

Estática

1

Principios Generales



Universidad
Rey Juan Carlos

Depósito Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

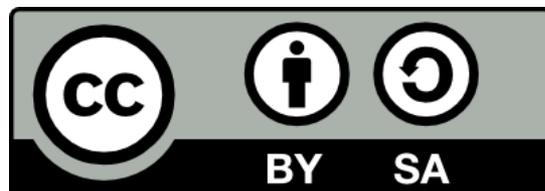
©2024 Manuel Arrayás Chazeta, Carlos Uriarte González

Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Attribution-ShareAlike 4.0 International” de Creative Commons,

disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Objetivos

- Cantidades básicas e idealizaciones de la mecánica
- Leyes de Newton de movimiento y gravitación
- SI sistema de unidades y uso de prefijos
- Cálculo numérico
- Consejos para resolver problemas

Índice

1. Mecánica
2. Conceptos Fundamentales
3. Unidades de medida.
4. Sistema Internacional de Unidades
5. Cálculo numérico
6. Procedimiento general de análisis

1.1 Mecánica

- La mecánica puede dividirse en tres ramas:
 - Mecánica del cuerpo rígido.
 - Mecánica de cuerpos deformables
 - Mecánica de fluidos.
- La mecánica de cuerpo rígido es la base para las otras dos. Se divide en:
 - Estática
 - Dinámica

1.1 Mecánica

- Estática – Estudia las condiciones de equilibrio de los cuerpos. Esto es, en que condiciones permanecen:
 - En reposo
 - En movimiento con velocidad constante
- Dinámica – Estudia el movimiento acelerado de los cuerpos.

Nota: La estática puede considerarse un caso especial de los que estudia la dinámica. El caso en el que la aceleración es 0. No obstante, la trataremos separadamente ya que las construcciones están diseñadas para que permanezcan en equilibrio.

1.2 Conceptos Fundamentales

Cantidades básicas

1. Masa
 - Mide la cantidad de materia de un cuerpo, y por tanto la inercia y la atracción gravitatoria de ese cuerpo.
2. Tiempo
 - En dinámica lo trataremos como una sucesión de eventos, aunque en estática no interviene.
3. Longitud
 - Localiza la posición de un punto en el espacio y sirve para determinar el tamaño de un sistema.
4. Fuerza
 - La acción entre cuerpos que es capaz de modificar sus estados de reposo o movimiento. Puede ser a distancia.

1.2 Conceptos Fundamentales

Idealizaciones:

- **Partícula:** Posee masa, pero no tamaño. Por ejemplo, el tamaño de la tierra puede considerarse despreciable comparado con su órbita. Cuando un cuerpo se considera una partícula, los principios de la mecánica se simplifican ya que la geometría del cuerpo no entra en el análisis del problema.
- **Cuerpo rígido:** Un cuerpo rígido puede considerarse una combinación de muchas partículas que permanecen a la misma distancia unas de otras, antes y después de aplicar fuerzas sobre el sistema. Las propiedades materiales del cuerpo no tienen que tenerse en cuenta. En general esta idealización es válida si se pueden despreciar la deformaciones que sufre el cuerpo.

1.2 Conceptos Fundamentales

Idealizaciones:

- **Fuerza concentrada en un punto:** Representa el efecto de las cargas (o fuerzas) aplicadas sobre una cierta superficie de un cuerpo, como si estuvieran aplicadas en un solo punto, cuando el área sobre la que se aplican es pequeña en comparación con las dimensiones del cuerpo.

1.2 Conceptos Fundamentales



El gancho A puede considerarse como una partícula, ya que todas las fuerzas concurren en un punto.



El acero no se deforma demasiado, por lo que se puede considerar la rueda como un cuerpo rígido, sobre la que actúa una fuerza concentrada debida al raíl.

1.2 Conceptos Fundamentales

Idealizaciones

1. Partículas

- Tienen masa pero no tamaño

1. Cuerpo rígido

- Una combinación de muchas partículas

1. Fuerza concentrada

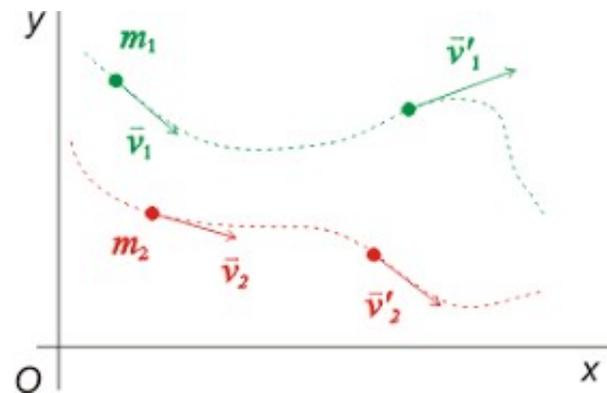
- El efecto de una carga

1.2 Conceptos fundamentales

Las leyes de Newton:

- **Primera ley**

“Toda partícula, inicialmente en reposo, o moviéndose en una línea recta con velocidad constante, permanecerá en ese estado siempre que no esté sujeta a una fuerza neta distinta de cero.



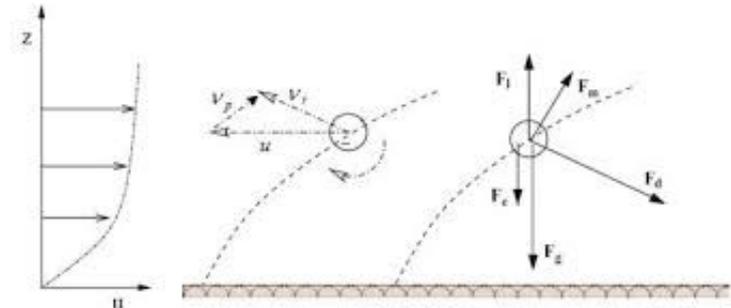
1.2 Conceptos fundamentales

Las leyes de Newton:

- **Segunda ley**

“Toda partícula, sujeta a una fuerza neta \mathbf{F} , experimenta una aceleración \mathbf{a} que tiene la misma dirección que la fuerza, y una magnitud directamente proporcional a la fuerza.”

$$F = m a$$



1.2 Conceptos Fundamentales

Las leyes de Newton:

- **Tercera ley**

“Las fuerza mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales.”



