide y el triángulo grande

Por último, el triángulo pequeño y el romboide generan las nueve figuras

que completan todas las posibles combinaciones iniciales que se estudian en este documento.

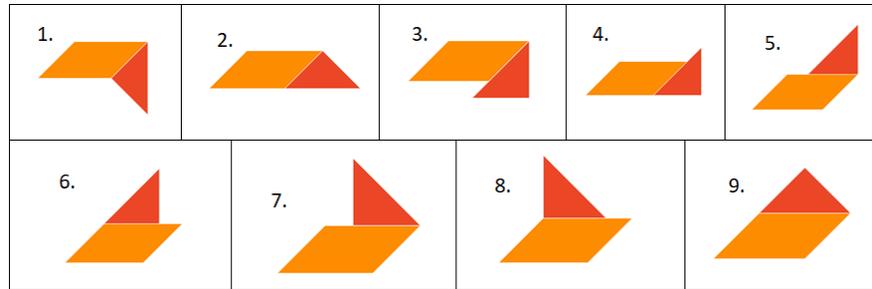


Figura 3.4: Posibles combinaciones entre el romboide y el triángulo pequeño

Proposición 3.1.1 *Todas las figuras simétricas respecto a un eje, bien contienen una de las combinaciones anteriores o bien la figura 3.5 como simétrica del romboide.*



Figura 3.5: Figura simétrica al romboide con los dos triángulos pequeños

3.2. Ejes de simetría

Dos rectas importantes son las diagonales del romboide, debido a que la simetría que mantiene es una rotación de 180° con centro en la intersección de ambas rectas. Sin embargo, la que divide el romboide en dos triángulos pequeños resulta interesante a la hora de buscar reflexiones.

Proposición. Sean v_1, \dots, v_n los vértices de la combinación inicial. Entonces los ejes de simetría estudiados son todas las rectas generadas por los vectores $\overrightarrow{v_i, v_j}$ para todos los puntos contenidos en el conjunto anterior tal que $i \neq j$.

Un posible algoritmo para facilitar la determinación de todos los ejes es:

Algoritmo 1 Algoritmo para determinar los vectores directores de los ejes de simetría

Ensure: B ▷ Vectores directores de los ejes de simetría
Require: $A = v_0, \dots, v_n$ ▷ Vértices de la combinación
for each $v_i \in A$ **do**
 for each $v_j \in A$ **do**
 if $i \neq j$ **then**
 $\overrightarrow{v_i v_j} \in B$
 end if
 end for
end for

Con el conjunto de vectores obtenidos con este algoritmo, los ejes de simetría se especifican usando cada uno de los vectores y uno de los vértices que lo forman, es decir, sea r cualquier eje de simetría, está determinado por

$$r : v_i + t \cdot \overrightarrow{v_i v_j} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

3.3. Figuras simétricas

Algoritmo 2 Algoritmo para determinar las figuras simétricas con las piezas del tangram

Require: $A \leftarrow a_0, \dots, a_n$ ▷ Conjunto de las combinaciones que se van a estudiar

Require: $B \leftarrow B_0, \dots, B_{720}$ ▷ Cada elemento es el conjunto de las piezas del tangram menos el romboide ordenado de una forma diferente

for each $a_i \in A$ **do**

$V \leftarrow v_0, \dots, v_m$ ▷ Conjunto de los segmentos de la combinación

$C = c_0, \dots, c_l$ ▷ Conjunto de los ejes de simetría obtenidos con el algoritmo anterior 1

$simetrica \leftarrow false$ ▷ Boolean para determinar si la figura a_i es simétrica

$imposible \leftarrow false$ ▷ Boolean para determinar si es imposible encontrar una figura simétrica

for each $c_j \in C$ **do**

for each $B_p \in B$ **do**

$B_p = b_0, \dots, b_5$

while $B_p \neq \emptyset \wedge !simetrica \wedge !imposible$ **do**

for each $v_k \in V$ **do** ▷ Recorrido en el sentido de las agujas del reloj

Sea s el segmento simétrico de v_k respecto al eje de simetría estudiado (4)

if $v_k \subset c_j \vee s \subset a_i$ **then**

Pasar al siguiente segmento

else if algoritmo 3 **then**

$B_p = B_p - b_h$

$a_i = a_i + b_h$

else

$imposible \leftarrow true$

end if

$simetrica \leftarrow$ Comprobar si a_i es una figura simétrica con el algoritmo 5

