



ESCUELA DE INGENIERÍA DE FUENLABRADA

GRADO EN INGENIERÍA  
AEROESPACIAL EN VEHÍCULOS  
AEROESPACIALES

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**OPTIMIZACIÓN DE TRAYECTORIAS DE BAJO EMPUJE MEDIANTE  
UN MÉTODO “SHAPE-BASED”**

Autor: Iñigo Javier Palacios Martínez

Tutor: Pablo Solano López

Cotutor: Hodei Urrutxua Cereijo

Curso académico 2023/2024

*Para mi familia, amigos, y en especial, para mi abuela María.*

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS

Escuela de Ingeniería de Fuenlabrada

## **Abstract**

### **Low-thrust trajectory optimization by means of a shape-based method**

IÑIGO JAVIER PALACIOS MARTÍNEZ

In the present work, the design and optimization of low thrust trajectories by means of a shape-based method is carried out. The SBOPT tool is used and its capabilities as an optimal control solver are explored. In order to achieve this objective, an exhaustive study of the state of the art regarding the optimization of low and thrust trajectories and the optimal control problem is due. The study describes the indirect, direct, dynamic programming and pseudospectral methods.

The employed shape-based method is described in detail. This technique is characterized by the extrapolation of the trajectory onto polynomial bases. Specifically, Bernstein, Chebyshev, Legendre polynomials and an orthogonal version of Bernstein polynomials are studied. The problem is discretized, forming a nonlinear programming problem, where the coefficients of the polynomial expansions represent the parameters subject to optimization.

This method is applied to different scenarios. In order to characterize its error, a problem with known analytical solution is solved, and the effect of the solver parameters in the numerical error is studied. Furthermore, different cases of orbital transfers are explored. As an example of planar transfer, the trajectory that maximizes orbital energy in a fixed time is sought. On the other hand, an analysis of the launch window and the optimization of the transfer and *rendezvous* with the asteroid Dionysus is carried out. Finally, the minimum  $\Delta V$  and flight time transfers to Mars are obtained, shown by a porkchop plot.

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS

Escuela de Ingeniería de Fuenlabrada

## Resumen

### Optimización de trayectorias de bajo empuje mediante un método “shape-based”

IÑIGO JAVIER PALACIOS MARTÍNEZ

En el presente trabajo se pretenden diseñar y optimizar trayectorias de bajo empuje mediante un método *shape-based*. Se hace uso de la herramienta SBOPT y se exploran sus capacidades como *solver* de control óptimo. Para conseguir dicho objetivo, inicialmente se realiza un estudio exhaustivo del estado del arte respecto a la optimización de trayectorias de bajo y empuje y del problema de control óptimo, describiendo los métodos indirectos, directos, de programación dinámica y pseudoespectrales.

El método *shape-based* empleado se describe en profundidad. Este se caracteriza por la extrapolación de la trayectoria en bases polinomiales. En concreto, se estudian los polinomios de Bernstein, Chebyshev, Legendre y una versión ortogonal de los polinomios de Bernstein. El problema se discretiza, formando un problema de programación no lineal, donde los coeficientes de las expansiones polinómicas conforman los parámetros a optimizar.

Este método se aplica a diferentes escenarios. Con el objetivo de caracterizar el error del mismo, se resuelve un problema con solución analítica conocida, y se estudia el efecto de los parámetros que definen el *solver* sobre dicho error. Por otro lado, se estudian diferentes casos de transferencias orbitales. Como ejemplo de transferencia plana, se busca obtener la trayectoria que maximice la energía orbital en un tiempo fijo, Por otro lado, se realiza un análisis de la ventana de lanzamiento y la optimización de la transferencia y *rendezvous* al asteroide Dionysus. Además se obtienen la transferencias de mínimo  $\Delta V$  y tiempo de vuelo a Marte, describiendo las opciones de transferencia mediante una gráfica *porkchop*.

# Agradecimientos

Este trabajo representa el fin de casi 6 años de carrera, donde me he formado como Ingeniero Aeroespacial, pero sobre todo donde he conocido a personas y he vivido experiencias que me llevaré conmigo toda la vida. Es, en gran parte, gracias a ellos que estoy escribiendo estas líneas, al final de un trabajo de fin de grado tan apasionante como desafiante.

En primer lugar, me gustaría agradecer a mis tutores, Pablo Solano y Hodei Urrutxua. Contasteis conmigo para desarrollar este trabajo y me habéis brindado consejos y apoyo, no solo durante estos meses (más de los que deberían, lo sé), sino que además, habéis estado presentes a lo largo de la carrera, donde vuestro trabajo ha sido vital para mejorar continuamente la calidad de la enseñanza impartida en el grado. La expresión “este trabajo no hubiera sido posible sin...” no puede completarse por otra persona que Sergio Cuevas, quien me ha acompañado incansablemente durante todo el transcurso del trabajo.

Por otro lado, quiero acordarme de mis compañeros de clase durante la carrera, Celia, Hind, Isa, Isma, Jose, Marc, Mario y a todos los demás. No habría terminado la carrera sin vosotros, eso lo tengo claro.

Gracias a ti, Aitziber, he tenido la enorme suerte de compartir contigo los últimos 6 años y me has sostenido en los momentos mas difíciles. *Mila esker, maitia.*

Además, quiero agradecer a mis padres, Jesús y Karmele, y a mi hermano Mario. No es posible expresar mediante palabras el agradecimiento que siento por todo lo que habéis hecho por mi, por ello, seré breve. Gracias por los sacrificios que habéis tomado para que pueda estudiar fuera de casa y por estar ahí en los buenos y en los malos momentos. Gracias también a mi abuelo Quirino, de ti es de quien mas he aprendido en toda mi vida. Y finalmente, gracias abuela, has sido mi mayor impulso para llegar hasta aquí.

# Lista de contenidos

<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>X</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>XII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos y organización del trabajo . . . . .	4
1.3. Estructura de la memoria . . . . .	6
1.4. Competencias adquiridas . . . . .	7
<b>2. Estado del arte: Optimización de trayectorias de bajo empuje</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. Problema de control óptimo . . . . .	9
2.2.1. Función de coste . . . . .	10

2.2.2. Restricciones . . . . .	11
2.3. Métodos de resolución del problema de control óptimo . . . . .	14
2.3.1. Método indirecto . . . . .	14
2.3.2. Método directo . . . . .	16
2.3.3. Método pseudoespectral . . . . .	18
2.3.4. Programación dinámica . . . . .	20
2.3.5. Métodos <i>shape based</i> . . . . .	22
2.3.6. Trabajos previos sobre optimización de transferencias de bajo empuje . . . . .	23
<b>3. Planteamiento y resolución del problema mediante método <i>shape-Based</i></b>	<b>26</b>
3.1. Modelización de la dinámica orbital . . . . .	26
3.1.1. Parametrización de la trayectoria y control . . . . .	26
3.1.2. Ecuaciones del movimiento . . . . .	28
3.2. Malla temporal . . . . .	30
3.3. Proyección de la trayectoria en base polinomial . . . . .	31
3.3.1. Tipos de polinomios . . . . .	32
3.4. Condiciones de contorno y trayectoria inicial . . . . .	38
3.5. Cálculo de la ley de control . . . . .	40
3.6. Algoritmo de optimización . . . . .	40
3.7. Ejemplo 1: LQR unidimensional y estimación del error . . . . .	43
3.8. Ejemplo 2: Transferencia orbital de bajo empuje y máxima energía . . . . .	47
<b>4. Transferencia al asteroide Dionysus</b>	<b>53</b>
4.1. Planteamiento del problema . . . . .	53
4.1.1. Ventana de lanzamiento . . . . .	54
4.1.2. Optimización de la trayectoria final . . . . .	57
4.1.3. Resultados trayectoria final . . . . .	58
<b>5. Transferencia a Marte</b>	<b>66</b>
5.1. Planteamiento del problema . . . . .	66

- 5.1.1. Ventana de lanzamiento . . . . . 67
- 5.1.2. Optimización de la trayectoria final . . . . . 69
- 5.1.3. Resultados . . . . . 70
  
- 6. Conclusiones y trabajo futuro . . . . . 76**
- 6.1. Conclusiones . . . . . 76
- 6.2. Trabajo futuro . . . . . 78



# Lista de figuras

1.1. Número de vehículos espaciales con propulsión solar-eléctrica por año. Crédito [44].	3
1.2. Distribución temporal de cada tarea respecto al tiempo empleado al trabajo completo.	5
2.1. Región factible para diferentes tipos de restricciones. . . . .	13
2.2. Relaciones entre diferentes estados del problema de optimización de trayectorias. Elaboración propia. . . . .	20
3.1. Coordenadas cilíndricas. Elaboración propia. . . . .	30
3.2. Polinomios de Chebyshev hasta orden $N = 4$ . . . . .	34
3.3. Polinomios de Legendre hasta orden $N = 4$ . . . . .	35
3.4. Polinomios de Laguerre hasta orden $N = 4$ . . . . .	36
3.5. Polinomios de Hermite hasta orden $N = 4$ . . . . .	37
3.6. Polinomios no ortogonales de Bernstein hasta orden $N = 4$ . . . . .	38
3.7. Procedimiento del método <i>shape-based</i> . Elaboración propia. . . . .	42
3.8. Representación de las variables y ecuaciones involucradas en cada paso del método. Elaboración propia. . . . .	42
3.9. Resultados obtenidos del problema LQR y comparativa con solución analítica. . . .	44
3.10. Error en la trayectoria entre la solución numérica y analítica para diferentes $N$ y $m$ .	45
3.11. Error del control entre la solución numérica y analítica para diferentes $N$ y $m$ . . . .	45
3.12. Evolución del error cuadrático medio con el número de nodos, desde 50 hasta 500 y para un orden de expansión de $N = 24$ . . . . .	46
3.13. Definición del ángulo $\alpha$ . Elaboración propia. . . . .	49

3.14. Trayectoria obtenida en unidades canónicas. . . . .	51
3.15. Ángulo $\alpha$ . . . . .	52
3.16. Coordenada $\rho$ . . . . .	52
4.1. Trayectoria Tierra-Dionysus. . . . .	60
4.2. Hodógrafa de la transferencia Tierra-Dionysus. . . . .	61
4.3. Aceleración propulsiva total y por componentes de la transferencia Tierra-Dionysus. . . . .	61
4.4. Detalle de la aceleración propulsiva total y por componentes de la transferencia Tierra-Dionysus en la etapa final de la trayectoria. . . . .	62
4.5. Posición coordenada cartesiana $x$ de la transferencia Tierra-Dionysus. . . . .	62
4.6. Posición coordenada cartesiana $y$ de la transferencia Tierra-Dionysus. . . . .	63
4.7. Posición coordenada cartesiana $z$ de la transferencia Tierra-Dionysus. . . . .	63
4.8. Velocidad coordenada cartesiana $x$ de la transferencia Tierra-Dionysus. . . . .	64
4.9. Velocidad coordenada cartesiana $y$ de la transferencia Tierra-Dionysus. . . . .	64
4.10. Velocidad coordenada cartesiana $z$ de la transferencia Tierra-Dionysus. . . . .	65
5.1. Gráfica <i>porkchop</i> obtenida de la transferencia Tierra-Marte. . . . .	68
5.2. Trayectoria Tierra-Marte . . . . .	71
5.3. Aceleración propulsiva total y por componentes de la transferencia Tierra-Marte. . . . .	72
5.4. Posición coordenada cartesiana $x$ de la transferencia Tierra-Marte. . . . .	72
5.5. Posición coordenada cartesiana $y$ de la transferencia Tierra-Marte. . . . .	73
5.6. Posición coordenada cartesiana $z$ de la transferencia Tierra-Marte. . . . .	73
5.7. Velocidad coordenada cartesiana $x$ de la transferencia Tierra-Marte. . . . .	74
5.8. Velocidad coordenada cartesiana $y$ de la transferencia Tierra-Marte. . . . .	74
5.9. Velocidad coordenada cartesiana $z$ de la transferencia Tierra-Marte. . . . .	75

# Lista de tablas

- 1.1. Comparativa de prestaciones entre sistemas propulsivos [34]. . . . . 2
  
- 3.1. Error y tiempo de computación para el problema LQR con diferentes bases polinomiales. . . . . 47
- 3.2. Tabla resumen del ejemplo 2. . . . . 51
  
- 4.1. Elementos orbitales clásicos de la Tierra y Dionysus. . . . . 53
- 4.2. Valores de  $\Delta V$  obtenidos para el barrido de anomalía verdadera final de Dionysus. 56
- 4.3.  $\Delta V$  obtenido para diferentes bases polinomiales y mallas. . . . . 59
  
- 5.1. Elementos orbitales clásicos de Marte. . . . . 66
- 5.2. Resultados obtenidos de la transferencia a Marte con diferentes bases polinomiales. 70

# Lista de Abreviaturas

**CMP** Covector Mapping Principle.

**EdM** Ecuaciones del movimiento.

**HJB** Hamilton-Jacobi-Bellman.

**HJB-PDE** Hamilton-Jacobi-Bellman Partial Differential Equation.

**KKT** Karush-Kuhn-Tucker.

**LQR** Linear Quadratic Regulator.

**MPBVP** Multi-point Boundary Value Problem.

**NASA** National Aeronautics and Space Administration.

**NLP** Programación No Lineal.

**PDD** Programación Dinámica Diferencial.

**PMP** Principio del Mínimo de Pontryagin.

**SB** Shape Based.

**SQP** Sequential Quadratic Programming.

**TPBVP** Two Point Boundary Value Problem.

# Lista de Símbolos

$\alpha$	Ángulo de empuje
$\beta$	Vector de variables de optimización adicionales
$\kappa$	Vector de multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones
$\lambda$	Vector de coestados
$\Phi$	Vector de condiciones de contorno para el método indirecto
$\nu$	Vector de multiplicadores de Lagrange asociados a las condiciones de contorno
$s$	Vector de estado
$s^*$	Vector de estado óptimo
$u$	Vector de control
$u^*$	Vector de control óptimo
$x$	Vector de configuración
$\Delta V$	Incremento de velocidad
$\Gamma$	Función de discretización temporal
$\mathcal{B}$	Conjunto de coeficientes $c_j$ determinados por las condiciones de contorno
$\mathcal{L}$	Tiempo de Lagrange

---

$\mathcal{M}$	Termino de Mayer
$\mathcal{T}$	Conjunto de nodos de malla
$\mu$	Parámetro gravitacional
$\Omega$	Ascensión recta del nodo ascendente
$\omega$	Argumento del perigeo
$\rho$	Coordenada radial
$\tau_i$	Variable independiente temporal adimensional
$\theta$	Coordenada polar en el plano
$c_j$	Coefficientes de la expansión polinómica
$E$	Anomalía excéntrica
$e$	Excentricidad
$f$	Ecuaciones dinámicas
$g$	Restricciones de desigualdad
$H$	Hamiltoniano
$h$	Restricciones de igualdad
$i$	Inclinación orbital
$J$	Función de coste del problema de optimización
$M$	Anomalía media
$m$	Número de puntos de discretización
$N$	Orden de expansión del polinomio

---

$P$	Función polinómica
$r$	Distancia
$T$	Aceleración
$t$	Variable independiente temporal (continua)
$t_0$	Variable independiente temporal inicial
$t_f$	Variable independiente temporal final
$t_i$	Variable independiente temporal (discreta)
$t_m$	Variable independiente temporal final (discreta)
$V$	Función de coste para programación dinámica
$W$	Pesos de la expansión en la rutina pseudoespectral

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se presenta la motivación y objetivos del trabajo. Se plantea la relevancia de la propulsión eléctrica en la exploración espacial y la necesidad de desarrollar herramientas de análisis de misión y optimización de trayectorias para misiones que empleen propulsión de bajo empuje. Además, se muestra la estructura y organización de la memoria y una recopilación de las competencias adquiridas durante la realización del mismo.

### 1.1. Motivación

El sector espacial está experimentando un enorme crecimiento en los últimos años, desde la comercialización masiva de las órbitas terrestres, pasando por la retomada exploración científica de la Luna, hasta las ambiciosas misiones planteadas con el objetivo de explorar el sistema solar, encabezadas por la llegada del hombre a Marte. Todas estas iniciativas han provocado el crecimiento en el interés de los gobiernos en la tecnología espacial, así como el surgimiento de pequeñas compañías, que impulsan la competencia y el crecimiento del sector.

Históricamente, las misiones espaciales han hecho uso de la propulsión química, tanto sólida como líquida, incluso híbrida. Este tipo de propulsión proporciona alto empuje y moderados niveles de eficiencia (impulso específico). Sin embargo, desde finales de la década de los 90, surge un modelo alternativo de propulsión espacial, la propulsión solar-eléctrica, la cual engloba una variedad de tecnologías, como los motores electrostáticos o de efecto Hall [2]. Estas presentan valores



de impulso específico de aproximadamente un orden de magnitud mayor a la propulsión química. Gracias a ello, es necesaria una menor masa de combustible para realizar una maniobra que requiera del mismo  $\Delta V$ , esta masa ahorrada puede emplearse a otros subsistemas, a la propia carga de pago del vehículo (siendo esta la *raison d'être* del mismo) o para reducir costes de la misión. Los excelentes valores de impulso específico que presentan estas tecnologías son a costa de muy bajos empujes, del orden de mN y de la necesidad de una gran cantidad de energía eléctrica para el funcionamiento de este tipo de propulsión.

Tabla 1.1: Comparativa de prestaciones entre sistemas propulsivos [34].

<b>Tecnología</b>	<b>Impulso específico (s)</b>	<b>Empuje (N)</b>
Propulsante Sólido	150 – 300	$10^7$
Propulsante Líquido	300 – 500	$10^7$
Electrostático	1200 – 10000	0 – 20
Electromagnético (Hall)	700 – 5000	100

El bajo empuje que proporcionan estos motores los limita a aplicaciones en órbita, debido al alto tiempo de quemado necesario, desde horas hasta meses, a diferencia de tiempos del orden de minutos para transferencias impulsivas con propulsión química. Estos tiempos de funcionamiento de la propulsión implican un aumento en la complejidad de las transferencias orbitales. Sin embargo, estas tecnologías han demostrado ser de muy alto valor para la exploración espacial y actualmente están consolidadas como una opción de propulsión no solo viable, sino en auge, como se puede ver en la figura [44], donde el pico final se debe a los satélites Starlink de SpaceX. La flexibilidad que ofrece este tipo de propulsión se demuestra por la variedad de aplicaciones en las que se emplean: Misiones de comunicaciones que requieran una transferencia a GEO como Eutelsat 172-B (Airbus Defense and Space) o la futura segunda generación de los satélites de GNSS Galileo (ESA), misiones lunares como SMART-1 (NASA) o misiones interplanetarias, como la pionera DeepSpace-1 (NASA) y la misión DAWN (NASA), las cuales realizaron diferentes *tours* de asteroides.

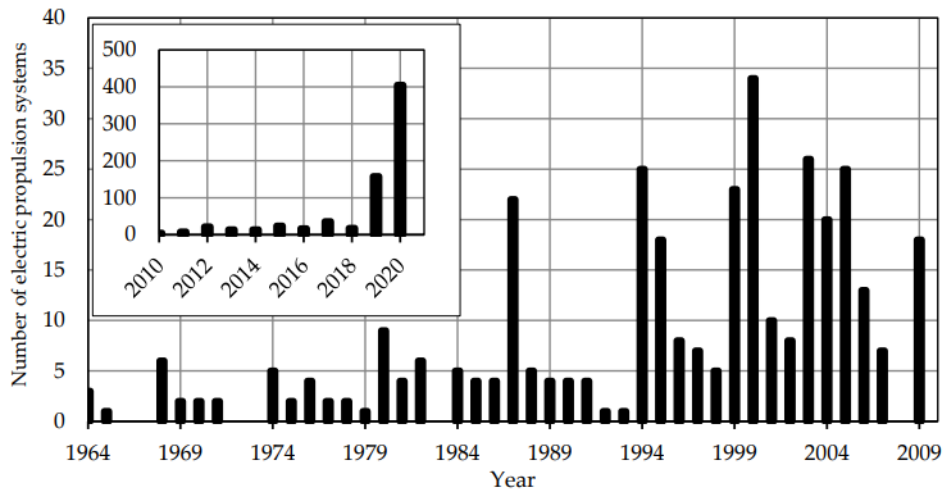


Figura 1.1: Número de vehículos espaciales con propulsión solar-eléctrica por año. Crédito [44].

El cálculo y optimización de trayectorias para vehículos equipados con propulsión de bajo empuje es notablemente más complejo que el requerido con propulsión química convencional. Los altos tiempos de quemado implican la necesidad de determinar un perfil de empuje, a diferencia de una serie de maniobras discretas para propulsión impulsiva. Por otro lado, la propia naturaleza geométrica de la trayectoria es diferente, siendo en muchos casos necesarias varias revoluciones alrededor del cuerpo tractor para completar la maniobra, así mismo, el papel de los eclipses, de por sí relevantes en las misiones espaciales, tienen un peso aún mayor, debido a la necesidad de potencia eléctrica para el funcionamiento de la propulsión eléctrica. Esta energía, en gran parte de las misiones, se obtiene mediante células fotovoltaicas, que requieren de la luz solar para generar energía. Son estas diferencias y desafíos los que motivan el desarrollo de herramientas de optimización de trayectorias especializadas en bajo empuje.

Las herramientas de optimización de trayectorias de bajo empuje pueden calificarse según varios criterios: objetivo único o múltiple, precisión, coste computacional, flexibilidad etc. La tendencia a la que deriva la ingeniería espacial y en concreto el análisis de misión espacial recae en el diseño preliminar eficiente, rápido y flexible de las trayectorias, con el objetivo de estudiar diferentes conceptos de misión de manera rápida en una etapa temprana del proyecto (fase 0/A según calificación de la ESA [15]), para ello, las herramientas que permitan, en bajo tiempo y coste, determinar trayectorias de bajo empuje presentan un valor en aumento para el análisis de misión. Es

en esta categoría donde recae el método de optimización presentado.

Las características del método se profundizan en todo detalle en el capítulo (3), sin embargo es conveniente presentar resumidamente su funcionamiento. El método planteado cae dentro de los métodos *shape-based*, siendo este un método directo, donde se trabaja con un problema de programación no lineal NLP [5]. La trayectoria se proyecta sobre una base polinomial predeterminada, esta base polinomial se expande a un orden determinado y se computa en una malla concreta (generalmente coincidente con los nodos característicos del polinomio empleado) con una cantidad de puntos a determinar. La elección y configuración del polinomio y la malla representa la mayor característica del método.

## 1.2. Objetivos y organización del trabajo

El presente trabajo pretende abordar el problema de optimización de trayectorias de bajo empuje mediante un método *shape-based*. Para ello se emplea la herramienta SBOPT [54], aún en desarrollo, con diferentes objetivos.

Primeramente, se pretende comprender el funcionamiento de una herramienta de optimización de trayectorias de bajo empuje, tanto a nivel numérico y de programación, como los fundamentos matemáticos y físicos propios de la teoría del control óptimo. Para ello, se debe realizar un análisis de los diferentes métodos de optimización de trayectorias, en concreto los empleados para transferencias de bajo empuje. Así mismo, es necesario explorar las capacidades y limitaciones numéricas del método planteado, el efecto de los diferentes parámetros necesarios para generar la solución y el error del método, bien por la propia naturaleza del método como por la optimización realizada por el *solver* comercial `fmincom` [36]. Por otro lado, se pretende obtener y validar diferentes casos de transferencias interplanetarias, con el fin de evaluar la capacidad del método en casos complejos reales.

Para conseguir los objetivos planteados, es necesaria una planificación del trabajo a realizar, el cual se divide en las siguientes tareas.

1. Investigación exhaustiva de la bibliografía respecto a la optimización de trayectorias de bajo empuje y los conceptos matemáticos y físicos del problema de control óptimo.

2. Comprensión profunda de la dinámica orbital que caracteriza una transferencia de bajo empuje mediante su aplicación en el *solver* para casos sencillos.
3. Análisis de la capacidad numérica de la herramienta SBOPT en casos con solución analítica conocida.
4. Empleo de la herramienta en casos reales de transferencias interplanetarias y comparativa con otros métodos de optimización de trayectorias. Comparativa de los diferentes polinomios que describen la trayectoria, sus ordenes de expansión y el número de puntos de malla en la solución.