1.2 Conceptos fundamentales

Ley de Newton de la atracción gravitatoria

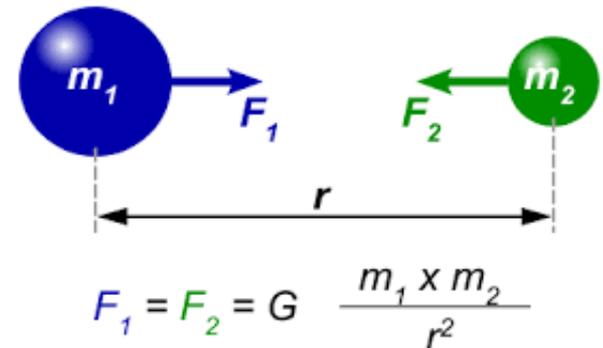
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

F = fuerza de gravitación entre dos partículas

G = constante universal de la gravitación

m_1, m_2 = masa de cada partícula

r = distancia entre las dos partículas



Peso: $W = G \frac{m M_e}{r^2}$

Haciendo $g = G M_e / r^2$ resulta

$$W = m g$$

1.3 Unidades de Medidas

Unidades SI

- SI son las siglas de *Système International d'Unités*.
- **F = ma** implica que
 - Son 3 las unidades *base*, que deben de ser *definidas*.
 - 4th unidad se deriva de la ecuación.
- El SI especifica la longitud en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la masa en kilogramos (kg).
- La unidad de Fuerza, el Newton (N), se deriva de la ecuación $F = ma$.

1.3 Unidades de medida SI

Nombre	Longitud	Tiempo	Masa	Fuerza
Sistema Internacional de unidades (SI)	Metro (m)	Segundo (s)	Kilogramo (kg)	Newton (N)

1.3 Unidades de medida

- A nivel del mar, a 45 grados de latitud,
 $g = 9.806\ 65\ \text{m/s}^2$
- Para los cálculos usaremos
 $g = 9.81\ \text{m/s}^2$
- Así,
 $W = mg\ (g = 9.81\text{m/s}^2)$
- Por lo tanto, un cuerpo de 1 kg tiene un peso de 9.81 N, uno de 2 kg pesará 19.62 N.

1.4 El Sistema Internacional

Prefijos

- Para cantidades numéricas grandes o pequeñas, se puede usar una unidad modificada por un prefijo.
- Cada prefijo representa un múltiplo o un submúltiplo de una unidad.

Ej: $4,000,000 \text{ N} = 4000 \text{ kN}$ (kilo-newton)

$= 4 \text{ MN}$ (mega- newton)

$0.005 \text{ m} = 5 \text{ mm}$ (mili-metro)

1.4 El sistema internacional de unidades(SI)

TABLE 1-2 Prefixes

	Exponential Form	Prefix	SI Symbol
<i>Multiple</i>			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
<i>Submultiple</i>			
0.001	10^{-3}	milli	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

1.5 Cálculos Numéricos

Homogeneidad Dimensional

- Cada término debe expresarse en las mismas unidades.
- La ecuación mantiene su homogeneidad dimensional.
- Todos los términos pueden reemplazarse usando un sistema (SI)



1.5 Cálculos Numéricos

Cifras Significativas

- La precisión de un número está especificada por el número de cifras significativas que contiene.
- Una cifra significativa es cualquier cifra, incluida el cero, ej. 5604 and 34.52 tienen 4 cifras significativas.
- Cuando un número empieza o acaba en cero, usamos prefijos que aclaran el número de cifras significativas, ej. 400 m con una cifra significativa sería 0.4 km o 0.4×10^3 m.

1.5 Cálculos Numéricos

Redondeo

- La precisión final no debe de ser mayor que la de los datos iniciales.
- Las calculadoras o las computadoras suelen dar respuestas con más cifras significativas que los datos usados.
- Por lo tanto, los resultados deben de ser siempre redondeados a un número apropiado de cifras significativas.

1.5 Cálculos Numéricos

Cálculos

- Retenga un número mayor de dígitos para aumentar la precisión.
- Haga primero las operaciones con números que son del mismo orden.
- Redondee la respuesta a 3 cifras significativas si no se especifica otra cosa.

1.6 Consejos para los problemas

Para resolver problemas, es importante actuar de una manera lógica y ordenada:

1. Relaciona la situación física que se presenta con la teoría.
2. Dibuja diagramas y tabula los datos del problema.
3. Aplica los principios en forma matemática.
4. Resuelve las ecuaciones, pero comprueba antes y después la homogeneidad dimensional.
5. Da la respuesta con las cifras significativas correctas.
6. Júzgala técnicamente y usa el sentido común.

Ejemplo

Convierta 2 km/h a m/s.

Solución

$$2 \text{ km/h} = \frac{2 \text{ km}}{h} \left(\frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = 0.556 \text{ m/s}$$

Recuerde expresar la respuesta final con 3 cifras significativas.

QUIZ

1. La mecánica trata del estudio de lo que le pasa a un cuerpo cuando se le aplica/aplican _____.

- A) un campo magnético B) calor
C) fuerzas D) neutrones E) lasers

2. _____ permanece como la base para la mayoría de las aplicaciones en ingeniería y construcción.

- A) Mecánica newtoniana B) Mecánica relativista
C) Mecánica griega D) Mecánica euclídea

QUIZ

3. Evalúe la situación en la que la masa (kg), la fuerza (N), y la longitud (m) son las unidades base recomendadas.
- A) Un sistema distinto al SI debe de formularse.
 - B) Solo tenemos que la unidad de tiempo debe cambiarse de segundo a otra cosa.
 - C) No hace falta realizar ningún cambio.
 - D) No podemos tener la situación planteada.

QUIZ

4. Dé la mejor razón por la que se van a dar los resultados con tres cifras significativas

A) Históricamente, las tablas numéricas no tenían más de tres cifras significativas.

B) Tres cifras significativas dan una precisión mayor que el uno por ciento.

C) Las tablas de materiales usados en las aplicaciones de ingeniería y construcción tienen tres cifras significativas.

D) La mayoría de los datos originales que se usan en ingeniería para calcular no tienen más precisión que el uno por ciento.

QUIZ

5. Para un problema de estática los cálculos dan 12345,6 N. Escriba la respuesta que debería escribir.

A) 12345.6 N B) 12.3456 kN C) 12 kN

D) 12.3 kN E) 123 kN

Estática

2

Vectores de Fuerzas



Universidad
Rey Juan Carlos

Depósito Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

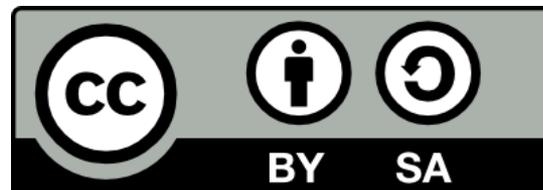
©2024 Manuel Arrayás Chazeta, Carlos Uriarte González

Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Attribution-ShareAlike 4.0 International” de Creative Commons,

disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Objetivos

- Regla del paralelogramo.
- Vectores en forma cartesiana.
- Producto escalar y ángulo entre 2 vectores.