end for

end while

Añadir piezas siguiendo el algoritmo 6

end for

end for

end for

Algoritmo 3 Algoritmo para añadir una pieza a la combinación

Require: $V \leftarrow v_0, \dots, v_m$ ▷ Conjunto de los segmentos de la combinación
Require: b ▷ Pieza del tangram
Require: s ▷ Segmento simétrico estudiado
Require: A ▷ Combinación de las piezas
if b cumple las condiciones 3.3.2 **then**
 $W \leftarrow w_0, \dots, w_p$ ▷ Conjunto de los lados de b
 for each $w_q \in W$ **do**
 if $v_n + w_q = s$ **then**
 Sustituir v_n por s
 for each $w_p \in W$ **do**
 if $w_p \neq w_q \wedge w_p \notin V$ **then**
 $w_p \in V$
 end if
 end for
 return true
 else if $w_q = s$ **then**
 $s \in V$
 for each $w_p \in W$ **do**
 if $w_p \neq w_q \wedge w_p \notin V$ **then**
 $w_p \in V$
 end if
 end for
 return true
 else
 return false
 end if
 end for
end if

Definición 3.3.1 Dado un segmento, cuyos extremos son A, B . El punto medio P se calcula de la siguiente forma:

$$P = \left(\frac{A+B}{2} \right)$$

Algoritmo 4 Algoritmo para determinar segmento simétrico

Require: c ▷ Eje de simetría
Require: v ▷ Segmento del que se quiere determinar el simétrico
 P, Q ▷ Vértices de v
 n_p, n_q ▷ Rectas ortogonales a c que pasan por los puntos P, Q respectivamente
 M_p, M_q ▷ Punto de intersección c con n_p, n_q
 P', Q' ▷ Se calculan los puntos simétricos a partir de la definición de punto medio [3.3.1](#)
return $\overrightarrow{P', Q'}$

Algoritmo 5 Algoritmo para determinar si una figura es simétrica

Require: c ▷ Eje de simetría
Require: $V \leftarrow v_0, \dots, v_m$ ▷ Conjunto de los vértices de la combinación
Require: a ▷ Combinación estudiada
Require: $simetrica \leftarrow true$
for each $v_i \in V$ **do**
 P, Q ▷ Vértices de v_i
 n_p, n_q ▷ Rectas ortogonales a c que pasan por los puntos P, Q respectivamente
 M_p, M_q ▷ Punto de intersección c con n_p, n_q
 P', Q' ▷ Se calculan los puntos simétricos a partir de la definición de punto medio [3.3.1](#)
if $P' \notin a \vee Q' \notin a \vee \overrightarrow{P', Q'} \notin a$ **then**
 $simetrica \leftarrow false$
end if
end for
return $simetrica$

Algoritmo 6 Algoritmo para añadir una pieza a la combinación simétrica

Require: c ▷ Eje de simetría
Require: B ▷ Conjunto de piezas del tangram restantes
Require: $simetrica$ ▷ Boolean que determina si la figura es simétrica
if $B \neq \emptyset \wedge simetrica$ **then**
for each $b_i \in B$ **do**
 r ▷ Eje de simetría de b_i
Colocar figura tal que $r = c$
end for
end if

Proposición 3.3.2 *Sea A la combinación estudiada, b una pieza del tangram y s segmento simétrico que se busca determinar, entonces b se añade a A si cumple que:*

1. $\exists l$ lado de b tal que $s \subseteq l$ o $s = v_n + l$ con $v_n \in V$
2. $b \cap A = \emptyset$

Demostración:

Suponiendo que existe b que cumple los dos requisitos anteriores.

Se ha encontrado una pieza que al combinarla con A , no produce solapamiento, por lo que cumple la condición necesaria del tangram.

Además, es obvio que si b cumple el primer punto y $b \subset A$, entonces $s \subset A$.

Por lo que la pieza b se puede añadir a A .

■

3.4. Ejemplos gráficos del funcionamiento del algoritmo

3.4.1. Caso en el que es imposible encontrar una figura simétrica

La combinación estudiada a_0 es:

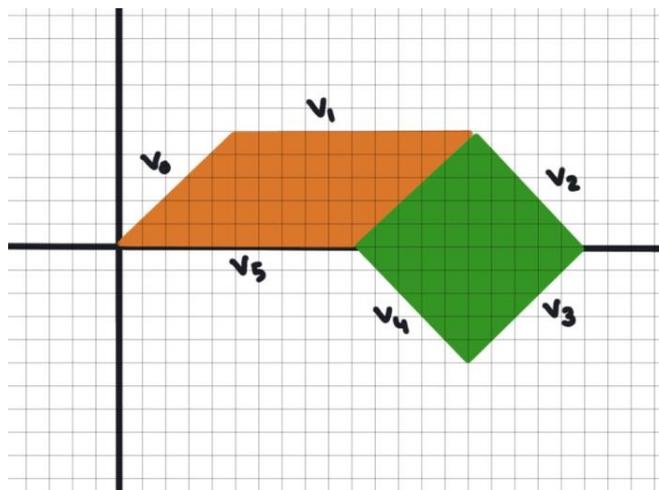


Figura 3.6: Combinación inicial

Se obtienen todos los ejes que se van a estudiar con el algoritmo 1 y se selecciona el eje de simetría c_0

Se recorre el conjunto de los segmentos empezando por v_0 . No es necesario hacer nada con este segmento porque pertenece al eje de simetría y, por tanto, v_0 es su propio simétrico.