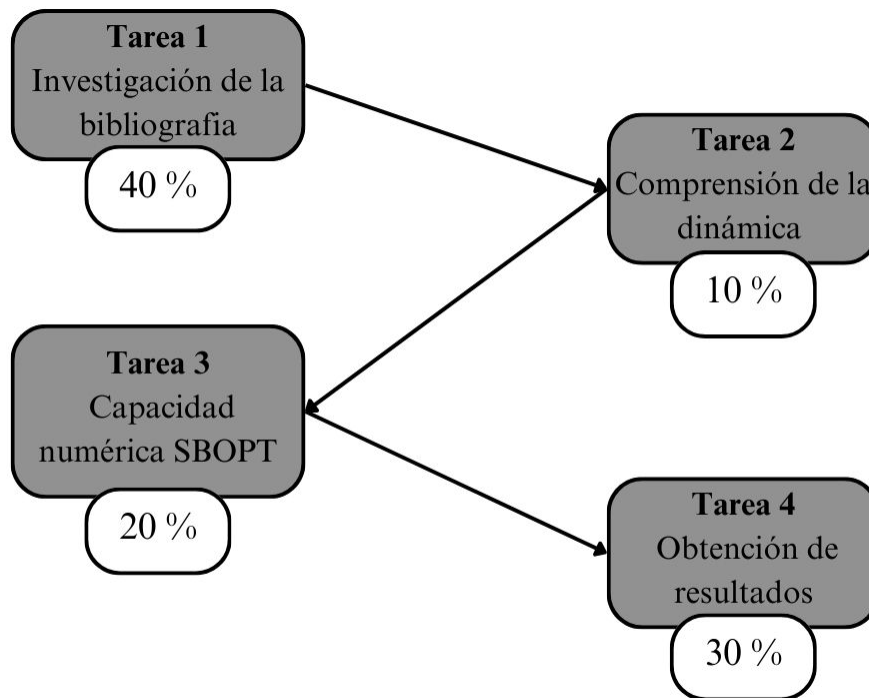


Figura 1.2: Distribución temporal de cada tarea respecto al tiempo empleado al trabajo completo.

La investigación de la bibliografía y la comprensión de la teoría referente a la optimización de trayectorias ha sido la tarea que mayor tiempo ha consumido, debido a la dificultad del campo y la falta de conocimientos previos poseídos. La comprensión de la dinámica orbital, si bien aplicada a trayectorias de bajo empuje ha requerido un proceso de aprendizaje, era conocida con anterioridad.

Por otro lado, la obtención de conclusiones respecto a la capacidad numérica de la herramienta, junto con la obtención de transferencias interplanetarias con el método, ocuparon aproximadamente la mitad del tiempo dedicado al proyecto. Por último, como tarea transversal a todas las descritas, se encuentra la redacción de la memoria, llevada a cabo durante el transcurso total del proyecto. Esquema descriptivo de la distribución de tareas en la figura (1.2).

### 1.3. Estructura de la memoria

La memoria se estructura en diferentes capítulos:

En el capítulo (2) se expone el estado del arte respecto al problema de control óptimo y la optimización de trayectorias de bajo empuje. Se presentan los elementos del problema de control óptimo, la función de coste y las restricciones. Por otro lado, se presentan las principales estrategias o métodos empleados en la optimización de trayectorias de bajo empuje. Siendo estos los métodos indirectos, directos, pseudoespectrales, programación dinámica y los métodos *shape-based*. Por último, un resumen de herramientas empleadas en la industria para la optimización de trayectorias, con ejemplos de cada método.

A lo largo del capítulo (3) se plantea el problema de optimización de trayectorias de bajo empuje. Se presentan las estrategias de modelización de la dinámica orbital con posibles perturbaciones y parametrizaciones. Seguidamente, se desarrolla en detalle el método *shape-based* planteado. Se explica la desratización con diferentes mallas, las bases polinomiales estudiadas donde proyectar la trayectoria, la obtención de una condición inicial, la imposición de las condiciones de contorno y la obtención de la ley de control. Por otro lado, se realiza un estudio del error en un problema LQR (Linear Quadratic Regulator) unidimensional, del cual se conoce solución analítica. Se estudia el efecto de diferentes polinomios y sus configuraciones en la solución y error obtenido.

En el capítulo (4) se plantea el problema de transferencia al asteroide 3671 Dionysus. Se realiza un estudio de la ventana de lanzamiento óptima y se realiza una comparativa de la transferencia obtenida con diferentes bases polinomiales.

En el penúltimo capítulo (5) de manera similar a la transferencia a Dionysus, se realiza un estudio de la transferencia óptima a Marte. Siendo este un caso de menor complejidad, se realiza

un barrido mas preciso y se muestra el análisis de la ventana de lanzamiento mediante una gráfica *porkchop*.

Finalmente, en el capítulo (6) se presentan las conclusiones obtenidas y las futuras líneas de trabajo.

## 1.4. Competencias adquiridas

La realización del presente trabajo ha proporcionado la adquisición de habilidades y competencias esenciales en la formación de un ingeniero. Así mismo, los conocimientos de diferentes asignaturas del grado han sido vitales para la comprensión y realización del proyecto.

El desarrollo del trabajo ha requerido de la búsqueda e investigación crítica de bibliografía técnica de un alto nivel de complejidad y especialidad. La capacidad de búsqueda e interpretación de informes técnicos ha sido clave para la comprensión de los conceptos estudiados. Por otro lado, ha sido necesaria una organización y reparto independiente del trabajo.

La conclusión del proyecto no habría sido posible sin los conocimientos y habilidades obtenidas en asignaturas impartidas en el grado de Ingeniería Aeroespacial en Vehículos Aeroespaciales. El conocimiento en mecánica orbital, así como los conceptos de mecánica necesarios para comprender y obtener las ecuaciones del movimiento de un vehículo espacial se han adquirido en las asignaturas “Mecánica Orbital”, “Mecánica Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial” y “Mecánica de Vuelo”. Adicionalmente, la visión global de un proyecto y misión espacial es esencial para comprender las necesidades de un vehículo espacial y como afectan a su trayectoria, estos conocimientos desarrollados en la asignatura “Vehículos Espaciales” han sido esenciales. Por otro lado, la alta carga matemática propia de las herramientas de optimización de trayectorias han hecho que las habilidades obtenidas en “Ampliación de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales”, y “Sistemas de Control” sean de vital importancia.

El conjunto de conocimientos adquiridos en la carrera, sumado al aprendizaje propio realizado durante el transcurso del trabajo, han hecho posible la realización del trabajo presentado.

# Capítulo 2

## Estado del arte: Optimización de trayectorias de bajo empuje

### 2.1. Introducción

La obtención de trayectorias de bajo empuje, donde se busque, no solo una trayectoria que cumpla las condiciones de contorno del problema, si no que además, se pretenda obtener la trayectoria que implique un menor gasto de combustible o tiempo de vuelo, y que respete las limitaciones de empuje u otras características del vehículo, requieren del empleo de técnicas de control óptimo. Dentro de estas técnicas, existen diferentes aproximaciones al problema, tanto analíticas como sobre todo, numéricas. Entre ellas, se encuentra el método *shape-based* descrito y utilizado en este proyecto.

A lo largo de este capítulo, se presenta el marco teórico respectivo al problema de control óptimo, y en concreto para los problemas de transferencias orbitales de bajo empuje, se introducen cuales son los métodos numéricos existentes que se emplean para su resolución. Además, se da contexto a la familia de métodos denominados *shape-based*. En las siguientes referencias se puede encontrar un estudio en mayor profundidad de los diferentes métodos de optimización de trayectorias: Betts [6] y Conway [12].

## 2.2. Problema de control óptimo

La resolución del problema de control óptimo radica en encontrar las entradas a un sistema dinámico de manera que se minimice o maximice una función de coste especificada, satisfaciendo al mismo tiempo restricciones respecto al movimiento del sistema y condiciones de contorno (ver [5]). Es decir, se busca no solo encontrar las entradas que lleven el problema a un estado determinado, dentro de unas restricciones, sino que además, se debe seleccionar de todas las soluciones posibles, la que minimice un parámetro o función del problema concreta. En ciertos problemas con sistemas dinámicos y restricciones complejas, como son las transferencias orbitales de bajo empuje, este problema se debe abordar a través de métodos numéricos.

De manera general, un problema de control óptimo se define de la siguiente forma:

$$\min \quad J(\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathcal{M}[\mathbf{s}(t_0), \mathbf{s}(t_f), t_f, t_0] + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (2.1)$$

$$\text{sujeta a} \quad \dot{\mathbf{s}}(t) = f[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t, \boldsymbol{\beta}], \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (2.2)$$

$$h[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] = 0 \quad (2.3)$$

$$g[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (2.4)$$

Donde  $\mathbf{s}(t)$  es el vector de estado,  $\mathbf{u}(t)$  el vector de control,  $t_0$  y  $t_f$  los instantes inicial y final, respectivamente. La primera derivada del vector estado  $\dot{\mathbf{s}}(t)$  se define a través de la función  $f[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t, \boldsymbol{\beta}]$ , la cual depende el estado  $\mathbf{s}(t)$ , el control  $\mathbf{u}(t)$ , la variable independiente  $t$  y el vector  $\boldsymbol{\beta}$ . Este vector contiene parámetros adicionales propios del problema a estudiar y que aparezcan en las ecuaciones dinámicas que definen la evolución del estado. Por ejemplo, en transferencias de bajo empuje, se añade el número de revoluciones como componente de este vector  $\boldsymbol{\beta}$ .

El vector de estado estará compuesto por las coordenadas de posición y las respectivas derivadas. Del mismo modo, el vector de control se compone de las componentes del mismo en el sistema de referencia determinado. Estas dependerán de la parametrización elegida. Las ecuaciones del movimiento, descritas mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales, quedan descritas en la función  $f$  (ecuación 2.2) de manera explícita. En la sección (3.1) se profundizará en ello.



### 2.2.1. Función de coste

La función de coste Ec.(2.1) representa el coste de la misión en el caso de que interese minimizar la función, como es típico en problemas de optimización de transferencias orbitales (maximizarla es equivalente cambiando el signo, interesante para otro tipo de problemas como la optimización trayectorias para lanzadores). Encontrar el valor mínimo de esta función es lo que caracteriza y diferencia un problema de control óptimo de un problema de control clásico (Ref.[16]). En función del problema, por ejemplo, si el problema es convexo o no (detalles sobre el concepto de problema convexo en la sección (2.2.2.1) y en Franklin 1991[1]), y del método de resolución empleado, la certeza de haber alcanzado un resultado óptimo, es decir, un mínimo global, varía. De forma general, no es factible asegurar haber alcanzado el mínimo global de la función. Este concepto se aborda en mayor profundidad en el apartado (2.3).

La función de coste está comúnmente formada por dos sumandos, denominadas de Mayer y de Lagrange. En el caso de que la función de coste contenga los dos términos, se dice que adquiere la forma de Bolza. La función de Mayer depende de los estados iniciales y finales, así como del instante inicial y final. Por otro lado, la función de Lagrange se evalúa e integra a lo largo del intervalo  $[t_0, t_f]$ , ya que depende del estado y del control en función de la variable independiente  $t$ , por lo tanto, esta función es un integrando. Dependiendo del parámetro o de la función a optimizar, se empleará de una u otra forma. Por ejemplo, si se quiere minimizar el tiempo de vuelo, la variable a minimizar será  $t_f$  y la función de coste quedaría de la siguiente forma:  $J = t_f$ , es decir, adquiere la forma de Mayer. Por otro lado, para el caso de transferencias orbitales, es común minimizar el parámetro  $\Delta V$ , con el fin de minimizar la masa de combustible, de este modo la función de coste quedaría:  $J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\mathbf{u}(t)^T \mathbf{u}(t)} dt$ , siendo esta la forma de Lagrange. Estos son los principales parámetros a optimizar para el caso de transferencias orbitales, sin embargo, existen diferentes variables que pueden ser de interés, como minimizar el tiempo de vuelo a través de los cinturones de Van-Allen o minimizar directamente la masa de combustible añadiendo un parámetro adicional  $m_P$ , entre otros. Es posible optimizar más de un único parámetro, sin embargo, en este trabajo solo se estudiarán problemas con un solo objetivo a optimizar. Para mayor detalle sobre optimización multi-objetivo consultar la tesis de Morante [37] y Nyoman [18].

### 2.2.2. Restricciones

Por último, un problema de control óptimo debe respetar una serie de restricciones. Estas pueden involucrar el estado o el control. El conjunto de todos los estados y controles correspondientes que cumplen las restricciones, forman lo que se denomina como región factible. Es decir, las restricciones limitan las posibles soluciones para el problema de control óptimo. Por lo tanto, tienen ciertas implicaciones en el problema:

- **Existencia de solución:** Es posible que no exista un conjunto de estados y controles que satisfagan las restricciones. Es decir, las restricciones no deben imponer una región factible vacía.
- **Unicidad de solución:** El tamaño y la forma de la región factible también puede influir en la unicidad de la solución óptima. Una región factible grande y bien definida puede tener varios puntos que optimicen la función objetivo, lo que puede dar lugar a diferentes trayectorias óptimas. Por el contrario, una región factible pequeña o de forma extraña, puede conducir a una solución óptima única, en la que sólo hay una trayectoria clara para lograr el mejor resultado.
- **Carga computacional:** Una región factible grande y de forma compleja encarece la carga computacional, ya que se debe buscar la solución en esta región.

Estas dificultades son comunes en los problemas de control óptimo. Para lidiar con ellos, es importante conocer el ejercicio en profundidad, con el objetivo de definir correctamente las restricciones. Relajar las restricciones permite mitigar los problemas mencionados (transformar las restricciones a convexas), pero deben seguir respetando la dinámica del problema.

Las restricciones se pueden encontrar como igualdades (ecuación (2.3) o desigualdades (ecuación 2.4). De manera general, las restricciones de igualdad contienen las condiciones de contorno. Las ecuaciones diferenciales que definen la dinámica del problema (ecuación.2.2) se pueden entender como restricciones de igualdad. En cuanto a las restricciones de desigualdad, se conocen como restricciones de trayectoria. Ambas restricciones limitan el conjunto de las infinitas variables sujetas a optimización. Algunos parámetros típicos a emplear como restricciones de desigualdad

son el empuje máximo, masa máxima de combustible empleable o restricciones de apogeo/perigeo. Para las restricciones de igualdad, es común especificar el estado inicial y final del problema.

### 2.2.2.1. Ejemplo de región factible

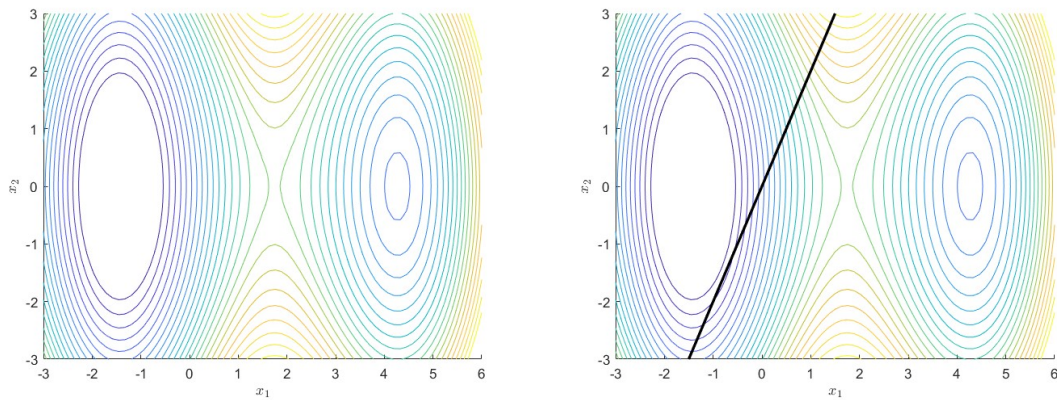
Tomando el siguiente problema sencillo: de  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\min \quad J(x_1, x_2) = \sin x_1 + 0,05x_1^2 + 0,1x_2^2 \quad (2.5)$$

$$\text{suje}to \ a \quad g(x_1, x_2) \leq 2x_1 - x_2 \quad (2.6)$$

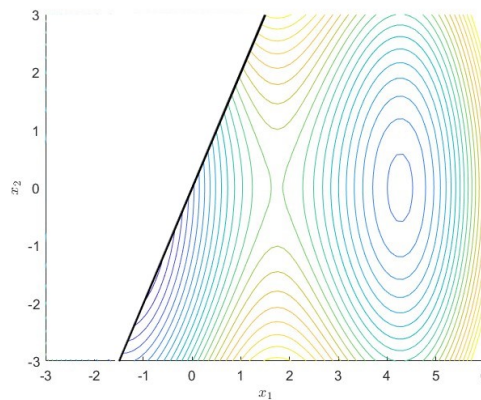
$$h(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \quad (2.7)$$

Donde  $x_1 \in [-3, 6]$  y  $x_2 \in [-3, 3]$ . La región factible con y sin las restricciones tiene la siguiente forma.



(a) Región factible sin restricción.

(b) Región factible con restricción  $h(x_1, x_2)$ . Zona restringida en negro.



(c) Región factible con restricción  $g(x_1, x_2)$ .

Figura 2.1: Región factible para diferentes tipos de restricciones.

En la primera imagen (2.1a) se observa como la región factible es no convexa, debido a una función de coste no lineal. La condición inicial es especialmente determinante en este caso, pudiéndose acabar en un óptimo local si  $x_{10} > 1,75$ . En el caso de la segunda imagen (2.1b), se añade una restricción de igualdad  $h$  al problema, de este modo, la región factible queda limitada a los valores de  $x_1$  y  $x_2$  contenidos en la recta marcada en negro. Por último, en la figura (2.1c) se muestra la restricción de desigualdad  $g$  que limita la región factible al lado derecho de la línea negra. Es evidente el impacto de las restricciones en la solución del problema. La alteración de las restricciones de un problema es una de las técnicas que se emplean con el objetivo de “convexificar” un problema.

## 2.3. Métodos de resolución del problema de control óptimo

Se ha presentado la estructura matemática que define un problema de control óptimo, haciendo hincapié en los problemas de optimización de trayectorias. El proceso para la resolución de este tipo de problemas no es único y existen diferentes métodos y aproximaciones. Siguiendo la lógica planteada por Morante et al en [37] y [38], los métodos se organizan con la siguiente estructura. La primera clasificación se puede hacer entre soluciones analíticas y soluciones numéricas. Las soluciones analíticas solo existen en casos muy concretos y difícilmente se pueden encontrar para optimización de trayectorias orbitales, es por esto que la investigación está centrada en métodos numéricos. No obstante, los problemas con solución analítica son de interés a la hora de comprender los límites de los diferentes métodos numéricos, ya que ofrecen una solución con la que comparar los resultados.

Dentro de los métodos numéricos, estos se pueden clasificar en tres grandes grupos: Métodos indirectos, directos y de programación dinámica. Así mismo, existen métodos que asumen una función de control predefinida. Es en este último grupo donde se clasifican los métodos *Shape-based*.

### 2.3.1. Método indirecto

Los métodos indirectos se basan en emplear el Principio del Mínimo de Pontryagin (PMP) (Ref.[43]) y el calculo de variaciones para resolver el problema denominado “*multi-point boundary value problem*” MPBVP. Este principio define las primeras condiciones necesarias para que se considere una solución  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  como óptima. Estas condiciones requieren de la definición de la función Hamiltoniana:

$$H(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}, t) = \mathcal{L} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} - \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{g} \quad (2.8)$$

Donde  $\mathcal{L}$  es el término de Lagrange de la función de coste,  $\boldsymbol{\lambda}$  es la función coestado o adjunta (ver [52]), y  $\boldsymbol{\kappa}$  los multiplicadores de Lagrange. Estos multiplicadores provienen de las restricciones, y los coestados de las ecuaciones dinámicas. Los coestados y multiplicadores de Lagrange

homogeneizan la función Hamiltoniana de manera que en una sola función se tiene en cuenta la función de coste  $\mathcal{L}$ , las ecuaciones dinámicas  $f$  y las restricciones  $g$  (información sobre sistemas Hamiltonianos [39]). El PMP implica lo siguiente:

$$\mathbf{u}^* = \arg \min H \quad (2.9)$$

Es decir, las variables de control óptimas son las que minimicen el Hamiltoniano en cada instante de tiempo. Además, en referencia al calculo de variaciones, los estados y coestados deben cumplir las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}} \quad (2.10)$$

Por otro lado, las condiciones iniciales y finales de los coestados deben cumplir las condiciones de transversabilidad:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}(t_0)} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{s}(t_0)}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}(t_f)} - \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{s}(t_f)} \quad (2.11)$$

Y la función Hamiltoniana en el instante inicial ( $t_0$ ) y final ( $t_f$ ) debe cumplir las condiciones complementarias:

$$H(t_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial t_0} - \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_0}, \quad H(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} - \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_f} \quad (2.12)$$

Donde  $\mathbf{v}$  representa los multiplicadores de Lagrange asociados a las condiciones de contorno (Ec. 2.4) evaluadas en las condiciones de contorno.

Este método se particulariza por añadir las funciones coestado, una por cada variable de estado (posición, velocidad...) y los multiplicadores de Lagrange. Los coestados y multiplicadores de Lagrange reflejan el coste de cumplir las restricciones y ecuaciones dinámicas mientras se minimiza la función de coste. A través de las condiciones expuestas se define el MPBVP. Resolviendo numéricamente el control para cada instante de tiempo a través de la ecuación (2.9), se obtiene un conjunto de trayectorias, y se determina como óptima la que minimice la función de coste.

Obtener la solución a través de las condiciones expuestas (PMP) aporta una seguridad sobre

la optimalidad de la solución. La dificultad de este método reside en la sensibilidad numérica en la resolución del MPBVP construido, debida a la obtención de las funciones de los coestados, sumado a que estas funciones son no inyectivas, es decir, existe más de una función de coestado para la misma solución óptima. Por otro lado, como se puede observar en la ecuación (2.8), los coestados y multiplicadores de Lagrange deben tener unidades, es decir, se puede intuir significado físico de los mismos, facilitando la obtención de sus condiciones iniciales.

Es común asumir que un método indirecto es más preciso que un método directo, pero como se demuestra en la disertación de Ross [46] y se expande en la sección (2.3.3), esto no es estrictamente cierto.

### 2.3.2. Método directo

Respecto a los métodos directos, se basan en las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Estas representan las condiciones de optimalidad de primer orden del problema primal (sin coestados) (referencias [28, 32]). A diferencia de en un método indirecto, en un método directo se optimiza la función de coste discreta “*Discretizar y a continuación optimizar*” (referencia [29]). Para ello, se debe realizar un proceso denominado transcripción. Esto consiste en transformar el problema continuo descrito en las ecuaciones (2.1-2.4) en un problema discreto, es decir, convertirlo en un problema de programación no lineal (NLP) (referencia [5]).

De esta manera, se define un vector de variables a optimizar  $z$ . Por otra parte, esto implica de igual manera discretizar la variable temporal, construyendo el vector  $T$  formado por un número  $m$  de componentes. Esta malla temporal fija los instantes temporales en los que se evalúan, de forma general, tanto el estado  $s$  como el control  $u$ . Se define de forma que  $t_0 < t_i < t_m$ , donde  $t_m$  deberá corresponder con el instante final  $t_f$ , el cual al igual que el instante inicial  $t_0$ , puede quedar fijo, libre o como variable a optimizar (más detalle en sección 3.2).

Evaluando tanto el estado como el control en la malla temporal definida, el problema queda discretizado y transformado en un NLP.

$$J(\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t)) \rightarrow J(\mathbf{s}(t_i), \mathbf{u}(t_i)) \quad (2.13)$$

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = f[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t, \boldsymbol{\beta}] \rightarrow \dot{\mathbf{s}}(t_i) - f[\mathbf{s}(t_i), \mathbf{u}(t_i), t_i, \boldsymbol{\beta}] = 0 \quad (2.14)$$

$$h[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] = 0 \rightarrow h[\mathbf{s}(t_i), \mathbf{u}(t_i), t_i] = 0 \quad (2.15)$$

$$g[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] \leq 0 \rightarrow g[\mathbf{s}(t_i), \mathbf{u}(t_i), t_i] \leq 0 \quad (2.16)$$

Estos vectores de estado y control discretizados, junto a los instantes inicial  $t_0$  y final  $t_m$  y opcionalmente parámetros adicionales definidos mediante el vector  $\boldsymbol{\beta}$ , componen el vector de variables a optimizar  $\mathbf{z}$ .

$$\mathbf{z} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{s}(t_i) \\ \mathbf{u}(t_i) \\ t_0 \\ t_m \\ \boldsymbol{\beta} \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

Definido el problema discreto, se pueden emplear diferentes algoritmos de optimización para encontrar la solución óptima. Tanto en los métodos directos como en los indirectos se pueden distinguir principalmente tres estrategias:

- *Single-Shooting*: Se discretiza la trayectoria y a través de una condición inicial del control, se propaga temporalmente la trayectoria completa mediante esquemas numéricos (RK4, GBS, Adams-Bashforth..., ver Ref.[6]). A continuación, se evalúa la función de coste y las restricciones con la trayectoria obtenida. Un *solver* como `fmincom` variará estas condiciones iniciales en cada paso con el objetivo de minimizar la función de coste. La convergencia de este método es muy dependiente de las condiciones iniciales (ver [6]), tanto mediante una aproximación directa como indirecta.
- *Multiple-Shooting*: Del mismo modo que en el método anterior, con la diferencia de que mediante esta técnica, la trayectoria se simula en segmentos separados, conectados a través de restricciones denominadas *defect constraints*, de manera que se forma una cadena de proble-



mas de contorno con el objetivo de minimizar estos *defect constraints*. Este método resulta en un programa no lineal disperso con muchos elementos, siendo más fácil de resolver que el resultante de una aproximación *Single-Shooting*”, matrices de menos términos pero mas densas (mas términos distintos de 0). Ver [7] para mayor detalle sobre *multiple-shooting*.