Índice

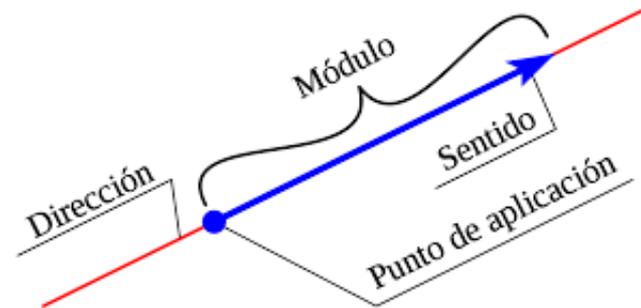
1. Escalares y vectores.
2. Operaciones con vectores.
3. Suma vectorial de fuerzas.
4. Suma de un sistema de fuerzas coplanares.
5. Vectores cartesianos.
6. Suma y resta de vectores cartesianos.
7. Vector posición.
8. Vector fuerza dirigido a lo largo de una línea.
9. Producto escalar.

2.1 Escalares and Vectores

- Escalar
 - Es una cantidad caracterizada por un número positivo o negativo (y en Física siempre especificaremos su unidad).
 - Lo representamos a veces por una letra: A
- Ej. de magnitudes escalares:
Masa: 10 kg, volumen: 30 m³, longitud: 1.12 cm.

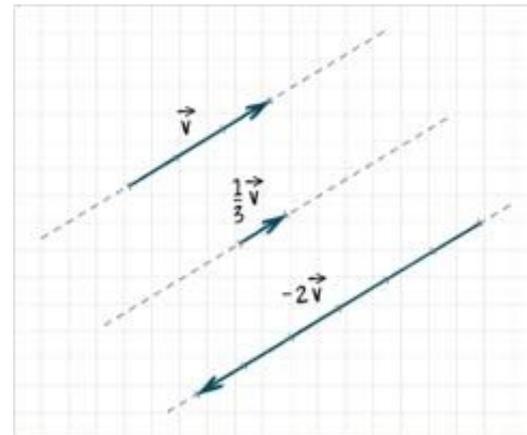
2.1 Escalares and Vectores

- Vector
 - Una cantidad que tiene magnitud y dirección, ej. posición, fuerza y momento.
 - Representado por una letra con una flecha. \vec{A}
 - Su magnitud es un número positivo (con su correspondiente unidad si designa una magnitud física). $|\vec{A}|$
 - A veces también un vector se presenta como **A** y su magnitud como A



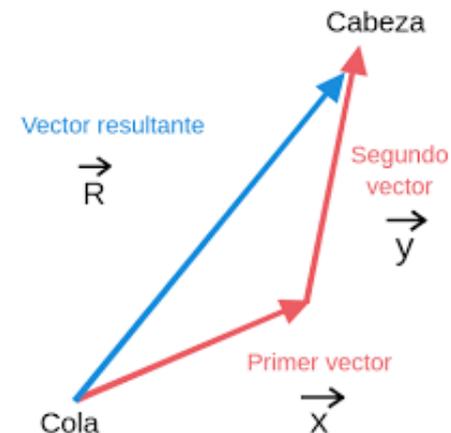
2.2 Operaciones Vectoriales

- Multiplicación y división de un Vector por un Escalar
 - Producto de vector “**A**” y escalar “**a**”: $a\mathbf{A}$
 - Magnitud = $|a\mathbf{A}|$
 - La ley de la multiplicación vale para la división:
 $\mathbf{A}/a = (1/a) \mathbf{A}, a \neq 0$



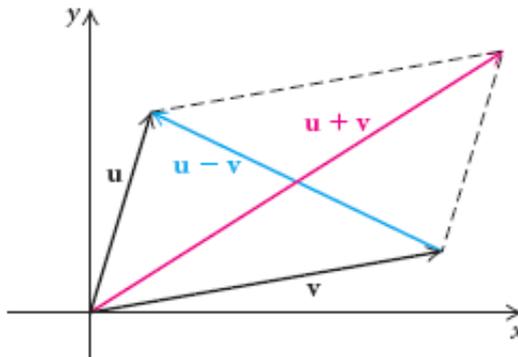
2.2 Operaciones Vectoriales

- Adición vectorial
 - Adición de dos vectores **A** y **B** resulta un vector **R** obtenido por la *regla del paralelogramo*.
 - El vector **R** resulta de la *construcción triangular*.
 - Conmutativa. $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
 - Caso especial: **A** y **B** son *colineales* (tienen la misma línea de acción).



2.2 Operaciones Vectoriales

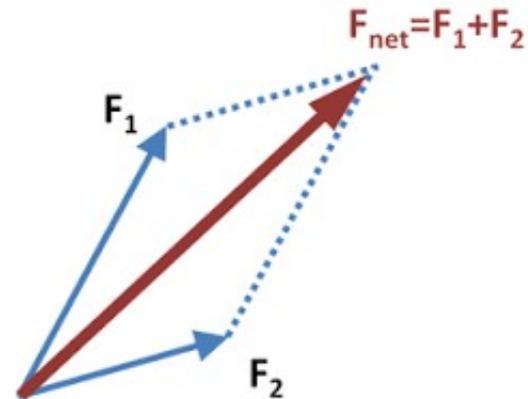
- Sustracción vectorial
 - Caso especial de adición
 - $\mathbf{R}' = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$
 - Se aplica la regla de adición vectorial.



2.3 Adición vectorial de Fuerzas

Encontrando la Fuerza Resultante

- *Se emplea la regla del Paralelogramo*



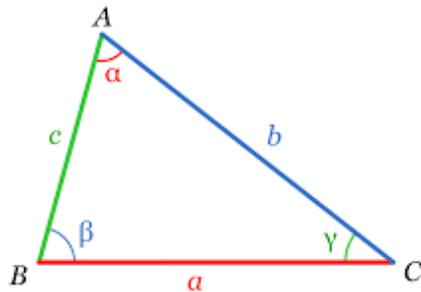
- Resultante,

$$\mathbf{F}_R = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

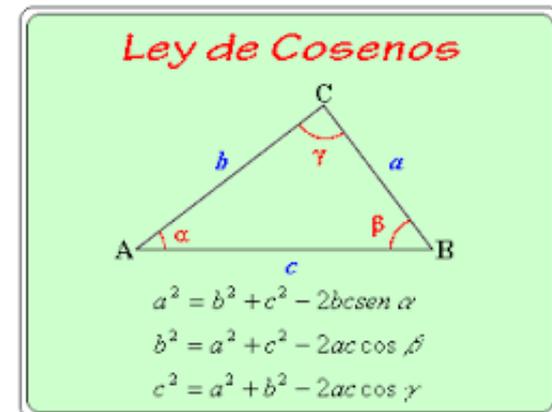
2.3 Adición vectorial de Fuerzas

Trigonometría

- Toma la mitad del paralelogramo.
- La magnitud de la resultante puede determinarse con la *ley de los cosenos*.
- La dirección de la resultante puede determinarse con la *ley de los senos*.
- La magnitud de las componentes puede determinarse con la *ley de los senos*.