No se ha conseguido una figura simétrica por lo que se pasa al siguiente v_1 .

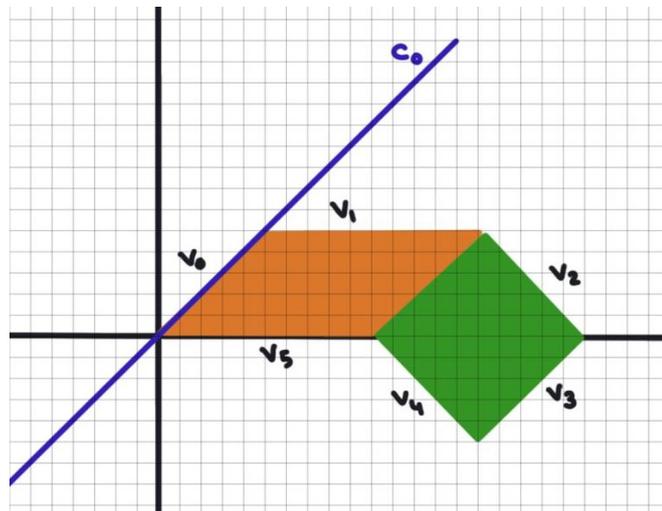


Figura 3.7: Combinación inicial con eje de simetría

En el siguiente paso se estudia v_1 y se busca una figura que pueda cubrir el segmento s entre las piezas del tangram. En este ejemplo se selecciona uno de los triángulos pequeños y se añaden los lados de este al conjunto de los segmentos de a_i

No se ha conseguido una figura simétrica por lo que se continúa el algoritmo

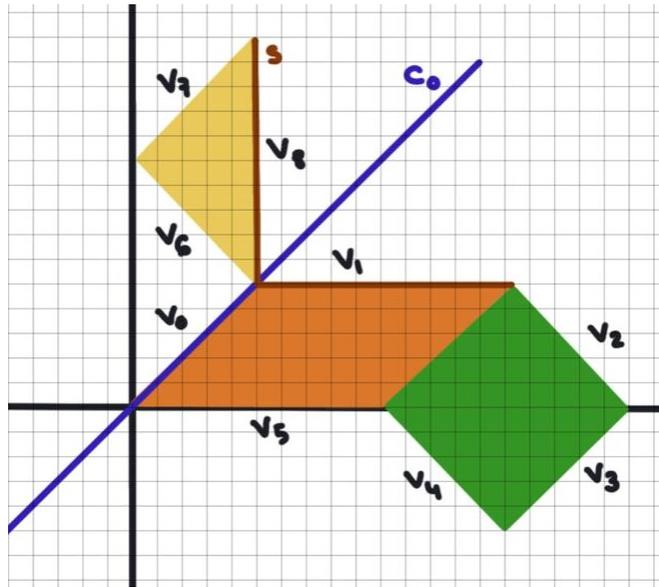


Figura 3.8: Paso algoritmo para v_1

Se estudia el segmento v_2 y se añade el otro triángulo pequeño a la combinación.

La figura sigue sin ser simétrica, así que se avanza a v_3 .

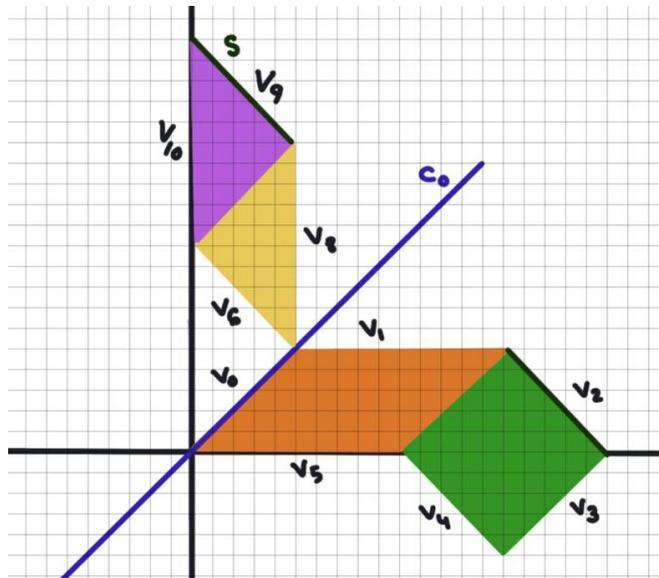


Figura 3.9: Paso del algoritmo para v_2

En el caso de v_3 no podemos encontrar una figura que tenga un lado que sea igual a s . Sin embargo, se puede añadir un triángulo grande como se observa en la figura 3.10