- *Collocation*: La trayectoria discretizada se aproxima a través de polinomios conocidos. Las ecuaciones dinámicas se fuerzan en puntos definidos, denominados puntos de colocación. De este modo, se forma un sistema de ecuaciones algebraicas a resolver en cada iteración. Se profundiza en Topputo y Zhang [53].

La discretización del problema implica unas ventajas e inconvenientes respecto a los métodos indirectos. Tratar con un problema discreto permite procesar numéricamente el problema, sin embargo, esta discretización induce errores que pueden dar lugar a una solución sub-óptima. Al no tratar con coestados, la implementación es notablemente mas sencilla que en un método indirecto. Adicionalmente, son menos sensibles a las condiciones iniciales.

Es común, cuando se requiera de un estudio más detallado, realizar la optimización en dos etapas. Una primera optimización empleando un método directo, y emplear la solución obtenida como condición inicial para un método indirecto. De este modo, se aprovechan las ventajas de ambos métodos. La rapidez y flexibilidad de los métodos directos, y la mayor certeza en obtener la solución óptima que aportan los métodos indirectos. Además, empleando una solución ya optimizada como condición inicial facilita la convergencia del método indirecto.

### 2.3.3. Método pseudoespectral

Los métodos pseudoespectrales se basan en encontrar una secuencia de funciones de interpolación para la trayectoria que cumplan el principio de mapeo de covectores (*Covector Mapping Principle* CMP), principio que se explica mas adelante. La trayectoria y el control se construyen a través de funciones polinómicas evaluadas en un tiempo discreto transformado  $\tau$  y en una malla específica  $\pi^N := \{\tau_j, j = 0, \dots, N\}$ , siendo una distribución de nodos en el intervalo  $[-1, 1]$  (ver

[48]).

$$\mathbf{s}^N(\tau) = \sum_{j=1}^N \frac{W(\tau)}{W(\tau_j)} \phi_j(\tau) \mathbf{s}_j \quad -1 \leq \tau \leq 1 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{u}^N(\tau) = \sum_{j=1}^N \psi_j(\tau) \mathbf{u}_j \quad -1 \leq \tau \leq 1 \quad (2.19)$$

El dominio temporal  $t \in [t_0, t_f]$  se transforma al dominio  $\tau \in [-1, 1]$  a través de la siguiente función:

$$t = \Gamma(\tau) = \frac{t_0 + t_f}{2} + \frac{t_f - t_0}{2} \tau \quad (2.20)$$

Y para el caso de tiempo final infinito  $\tau \in [-1, 1)$ :

$$t = \Gamma(\tau) = \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \quad (2.21)$$

La elección de los puntos de malla  $\pi^N$ , es decir, la distribución de los puntos de evaluación dentro del intervalo de  $\tau$ , es de vital importancia para la convergencia del método. Para el caso de tiempo final infinito, se emplea la malla de Gauss-Radau y Gauss-Lobato (ver [35]) para tiempo final finito. Respecto a los pesos  $W(\tau)$ , son dependientes de la malla empleada. Para el caso de Gauss-Radau  $W(\tau) = 1 - \tau$  y para Gauss-Lobato  $W(\tau) \equiv 1$ . Las funciones  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  son polinomios de interpolación, generalmente de Chebyshev o Legendre (referencia [48]). El problema descrito en las ecuaciones (2.1-2.4) queda de la siguiente forma:

$$\min \quad J(\mathbf{s}(\pi^N), \mathbf{u}(\pi^N)) = \mathcal{M}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_N) \quad (2.22)$$

$$\text{sujeto a} \quad \left\| \sum_{j=1}^N \mathbf{D}_{ij} \mathbf{s}_j - f(\mathbf{s}_j, \mathbf{u}_j) \right\| \leq \delta^N \quad (2.23)$$

$$\|e(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_N)\| \leq \delta^N \quad (2.24)$$

Donde  $\sum_{j=1}^N \mathbf{D}_{ij} \mathbf{s}_j$  es la derivada temporal del estado  $\mathbf{s}(\tau)$  y  $\delta^N \rightarrow 0$  si  $N \rightarrow \infty$ . Los límites superiores e inferiores del estado están definidos a través de la función  $e(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_N)$ .

Los métodos pseudoespectrales derivaron en un principio crucial en la teoría de optimización de

trayectorias: el *Covector Mapping Principle*. Históricamente, ha existido una diferenciación clara entre los métodos directos e indirectos. Optar por el camino directo implicaba discretizar y optimizar (dualizar) para obtener un resultado obteniéndose unos covectores o coestados diferentes a los obtenidos mediante un método indirecto, donde primero se dualiza el problema y luego se discretiza. Hasta la llegada del CMP, estos dos métodos estaban separados al no conocerse la relación entre los covectores obtenidos por ambos métodos, y es la relación de estos covectores la que se demuestra mediante el principio CMP mediante un cambio de coordenadas. Mediante el siguiente diagrama en la figura (2.2) se muestra conceptualmente la relación mencionada.

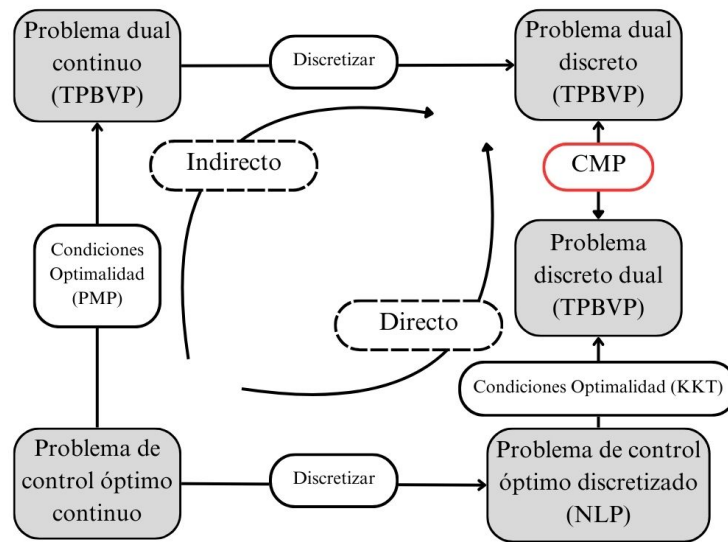


Figura 2.2: Relaciones entre diferentes estados del problema de optimización de trayectorias. Elaboración propia.

Los covectores obtenidos en el problema dual discreto (método indirecto) y en el problema dual discreto dual (método directo) convergen a través del CMP. De este modo, ambos métodos quedan completamente relacionados, diluyéndose la fuerte separación que se ha mantenido históricamente entre métodos directos e indirectos.

### 2.3.4. Programación dinámica

Los métodos de programación dinámica se basan en el principio de Bellman[4]. Este principio define las condiciones necesarias y suficientes para considerar un resultado como óptimo  $(x^*, u^*)$ .

Este principio se aplica a sistemas discretos, la extensión a sistemas continuos deriva en el principio de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Se define la función  $V$ :

$$V(\mathbf{s}, t) = \min \left\{ \Phi[\mathbf{s}(t_f), t_f] + \int_t^{t_f} \mathcal{L}[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \right\} \quad (2.25)$$

La función de coste se redefine como la función  $V$ . Solo depende del estado en el instante final, se elimina la dependencia de la condición inicial tanto en la parte de Mayer como en la parte de Lagrange.

Establecida la función  $V$ , el teorema de HJB define que el control óptimo  $\mathbf{u}^*$  debe cumplir:

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{s}, t) = \arg \min_u (\mathcal{L}[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] + \nabla_x V(\mathbf{s}, t)^T f(\mathbf{s}, \mathbf{u}, t)) \quad (2.26)$$

Además, la función  $V$  debe cumplir la HJB-PDE:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(\mathbf{s}, t) = \min_u \{ \mathcal{L}[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] + \nabla_x V(\mathbf{s}, t)^T f(\mathbf{s}, \mathbf{u}, t) \} \quad (2.27)$$

Por último, la función  $V$  debe cumplir con la condición de contorno:

$$V(\mathbf{s}(t_f), t_f) = \Phi(\mathbf{s}(t_f), t_f) \quad (2.28)$$

En la mayoría de las situaciones, es imposible encontrar soluciones analíticas para controlar sistemas dinámicos mediante la ecuación de HJB-PDE. Las soluciones numéricas siguen siendo necesarias, pero presentan un problema denominado “*curse of dimensionality*” (ver [33]), es decir, el esfuerzo computacional se dispara a medida que el sistema se hace más complejo. Para solucionar este problema, se utilizan técnicas de programación dinámica aproximada, que sacrifica la garantía de solución óptima por la viabilidad computacional. Un método eficaz es la Programación Dinámica Diferencial (PDD) (ver [58]), que refina iterativamente las secuencias de control basándose en evaluaciones de costes y en el teorema HJB.

### 2.3.5. Métodos *shape based*

Los métodos *shape based* caen dentro de otro conjunto de métodos, donde la ley de control esta predefinida. Hasta ahora, los métodos descritos discretizan y optimizan el control del mismo modo que la trayectoria, formando ambos parte de las variables de optimización del NLP. Sin embargo, se puede aproximar la ley de control de manera que no forme parte de las variables de optimización, sino que sea una función de ellas. Esto es de especial interés para trayectorias de bajo empuje, ya que estas describen muchas revoluciones alrededor del cuerpo tractor, lo que implica un gran número de puntos de discretización. Por ello, con el objetivo de reducir la carga computacional, se asume la ley de control conocida como función de una cantidad reducida de parámetros, generalmente dependientes de la trayectoria.

Estos métodos pueden derivar en soluciones sub-óptimas, sin embargo, su inherente baja carga computacional los hace de gran interés en una fase temprana de análisis de misión, siendo posible evaluar diferentes conceptos de misión con rapidez. Existen diferentes métodos que emplean esta filosofía: Control combinado (*Blended control*)[26], Cálculo de variaciones [23], Control de Lyapunov [25], neuro controladores [40], Series de Fourier finitas [11] y los denominados como *shape-based*.

Este trabajo se centra en un método concreto del grupo de *shape-based* (SB). Por ello, se dejarán de lado el resto de métodos que emplean una ley de control predefinida, para más información consultar Ref.[37]. En la sección (3) se detalla el método concreto del que trata el proyecto presentado, sin embargo, para comprender las características del método expuesto en este trabajo, conviene contextualizar las diferentes aproximaciones realizadas con métodos SB, .

Se pueden clasificar los métodos SB a su vez en 4 subgrupos. En función de que base se emplee para aproximar la trayectoria, y en algunos casos el control.

- **Exponencial sinusoidal:** Estos métodos aproximan la trayectoria mediante una función exponencial sinusoidal:

$$r(\theta) = k_0 \exp\{k_1 \sin(k_2\theta + \phi)\} \quad (2.29)$$

Donde los parámetros  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  y  $\phi$  son las variables a optimizar para el *solver* de NLP. Se caracterizan por una implementación sencilla, pero no son aptos para trayectorias complejas

(se suele suponer el control/empuje tangencial a la trayectoria)(referencia [24, 42]).

- **Basados en polinomios:** Estos métodos proyectan la trayectoria en bases polinomiales, que bien pueden ser ortogonales o no. Es común emplear los polinomios de Legendre, Laguerre, Chebyshev y Hermite, entre otros. Todos estos son polinomios ortogonales, sin embargo, es posible emplear polinomios no ortogonales como los de Bernstein (referencias [22, 21]). Evidentemente, las prestaciones del método son muy dependientes de la base polinomial empleada. Estos métodos guardan una gran relación con la herramienta particular propuesta en este trabajo, por lo que se detallará en total profundidad en la sección (3).
- **Basados en series de Fourier:** En estos métodos se opta por expandir la trayectoria en una serie de Fourier finita. La aproximación propuesta por Taheri [50] es la siguiente:

$$r(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_r} \{a_n \cos n\pi\tau + b_n \sin n\pi\tau\} \quad (2.30)$$

$$\theta(\tau) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_r} \{c_n \cos n\pi\tau + d_n \sin n\pi\tau\} \quad (2.31)$$

Donde  $\tau$  es el instante de tiempo discretizado,  $n_r$  es el orden de expansión de la serie de Fourier, y  $a_n, b_n, c_n$  y  $d_n$  son los coeficientes de la serie de Fourier. Estos coeficientes serán las variables a optimizar. Es de interés indicar que un desarrollo en serie de Fourier es equivalente a una aproximación polinomial trigonométrica, como los polinomios de Chebyshev.

Estos métodos tienen en común la discretización y proyección de la trayectoria en diferentes expresiones cerradas. Los coeficientes que describen estas bases, son los parámetros a optimizar, a diferencia de los propios valores del estado y el control en cada instante de tiempo, como se realiza en métodos directos o indirectos.

### 2.3.6. Trabajos previos sobre optimización de transferencias de bajo empuje

Hasta ahora se han expuesto los diferentes métodos de resolución del problema de control óptimo, particularizado a optimización de trayectorias de bajo empuje. A continuación, se muestran algunas herramientas y trabajos empleados para la optimización de este tipo de trayectorias.

### 2.3.6.1. Métodos indirectos

Existe una enorme cantidad de herramientas de optimización de trayectorias que emplean métodos indirectos. Sin embargo, han perdido popularidad frente a los métodos directos en las últimas dos décadas, debido al aumento de la capacidad computacional. Por destacar algunos de los más relevantes, del JPL (Jet Propulsion Laboratory), serían las herramientas VARITOP (1973) [57] y SEPTOP (1973) [49]. Desarrollados en 1994, las dos herramientas se basan en la misma formulación matemática y comparten muchas subrutinas comunes. Se utiliza el cálculo de variaciones para formular las ecuaciones de estado y coestado, que se integran numéricamente para resolver un programa TPBVP. La optimización utiliza las condiciones de complementarias, de transversabilidad y de optimalidad descritas en la sección (2.3.1). La herramienta SEPTOP se centra en la optimización de trayectorias de propulsión eléctrica y solar, capaz de simular el control de la potencia del motor y el cambio de etapas de múltiples motores. SEPTOP puede utilizar polinomios de empuje y flujo másico de propelente para representar opciones específicas del motor. También puede emplear polinomios para representar el rendimiento del panel solar a medida que el vehículo cambia su distancia respecto del Sol.

### 2.3.6.2. Métodos pseudoespectrales

Respecto a los métodos pseudoespectrales, destacan las herramientas GPOPS (2014) [41] y DIDO (2004) [45] de Matlab. Ambas basadas en la teoría de los métodos pseudoespectrales desarrollada por Ross y Fahroo [46, 48].

### 2.3.6.3. Métodos directos

La aproximación directa se ha convertido en el método mayoritario actualmente. Algunas herramientas que emplean métodos directos en la industria:

- COPERNICUS (2003) [27]. Esta herramienta se centra en la versatilidad, permitiendo realizar optimización de trayectorias para misiones dispares, desde transferencias en el entorno terrestre, en el entorno Tierra-Luna o para misiones interplanetarias en una misma herramienta. Emplea la técnica de *Multiple Shooting*.

- GMAT (2007) [20]. Se trata de una herramienta apta para multitud de misiones. Cuenta con un módulo específico para trayectorias de bajo empuje. Emplea la técnica de colocación (*Collocation*) para el módulo de transferencias de bajo empuje .
- POST (1977)[9]. Originalmente diseñado para el *Space Shuttle*, evolucionó hasta ser una herramienta completa de análisis de misión, apta para dinámica cercana a un cuerpo tractor. De igual manera que el software COPERNICUS, esta diseñado para diferentes métodos de propulsión con bajo empuje (Nuclear, eléctrica y solar).

#### **2.3.6.4. Programación dinámica**

El empleo de programación dinámica está menos explorado que los anteriormente descritos. Una de las herramientas referentes puede ser *Mystic*[56], específica para vehículos equipados con propulsión de bajo empuje, fue empleada por la NASA [10] para la sonda DAWN, que visitó los asteroides Vesta y Ceres.



# Capítulo 3

## Planteamiento y resolución del problema mediante método *shape-Based*

A lo largo de este capítulo se desarrolla el problema de optimización de trayectorias de bajo empuje, describiendo la modelización de la dinámica orbital. Además, se expone paso a paso el método *shape-based*.

### 3.1. Modelización de la dinámica orbital

El primer paso para resolver un problema de optimización de trayectorias consiste en determinar un modelo que simule la dinámica orbital a estudiar. La modelización de la dinámica se puede separar en dos aspectos clave: la parametrización de la trayectoria y el control; y por otro lado, la obtención de las ecuaciones diferenciales que describan la evolución temporal de la trayectoria, conocidas como ecuaciones del movimiento (EdM).

#### 3.1.1. Parametrización de la trayectoria y control

Existen múltiples maneras de representar la trayectoria, es decir, el vector estado del vehículo espacial (Ref. [19]). Sin embargo, comúnmente se emplea una de las siguientes:

- **Coordenadas cartesianas:** La representación mas sencilla posible, donde el vector estado se

proyecta sobre una base cartesiana, quedando de la siguiente forma  $\mathbf{s} = [r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z]^T$ . Esta representación es común para trayectorias interplanetarias, no presentan singularidades pero no son numéricamente estables, en especial en problemas con muchas revoluciones, ya que los parámetros sufren grandes variaciones a lo largo de la trayectoria.

- **Coordenadas polares:** La representación polar del estado se caracteriza por 4 elementos:  $\mathbf{s} = [\rho, \theta, v, \phi]^T$  donde  $\rho$  representa la distancia al centro de coordenadas,  $\theta$  el ángulo polar girado,  $v$  el módulo de la velocidad respecto a una referencia inercial y  $\phi$  el ángulo de trayectoria de vuelo (*flight path angle*). Esta representación es especialmente útil para trayectorias de bajo empuje en un entorno cercano al cuerpo tractor, donde las trayectorias describen muchas revoluciones. No presentan singularidades y son aptas para soluciones analíticas. Para el caso 3D, se añade tanto la coordenada  $z$  de posición como de velocidad  $\dot{z}$ , siendo estas las coordenadas cilíndricas.
- **Elementos orbitales clásicos:** A diferencia de las representaciones anteriores, las cuales se referencia a una base ortogonal, los elementos orbitales describen geoméricamente la órbita y la posición del vehículo en la misma.  $\mathbf{s} = [a, e, i, \Omega, \omega, \theta]^T$  donde  $a$  es el semieje mayor de la órbita,  $e$  la excentricidad,  $i$  la inclinación respecto a un plano de referencia (eclíptico, ecuatorial...),  $\Omega$  la longitud recta del nodo ascendente (RAAN),  $\omega$  el argumento del perigeo y  $\theta$  la anomalía verdadera. Esta parametrización permite conocer la órbita intuitivamente, sin embargo, presenta algunas singularidades. Para órbitas sin inclinación ( $i = 0$ ), la ( $\Omega$ ) carece de sentido, del mismo modo para órbitas circulares ( $e = 0$ ), el argumento del perigeo ( $\omega$ ) pierde significado. No son aptas, por lo tanto, para esos dos casos de órbitas. Se emplean de igual modo que las coordenadas polares, para entorno cercano a un planeta, pudiéndose emplear el parámetro ( $\theta$ ) como variable independiente, de este modo se evita emplear el tiempo de vuelo, el cual tiende a valores grandes para trayectorias de bajo empuje. Mencionar que se puede emplear la anomalía excéntrica ( $E$ ) o la anomalía media ( $M$ ) indistintamente de la anomalía verdadera ( $\theta$ ).
- **Elementos equinocciales modificados:** Por último, los elementos equinocciales modificados son los siguientes:  $\mathbf{s} = [p, f, g, h, k, L]^T$  donde  $p$  es el *semilatus rectum* de la órbita,  $f$

y  $g$  están relacionados con el vector excentricidad,  $g$  y  $h$  con la inclinación y  $L$  se denomina la longitud verdadera. Esta última es similar a la anomalía verdadera de los elementos clásicos. Esta parametrización no presenta ninguna singularidad (salvo para órbitas retrogradadas) y es muy estable numéricamente, al igual que los elementos clásicos, por la baja variación de los elementos a lo largo de la trayectoria. Sin embargo, no tienen un significado tan intuitivo como los elementos orbitales clásicos para representar la trayectoria del vehículo. Se recomienda la publicación de Vasile [55] para más detalle.

Respecto a la parametrización del control, la manera más sencilla sería mediante tres coordenadas, siendo la proyección del vector empuje en una base ortogonal  $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]$  generalmente en ejes cuerpo o inerciales y donde se debe cumplir  $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1$ , siempre y cuando el empuje esté normalizado. Sin embargo, es posible expresar el control en función de dos ángulos,  $\mathbf{u} = [\cos\alpha \cos\beta, \cos\alpha \sin\beta, \sin\beta]^T$  donde  $\alpha$  es el azimut y  $\beta$  el ángulo declinación. De este modo, se reduce el número de parámetros de tres a dos.

### 3.1.2. Ecuaciones del movimiento

Definidos los parámetros con los que representar la posición, velocidad y aceleración (control) del vehículo, es necesario conocer la evolución temporal de estos parámetros. Con este objetivo, se debe modelizar la dinámica a la que se ve expuesto un vehículo en el espacio. Se deben considerar los efectos gravitatorios de los cuerpos celestes, perturbaciones por campos gravitatorios no uniformes, la presión de radiación solar, resistencia aerodinámica, efectos relativistas entre otros. La elección de cuales y cuantos de estos efectos tener en cuenta dependen de la misión concreta y de la precisión requerida. Obviamente, a mayor complejidad del modelo dinámico, mayor precisión, pero también mayor carga computacional.

Estos efectos se expresan como un conjunto de ecuaciones diferenciales, conocidas como ecuaciones del movimiento (EdM). Estas ecuaciones son las que conforman la función  $f$  de la ecuación

(2.2). Una expresión general de dichas ecuaciones es:

$$\dot{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_i(t))}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_i(t)|^3} + \mathbf{a}_P + \mathbf{a}_T \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (3.2)$$

$$\dot{m} = \dot{m}(\mathbf{s}, \mathbf{u}, t) \quad (3.3)$$

Donde  $\mu_i$  representa el parámetro gravitacional del cuerpo tractor correspondiente,  $\mathbf{r}_i$  la posición del cuerpo celeste y  $\mathbf{r}$  la posición del vehículo espacial. El sumatorio representa la atracción gravitatoria de los cuerpos al vehículo,  $\mathbf{a}_P$  representa las aceleraciones debidas a perturbaciones externas ( $J_2$ , presión de radiación solar, resistencia aerodinámica...) y  $\mathbf{a}_T$  representa la aceleración debida al empuje del motor equipado en el vehículo. Nótese que para  $n = 1$  y  $\mathbf{a}_P = \mathbf{0}$ , se trata de una transferencia en dinámica Kepleriana. Por otro lado, el cambio de la masa del vehículo por el gasto de combustible afecta a la dinámica del vehículo, por ello se define una función que represente esta evolución temporal, dependiente del control. Generalmente, se basa en la ecuación del cohete de Tsiolkovsky [13].

Cabe destacar que el método *shape-based* admite dinámicas complejas, sin embargo, la obtención de un óptimo global se complica a medida que se detalla la dinámica del problema. Para el presente trabajo, se emplea una parametrización cilíndrica (polar para problemas bidimensionales), dando lugar a las siguientes ecuaciones del movimiento.

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 + \rho\frac{\mu}{r^3} = u_\rho \quad (3.4)$$

$$\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = u_\theta \quad (3.5)$$

$$\ddot{z} + \rho\frac{\mu}{r^3} = u_z \quad (3.6)$$

La dinámica solo contempla la atracción gravitatoria del cuerpo central (además de términos inerciales por la parametrización cilíndrica). Pudiendo añadirse perturbaciones en función del problema. La representación geométrica de las coordenadas cilíndricas se muestra en la figura (3.1).

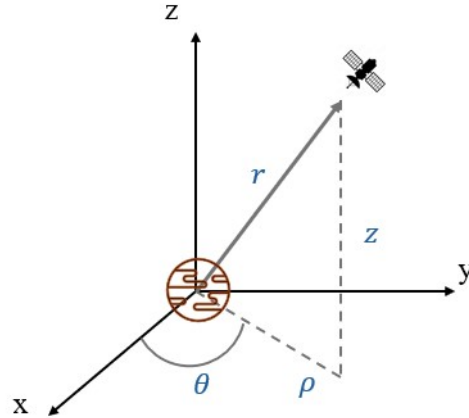


Figura 3.1: Coordenadas cilíndricas. Elaboración propia.