$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

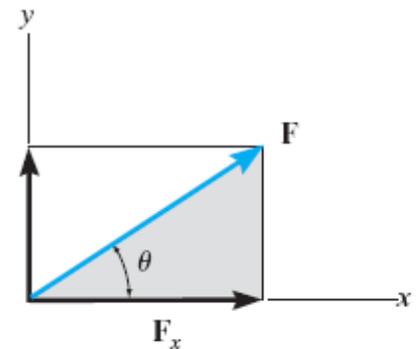


2.4 Adición cartesiana

- Notación escalar
 - Los ejes x,y tienen sentido positivo y negativo.
 - Se expresa cada fuerza en componentes escalares.

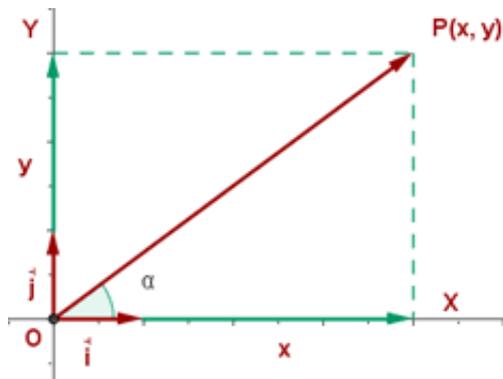
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$F_x = F \cos \theta \quad , \quad F_y = F \sin \theta$$



2.4 Adición cartesiana

- Notación vectorial cartesiana
 - Se usan vectores cartesianos unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} para designar las direcciones x , y .
 - Los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} tienen de magnitud la unidad sin dimensiones ($= 1$)
 - Las componentes cartesianas de las fuerzas son siempre una cantidad positiva con dimensiones, representadas por los escalares F_x and F_y



$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

2.4 Adición cartesiana de un sistema coplanar de fuerzas

- Fuerza coplanar resultante

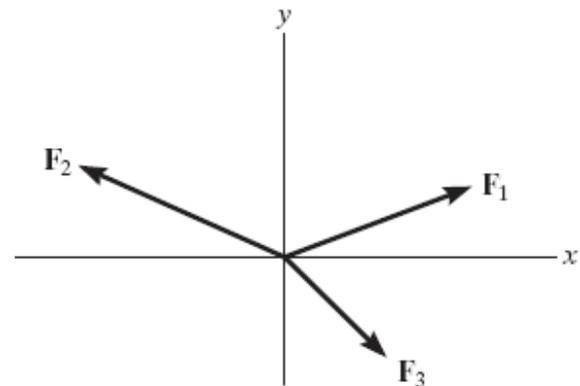
En el caso de más de dos fuerzas coplanares:

- Se resuelve cada fuerza en las componentes x,y
- Suma algebraica de las respectivas componentes
- La fuerza resultante se encuentra usando la regla del paralelogramo para las dos componentes x-y
- En notación cartesiana:

$$F_1 = F_{1x} i + F_{1y} j$$

$$F_2 = -F_{2x} i + F_{2y} j$$

$$F_3 = F_{3x} i - F_{3y} j$$



2.4 Adición de un sistema coplanar de fuerzas

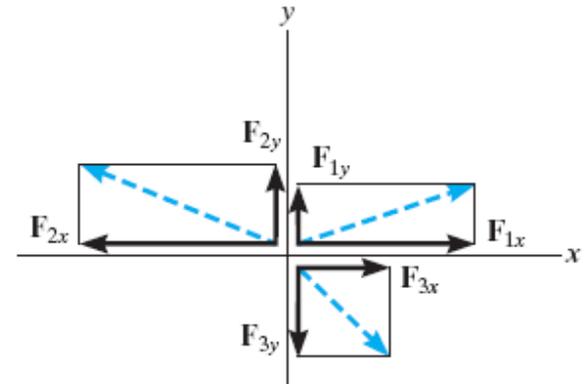
- Fuerza Resultante
 - El vector resultante es

$$\begin{aligned}\overline{F}_R &= \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 \\ &= (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j}\end{aligned}$$

- O en notación escalar

$$F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$



2.4 Adición de un sistema coplanar de fuerzas

- Fuerza coplanar resultante

- En todos los casos tenemos

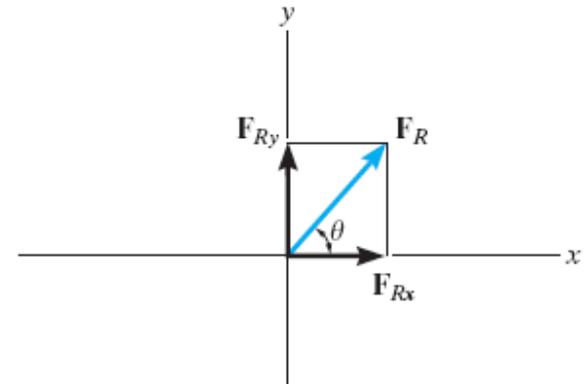
$$F_{Rx} = \sum F_x$$

$$F_{Ry} = \sum F_y$$

* No olvide asignar el signo apropiado

- La magnitud de \mathbf{F}_R se encuentra usando el teorema de Pitágoras.

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$

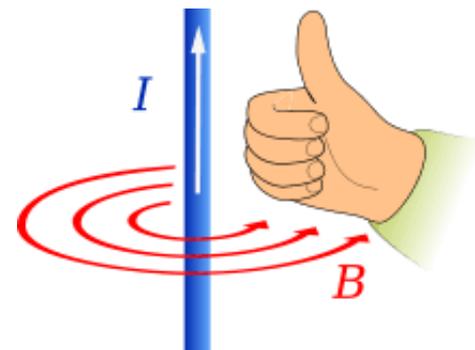


2.5 Vectores cartesianos en 3D

- Sistema de coordenadas orientado

Un sistema rectangular o cartesiano está orientado según la mano derecha si:

- El pulgar de la mano derecha apunta en dirección del eje z positivo, al agarrar de x a y .
- El eje z para un problema 2D apuntaría perpendicularmente hacia afuera de la página.