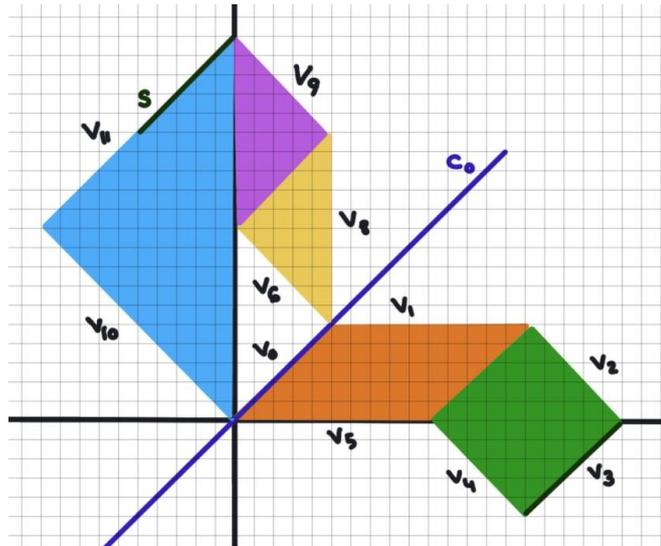


Figura 3.10: Paso del algoritmo para v_3

En los dos siguientes segmentos v_4 y v_5 no se hace nada porque la combinación ya contiene a los segmentos s , simétricos de ambos.

No se obtiene una figura simétrica, así que se continúa el algoritmo.

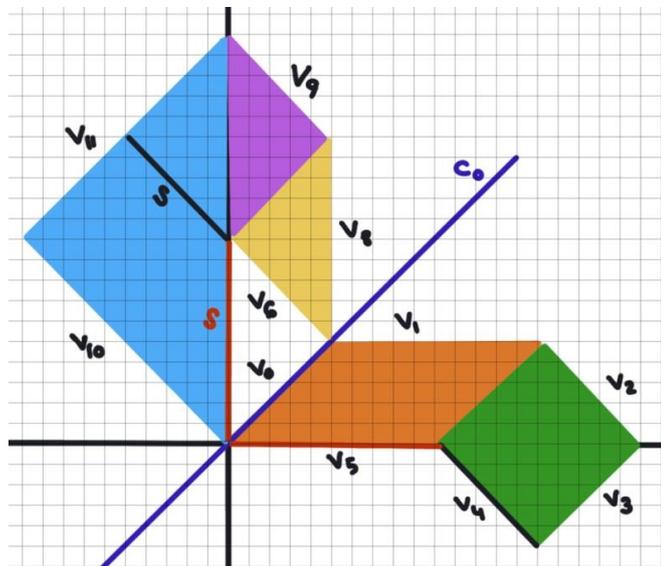


Figura 3.11: Pasos del algoritmo para v_4 y v_5

Siguiendo el sentido de las agujas del reloj, el segmento estudiado es v_{10} y se utiliza el triángulo mediano para añadirlo a la combinación.

Se continúa el algoritmo.

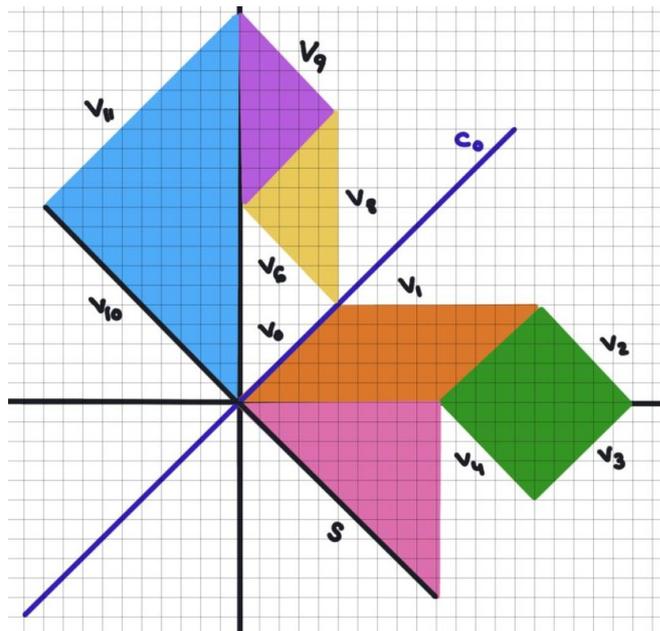


Figura 3.12: Paso del algoritmo para v_{10}

En el conjunto B solo queda un triángulo grande y no se puede combinar con a_i de tal forma que uno de los lados del triángulo coincida con s y no se solape con la a_i . Por tanto, la variable *impossible* se cambia a *true*, no vuelve a entrar en el bucle *while* y se estudia otro orden de colocación de las piezas.