### 3.2. Malla temporal

Centrándose en el método *shape-based* presentado, el primer paso en todo método numérico es discretizar el problema. Esto se realiza definiendo una malla temporal de instantes discretos. Esta malla esta compuesta por unos puntos denominados puntos de colocación. La dinámica, restricciones y la función de coste se evalúan en dichos puntos de colocación. La elección de este conjunto de puntos de colocación está íntimamente ligada al polinomio con el que representar la trayectoria. El primer paso para tratar con problemas con tiempos iniciales y finales definidos es adimensionalizar la variable temporal, formándose la nueva variable adimensional  $\theta$ :

$$\theta = \frac{t - t_0}{t_f - t_0} \quad (3.7)$$

Esta variable por tanto toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ . De este modo, se puede definir una función  $\sigma(\tau_i)$  que relacione la variable adimensional  $\theta$ , es decir, el tiempo continuo físico, con el conjunto de puntos  $\tau_i$ :

$$t_i = (t_f - t_0)\theta_i = (t_f - t_0)\sigma(\tau_i) \quad (3.8)$$

Con este cambio de variable definido, se puede definir la integral  $\mathcal{L}$  de la función de coste a través de una cuadratura:

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \simeq (t_f - t_0) \sum_{i=0}^m w_i \mathcal{L}(\mathbf{s}(\tau_i), \mathbf{u}(\tau_i), (t_f - t_0)\sigma(\tau_i)) d\sigma_i \quad (3.9)$$

Donde  $w_i$  representa los pesos de la cuadratura correspondiente. Por lo tanto, el tiempo continuo  $t$  se discretiza a un conjunto de puntos  $\mathcal{T} = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ . El número de puntos  $m$  es de libre elección, sin embargo, en función de la cuadratura empleada para expresar la integral  $\mathcal{L}$ , puede existir un límite inferior de puntos de colocación en función del orden de dicha cuadratura. Por ejemplo, si se emplea una cuadratura de Gauss, la regla es la siguiente:  $N \leq 2m - 1$  (ver [31]). Donde  $N$  es el orden del polinomio de la cuadratura. De este modo la cuadratura es exacta. A su vez, la distribución de dichos puntos es variable, pudiendo ajustarse diferentes mallas para casos concretos. Por ejemplo, refinar en zonas donde se esperan cambios repentinos de la velocidad y posición.

Es importante resaltar que la discretización, producida a través de la función  $\sigma(\tau_i)$ , no deja de ser una aproximación discreta a un problema continuo, de manera que se genera un error, por ello el empleo de  $\simeq$  en la ecuación (3.9).

### 3.3. Proyección de la trayectoria en base polinomial

Una de las principales características de los métodos *shape-based* reside en proyectar la trayectoria en una base polinomial  $\mathcal{P}$  predefinida. Estos polinomios, a su vez, se computan en los puntos de colocación correspondientes a la malla escogida. El vector de estado  $\mathbf{x}$  está compuesto por el vector de configuración  $\mathbf{s}$  y sus derivadas.

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{s} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dots \\ \frac{d^n \mathbf{s}}{dt^n} \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

Solo se proyecta el vector configuración  $s$ , es decir, el control no se proyecta, como en los métodos pseudoespectrales, ni tampoco la primera derivada de la posición  $\dot{s}$ .

$$s(\tau_i) = \sum_{j=0}^N c_j P_j(\tau_i) \quad (3.11)$$

Donde  $N$  es el orden del polinomio y  $c_j$  los coeficientes correspondientes a cada polinomio.  $j$  representa el índice del orden del polinomio e  $i$  el índice correspondiente al punto de colocación. Esta proyección se realiza para componente del vector de configuración  $s$ , pudiendo realizarse una expansión de diferente orden para cada componente, en función de la transferencia concreta. De este modo, las derivadas del vector de configuración son inmediatas:

$$\frac{d^n s(\tau_i)}{d\tau_i^n} = \sum_{j=0}^N c_j \frac{d^n P_j(\tau_i)}{d\tau_i^n} \quad (3.12)$$

Donde  $n$  es el orden de la derivada, siendo este siempre menor o igual al orden de la expansión  $N$ . A diferencia de en los métodos directos clásicos, las variables de optimización del NLP no son las propias componentes de la posición, sino que los coeficientes  $c_j$ .

### 3.3.1. Tipos de polinomios

Se pueden emplear múltiples tipos de polinomios para proyectar la trayectoria, cada uno presenta ciertas características matemáticas que los hace aptos para diferentes tipos de misiones. Principalmente, se pueden separar en dos tipos, ortogonales y no ortogonales. Los ortogonales son una elección típica para métodos directos, sin embargo, no se han empleado extensivamente en métodos *shape-based*.

- **Ortogonales:** Los polinomios ortogonales se caracterizan por presentar una baja carga computacional para los *solvers* de optimización, ya que los coeficientes se pueden optimizar de manera independiente entre ellos. En este trabajo, se estudian los polinomios de Legendre, Laguerre, Hermite y Chebyshev (primer y segundo tipo). Además de una versión ortogonal de los polinomios de Bernstein.

- **No ortogonales:** Los polinomios no ortogonales, en concreto los de Bernstein, presentan raíces en los extremos de evaluación de los mismos  $[0, 1]$ . Esto permite incluir las condiciones de contorno de manera sencilla (3.4).

### 3.3.1.1. Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev se agrupan en los de primer  $T_n(x)$  y segundo tipo  $U_n(x)$ .

$$T_n(\tau) = \cos(n \cos^{-1}(\tau)) \quad \tau \in [-1, 1] \quad (3.13)$$

$$U_n(\tau) = \frac{\sin((n+1) \cos^{-1}(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}} \quad \tau \in [-1, 1] \quad (3.14)$$

Donde  $n$  indica el orden del polinomio. Estos polinomios existen en el intervalo  $[-1, 1]$ , por lo tanto, es necesario ajustar el dominio temporal a dicho intervalo mediante un cambio de variable. Empleando los nodos de Chebyshev (valores de  $\tau$  que anulen el polinomio) se minimiza el error de aproximación del polinomio. Si se emplease una malla con nodos equidistantes, por ejemplo, el error de interpolación aumenta por el fenómeno de Runge (Ref. [3]). Este fenómeno es extrapolable a todos los polinomios estudiados en este trabajo. Para obtener los polinomios de orden superior, se puede emplear la siguiente regla de recurrencia, facilitando la obtención de los polinomios a diferentes órdenes.

$$T_0(\tau) = 1 \quad (3.15)$$

$$T_1(\tau) = \tau \quad (3.16)$$

$$T_{n+1}(\tau) = 2\tau T_n(\tau) - T_{n-1}(\tau) \quad (3.17)$$

De manera idéntica para los de segundo tipo:

$$U_0(\tau) = 1 \quad (3.18)$$

$$U_1(\tau) = 2\tau \quad (3.19)$$

$$U_{n+1}(\tau) = 2\tau U_n(\tau) - U_{n-1}(\tau) \quad (3.20)$$



Cómo se mencionaba anteriormente, las derivadas de estos polinomios son inmediatas, facilitando la obtención de las derivadas del estado. Representación en su intervalo en la figura (3.2a) para los de primer tipo, y en la figura (3.2b) para los de segundo tipo.

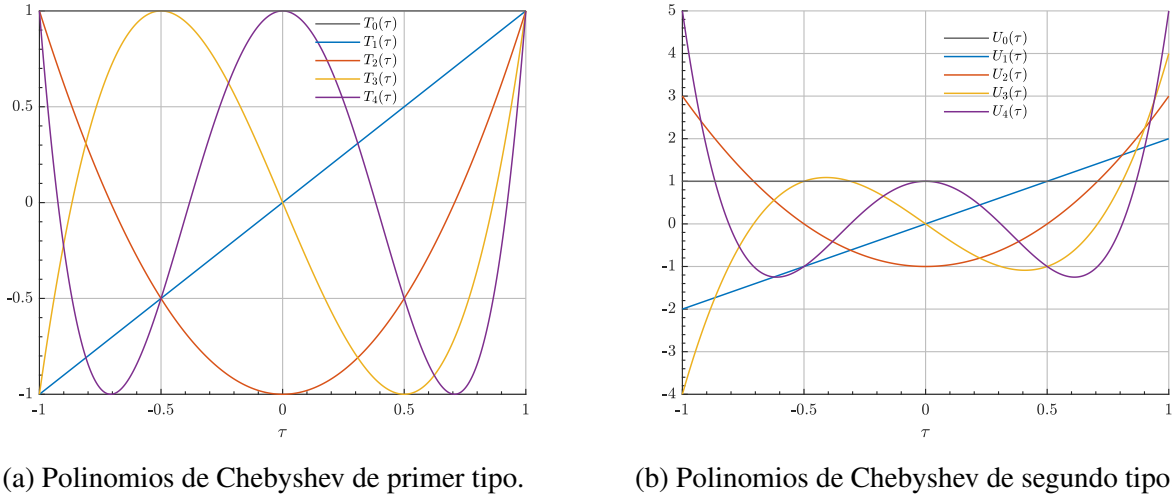


Figura 3.2: Polinomios de Chebyshev hasta orden  $N = 4$ .

### 3.3.1.2. Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre se pueden obtener, gracias a la propiedad de recurrencia, de la siguiente forma:

$$P_0(\tau) = 1 \tag{3.21}$$

$$P_1(\tau) = \tau \tag{3.22}$$

$$P_{n+1}(\tau) = \frac{(2n - 1)\tau P_n(\tau) - (n - 1)P_{n-1}(\tau)}{n} \tag{3.23}$$

Donde  $\tau \in [-1, 1]$ . Estos polinomios tienen diferentes aplicaciones, como la aproximación de funciones o para emplear en la cuadratura de Gauss-Legendre. Representación en su intervalo en la figura (3.3).

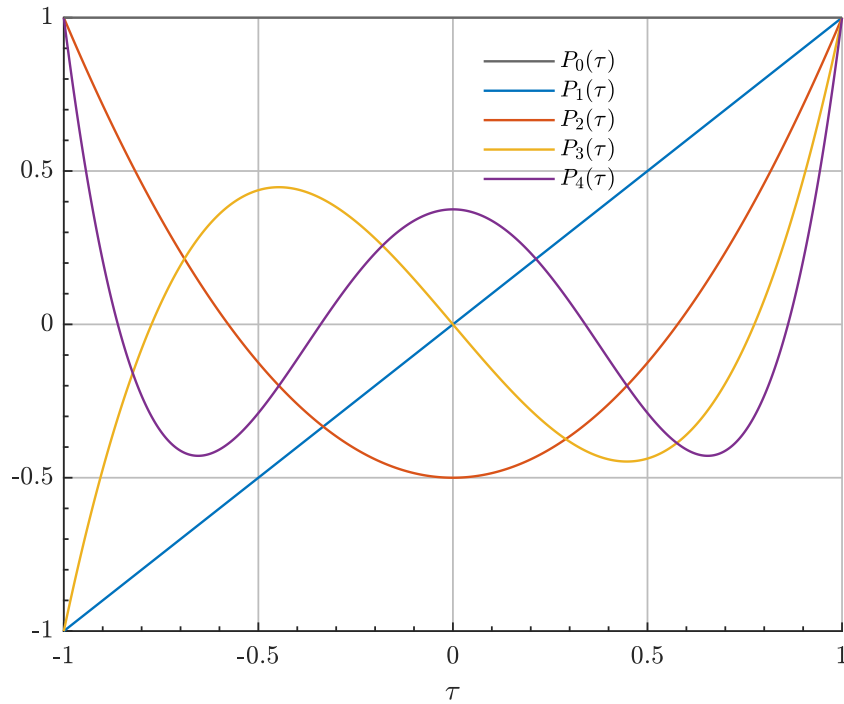


Figura 3.3: Polinomios de Legendre hasta orden  $N = 4$ .

### 3.3.1.3. Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre se pueden expresar una vez más gracias a la propiedad de recurrencia que poseen:

$$L_0(\tau) = 1 \quad (3.24)$$

$$L_1(\tau) = 1 - \tau \quad (3.25)$$

$$L_{n+1}(\tau) = \frac{(2n - 1 - \tau)L_n(\tau) - nL_{n-1}(\tau)}{n + 1} \quad (3.26)$$

Estos polinomios, a diferencia de los anteriores, no tienen un intervalo de evaluación acotado, toman valores en el intervalo  $[0, \infty)$ . Esto tiene ciertas implicaciones: dificulta la proyección de una trayectoria para un problema TPBVP; pero es apto para estudiar parámetros que se conozca vayan a decaer y tender a 0, como por ejemplo, la velocidad de ascenso de un lanzador o la trayectoria (posición vertical) en la re-entrada atmosférica de un vehículo. Representación en la figura (3.4).

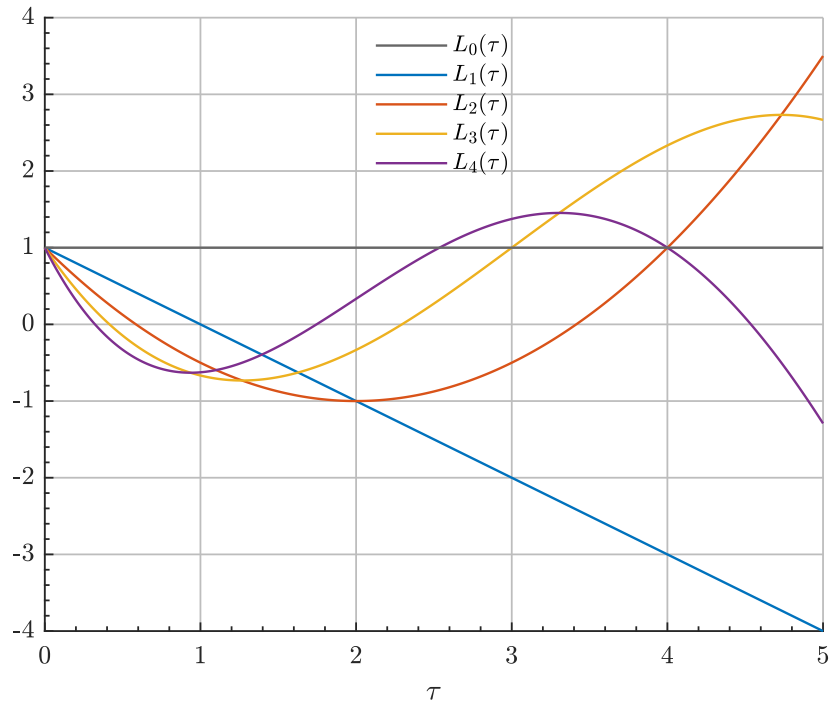


Figura 3.4: Polinomios de Laguerre hasta orden  $N = 4$ .

### 3.3.1.4. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite se pueden expresar, de nuevo, aprovechando la propiedad de recurrencia:

$$H_0(\tau) = 1 \quad (3.27)$$

$$H_1(\tau) = 1 - \tau \quad (3.28)$$

$$H_{n+1}(\tau) = 2\tau H_n(\tau) - 2nH_{n-1}(\tau) \quad (3.29)$$

Estos polinomios existen en todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , son especialmente útiles para aproximar no solo la trayectoria, sino que son excelentes aproximando las derivadas de la misma en puntos concretos, siendo esto de gran utilidad para los puntos de colocación. Representación en la figura (3.5).

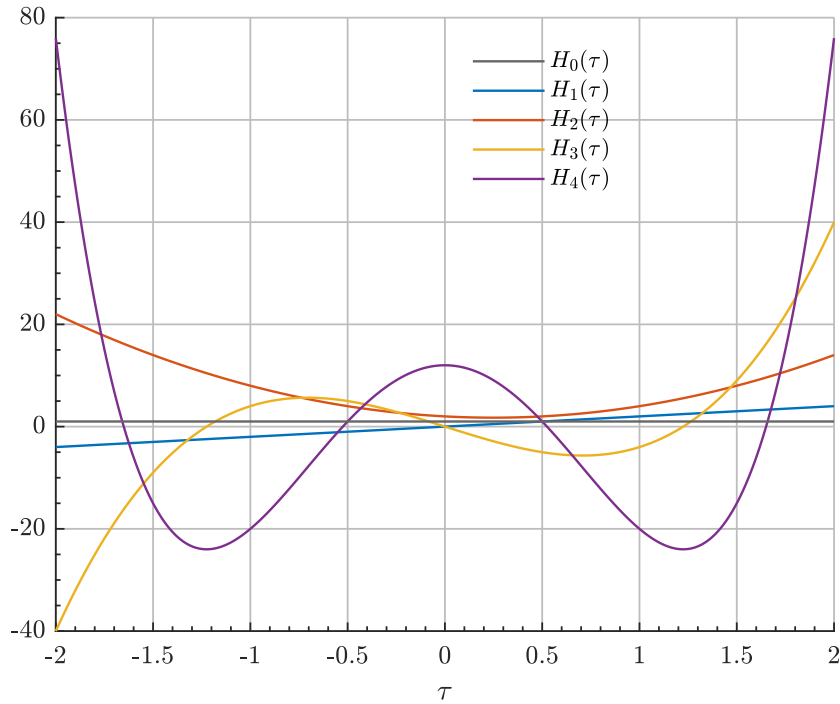


Figura 3.5: Polinomios de Hermite hasta orden  $N = 4$ .

### 3.3.1.5. Polinomios de Bernstein

Esta familia de polinomios no ortogonales se ha aplicado anteriormente en métodos *shape-based*, como en el trabajo de Huo et al [22, 21] donde emplean un caso particular de la familia de polinomios de Bernstein, denominadas curvas de Bezier.

$$B_n^N(\tau) = \binom{N}{n} \tau^n (1 - \tau)^{n-1} \quad \tau \in [0, 1] \quad (3.30)$$

Donde  $N$  representa el orden final de expansión del polinomio y  $\binom{N}{n}$  es el coeficiente binomial. Estos polinomios presentan una suavidad y propiedades de aproximación de funciones de gran utilidad para proyectar la trayectoria generada por un vehículo de bajo empuje. Representación en su intervalo en la figura (3.6).

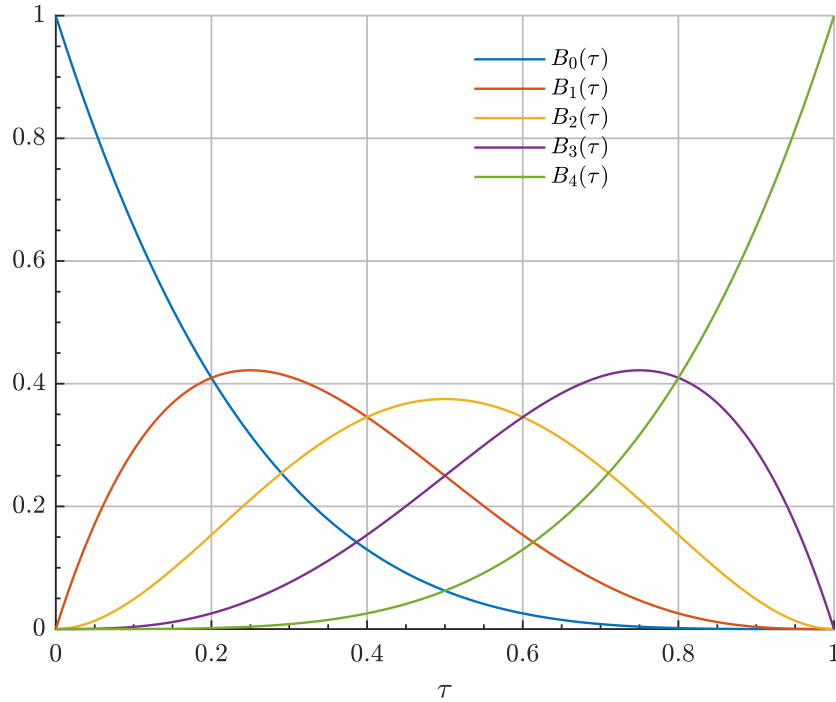


Figura 3.6: Polinomios no ortogonales de Bernstein hasta orden  $N = 4$ .

### 3.3.1.6. Polinomios ortogonales de Bernstein

Por último, se estudiará la familia de polinomios ortogonales de Bernstein, si bien presentan una forma más compleja, adquieren ventajas desde el punto de vista de estabilidad numérica.

$$B_n^N(\tau) = [2(N - n) + 1]^{1/2} \sum_k^n (-1)^k \frac{\binom{2N+1-k}{n-k} \binom{n}{k}}{\binom{N-k}{n-k}} B_{n-k, N-k}(\tau) \quad \tau \in [0, 1] \quad (3.31)$$

## 3.4. Condiciones de contorno y trayectoria inicial

A diferencia de otros métodos directos o *shape-based*, las condiciones de contorno no se tratan por el optimizador a través de unas restricciones, sino que se imponen fijando ciertos coeficientes de la expansión polinómica. Haciendo uso de esta aproximación semi-analítica para las condiciones de contorno, se evita que el optimizador deba lidiar con dichas restricciones.

Desarrollando una expansión de tercer grado es posible resolver analíticamente el polinomio

que describe la trayectoria y cumple las condiciones de contorno. Presentando como ejemplo una parametrización cilíndrica, se conoce tanto la componente radial (equivalente para las tres componentes) de posición y velocidad mediante las condiciones de contorno.

$$\left\{ \begin{array}{l} r(\tau = \tau_0) = r_i \\ r(\tau = \tau_m) = r_f \\ r'(\tau = \tau_0) = t_f \dot{r}_i \\ r'(\tau = \tau_m) = t_f \dot{r}_f \end{array} \right. \rightarrow \{c_0, c_1, c_2, c_3\} \quad (3.32)$$

donde  $(\blacksquare)'$  representa la derivada respecto a la variable independiente adimensional  $\tau$  y  $(\blacksquare)$  respecto a  $t$ . De estas cuatro ecuaciones, se pueden obtener los cuatro coeficientes que conforman la expansión polinomial de tercer orden. Siendo este grupo de coeficientes  $\mathcal{B} = \{c_0, c_1, c_{N-1}, c_N\}$ , esto es, los dos primeros y dos últimos de la expansión polinómica. Estos coeficientes quedan fijos y no forman parte del vector de variables a optimizar del NLP, de este modo, las condiciones de contorno quedan intrínsecamente impuestas en la trayectoria.

Para obtener una trayectoria con la que inicializar la optimización se realiza una extrapolación de mínimos cuadrados de la trayectoria de tercer orden, la cual está completamente definida por las condiciones de contorno. De este modo, se cambia de una expansión de tercer orden al orden deseado.

En el caso general, donde  $t_0$  y  $t_f$  forman parte de las variables a optimizar, junto con un vector de variables adicionales  $\beta$ , el vector de variables a optimizar del NLP se reduce a:

$$z = \left\{ \begin{array}{c} \{c_j\}_{c_j \notin \mathcal{B}} \\ t_0 \\ t_f \\ \beta \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

### 3.5. Cálculo de la ley de control

La ley de control se obtiene como residuo de la dinámica. Se evalúa la trayectoria discretizada y proyectada en el polinomio seleccionado en las ecuaciones dinámicas (Ec.2.2) para obtener la ley de control.

$$\mathbf{u}(\tau_i) : \dot{\mathbf{s}}(\tau_i) - f[\mathbf{s}(\tau_i), \mathbf{u}(\tau_i), \tau_i, \boldsymbol{\beta}] = 0 \quad (3.34)$$

De este modo, se imponen las restricciones dinámicas de manera diferencial, evitando la integración de las ecuaciones, como en métodos directos tradicionales. Esto simplifica la obtención del control y el cumplimiento de las ecuaciones del movimiento.

### 3.6. Algoritmo de optimización

El problema continuo de Bolza descrito en las ecuaciones (2.1-2.4) queda discretizado y transformado a un problema de programación no lineal (NLP), donde las variables de optimización son las contenidas en el vector  $\mathbf{z}$ .

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} \quad & J = \mathcal{M}[\mathbf{s}(\tau_0), \mathbf{s}(\tau_m), t_f, t_0] + (t_f - t_0) \sum_{i=0}^m w_i \mathcal{L}(\mathbf{s}(\tau_i), \mathbf{u}(\tau_i), (t_f - t_0)\sigma(\tau_i)) d\sigma_i \\ \text{suje}to \ a \quad & \dot{\mathbf{s}}(\tau_i) = f[\mathbf{s}(\tau_i), \mathbf{u}(\tau_i), \tau_i, \boldsymbol{\beta}], \quad \tau_i \in \mathcal{T} \\ & \mathbf{s}(\tau_i) = \sum_{j=0}^N c_j P_j(\tau_i) \\ & h[\mathbf{s}(\tau_i), \mathbf{u}(\tau_i), \tau_i] = 0 \\ & g[\mathbf{s}(\tau_i), \mathbf{u}(\tau_i), \tau_i] \leq 0, \quad \tau_i \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (3.35)$$

El problema se debe resolver de manera iterativa, para ello se emplea un algoritmo de optimización o *solver*. Existen diferentes *solvers* con la capacidad de resolver un NLP como el planteado. En este trabajo, se emplea la técnica SQP (*Sequential Quadratic Programming*) implementada en la función `fmincom` de MATLAB. Se puede encontrar más información sobre la técnica SQP en la siguiente referencia, Boggs 1995 [8].