2.5 Vectores cartesianos

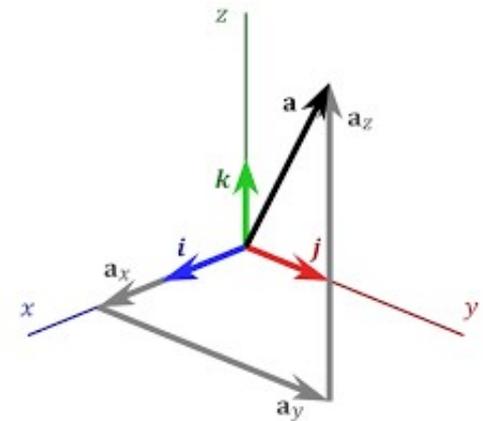
- Componentes rectangulares de un vector
 - Un vector \mathbf{A} puede tener una, dos o tres componentes rectangulares a lo largo de los ejes x - y - z , dependiendo de su orientación.
 - Por dos aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}_z$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

- Combinando las ecuaciones, \mathbf{A} puede expresarse como

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$$

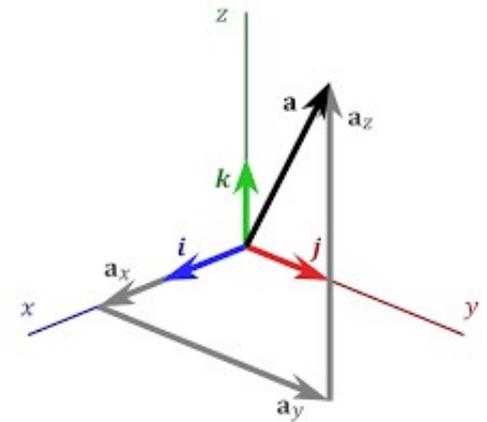


2.5 Vectores cartesianos

- Representación cartesiana
 - Las 3 componentes de \mathbf{A} actúan en las direcciones \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

Note que la magnitud y dirección de cada componente se pueden determinar usando las reglas ya vistas.



2.5 Vectores cartesianos

- Magnitud de un vector cartesiano

- Mirando el triángulo azul,

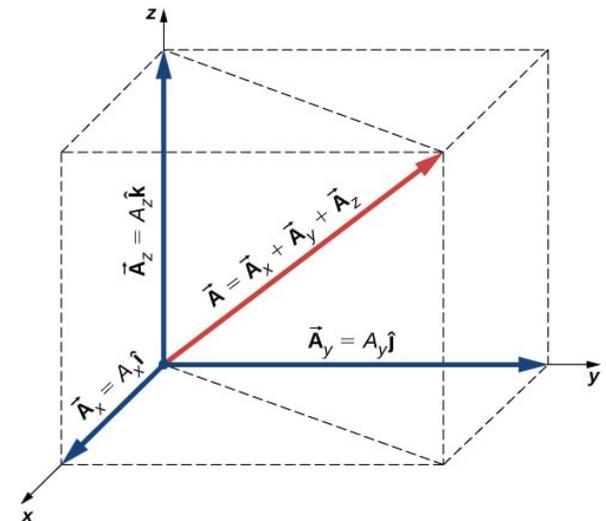
$$A = \sqrt{A'^2 + A_z^2}$$

- Mirando el triángulo sombreado,

$$A' = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

- Combinando las dos ecuaciones resulta la magnitud de **A**

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

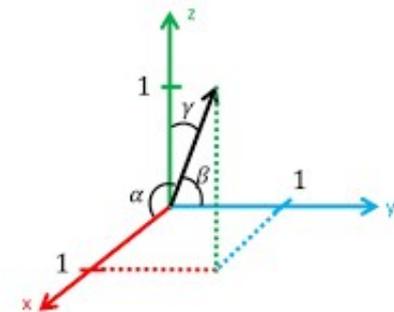


2.5 Vectores cartesianos

- Dirección de un vector cartesiano
 - La orientación de \mathbf{A} se define según los ángulos α , β , γ medidos desde el inicio de \mathbf{A} y los ejes x , y , z positivos.
 - Se definen $0^\circ \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 180^\circ$
 - Los *cosenos directores* de \mathbf{A} son

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{A} \quad \cos \beta = \frac{A_y}{A}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

- Los ángulos α , β , γ pueden determinarse invirtiendo el coseno director

2.5 Vectores cartesianos

- Vector unitario
 - La dirección de \mathbf{A} puede especificarse usando un vector unitario.
 - Un vector unitario tiene una magnitud igual a 1.
 - Si \mathbf{A} es un vector de magnitud $A \neq 0$, un vector unitario en la misma dirección de \mathbf{A} puede expresarse como $\mathbf{u}_A = \mathbf{A} / A$.

De manera que:

$$\mathbf{A} = A \mathbf{u}_A$$

2.5 Vectores cartesianos

- Dirección de un vector cartesiano
 - Los ángulos α , β , γ pueden determinarse invirtiendo el coseno director.

Dado

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

podemos escribir el vector dirección unitario:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{A} / A = (A_x/A) \mathbf{i} + (A_y/A) \mathbf{j} + (A_z/A) \mathbf{k}$$

siendo

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

2.5 Vectores cartesianos

- Dirección de un vector cartesiano
 - \mathbf{u}_A se puede expresar también como:
$$\mathbf{u}_A = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

Ya que $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ $|\mathbf{u}_A| = 1$, tenemos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

- Luego podemos expresar \mathbf{A} en forma cartesiana como:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A\mathbf{u}_A \\ &= A\cos\alpha\mathbf{i} + A\cos\beta\mathbf{j} + A\cos\gamma\mathbf{k} \\ &= A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}\end{aligned}$$

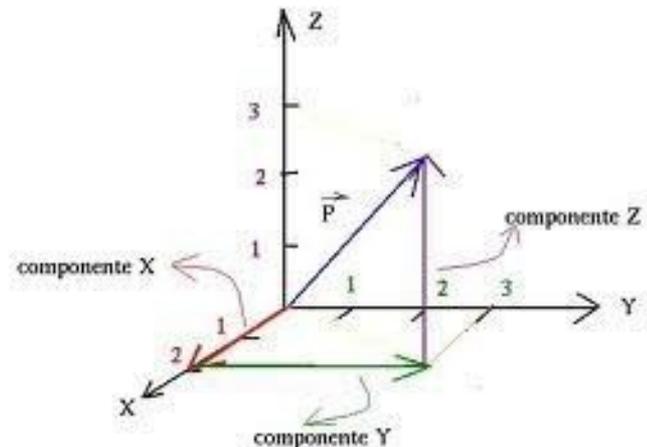
2.6 Suma y resta de vectores cartesianos

- Sistemas concurrente de fuerzas
 - La resultante es el vector suma de todas las fuerzas del sistema.