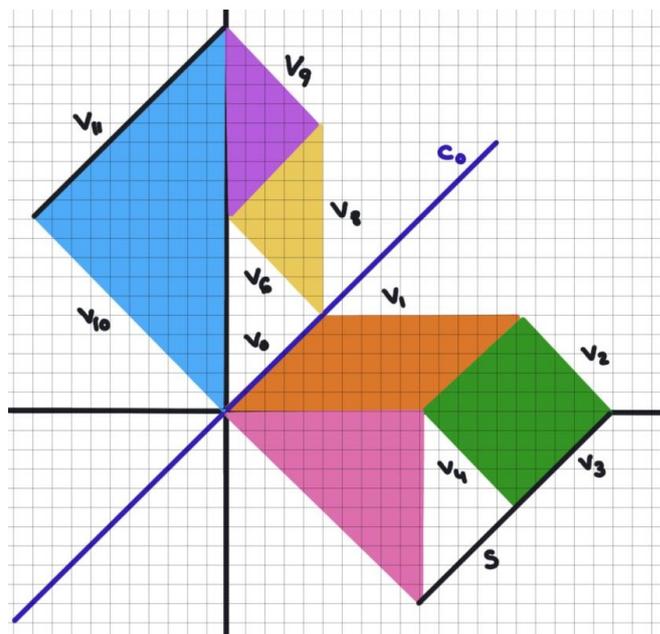


Figura 3.13: Fin del algoritmo sin figura simétrica

3.4.2. Caso figura simétrica encontrada

En este segundo caso, se parte de la misma combinación inicial a_i :

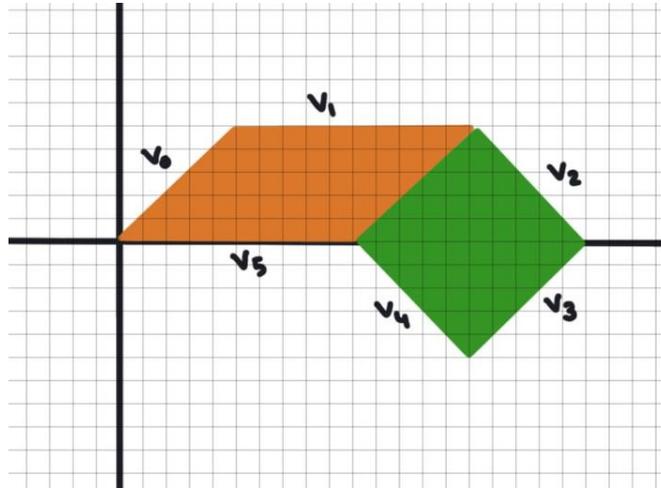


Figura 3.14: Combinación inicial

El eje de simetría estudiado es c_0 , como se observa en la figura 3.15. Con el primer segmento, v_0 , no se hace nada porque pertenece al eje de simetría.

Como no se ha encontrado una figura simétrica, se pasa al siguiente segmento.

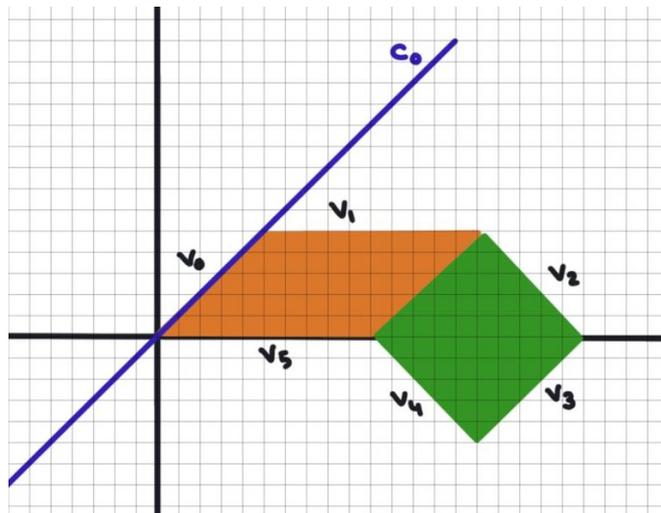


Figura 3.15: Combinación inicial con eje de simetría

Para que el segmento v_1 tenga un simétrico, se necesita una pieza que cubra s . Por ello, se añade el triángulo mediano. Tras esto, se añaden los lados de la

pieza añadida al conjunto de segmentos de a_i y se comprueba que esta sea una figura simétrica. Como no es el caso, se pasa al siguiente segmento.