Para un problema TPBVP como el planteado, el procedimiento de optimización del método

*shape-based* es el siguiente:

1. **Modelizar la dinámica del problema:** Determinar el entorno dinámico y las perturbaciones a considerar, así como la parametrización de la trayectoria y el control.
2. **Definir la función de coste y las restricciones:** Se define que parámetro (o combinación de parámetros) se quiere minimizar (tiempo de vuelo,  $\Delta V$ , masa de combustible...) y las restricciones que se deben cumplir, tanto lineales como no lineales.
3. **Determinar la malla temporal y polinomio:** Se define tanto la distribución de puntos de colocación (tipo de malla y número de puntos ( $m$ )) como el polinomio (tipo y orden de expansión ( $N$ )) donde proyectar la trayectoria, estando ambas elecciones ligadas (3.2).
4. **Calcular trayectoria inicial:** A través de las condiciones de contorno y una expansión de tercer orden en una malla con un alto número de nodos, se calcula el conjunto de cuatro coeficientes ( $\mathcal{B}$ ) que definen la trayectoria. Mediante un ajuste de mínimos cuadrados, se extrapola dicha expansión al orden  $N$  deseado.
5. **Optimizar el conjunto de variables a optimizar  $z$  del problema NLP en cada iteración.** Esto se realiza mediante la técnica SQP.
  - a Resolver el conjunto  $\mathcal{B}$  para imponer las condiciones de contorno.
  - b Obtener la ley de control como residuo de la dinámica mediante la ecuación (3.34).
  - c Minimizar la función de coste  $J$  respetando las restricciones.
6. **Obtener la trayectoria y ley de control óptima:** Mediante la ecuación (3.11) se evalúa la trayectoria optimizada con los coeficientes determinados en el proceso de optimización. La ley de control se obtiene de la ecuación (3.34).

El procedimiento descrito se puede observar de manera más visual en las figuras (3.7) y (3.8).



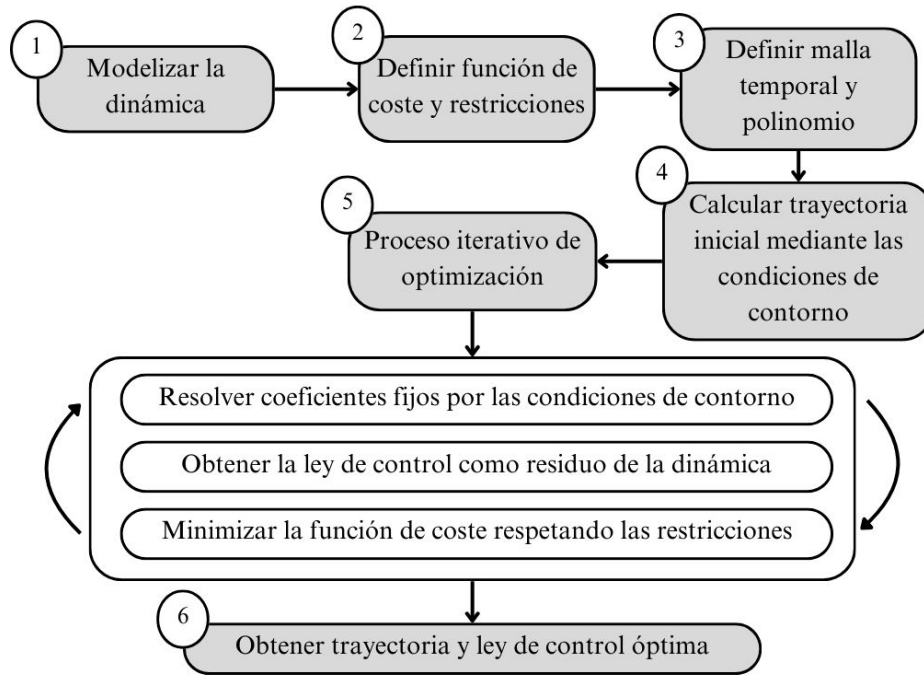


Figura 3.7: Procedimiento del método *shape-based*. Elaboración propia.

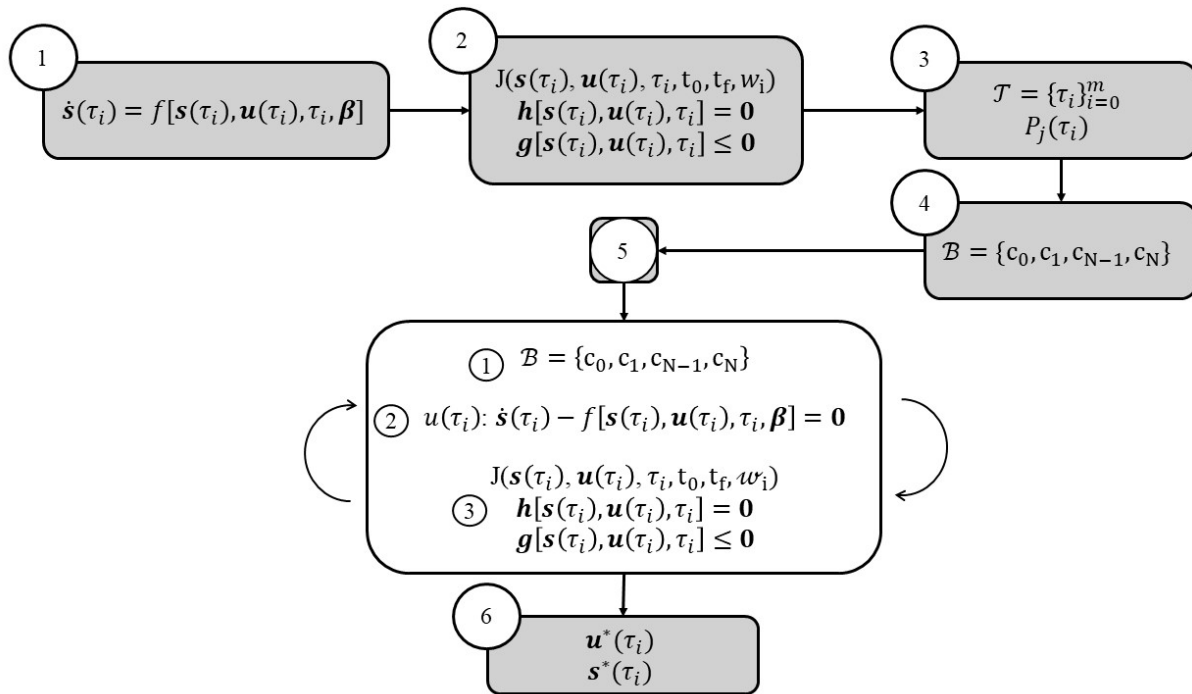


Figura 3.8: Representación de las variables y ecuaciones involucradas en cada paso del método. Elaboración propia.

### 3.7. Ejemplo 1: LQR unidimensional y estimación del error

A continuación, se muestra un ejemplo de baja complejidad y del que se conoce solución analítica. De este modo, se presenta el funcionamiento del método en un caso sencillo y a su vez se realiza un estudio del efecto de la base polinomial, el orden de expansión y del número de puntos de malla en el error entre la solución numérica obtenida y la solución analítica.

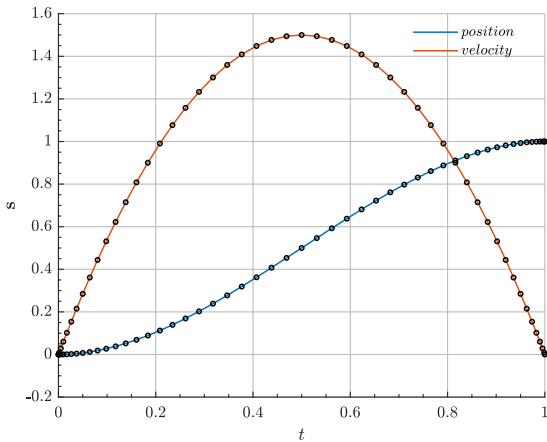
El problema a estudiar presenta una función de coste cuadrática, siendo este tipo de función de coste la empleada en transferencias espaciales si se quiere minimizar el  $\Delta V$ . Se trata de un cambio de estado unidimensional con control LQR (Ver [47]).

La formulación de dicho problema tiene la siguiente forma:

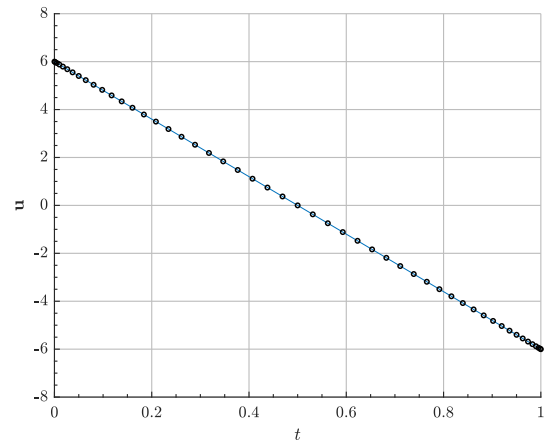
$$\begin{aligned}
 \min \quad & J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt \\
 \text{suje}to \ a \quad & \ddot{s} = u \\
 & \begin{cases} s(t_0) = 0, & \dot{s}(t_0) = 0 \\ s(t_f) = 1, & \dot{s}(t_f) = 0 \end{cases} \\
 & t_0 = 0 \\
 & t_f = 1
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Donde la solución analítica del mismo, obtenida mediante PMP [47], es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 s^* &= -2t^3 + 3t^2 \\
 \dot{s}^* &= v^* = -6t^2 + 6t \\
 \ddot{s}^* &= u^* = -12t + 6
 \end{aligned}$$



(a) Posición y velocidad en función del tiempo.



(b) Control en función del tiempo.

Figura 3.9: Resultados obtenidos del problema LQR y comparativa con solución analítica.

Se puede observar, en las figuras (3.9a) y (3.9b), en línea continua la solución numérica obtenida y en línea punteada la solución analítica. La solución analítica está evaluada en la misma malla que se ha empleado para evaluar los polinomios de la solución numérica. En este caso, se emplean los polinomios y nodos de Legendre con orden  $N = 20$  y  $m = 50$ .

Por otro lado, se realiza un estudio del error entre la trayectoria y control numérico y la solución analítica. Se evalúa la solución analítica en los puntos de malla y se obtiene el error de la siguiente forma:

$$E_s = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{(s^*(\tau) - s(\tau))^2} d\tau \quad (3.37)$$

$$E_u = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{(u^*(\tau) - u(\tau))^2} d\tau \quad (3.38)$$

Este cálculo se realiza para diferentes polinomios, órdenes de expansión y número de puntos de malla. Empleando los polinomios y nodos de Legendre, se realiza un barrido de órdenes de expansión entre 4 y 30, y de número de puntos de malla entre 9 y 50. Los resultados obtenidos se recogen mediante mapas de calor en la figura (3.10) para la trayectoria y en la figura (3.11) para el control.

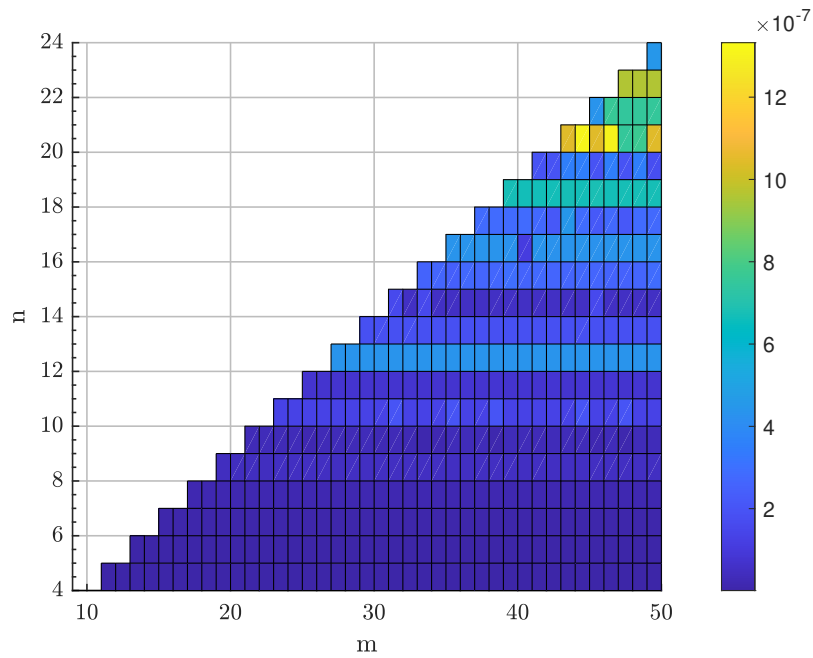


Figura 3.10: Error en la trayectoria entre la solución numérica y analítica para diferentes  $N$  y  $m$ .

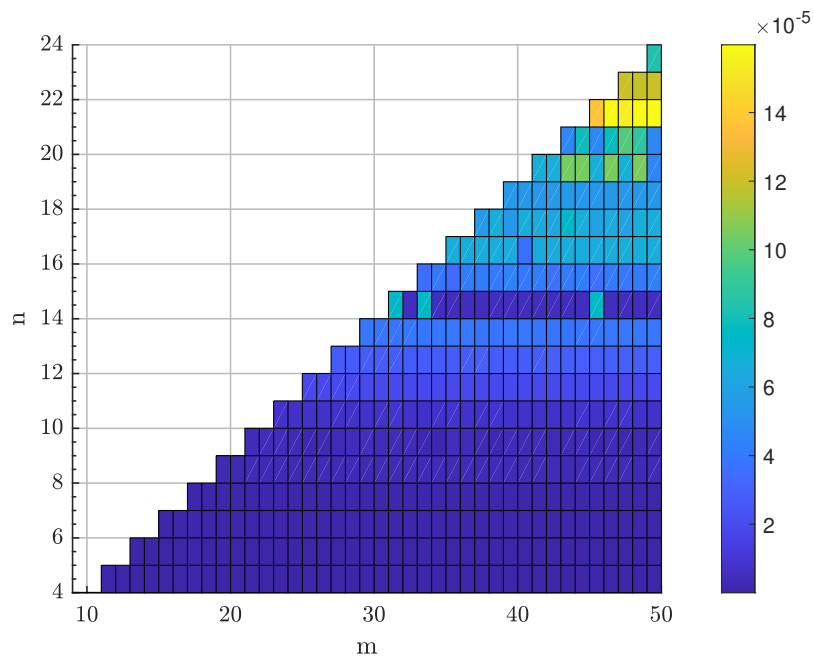


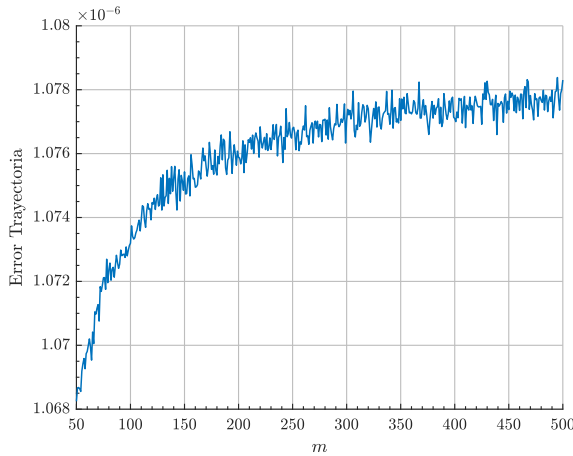
Figura 3.11: Error del control entre la solución numérica y analítica para diferentes  $N$  y  $m$ .

Para todos los casos, se debe respetar la relación entre orden de expansión y puntos de malla:

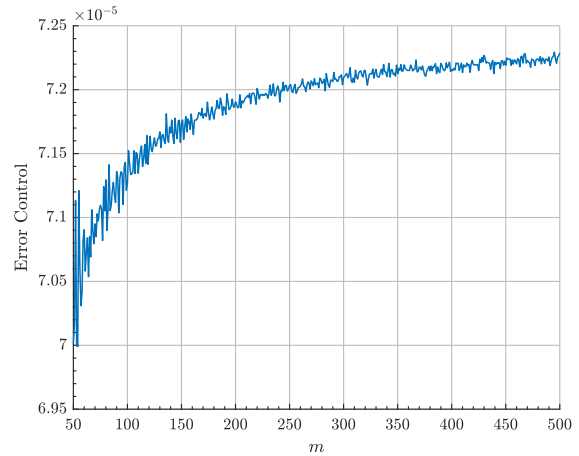
$N \leq 2m - 1$ , esto asegura una aproximación exacta a la integral de la función de coste mediante la cuadratura de Gauss (Sección 3.2).

La tendencia del error en función de  $N$  y  $m$  es similar para la trayectoria y el control. Se observa como aumentar el número de puntos de malla  $m$  no presenta una mejora significativa en la aproximación, esto se explica por la convergencia espectral que presenta el método (aproximación mediante polinomios), la cual implica un decremento exponencial del error con  $m$ .

Por otro lado, se observa como un aumento del orden de expansión del polinomio de Legendre implica un aumento del error. Los motivos de este fenómeno no se han determinado con exactitud, sin embargo, se sopesan diferentes causas. Indudablemente, existe un error interno inducido por el propio optimizador `fmincom` de MATLAB. Encontrar los efectos de la optimización en el error requiere de un estudio fuera del alcance del proyecto presentado. Por otro lado, se realiza un estudio a orden  $N = 24$  y a diferentes número de nodos  $m$ . Con esto se busca conocer si a un mayor número de nodos el error disminuye para el alto orden de expansión. Se obtiene la siguiente tendencia.



(a) Error cuadrático medio de la trayectoria.



(b) Error cuadrático medio del control.

Figura 3.12: Evolución del error cuadrático medio con el número de nodos, desde 50 hasta 500 y para un orden de expansión de  $N = 24$ .

Como se observa en las figuras (3.12a) y (3.12b), el error no solo no disminuye con  $m$  sino que aumenta. Esto puede deberse al fenómeno de Gibbs (*aliasing*, ver [17]), donde el error se acumula hasta un valor constante. Por otro lado, se altera la tolerancia de la función `fmincom` respecto al valor de la función de coste, sin embargo, no se observa una tendencia diferente.

Adicionalmente, se observa como el error en la trayectoria es dos órdenes de magnitud menor que en el control. Esto se debe a que el control se obtiene a partir de la aproximación de la trayectoria obtenida, siendo dependiente de la misma, es decir, la optimización se realiza directamente sobre la trayectoria (coeficientes del polinomio) y no sobre el control, esto explica una mejor aproximación de la trayectoria. Las distribuciones de error son similares para todas las bases polinomiales. Por ello, se realiza un estudio del error integrado para  $N = 5$  y  $m = 50$ , así como para las diferentes bases polinomiales presentadas en la sección (3.3.1). Además, se presenta el tiempo de computación medio del método en 5000 iteraciones. Se hace uso de un ordenador con procesador Intel Core i7 de 2,8 GHz y una memoria RAM de 8 GB, la versión de MATLAB es la 2023a. Pudiéndose observar los resultados en la siguiente tabla..

Tabla 3.1: Error y tiempo de computación para el problema LQR con diferentes bases polinomiales.

<b>Polinomio</b>	<b>Error trayectoria</b>	<b>Error control</b>	<b>Tiempo computacional [s]</b>
Chebyshev	$2,10 \cdot 10^{-8}$	$2,24 \cdot 10^{-6}$	0,0223
Legendre	$3,20 \cdot 10^{-9}$	$3,25 \cdot 10^{-7}$	0,0335
Bernstein	$8,10 \cdot 10^{-11}$	$3,42 \cdot 10^{-9}$	0,0326
Bernstein ortogonal	$1,33 \cdot 10^{-7}$	$1,33 \cdot 10^{-5}$	0,0459

No se emplean los polinomios de Hermite y de Laguerre ya que estos solo se utilizan para problemas de tiempo infinito, por su intervalo de evaluación no acotado.

### **3.8. Ejemplo 2: Transferencia orbital de bajo empuje y máxima energía**

Con el fin de asentar los conceptos presentados y el funcionamiento del método, en esta sección se resuelve paso a paso una transferencia plana de bajo empuje, donde se busca maximizar la energía orbital. Este problema es muy conocido en el campo de optimización de trayectorias y en concreto, como ejemplo de prueba para rutinas pseudoespectrales. Se tomará como referencia el trabajo realizado por Koeppen [30].

Antes de presentar las ecuaciones dinámicas, conviene presentar un punto importante a la hora de resolver problemas de mecánica orbital como es la adimensionalización. Esto presenta dos principales ventajas: Primero, se simplifica el problema aportando una generalidad al mismo. Segundo, los *solvers* de NLP ofrecen mejores resultados cuando los órdenes de magnitud de los parámetros son pequeños y de poca variación.

La adimensionalización empleada es mediante lo que se conoce como unidades canónicas. Se define una unidad de distancia (DU) y unidad temporal (TU) de manera que el parámetro gravitacional ( $\mu$ ) sea igual a 1. Para el problema concreto, se definen los siguientes valores:

$$DU = 7031 \text{ km} \quad (3.39)$$

$$TU = 932,61 \text{ s} \quad (3.40)$$

$$VU = \frac{DU}{TU} \text{ km/s} \quad (3.41)$$

Por lo tanto, el problema se adimensionaliza del siguiente modo:

$$r = \frac{r_D}{DU} \quad (3.42)$$

$$t = \frac{t_D}{TU} \quad (3.43)$$

$$v = v_D \frac{TU}{DU} \quad (3.44)$$

$$\mu = \mu_D \left( \frac{TU^2}{DU^3} \right) \quad (3.45)$$

Para este problema de ejemplo, el sufijo ( $\blacksquare_D$ ) indica que el parámetro tiene dimensiones. Esta adimensionalización permite trabajar con valores pequeños y aptos para el *solver* de NLP.

En cuanto a la dinámica, se emplea, como se explica en la sección (3.1.2), una parametrización polar del problema Kepleriano. El vector de estado  $s$  estará compuesto por la posición ( $\rho$ ), una

coordenada polar en el plano ( $\theta$ ), la velocidad radial ( $v_r$ ) y tangencial ( $v_t$ ).

$$\dot{\mathbf{s}} = f[\mathbf{s}, \mathbf{u}, t] = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v}_r \\ \dot{v}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_t/\rho \\ v_t^2/\rho - \mu/\rho^2 + T \sin \alpha \\ -\frac{v_r v_t}{\rho} + T \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

En este caso, el control consiste en el ángulo de empuje (figura 3.13), el cual está activo en todo momento con una aceleración constante  $T$  de  $0,01DU/TU^2$ . Por lo tanto, el control toma la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_\rho \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

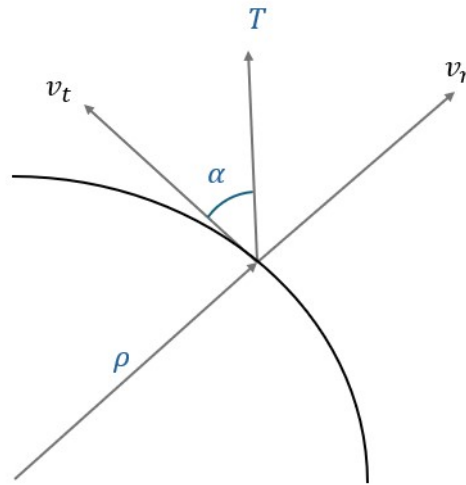


Figura 3.13: Definición del ángulo  $\alpha$ . Elaboración propia.

Las condiciones iniciales del problema serán las siguientes:

$$\mathbf{s}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{\mu/1} \end{bmatrix}^T \quad (3.48)$$

Se parte de una órbita circular de radio 7031 km.

El objetivo de la transferencia es, en un tiempo dado y mediante un empuje constante, encontrar



la ley de empuje que permita alcanzar la máxima energía orbital posible. Definiéndose la energía orbital del siguiente modo:

$$\varepsilon = v^2/2 - \mu/\rho \quad (3.49)$$

Por lo tanto, la función de coste se forma negando la formula de la energía orbital, de manera que se minimice el valor negativo, es decir, se maximice la energía.

$$J = -\frac{v_r(t_f)^2 + v_t(t_f)^2}{2} + \frac{\mu}{\rho(t_f)} \quad (3.50)$$

El tiempo final se fija a 50 TU. El problema de control óptimo queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & J = -\frac{v_r(t_f)^2 + v_t(t_f)^2}{2} + \frac{\mu}{\rho(t_f)} \\ \text{sujeto a} \quad & \dot{\mathbf{s}} = f[\mathbf{s}, \mathbf{u}, t] \\ & \mathbf{s}(t_0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \sqrt{\mu/1}]^T \\ & g[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] \leq 0 \\ & t_0 = 0 \\ & t_f = 50 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Las condiciones de contorno finales quedan abiertas, pudiendo ser el radio  $\rho$  y ángulo  $\theta$ , así como las velocidades, cualesquiera. Por otro lado, se añade una restricción  $g[\mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t), t] \leq 0$  al control. El módulo del mismo debe ser igual a 1, de este modo se asegura la ortogonalidad de  $v_r$  y  $v_t$ . Esto se realiza mediante dos restricciones de desigualdad, dando una tolerancia del  $\pm 3\%$  a dicha restricción para facilitar la convergencia.

$$\sqrt{u_\rho^2 + u_\theta^2} \leq 1,03 \quad (3.52)$$

$$\sqrt{u_\rho^2 + u_\theta^2} \geq 0,97 \quad (3.53)$$

Empleando el polinomio y los nodos de Legendre, mediante una expansión de  $n = 20$  tanto para la coordenada  $\rho$  como  $\theta$ , y  $m = 600$  nodos, se obtiene la siguiente trayectoria (figura 3.14).