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k}$$

2.7 Vector Posición

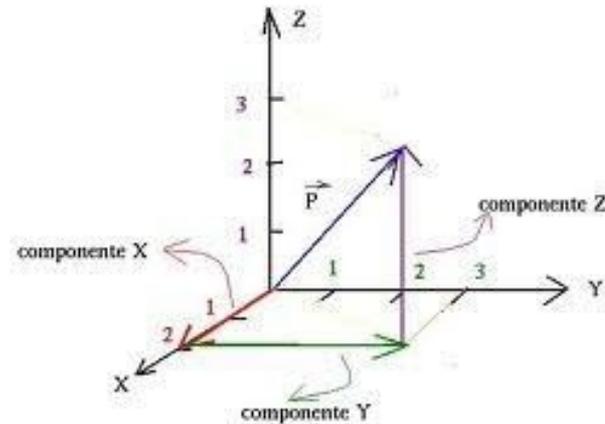
- Coordenadas x, y, z
 - Sistema orientado por la mano derecha.
 - El eje z positivo apunta hacia arriba, midiendo la altura de un objeto o la altitud del punto.
 - Los puntos se miden relativos a un origen O .



2.7 Vectores de posición

Vector posición

- El vector posición \mathbf{r} se define como un vector que localiza un punto en el espacio respecto a otro punto.
- Ej. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$



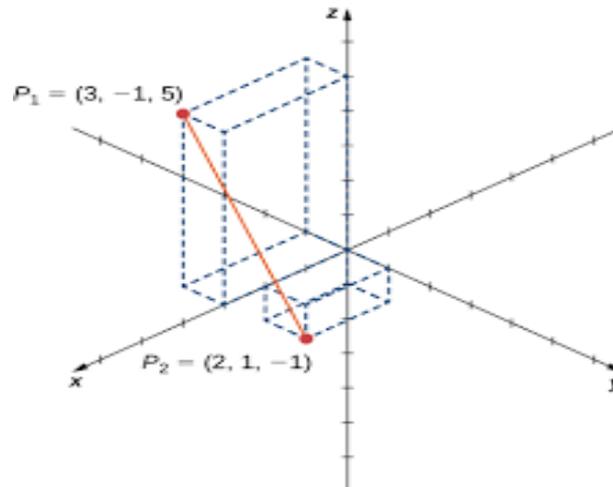
2.7 Vectores de posición

Vector posición de B respecto a A:

- La suma de vectores da $\mathbf{r}_A + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B$
- Podemos escribir entonces

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$

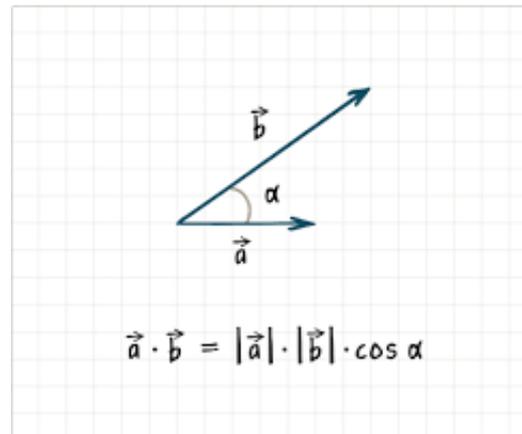


2.9 Producto escalar

- El producto escalar de los vectores **A** y **B** se escribe como **A·B**
- Define el producto entre las magnitudes de **A** y **B** y el coseno del ángulo que forman entre ellos.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad \text{where } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

- Recibe el nombre de producto escalar porque resulta un escalar.



2.9 Producto escalar

- Leyes o propiedades que posee

1. Propiedad conmutativa

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

2. Multiplicación por un escalar

$$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})a$$

3. Propiedad distributiva

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

2.9 Producto escalar

- Formulación cartesiana
 - Producto escalar de vectores cartesianos unitarios:
 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1)\cos 0^\circ = 1$
 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1)\cos 90^\circ = 0$
 - De manera similar:
 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$
 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$

2.9 Producto escalar

- Formulación cartesiana
 - Producto de 2 vectores **A** y **B**
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
- Aplicaciones
 - *El ángulo formado entre dos vectores o dos líneas que se intersectan.*
$$\theta = \cos^{-1} [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) / (AB)] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$
 - *Las componentes de un vector paralelo y perpendicular a una línea.*
$$A_a = A \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

QUIZ

1. ¿Cuál de las siguientes es una cantidad escalar?

- A) Fuerza B) Posición C) Masa D) Velocidad

2. Para la adición de vectores, se debe usar la ley de

_____ .

A) Newton (la Segunda)

B) la aritmética

C) Pascal

D) el paralelogramo

Estática

3

Equilibrio de una Partícula



Universidad
Rey Juan Carlos

Depósito Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

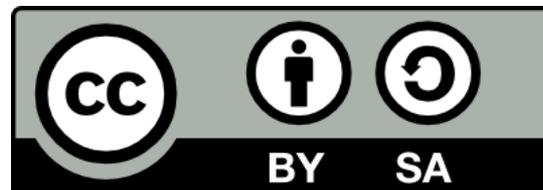
©2024 Manuel Arrayás Chazeta, Carlos Uriarte González

Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Attribution-ShareAlike 4.0 International” de Creative Commons,

disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Objetivos

- Concepto de diagrama de cuerpo libre para una partícula.
- Solución de problemas de equilibrio de una partícula usando las ecuaciones de equilibrio.

Índice

1. Condiciones de equilibrio de una partícula.
2. Diagrama de cuerpo libre.
3. Sistema coplanar.
4. Sistemas de fuerzas tridimensionales.

3.1 Condición para el equilibrio de una partícula

- Una partícula está en *equilibrio* si:
 - Está en reposo.
 - Se mueve a velocidad constante.

- De la primera ley de Newton,

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

siendo $\sum \mathbf{F}$ la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

3.1 Condición para el equilibrio de una partícula

- De la segunda ley de Newton

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

- Cuando las fuerzas cumplen las condiciones de la primera ley de Newton,

$$m\mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{a} = 0$$

por lo que la partícula se mueve con velocidad constante o está en reposo.