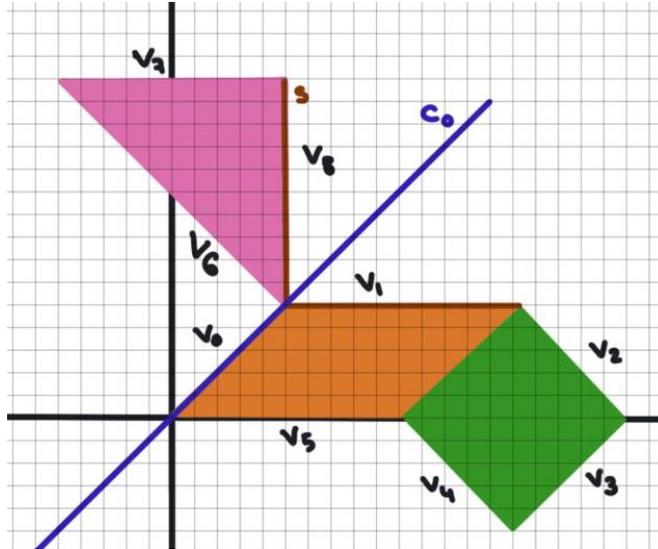


Figura 3.16: Paso del algoritmo para v_1

Se sigue el mismo procedimiento con v_2 . El resultado de añadir un triángulo pequeño, no es una figura simétrica. Se pasa a v_3 .

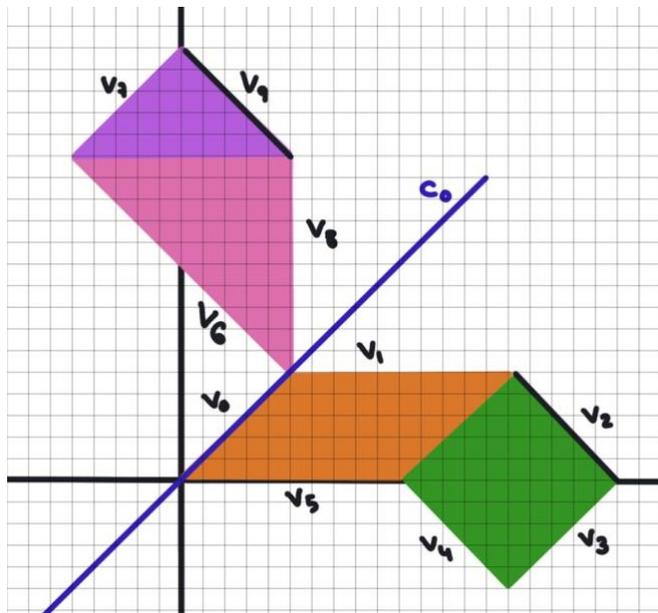


Figura 3.17: Paso del algoritmo para v_2

La figura 3.18 representa que no se hace nada con los segmentos v_3 y v_4

porque los segmentos simétricos s ya se encuentran en la combinación. El siguiente segmento analizado es v_5

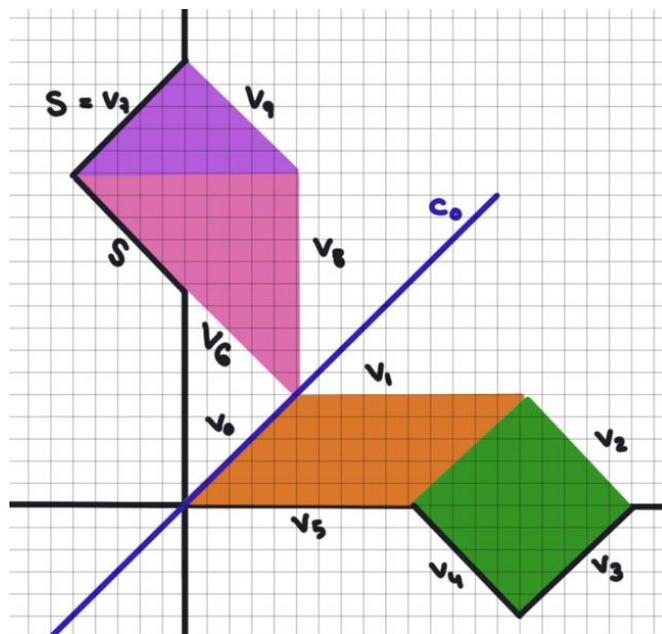


Figura 3.18: Pasos del algoritmo para v_3
y v_4

En este paso, se llega a una combinación simétrica tras añadir el otro triángulo pequeño para conseguir el segmento s simétrico del segmento v_5 . Por tanto, la variable *simetrica* cambia a *true* y no vuelve a entrar en el bucle *while*.