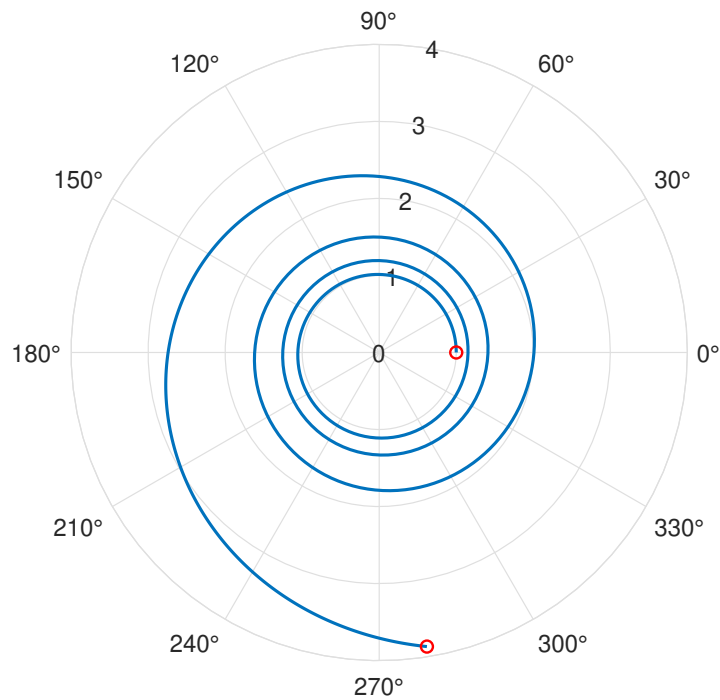


Figura 3.14: Trayectoria obtenida en unidades canónicas.

El radio final obtenido es de 3,87 DU (27186 km) tras casi 4 revoluciones. Por otro lado, se observa en la figura (3.15) la evolución del ángulo  $\alpha$ , siendo para este problema, la variable de control. La tendencia es a mantenerse en  $0^\circ$ , resultado lógico si se pretende aumentar el radio orbital y en consecuencia la energía. En la figura (3.16) se aprecia el aumento del radio orbital. En la tabla (3.2) se recogen los parámetros clave del problema.

Tabla 3.2: Tabla resumen del ejemplo 2.

Parametrización	Función de coste	Base polinomial	Malla	n	m
Cilíndricas	Maximizar energía	Legendre	Legendre	20	600

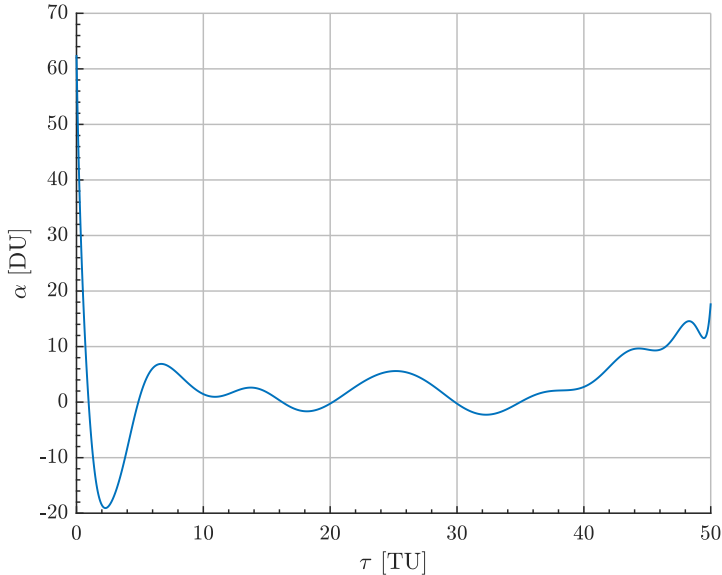


Figura 3.15: Ángulo  $\alpha$ .

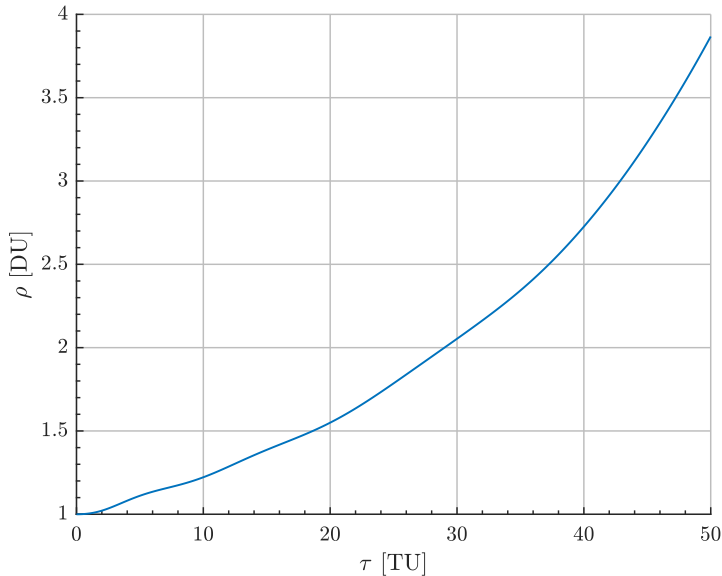


Figura 3.16: Coordenada  $\rho$ .

# Capítulo 4

## Transferencia al asteroide Dionysus

A lo largo del siguiente capítulo se presenta la transferencia desde la Tierra hasta el asteroide 3671 Dionysus. Se realiza un estudio de la ventana de lanzamiento, para posteriormente obtener una trayectoria que minimice el  $\Delta V$ .

### 4.1. Planteamiento del problema

El asteroide 3671 Dionysus presenta una órbita de gran excentricidad e inclinación respecto a la eclíptica. Esto lo convierte en un objetivo de alta complejidad en cuanto al diseño de una transferencia y *rendezvous*. El objetivo del caso es doble: encontrar la ventana de lanzamiento que minimice el  $\Delta V$ , y optimizar la trayectoria que intercepte al asteroide en dicha fecha de lanzamiento.

Las efemérides de ambos cuerpos se obtienen de la herramienta Horizons System del JPL Solar System Dynamics [14]. La fecha de salida y de llegada determinan el valor de dichas efemérides, sin embargo, tratándose de un análisis de transferencia preliminar, se asumen todos constantes salvo la anomalía verdadera.

Tabla 4.1: Elementos orbitales clásicos de la Tierra y Dionysus.

	Época [MJD]	$a$ [AU]	$e$	$i$ [°]	$\Omega$ [°]	$\omega$ [°]	$\theta$ [°]
Tierra	61013	0,9991	0,0159	0,0037	183,1205	281,9138	326,6878
Dionysus	63743	2,1963	0,5443	13,5317	81,9831	204,4983	10,2775

El problema se modela mediante una dinámica Kepleriana, no se incluye la atracción gravitatoria de otros cuerpos ni la presión de radiación solar. Ambas perturbaciones son de interés en transferencias interplanetarias, sin embargo, en un análisis preliminar como el presentado no son necesarias. Como parametrización se emplean coordenadas cilíndricas. Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento que definen la dinámica son las siguientes:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 + \rho\frac{\mu}{r^3} = u_\rho \quad (4.1)$$

$$\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = u_\theta \quad (4.2)$$

$$\ddot{z} + \rho\frac{\mu}{r^3} = u_z \quad (4.3)$$

Las magnitudes se adimensionalizan empleando unidades canónicas de manera similar al ejemplo 2 (sección 3.8). Sin embargo, al tratarse de una transferencia interplanetaria, las magnitudes de referencia interesa que sean diferentes:

$$DU = 1 \text{ AU} \quad (4.4)$$

$$TU = 5,0226 \cdot 10^6 \text{ s} \quad (4.5)$$

Donde AU representa una unidad astronómica (149597870,7 km).

#### 4.1.1. Ventana de lanzamiento

El primer paso reside en obtener la ventana de lanzamiento. Para ello, se prepara el siguiente problema y procedimiento:

1. Los parámetros del *solver* empleados para esta fase son los siguientes:

- La distribución de los nodos de malla sera la que corresponda con los nodos de Chebyshev.

$$\mathcal{T} = \{\tau_i\}_{i=0}^m \quad (4.6)$$

- Las coordenadas de posición se aproximan mediante polinomios de Chebyshev.

$$s(\tau_i) = \sum_{j=0}^N c_j P_j(\tau_i) \quad (4.7)$$

- Expansión del polinomio  $N = 20$  para las tres coordenadas que definen la posición  $(\rho, \theta, z)$ .
- Número de nodos  $m = 150$ .
- La función de coste será el  $\Delta V$ , de manera que se minimice dicho parámetro.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\mathbf{u}(t)^T \mathbf{u}(t)} dt \quad (4.8)$$

- Se añade la restricción de desigualdad respecto a la aceleración máxima. Esta se define a  $T_{max} = 8,5 \cdot 10^{-5} \text{ km/s}^2$ , siendo un valor similar al experimentado por la sonda interplanetaria DAWN (1,2 toneladas y 90mN [10]).

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq T_{max} \quad (4.9)$$

Por otro lado, la coordenada polar  $\theta$  se añade con variable al vector  $\beta$ . De este modo, se permite mas de una revolución. Para asegurar que la coordenada polar final siga cumpliendo las condiciones de contorno finales, se deben introducir las siguientes restricciones:

$$\cos(\theta(t_f)) - \cos(\theta_f) = 0 \quad (4.10)$$

$$\sin(\theta(t_f)) - \sin(\theta_f) = 0 \quad (4.11)$$

Donde  $\theta(t_f)$  es el valor de la coordenada polar final y  $\theta_f$  se define como la condición de contorno final de la coordenada polar.

2. Se fija arbitrariamente la fecha de salida desde la Tierra al día **02-07-2024 00:00** (condiciones de contorno iniciales) y se realiza un barrido de anomalías verdaderas del objetivo ( $\theta_D$ ). Del

conjunto de trayectorias obtenidas, se determina la que presente menor  $\Delta V$ . Esta trayectoria obtenida fijará la anomalía verdadera a la llegada de Dionysus (condiciones de contorno finales) y el tiempo de vuelo ( $t_f$ ).

3. Conocidas las condiciones de contorno finales (posición y velocidad de Dionysus) y el tiempo de vuelo ( $t_f$ ), ambas obtenidas del paso anterior, se define la fecha de salida, es decir, las condiciones de contorno iniciales.

Los resultados de  $\Delta V$  obtenidos del barrido realizado son los siguientes:

Tabla 4.2: Valores de  $\Delta V$  obtenidos para el barrido de anomalía verdadera final de Dionysus.

$\theta_D$ [rad]	$\Delta V$ [km/s]	$\theta_D$ [rad]	$\Delta V$ [km/s]
<b>0,18</b>	<b>17,35</b>	3,34	77,50
1,08	53,37	3,44	93,60
1,63	44,01	3,54	78,40
1,97	62,18	3,66	77,71
2,21	81,91	3,79	79,38
2,39	100,67	3,95	69,92
2,87	85,18	4,15	68,79
2,96	89,65	4,41	60,49
3,05	79,98	4,81	48,00
3,15	80,33	5,46	27,12
3,24	78,92	6,00	55,47

Como se observa en la tabla superior (4.2), el valor de  $\theta_D$  escogido será de 0,18 rad, ya que es el caso que conlleva un menor  $\Delta V$ . Este caso corresponde con un tiempo de vuelo de 2730 días. Es importante destacar que no de todos los casos estudiados se obtuvo una solución factible. Empleando una configuración del *solver* específica para cada caso hubiese dado lugar a más trayectorias factibles.

Mediante la  $\theta_D$  seleccionada y el resto de los parámetros orbitales (Tabla 4.1), se fijan las condiciones de contorno finales. Además, conocido el tiempo de vuelo, se puede obtener cual debe

ser la fecha de salida desde la Tierra, y en consecuencia determinar las condiciones de contorno iniciales.

En la tabla (4.1) se pueden encontrar las condiciones de contorno iniciales y finales expresadas en elementos orbitales clásicos. Realizando el cambio a coordenadas cilíndricas y aplicando la adimensionalización con las magnitudes de referencia seleccionadas (Ecuaciones 4.4, 4.5), se definen las condiciones de contorno del problema.

$$\mathbf{s}(t_0) = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \theta_0 \\ z_0 \\ \dot{\rho}_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,98 \\ 1,25 \\ 0 \\ 0 \\ 1,01 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}(t_f) = \begin{bmatrix} \rho_f \\ \theta_f \\ z_f \\ \dot{\rho}_f \\ \dot{\theta}_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,12 \\ -0,13 \\ 0,04 \\ 1,21 \\ -0,25 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

#### 4.1.2. Optimización de la trayectoria final

El siguiente paso consiste en obtener la trayectoria óptima de transferencia a Dionysus. El problema se define de manera similar al paso anterior, añadiendo dos restricciones de desigualdad al problema. Estas se encargan de acotar el tiempo de vuelo, de manera que se pueda mantener en un rango compatible con el *rendezvous* al asteroide.



El problema final queda definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\min \quad & J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\mathbf{u}(t)^T \mathbf{u}(t)} \, dt \\
\text{sujeto a} \quad & \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 + \rho \frac{\mu}{r^3} = u_\rho \\
& \rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = u_\theta \\
& \ddot{z} + \rho \frac{\mu}{r^3} = u_z \\
& \mathbf{s}(t_0) = [0,98 \quad 1,25 \quad 0 \quad 0 \quad 1,01 \quad 0]^T \\
& \mathbf{s}(t_f) = [1 \quad -1,12 \quad -0,13 \quad 0,04 \quad 1,21 \quad -0,25]^T \\
& \|\mathbf{u}(t)\| \leq T_{max} \\
& t_0 = 0 \\
& 46 \leq t_f \leq 47 \\
& \cos(\theta(t_f)) - \cos(\theta_f) = 0 \\
& \sin(\theta(t_f)) - \sin(\theta_f) = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

### 4.1.3. Resultados trayectoria final

Se obtiene la trayectoria con diferentes bases polinomiales y mallas, ajustando el número de nodos ( $m$ ) y el orden de expansión ( $N$ ) para cada caso. Se validan los resultados comparando con los obtenidos por Taheri [51] mediante series de Fourier finitas y Huo et al[22] mediante curvas de Bezier.

Tabla 4.3:  $\Delta V$  obtenido para diferentes bases polinomiales y mallas.

Polinomio	Malla	N	m	$\Delta V$ [km/s]	TOF [días]
Bernstein	Bernstein	30	300	17,46	2730
Chebyshev	Chebyshev	20	150	17,31	2674
Legendre	Legendre	20	150	19,74	2732
Bernstein Ortogonal	Bernstein Ortogonal	18	250	19,24	2683
FFT [51]	Legendre	8, 9, 8	120	16,64	3304
Bezier [22]	Legendre	6, 6, 8	100	16,64	3238

Se muestran los resultados de la trayectoria obtenida con la base y nodos de Chebyshev, siendo este el caso del que se obtuvo un menor residuo relativo de las restricciones ( $< 10^{-6}$ ). En la figura (4.1) se muestra la trayectoria del vehículo (SC) en tres dimensiones desde la Tierra hasta Dionysus, estando marcados los puntos de salida y llegada. Se observa que son necesarias entre 3 y 4 revoluciones (ángulo total girado  $1375^\circ$ , 3 revoluciones y  $295^\circ$ ). La elección de las revoluciones se condiciona indicando un *initial guess* de 4 revoluciones, pudiéndose acotar mediante restricciones el ángulo final girado si se quisiera fijar el número de revoluciones. La figura (4.2) muestra la hodógrafa de la trayectoria. Se puede observar como no se adquiere velocidad en eje  $z$  hasta la parte final de la transferencia. Esto se debe a que el cambio de velocidad en eje  $z$  corresponde con el cambio de plano, y esta maniobra es más barata cuanto menor sea la velocidad relativa al cuerpo tractor, por ello no se comienza a cambiar el plano (adquirir velocidad en  $z$ ) hasta haberse alejado del cuerpo tractor.

La figura (4.3) muestra la aceleración producida por el sistema propulsivo, es decir, el control. En línea discontinua se marca la aceleración máxima de  $8,5 \cdot 10^{-5}$  m/s. En la figura (4.4) se ve en detalle la aceleración en la parte final, donde se pueden apreciar los ajustes en el empuje para cumplir las condiciones de contorno finales. La obtención de una ley de control que cumpla la restricción de empuje es uno de los mayores desafíos de los métodos *shape-based*. Esto se debe a que el control (aceleración) se obtiene a partir de la aproximación polinomial de la trayectoria, ya que es un residuo de la dinámica, y no se optimiza de manera directa. En las figuras (4.5),(4.6),(4.7),(4.8), (4.9) y (4.10), se muestran las componentes de posición y velocidad del vehículo y de Dionysus. Estas

se representan en coordenadas cartesianas inerciales heliocéntricas. Se puede ratificar de manera visual que se cumplen las condiciones de *rendezvous*.

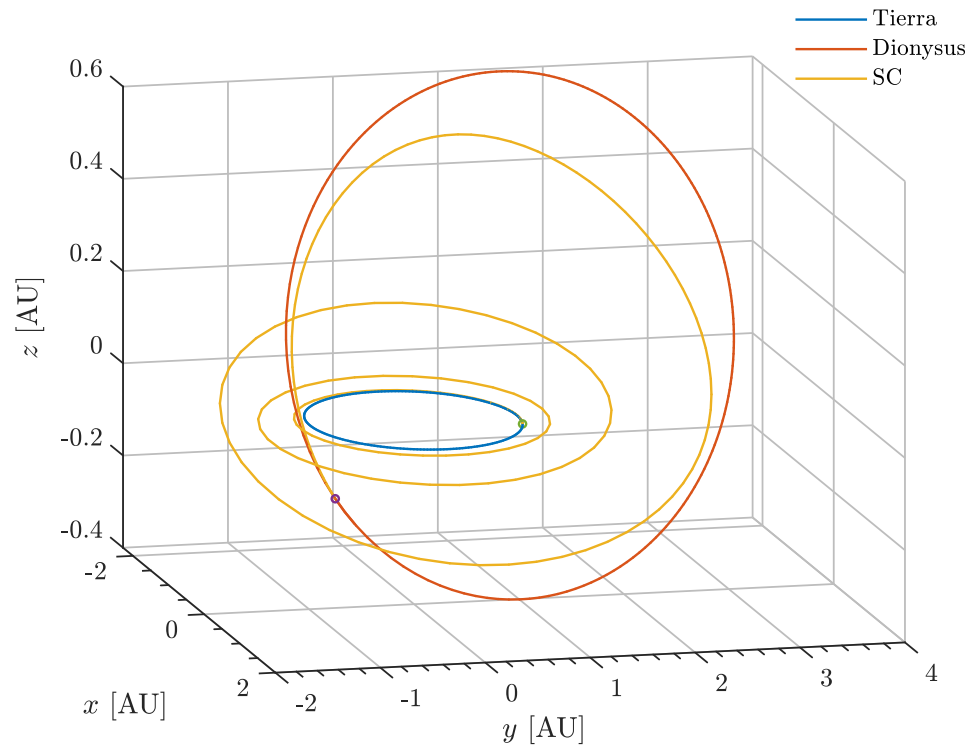


Figura 4.1: Trayectoria Tierra-Dionysus.

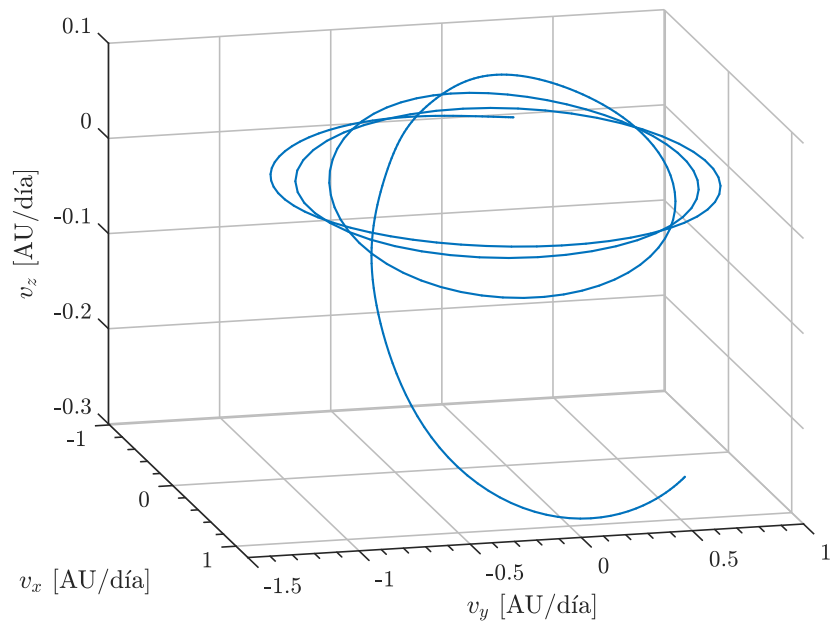


Figura 4.2: Hodógrafa de la transferencia Tierra-Dionysus.

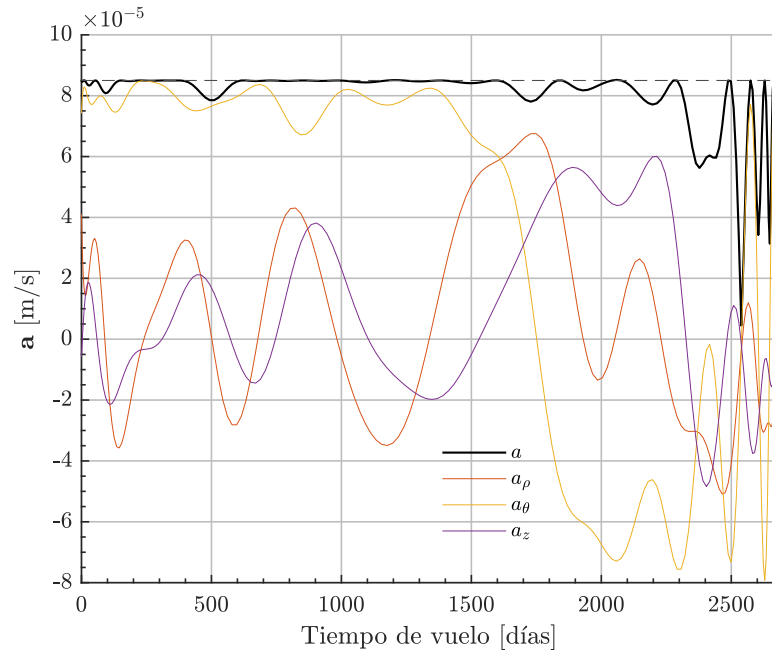


Figura 4.3: Aceleración propulsiva total y por componentes de la transferencia Tierra-Dionysus.

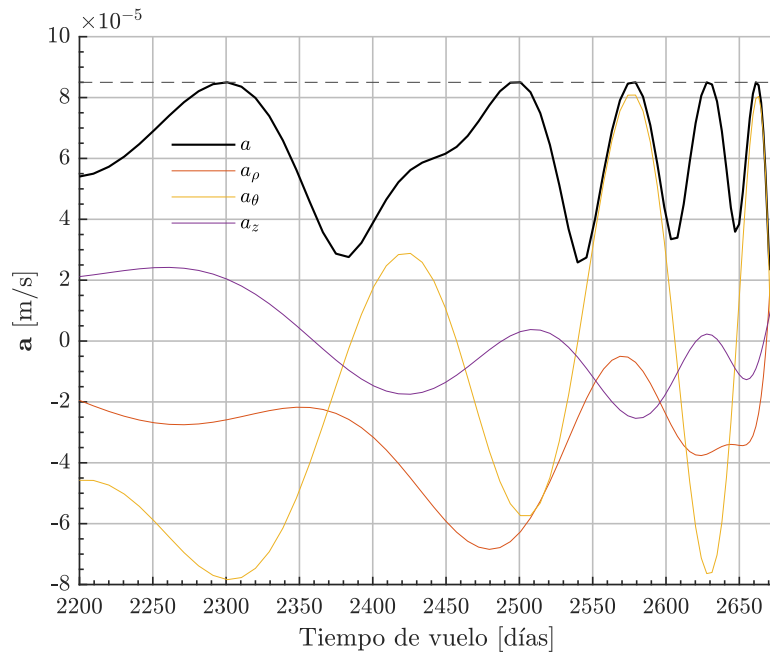


Figura 4.4: Detalle de la aceleración propulsiva total y por componentes de la transferencia Tierra-Dionysus en la etapa final de la trayectoria.