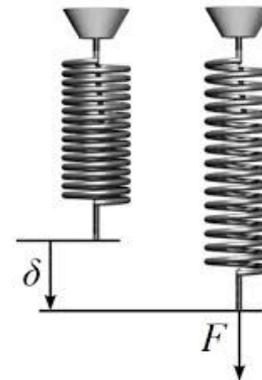
3.2 Diagrama de cuerpo libre

- Permite representar todas las fuerzas que actúan sobre una partícula ($\sum \mathbf{F}$).
- Es un esquema que muestra la partícula libre de su entorno, con todas las fuerzas que actúan sobre ella.
- Consideraremos dos casos comunes de conexión con el entorno:
 - Muelles
 - Cables y Poleas

3.2 Diagrama de cuerpo libre

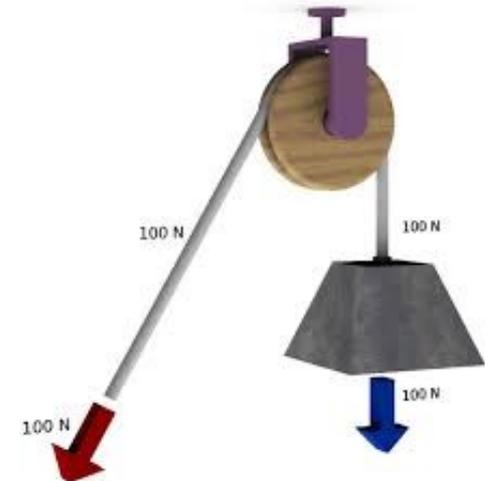
- Muelles
 - Muelle lineal elástico: el cambio en su longitud es proporcional a la fuerza que actúa sobre él
 - *Constante del muelle o rigidez k* : define la elasticidad del muelle.
 - La magnitud de la fuerza cuando el muelle se alarga o comprime

$$\rightarrow F = ks$$



3.2 Diagrama de cuerpo libre

- Cables y poleas
 - Los cables (o cuerdas) se suponen que tienen peso despreciable y no pueden deformarse.
 - La Tensión siempre actúa en la dirección del cable.
 - La fuerza de Tensión debe de tener una magnitud constante en equilibrio.
 - Para cualquier ángulo θ , el cable está sujeto a tensión T constante.



3.2 Diagrama de cuerpo libre

Procedimiento para dibujar un DCL

1. Esboza las formas del cuerpo
2. Dibuja todas las fuerzas
 - Fuerzas activas: movimiento de la partícula.
 - Fuerzas reactivas: ligaduras que evitan el movimiento.
3. Identifica cada fuerza
 - Las fuerzas conocidas en magnitud and dirección
 - Usa letras para representar las magnitudes y direcciones

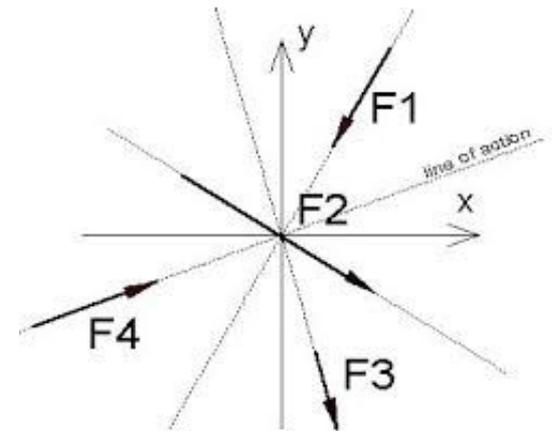
3.3 Sistema Coplanar

- Una partícula sujeta a fuerzas coplanares en el plano x-y.
- Lo resolvemos en las componentes **i**, **j** para el equilibrio

$$\sum \mathbf{F}_x = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_y = 0$$

- Las ecuaciones escalares de equilibrio requieren que la suma algebraica de las componentes x, y son igual a cero.
equal to zero



3.4 Sistemas de fuerzas 3D

- Para la partícula en equilibrio

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

- Resolviendo en componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}

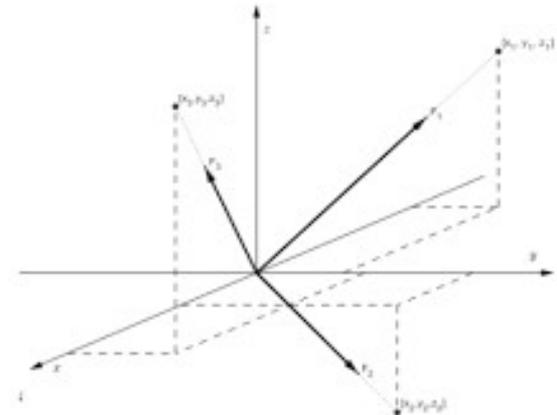
$$\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = 0$$

- 3 ecuaciones escalares representando la suma algebraica de las fuerzas en x , y , z

$$\sum F_x \mathbf{i} = 0$$

$$\sum F_y \mathbf{j} = 0$$

$$\sum F_z \mathbf{k} = 0$$



3.4 Sistemas de fuerzas 3D

- Procedimiento de análisis

DCL

- Elija los ejes x, y, z
- Etiquete todas las fuerzas (conocidas y no conoc)

Ecuaciones de Equilibrio

- Aplique $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$
- Sustituya los vectores en $\sum \mathbf{F} = 0$ y haga las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , $\mathbf{k} = 0$
- Resultados con signo negativo indican que el sentido de la fuerza es contrario al dibujado.