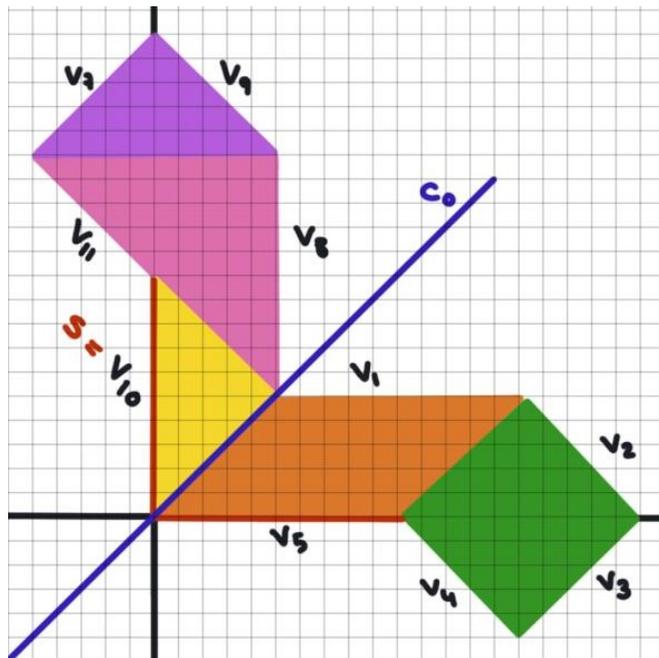


Figura 3.19: Paso para el algoritmo v_5

Como todavía quedan piezas del tangram por añadir ($B \neq \emptyset$) y a_i ya es una figura simétrica, se utiliza el algoritmo 6 para terminar de añadir las piezas que faltan.

Para ello, se hace coincidir el eje de simetría c_0 con el eje de simetría de uno de los triángulos grandes.

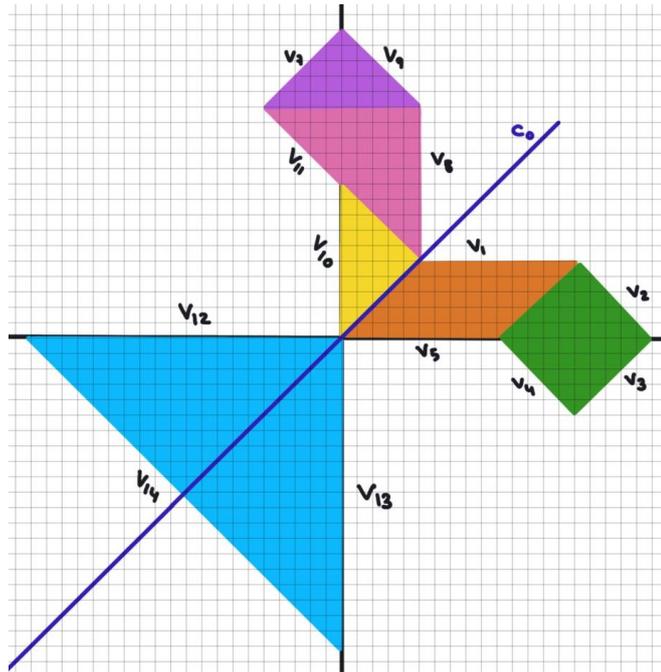


Figura 3.20: Añadir primera pieza a la combinación simétrica

Por último, se hace lo mismo con el otro triángulo grande. En este caso se ha conseguido una figura simétrica usando todas las piezas del tangram como se observa en la figura 3.21