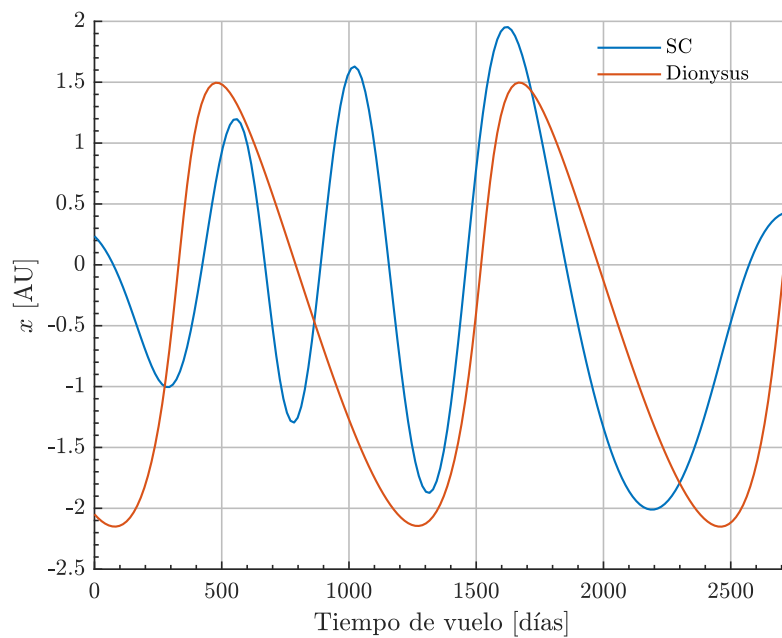


Figura 4.5: Posición coordenada cartesiana  $x$  de la transferencia Tierra-Dionysus.

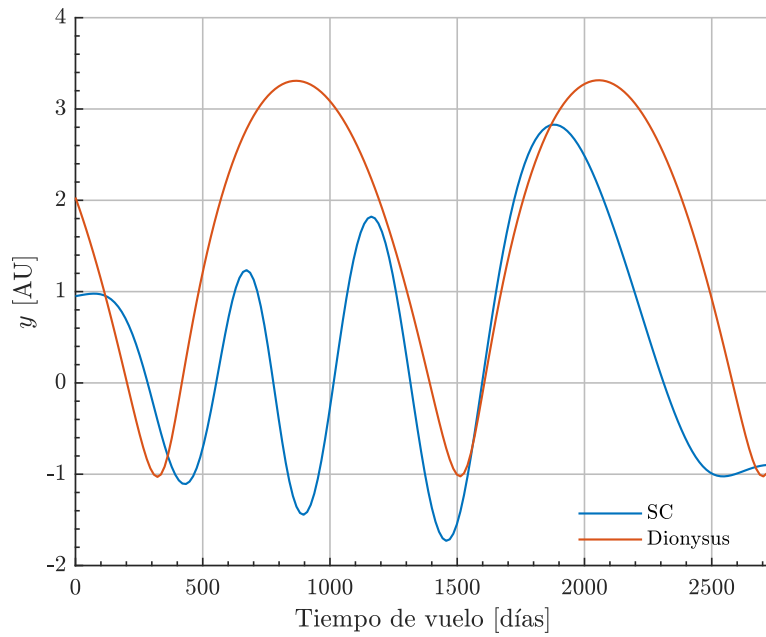


Figura 4.6: Posición coordenada cartesiana  $y$  de la transferencia Tierra-Dionysus.

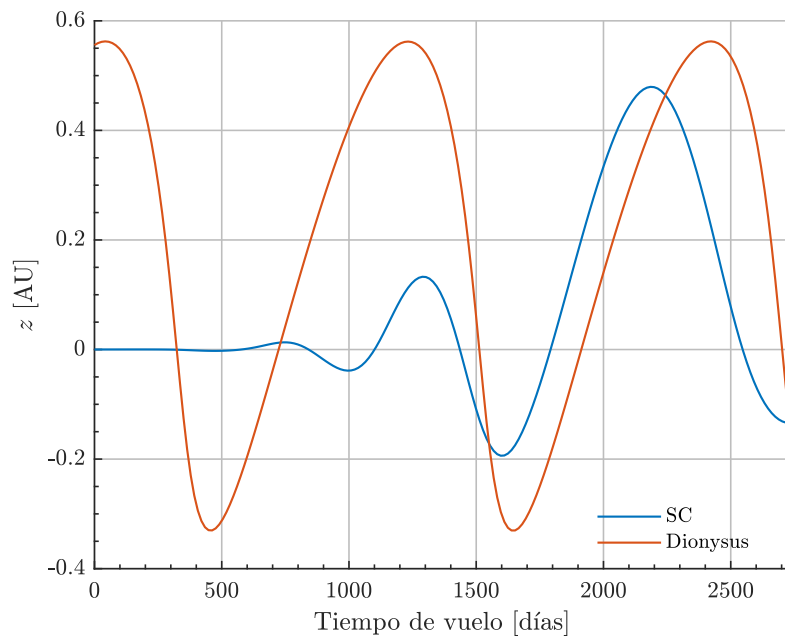
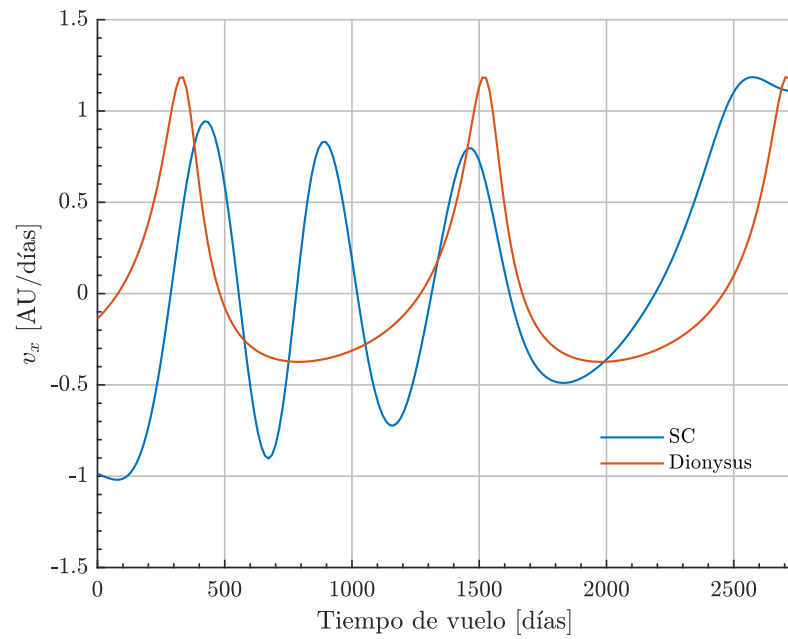
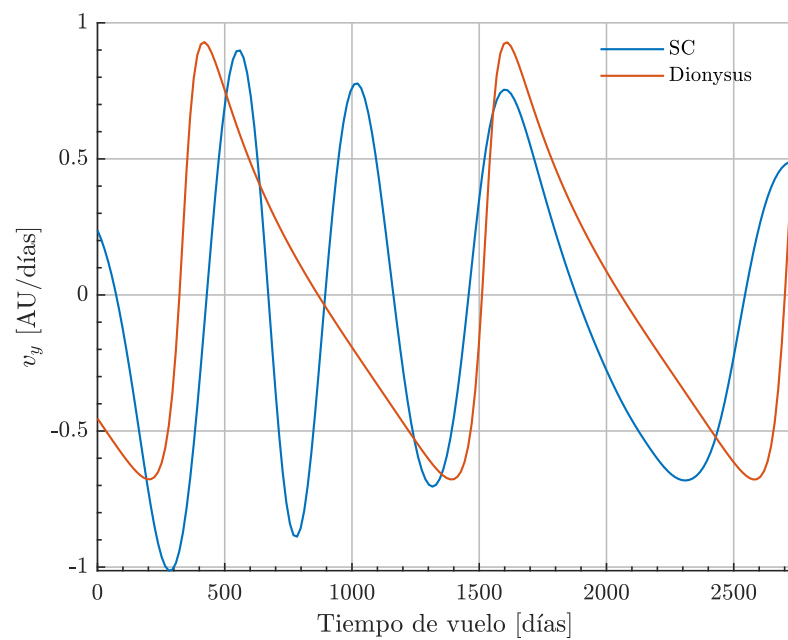


Figura 4.7: Posición coordenada cartesiana  $z$  de la transferencia Tierra-Dionysus.

Figura 4.8: Velocidad coordenada cartesiana  $x$  de la transferencia Tierra-Dionysus.Figura 4.9: Velocidad coordenada cartesiana  $y$  de la transferencia Tierra-Dionysus.

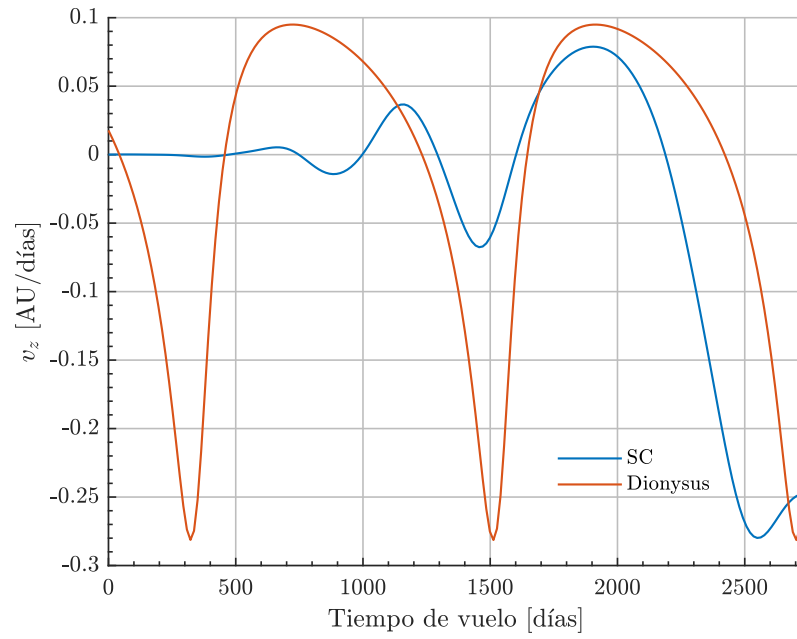


Figura 4.10: Velocidad coordenada cartesiana  $z$  de la transferencia Tierra-Dionysus.



# Capítulo 5

## Transferencia a Marte

Como segundo caso de aplicación, se estudia la transferencia que optimice el  $\Delta V$  a Marte. Adicionalmente, se realiza un análisis de la ventana de lanzamiento y se presentan los resultados mediante una gráfica *porkchop*.

### 5.1. Planteamiento del problema

A diferencia del caso de Dionysus, Marte presenta una órbita muy poco excéntrica y con baja inclinación respecto a la eclíptica, por ello, la dificultad de la transferencia es menor y se encuentran trayectorias factibles con mayor facilidad. Además, es posible realizar un estudio mas detallado de la fecha de lanzamiento y tiempo de vuelo. De igual modo que para Dionysus, se busca la transferencia de mínimo  $\Delta V$ .

Los elementos orbitales de Marte se encuentran en la tabla (5.1), obtenidos del Horizons System [14].

Tabla 5.1: Elementos orbitales clásicos de Marte.

	Época [MJD]	$a$ [AU]	$e$	$i$ [°]	$\Omega$ [°]	$\omega$ [°]	$\theta$ [°]
Marte	62492	1,5236	0,0934	1,8474	49,4723	286,7860	355,2065

La ecuaciones del movimiento y adimensionalización empleada es la misma que en el caso de

transferencia a Dionysus (Ecuaciones 4.1-4.5).

### 5.1.1. Ventana de lanzamiento

El estudio de la ventana de lanzamiento se realiza de una manera ligeramente diferente al planteado en el caso anterior. Se realiza un barrido de fechas de salida y tiempos de vuelo, de manera que se obtenga la combinación que minimice el  $\Delta V$ . Las fechas de salida se estudian desde el 02-07-2024 00:00 hasta el 23-12-2029 00:00 a intervalos de 50 días. Respecto al tiempo de vuelo, se estudia para duraciones de entre 500 y 2000 días, también con intervalos de 50 días.

Se opta por emplear polinomios y nodos de Bernstein para este apartado. El número de nodos serán  $m = 150$  y los ordenes de expansión son los siguientes:  $N_\rho = 12$ ,  $N_\theta = 12$  y  $N_z = 10$ . El orden es menor al empleado para el caso anterior, ya que la transferencia es notablemente mas sencilla. La función de coste es la misma que la planteada para Dionysus, minimizar  $\Delta V$ . La aceleración máxima es de  $T_{max} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$ , tomando como referencia el trabajo de Taheri [51]. Respecto a las restricciones, son las mismas implementadas en el caso anterior, con la diferencia de que el tiempo de vuelo se impone sin tolerancia mediante una restricción de igualdad.

Los resultados del análisis se muestran en la figura (5.1).

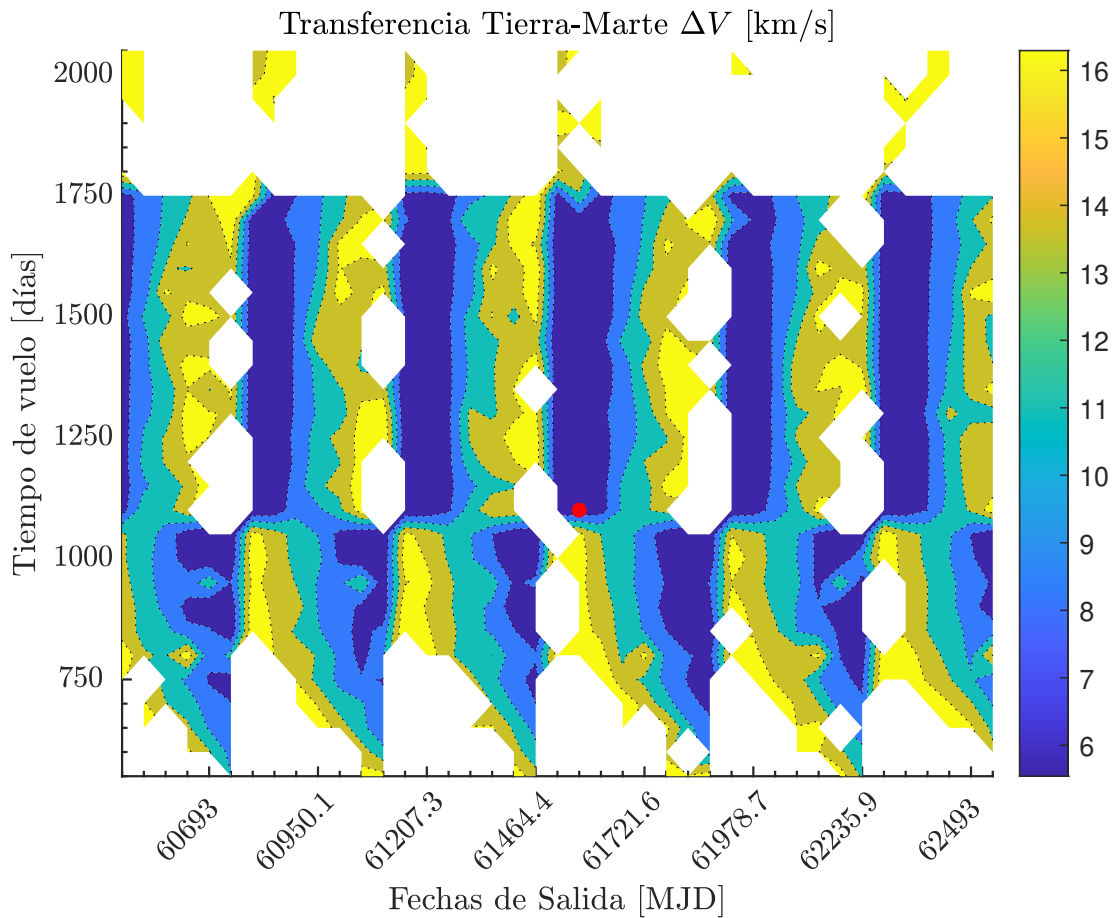


Figura 5.1: Gráfica *porkchop* obtenida de la transferencia Tierra-Marte.

Los huecos en blanco representan trayectorias en las que bien no se ha obtenido una solución factible, decidiéndose esto mediante el `exitflag` de la función `fmincom`, o bien en las que el  $\Delta V$  obtenido es mayor a 16 km/s. Se selecciona el siguiente caso como óptimo, siendo el que presenta menor  $\Delta V$ , siendo 5,52 km/s:

- Fecha de salida: 18-05-2027 (61543 MJD)
- Tiempo de vuelo: 1050 días

Alternativamente, se podrían seleccionar tiempos de vuelo inferiores a 800 días, con valores de  $\Delta V$  ligeramente superiores.

### 5.1.2. Optimización de la trayectoria final

Aplicando la adimensionalización indicada ( $DU = 1 \text{ AU}$  y  $TU = 5,0226 \cdot 10^6 \text{ s}$ ), fijando el tiempo de vuelo final y la fecha de salida, se obtienen las condiciones de contorno en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{s}(t_0) = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \theta_0 \\ z_0 \\ \dot{\rho}_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,01 \\ -2,48 \\ 0 \\ 0,02 \\ 0,98 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}(t_f) = \begin{bmatrix} \rho_f \\ \theta_f \\ z_f \\ \dot{\rho}_f \\ \dot{\theta}_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,64 \\ -2,98 \\ 0,03 \\ -0,04 \\ 0,46 \\ -0,02 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

El problema de optimización final se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\mathbf{u}(t)^T \mathbf{u}(t)} \, dt \\ \text{sujeto a} \quad & \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 + \rho \frac{\mu}{r^3} = u_\rho \\ & \rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = u_\theta \\ & \ddot{z} + \rho \frac{\mu}{r^3} = u_z \\ & \mathbf{s}(t_0) = [1,01 \quad -2,48 \quad 0 \quad 0,02 \quad 0,98 \quad 0]^T \\ & \mathbf{s}(t_f) = [1,64 \quad -2,98 \quad 0,03 \quad -0,04 \quad 0,46 \quad -0,02]^T \\ & \|\mathbf{u}(t)\| \leq T_{max} \\ & t_0 = 0 \\ & t_f = 18,06 \\ & \cos(\theta(t_f)) - \cos(\theta_f) = 0 \\ & \sin(\theta(t_f)) - \sin(\theta_f) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

### 5.1.3. Resultados

Se desarrolla la optimización para diferentes bases polinomiales, en todas ellas con el mismo número de nodos y orden de expansión. Siendo estos los mismos que los empleados para el análisis de la ventana de lanzamiento ( $N_\rho = 12$ ,  $N_\theta = 12$  y  $N_z = 10$ ). De este modo, se puede realizar una comparativa de los tiempos de computación. Los resultados obtenidos se validan comparando los valores de  $\Delta V$  y tiempo de vuelo obtenidos por [51] empleando series de Fourier finitas, y el trabajo de Huo et al [22], los cuales emplean curvas de Bezier (variante de Bernstein). Se muestran en la tabla (5.2).

Tabla 5.2: Resultados obtenidos de la transferencia a Marte con diferentes bases polinomiales.

Polinomio	Malla	$\Delta V$ [km/s]	TOF [días]	Tiempo computacional [s]
Bernstein	Bernstein	5,52	1050	2,1048
Chebyshev	Chebyshev	5,54	1050	2,8170
Legendre	Legendre	5,52	1050	3,0983
Bernstein Ortogonal	Bernstein Ortogonal	5,52	1050	2,5395
FFT [51]	Legendre	5,72	874	6,690
Bezier [22]	Legendre	5,71	972	3,3870

Los tiempos de computación son muy similares, mostrando la flexibilidad y rapidez del método, así como la capacidad de dichas bases polinomiales en capturar la dinámica. Los valores de  $\Delta V$  también son semejantes. Cabe destacar, que tanto para esta transferencia a Marte como el caso anterior a Dionysus, no se requiere de un impulso a la llegada del objetivo, como en transferencias tipo Hohmann, ya que se impone tanto la posición como la velocidad del objetivo en las condiciones de contorno finales. En cuanto a la salida de la esfera de influencia de la Tierra, se asume que se parte de una velocidad de exceso hiperbólica nula ( $C3 = 0$ ), es decir, sería necesario un impulso inicial para pasar de la órbita de aparcamiento (si la hay) a espacio interplanetario. Generalmente, este impulso se realiza por la última etapa del lanzador. Por todo esto, los valores de  $\Delta V$  obtenidos pueden aplicarse directamente a los requisitos del vehículo espacial.

Por último, se muestran los resultados obtenidos con la base y nodos de Bernstein. Todos los

casos presentan residuo relativo de restricciones inferiores a  $10^{-6}$ , pudiéndose mostrar cualquier caso. En la figura (5.2) se muestra la trayectoria desde la Tierra hasta Marte, realizada en menos de 2 revoluciones. En la figura (5.3) se puede observar la evolución de la aceleración producida por el empuje. A diferencia de en la transferencia a Dionysus (4.3), no es necesario el nivel de aceleración máxima para realizar la transferencia, teniendo incluso algunos días de *coasting* en el tramo final. En las figuras (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) y (5.9) se observa las coordenadas cartesianas de posición y velocidad tanto del vehículo como de Marte a lo largo de la transferencia.

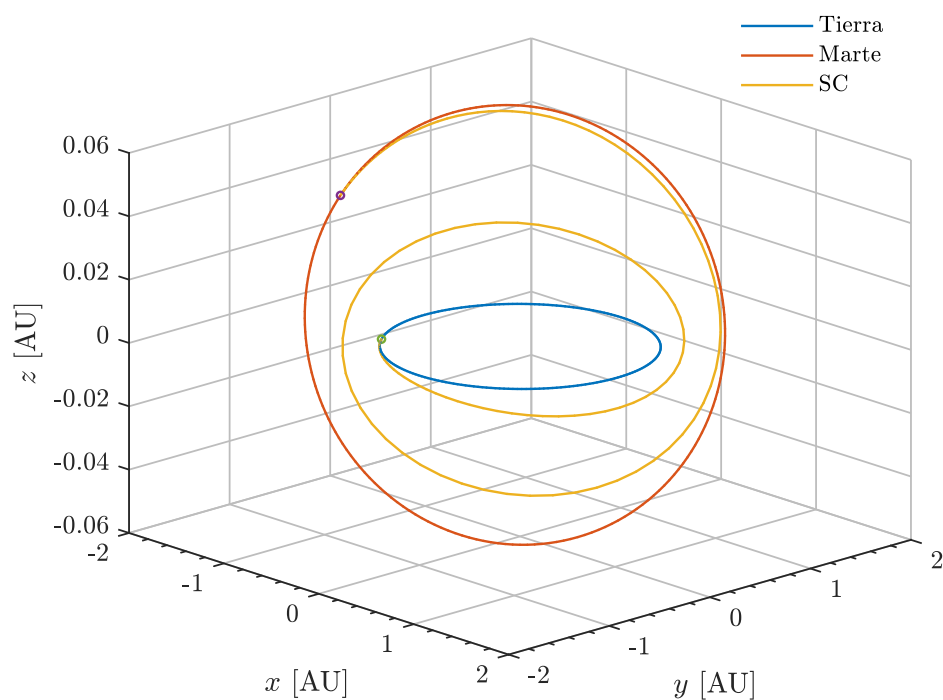


Figura 5.2: Trayectoria Tierra-Marte

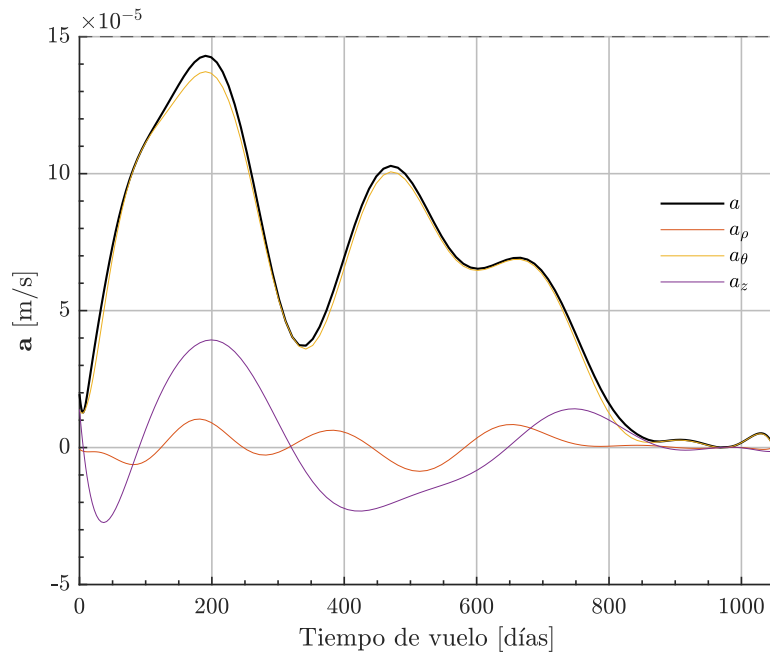


Figura 5.3: Aceleración propulsiva total y por componentes de la transferencia Tierra-Marte.