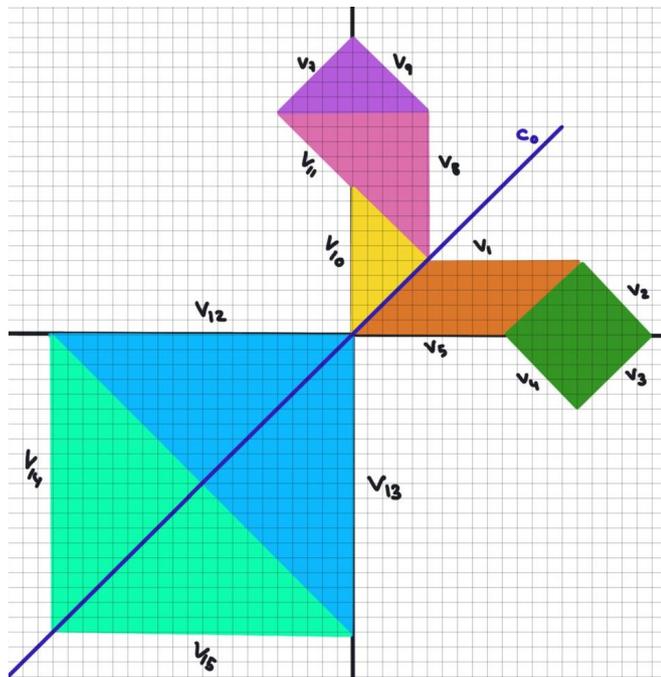


Figura 3.21: Fin algoritmo con figura simétrica

4

Conclusiones

En el apartado anterior se ha demostrado que es posible desarrollar un algoritmo que determine figuras simétricas a partir de las piezas del tangram. Sin embargo, su complejidad es muy alta y puede ser complicado ponerlo en práctica con algún lenguaje de programación.

Esto es debido, por un lado, a la cantidad de bucles que contiene. Además las listas que se recorren suelen tener un tamaño bastante elevado. Por otro, a la cantidad de operaciones aritméticas que se necesitan para calcular los elementos del plano que resultan de interés.

Sin embargo, este algoritmo no se podría emplear en el caso de que se quisiese estudiar otro tipo de simetrías que no fuesen una reflexión y no se tienen en cuenta ejes de simetría que no pasen por alguno de los vértices de las piezas del tangram.

El resto de algoritmos más pequeños tienen una complejidad más baja, debido a que se encargan de un proceso simple y concreto. Únicamente se puede reutilizar el algoritmo de añadir una pieza a la combinación porque el resto se centra en el estudio de reflexiones.

Una vez desarrollado el algoritmo, se confirma que se podría partir de una sola pieza del tangram tomando como ejes de simetría los lados de esa pieza y sus ejes de simetría. Sin embargo, aumentaría el tamaño de permutaciones que se pueden hacer con el resto de piezas del tangram, por lo que la complejidad seguiría siendo muy alta.

La continuación de esta investigación puede tomar tres caminos:

1. Estudiar las simetrías rotacionales con las piezas del tangram en el plano euclídeo.
2. Generalizar el algoritmo a un número infinito de piezas desconocidas.
3. Generalizar el campo de estudio al espacio afín euclídeo de dimensión mayor que 2.

Bibliografía

- [1] T. Beijing. Tangram. [Online]. Available: <https://spanish.visitbeijing.com.cn/article/47IGm8tBCbL>
- [2] R. Ibáñez. Tangram. [Online]. Available: <https://culturacientifica.com/2013/08/21/tangram/>
- [3] V. Castellar. Historia del tangram. [Online]. Available: https://www.uv.es/~buso/tangram/historia_es.html
- [4] J. De la Calle. Rompezabezas chino (tangram). [Online]. Available: http://museodeljuego.org/wp-content/uploads/contenidos_0000000743_docu1.pdf
- [5] Neoteo. Sam loyd, el genio de los acertijos matemáticos. [Online]. Available: https://www.abc.es/ciencia/abci-loyd-genio-juegos-matematicos-201205090000_noticia.html?ref=https%3A%2F%2Fwww.abc.es%2Fciencia%2Fabci-loyd-genio-juegos-matematicos-201205090000_noticia.html
- [6] Wikipedia. (2022) **Tangram**, 5 de Abril de 2022.
- [7] R. A. Española. Simetría. [Online]. Available: <https://dle.rae.es/simetr%C3%ADa>
- [8] Wikipedia. (2021) **Simetría en matemáticas**, 26 de Noviembre de 2021.
- [9] J. Martín Lalanda *et al.*, “Otra demostración de la desigualdad de cauchy-schwarz,” *Aula: revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, 1990.
- [10] U. N. de Rosario. Espacios métricos. [Online]. Available: <https://www.fceia.unr.edu.ar/~fismat2/apuntes/apun3-fismat2.pdf>
- [11] P. Alegría. Las simetrías y el teorema enorme. [Online]. Available: <https://www.ehu.eus/~mtpalezp/libros/lassimetrias.pdf>
- [12] M. J. Vale Gonzalves, “Movimientos en espacios afines euclídeos. clasificación,” 2020.
- [13] R. A. Española. Algoritmo. [Online]. Available: <https://dle.rae.es/algoritmo>