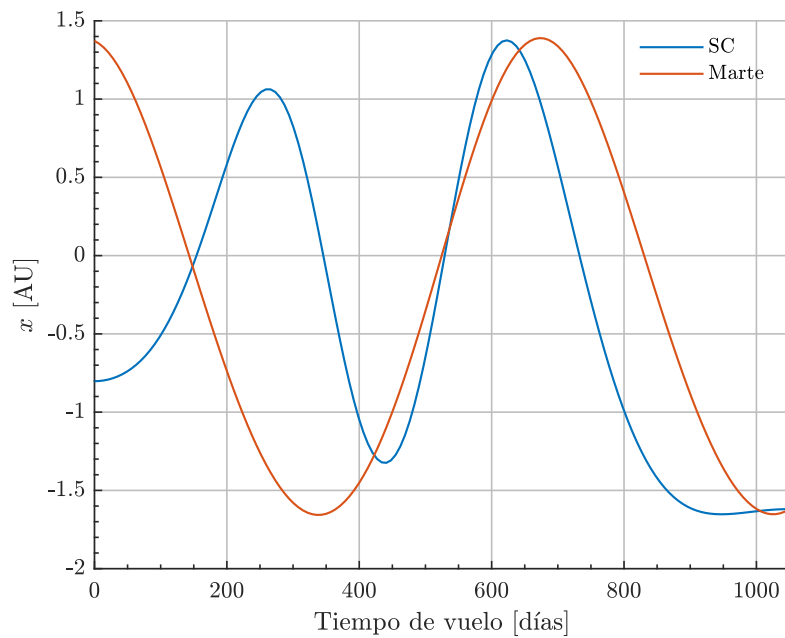


Figura 5.4: Posición coordenada cartesiana  $x$  de la transferencia Tierra-Marte.

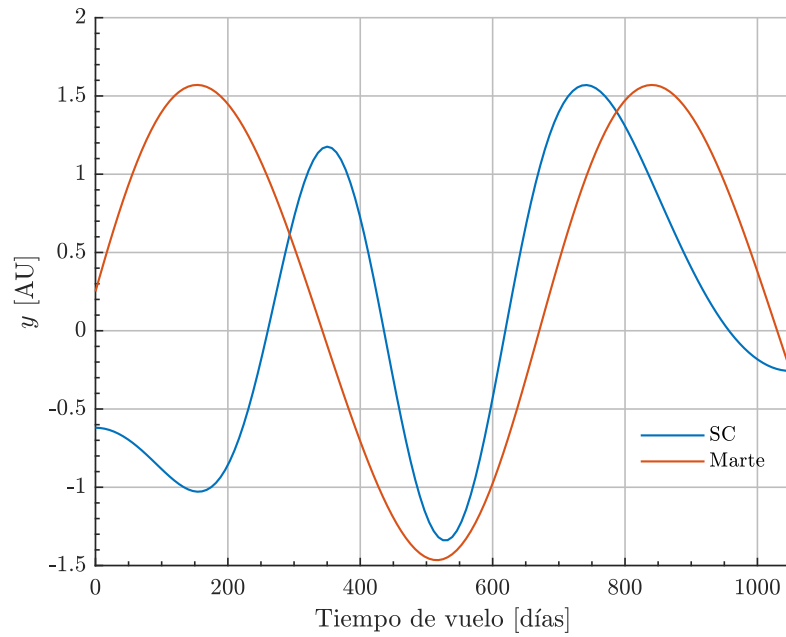


Figura 5.5: Posición coordenada cartesiana  $y$  de la transferencia Tierra-Marte.

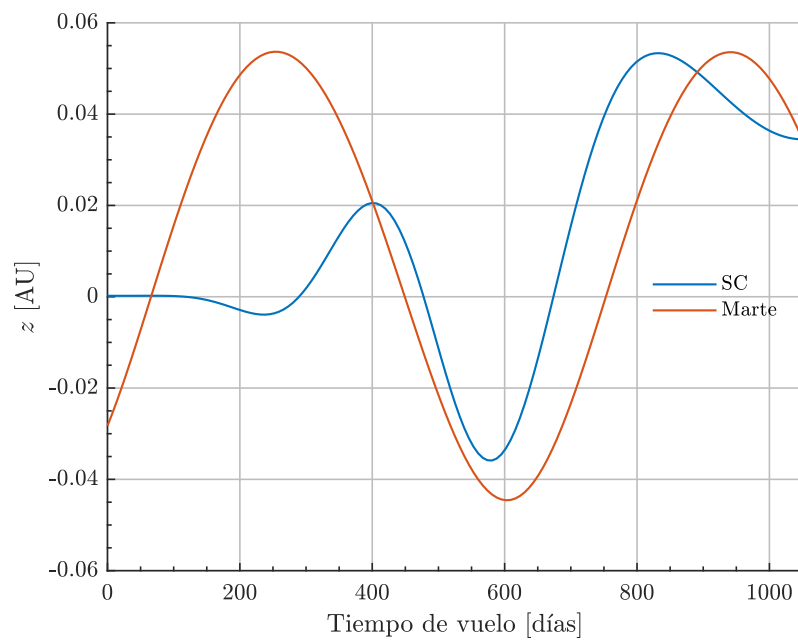
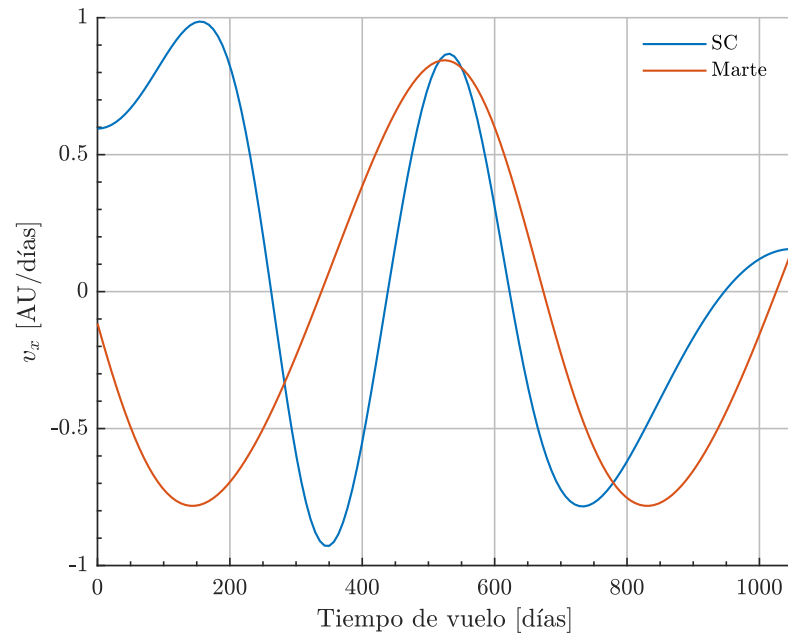
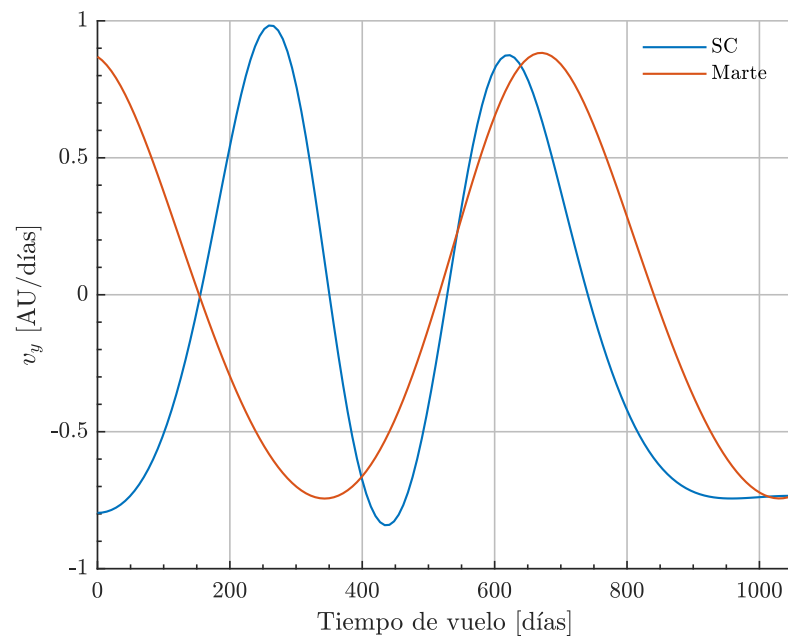


Figura 5.6: Posición coordenada cartesiana  $z$  de la transferencia Tierra-Marte.



Figura 5.7: Velocidad coordenada cartesiana  $x$  de la transferencia Tierra-Marte.Figura 5.8: Velocidad coordenada cartesiana  $y$  de la transferencia Tierra-Marte.

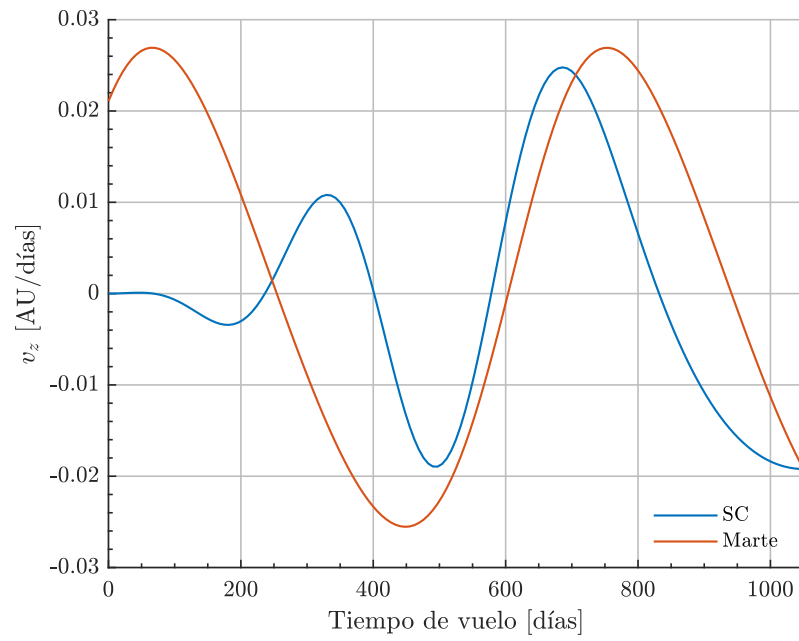


Figura 5.9: Velocidad coordenada cartesiana  $z$  de la transferencia Tierra-Marte.

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo futuro

Durante el presente informe se ha presentado el trabajo realizado con el método *shape-based* SBOPT. De este se ha explorado su funcionamiento interno, así como su aplicación a diferentes casos de interés desde un punto de vista tanto numérico como de astrodinámica. Se ha estudiado el error del método para un caso LQR con solución analítica conocida. Así mismo, se ha obtenido la trayectoria que maximice la energía orbital final en el entorno terrestre. Por otro lado, se han obtenido las transferencias y ventanas de lanzamiento tanto al asteroide Dionysus como a Marte, minimizando en ambos casos el  $\Delta V$ .

### 6.1. Conclusiones

De los resultados y estudios realizados se extraen las siguientes conclusiones:

- Para el problema LQR, aprovechando el conocimiento de la solución analítica, se ha obtenido el error cuadrático medio tanto para la trayectoria como para el control. Se han mostrado los efectos del número de nodos y el orden de expansión de la base polinomial en el error. Se ha observado como por la propiedad de convergencia espectral del método, el efecto del número de nodos para un problema sencillo como el estudiado es mínimo. Por otro lado, las causas del aumento del error con el orden de expansión no quedan totalmente definidas. Se plantean diferentes posibles causas: Efecto del optimizador `fmincom` y como distribuye el error en

la malla, fenómeno de Gibbs y la tolerancia del optimizador de MATLAB. Un estudio en mayor profundidad de estas hipótesis sería necesario para poder confirmar las causas de este fenómeno y comprender en mayor profundidad el error numérico del método.

- El método se ha empleado para casos de aplicación variados. Desde una transferencia cercana al cuerpo tractor donde se busca maximizar la energía y en la cual son necesarias muchas revoluciones, hasta dos transferencias interplanetarias. En concreto, para las transferencias interplanetarias, se han realizado análisis de las ventanas de lanzamiento para Marte y para Dionysus, siendo este último un objetivo de gran complejidad debido a su inclinación y excentricidad. Estos resultados resaltan la flexibilidad del método para problemas de diferentes grados de dificultad y características.
- Como se puede observar en las tablas (3.1) y (5.2), los tiempos de computación del método son mínimos. Esta característica es esencial para un *solver* de optimización de trayectorias, permitiendo realizar análisis de diferentes conceptos de misión y viabilidad con rapidez.
- La elección del orden de expansión ( $N$ ) y del número de nodos ( $m$ ) tiene un gran efecto en la solución. Así mismo, la selección de dichos parámetros no sigue una regla clara y el papel de la experiencia es importante. La intuición de la solución óptima es importante no solo en el método presentado, sino que es una característica compartida entre todos los métodos directos. Anticipando la variación de las coordenadas con el tiempo es esencial para estimar el orden de expansión de los polinomios que las aproximan. A mayor variación temporal de las coordenadas, mayor orden de expansión será necesario para capturar correctamente dicha variación. Sin embargo, aumentar tanto orden como número de nodos, también implica un aumento del número de variables a optimizar, lo cual tiene ciertas implicaciones. Primero, un aumento en el tiempo computacional, y segundo, este aumento de variables de optimización puede provocar que el *solver* tenga dificultades en aproximar la solución óptima global, quedándose la solución en un óptimo local.
- El orden y número de nodos tiene un impacto directo en el cumplimiento de las restricciones, es decir, en la obtención de una solución factible. En concreto, respecto a las restricciones del

empuje (aceleración) máximo, la configuración de los polinomios y la malla tiene un impacto directo sobre el control obtenido, al obtenerse este como residuo de la dinámica y no como resultado directo de las variables de optimización.

- La condición inicial que se aporte al método puede condicionar la solución obtenida. Esto se observa en los casos de transferencias orbitales, donde la condición inicial del ángulo final girado se traducía en las revoluciones finales. Es decir, un conocimiento de la posible solución óptima es esencial para el éxito del método, incluso pudiéndose condicionar la solución final aportando una condición inicial cercana al resultado deseado.
- Las restricciones y su implementación condicionan completamente la posibilidad de una solución factible. Relajar las restricciones o convexificarlas, como se ha hecho en la transferencia a Dionysus o para la transferencia de máxima energía, es clave para facilitar la obtención de una solución factible.
- Las diferentes bases polinomiales empleadas (Bernstein, Chebyshev, Legendre y Bernstein ortogonal) han conseguido capturar la dinámica de los problemas estudiados con efectividad. Cada base polinomial tiene propiedades diferentes, traduciéndose en la necesidad de una configuración (orden y nodos) individual si se quiere obtener una solución con el menor residuo de restricciones posible. Así mismo, el empleo de nodos de los propios polinomios como puntos de malla mejora la aproximación de la trayectoria.

## 6.2. Trabajo futuro

El trabajo realizado ha fomentado un aprendizaje y comprensión profunda del método y herramienta SBOPT, así como en la teoría de optimización de trayectorias de bajo empuje. Sin embargo, la exploración llevada a cabo ha abierto posibles líneas de trabajo y características de la herramienta que aún quedan por comprender.

La comparación de prestaciones obtenidas con diferentes métodos facilitaría el entendimiento de la capacidad del método en la industria. En concreto, sería de especial interés realizar una comparativa con otros métodos *shape-based* y pseudoespectrales.

Uno de los mayores puntos donde profundizar es en el funcionamiento interno del optimizador de MATLAB `fmincom`. Gracias a ello, se conseguiría un mayor entendimiento de los efectos del orden de expansión y el número de nodos en el error del método, pudiendo separar las causas provocadas por método de las inducidas por la función `fmincom`.

Respecto a la dinámica, sería de interés añadir perturbaciones a las ecuaciones del movimiento, como el armónico J2 en transferencias en el entorno terrestre, perturbaciones del tercer cuerpo para trayectorias en el espacio cis-lunar, o la presión de radiación solar para trayectorias interplanetarias. Así mismo, se pueden estudiar casos de control de actitud para vehículos espaciales.

Por último, la inclusión de diferentes bases polinomiales o de la expansión en series de Fourier aportaría una mayor profundidad a la herramienta.

# Bibliografía

- [1] Vadim Azhmyakov and Jörg Raisch. Convex control systems and convex optimal control problems with constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53:993–998, 5 2008.
- [2] Archit Bapat, Pramod B. Salunkhe, and Aakash V. Patil. Hall-effect thrusters for deep-space missions: A review. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 50(2):189–202, 2022.
- [3] Nicolas Belanger. External fake constraints interpolation: the end of runge phenomenon with high degree polynomials relying on equispaced nodes-application to aerial robotics motion planning, 11 2017.
- [4] Richard Bellman and Robert Kalaba. *Dynamic programming and modern control theory*. Academic Press, 1965.
- [5] John Betts. Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming. 2nd ed. 19, 01 2010.
- [6] John T. Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21:193–207, 1998.
- [7] H.G. Bock and K.J. Plitt. A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems\*. *IFAC Proceedings Volumes*, 17(2):1603–1608, 1984. 9th IFAC World Congress: A Bridge Between Control Science and Technology, Budapest, Hungary, 2-6 July 1984.
- [8] Paul T. Boggs and Jon W. Tolle. Sequential quadratic programming. *Acta Numerica*, 4:1–51, 1995.

- [9] G.L. Brauer, D.E. Cornick, and R. Stevenson. Capabilities and applications of the program to optimize simulated trajectories (post). program summary document, 2 1977.
- [10] John R. Brophy, Marc D. Rayman, and Betina Pavri. Dawn: An ion-propelled journey to the beginning of the solar system. In *2008 IEEE Aerospace Conference*, pages 1–10, 2008.
- [11] Andrea Caruso, Marco Bassetto, Giovanni Mengali, and Alessandro A. Quarta. Optimal solar sail trajectory approximation with finite fourier series. *Advances in Space Research*, 67(9):2834–2843, 2021. Solar Sailing: Concepts, Technology, and Missions II.
- [12] Bruce Conway. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems. *J. Optimization Theory and Applications*, 152:271–306, 02 2012.
- [13] Vladimir Dvornychenko. The generalized tsiolkovsky equation. 01 1990.
- [14] JPL Solar System Dynamics. Horizons system. <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>. Accessed: 2024-07-04.
- [15] European Cooperation for Space Standardization (ECSS). Ecss-m-st-10c rev. 1: Project planning and implementation, mar 2009.
- [16] Gene F. Franklin, J. David Powell, and Abbas. Emami-Naeini. *Feedback control of dynamic systems*. Addison-Wesley, 1991.
- [17] David Gottlieb and Chi-Wang Shu. On the gibbs phenomenon and its resolution. *SIAM Review*, 39(4):644–668, 1997.
- [18] Nyoman Gunantara. A review of multi-objective optimization: Methods and its applications. *Cogent Engineering*, 5(1):1502242, 2018.
- [19] Gerald Hintz. Survey of orbit element sets. *Journal of Guidance Control and Dynamics - J GUID CONTROL DYNAM*, 31:785–790, 05 2008.
- [20] Steven P. Hughes, Rizwan H. Qureshi, D. Steven Cooley, Joel J.K. Parker, and Thomas G. Grubb. Verification and validation of the general mission analysis tool (gmat). American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2014.



- [21] Mingying Huo, Giovanni Mengali, Alessandro A. Quarta, and Naiming Qi. Electric sail trajectory design with bezier curve-based shaping approach. *Aerospace Science and Technology*, 88:126–135, 5 2019.
- [22] Mingying Huo, Ze Yu, Hui Liu, Ce Zhao, Tong Lin, Zhiguo Song, and Naiming Qi. Initial three-dimensional trajectory design for solar sails using bezier shaping approach. *IEEE Access*, 7:150842–150850, 2019.
- [23] S.V. Fomin I.M. Glefand. *Calculus of Variations*. Dover Publications, 1991.
- [24] Dario Izzo. Lambert’s problem for exponential sinusoids. *JOURNAL OF GUIDANCE CONTROL AND DYNAMICS*, 29:1242–1245, 09 2006.
- [25] jgn. *Lyapunov-Based Control of Mechanical Systems*. ASME, 2001.
- [26] Roman Y. Jits and Gerald D. Walberg. Blended control, predictor–corrector guidance algorithm: an enabling technology for mars aerocapture. *Acta Astronautica*, 54(6):385–398, 2004.
- [27] Greg Johnson, Sebastian Munoz, and Jennifer Lehman. Copernicus, a generalized trajectory design and optimization system, 2003.
- [28] William Karush. Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions. Master’s thesis, Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, IL, USA, 1939.
- [29] Matthew Kelly. An introduction to trajectory optimization: How to do your own direct collocation. *SIAM Review*, 59:849–904, 2017.
- [30] Nicholas R Koeppen, I Michael Ross, Ronald J Proulx, and Lucas C Wilcox. Well-conditioned pseudospectral optimal control methods and their applications, 6 2018.
- [31] Narayan Kovvali. *Theory and Applications of Gaussian Quadrature Methods*. Synthesis, 2011.
- [32] H W Kuhn and A W Tucker. Nonlinear programming. 1951.
- [33] Mario Köppen. The curse of dimensionality, 2000.

- [34] W. J. Larson and J. R. Wertz. *Space Mission Analysis and Design*. Microcosm Press, El Segundo, CA, and Springer, New York, NY, 2nd edition, 2006.
- [35] J. Martín-Vaquero and J. Vigo-Aguiar. Exponential fitted gauss, radau and lobatto methods of low order. *Numerical Algorithms*, 48:327–346, 8 2008.
- [36] MathWorks. `fmincom`. <https://es.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html?lang=en>. Find minimum of constrained nonlinear multivariable function.
- [37] David Morante, Manuel Sanjurjo Rivo, and Manuel Soler. Multi-objective low-thrust interplanetary trajectory optimization based on generalized logarithmic spirals. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 42:476–490, 2019.
- [38] David Morante, Manuel Sanjurjo Rivo, and Manuel Soler. A survey on low-thrust trajectory optimization approaches, 3 2021.
- [39] Jurgen K. Moser. *Lectures on Hamiltonian Systems*. CRC Press, 1987.
- [40] Young-Moon Park, Myeon-Song Choi, and K.Y. Lee. An optimal tracking neuro-controller for nonlinear dynamic systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 7(5):1099–1110, 1996.
- [41] Michael A. Patterson and Anil V. Rao. Gpops - ii: A matlab software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 41, 10 2014.
- [42] Anastassios E Petropoulos and James M Longuski. Shape-based algorithm for the automated design of low-thrust, gravity assist trajectories. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 41:787–796, 2004.
- [43] L.S. Pontryagin. *Mathematical theory of optimization processes*. 1987.

- [44] George Cristian Potrivitu, Yufei Sun, Muhammad Wisnuh Aggriawan bin Rohaizat, Oleksii Cherkun, Luxiang Xu, Shiyong Huang, and Shuyan Xu. A review of low-power electric propulsion research at the space propulsion centre singapore, 6 2020.
- [45] I Michael Ross. User's manual for dido: A matlab application package for solving optimal control problems, 2004.
- [46] I Michael Ross. A historical introduction to the convector mapping principle, 2005.
- [47] I. Michael Ross. *A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control*. Collegiate Publishers, 2015.
- [48] I Michael Ross and Mark Karpenko. A review of pseudospectral optimal control: From theory to flight. *Annual Reviews in Control*, 36:182–197, 2012.
- [49] C. G. Jr. Sauer. Optimization of multiple target electric propulsion trajectories, 1973.
- [50] Ehsan Taheri and Ossama Abdelkhalik. Fast initial trajectory design for low-thrust restricted-three-body problems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 38:1–15, 10 2015.
- [51] Ehsan Taheri and Ossama Abdelkhalik. Initial three-dimensional low-thrust trajectory design. *Advances in Space Research*, 57:889–903, 2 2016.
- [52] Ehsan Taheri, Vishala Arya, and John L. Junkins. Costate mapping for indirect trajectory optimization. *Astrodynamics*, 5:359–371, 12 2021.
- [53] F. Topputo and C. Zhang. Survey of direct transcription for low-thrust space trajectory optimization with applications, 2014.
- [54] Sergio Cuevas Del Valle, Ester Velázquez Navarro, Hodei Urrutxua, and Pablo Solano-López. A differentially-flat, pseudospectral, shape-based solver and embedded mpc for berthing with non-cooperative targets, 2024.
- [55] M. Vasile, Paolo De Pascale, and Stefano Casotto. On the optimality of a shape-based approach based on pseudo-equinoctial elements. *Acta Astronautica*, 61:286–297, 6 2007.

- 
- [56] Gregory J Whien. Mystic: Implementation of the static dynamic optimal control algorithm for high-fidelity, low-thrust trajectory design, 2006.
- [57] S. N. Williams. An introduction to the use of varitop: A general purpose low-thrust trajectory optimization program., 1994.
- [58] Zhaoming Xie, C. Karen Liu, and Kris Hauser. Differential dynamic programming with nonlinear constraints. In *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 695–702, 2017.