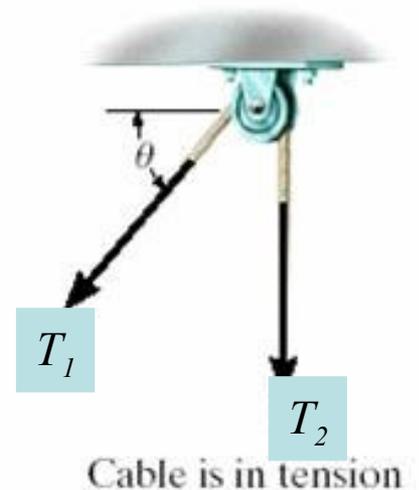
QUIZ

1. Cuando una partícula está en equilibrio, la suma de las fuerzas que actúan sobre ella es igual a ____ .

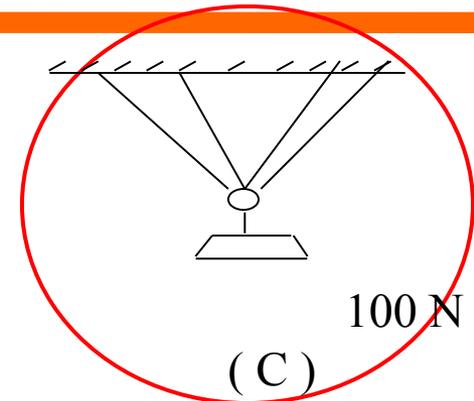
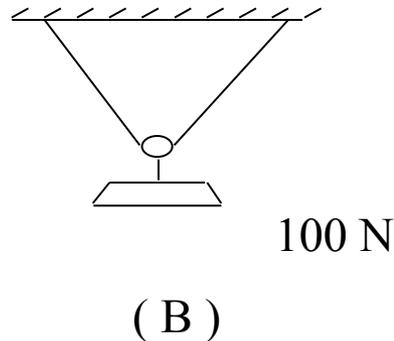
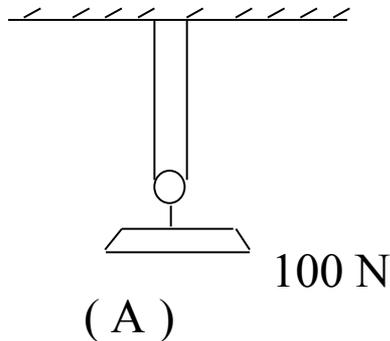
- A) una constante B) un número positivo C) cero
D) un número negativo E) un número entero

2. Para una polea y cable sin fricción, las tensiones en los cables están relacionadas como

- A) $T_1 > T_2$
B) $T_1 = T_2$
C) $T_1 < T_2$
D) $T_1 = T_2 \sin \theta$



QUIZ



3. Asumiendo que conoce la geometría de los cables, en cuál sistema no se podría determinar las fuerzas que actúan?

4. ¿Por qué?

A) El peso es demasiado grande.

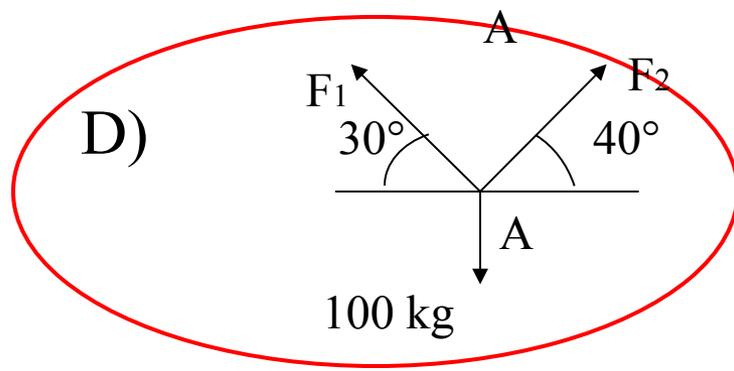
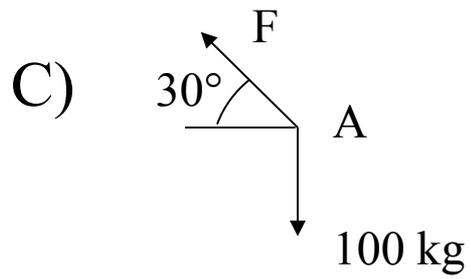
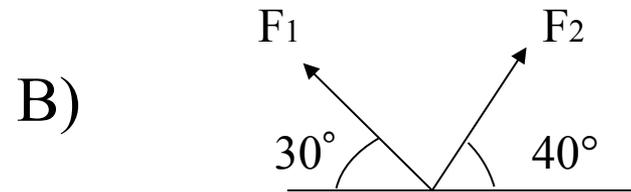
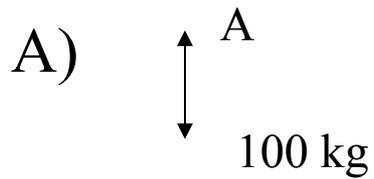
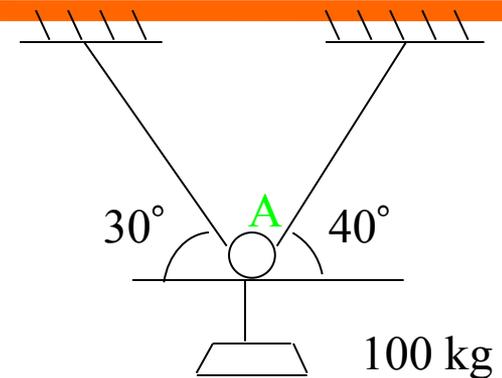
B) Los cables son demasiados delgados.

C) Hay más incógnitas que ecuaciones.

D) Hay pocos cables para un peso de 100 kg.

QUIZ

5. Seleccione el DCL para A.



QUIZ

6. La partícula P está en equilibrio con 5 fuerzas actuando en un espacio 3-D. ¿Cuántas ecuaciones escalares de equilibrio se pueden escribir para P?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. En 3-D, cuando una partícula está en equilibrio, ¿cuál de las siguientes ecuaciones es válida?

A) $(\sum F_x) \mathbf{i} + (\sum F_y) \mathbf{j} + (\sum F_z) \mathbf{k} = 0$

B) $\sum \mathbf{F} = 0$

C) $\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$

D) Todas.

E) Ninguna.

QUIZ

8. En 3-D, cuando se conoce la dirección de una fuerza pero no su magnitud, ¿cuántas incógnitas correspondientes a esa fuerza quedan?

- A) Una B) Dos C) Tres D) Cuatro

9. Si sobre una partícula actúan fuerzas tridimensionales y está en equilibrio estático, las componentes de la fuerza resultante ____ .

A) deben de sumar cero, ej. $-5 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$

B) deben de ser igual a cero, ej. $0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$

C) deben de ser positivas, ej. $5 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}$

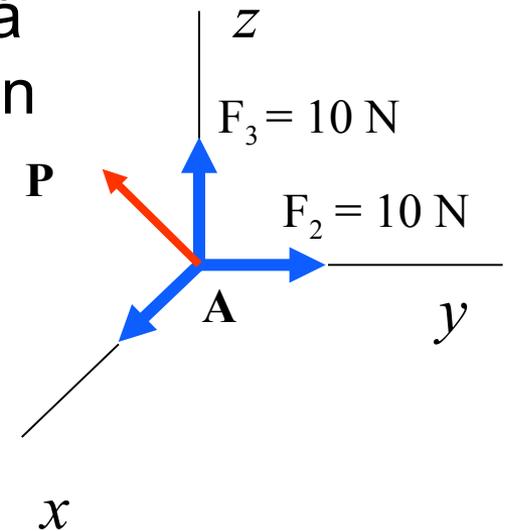
D) deben de ser negativas, ej. $-5 \mathbf{i} - 5 \mathbf{j} - 5 \mathbf{k}$

QUIZ

10. Cuatro fuerzas actúan en A que está en equilibrio. Seleccione la expresión correcta para la fuerza \mathbf{P} .

- A) $\{-20 \mathbf{i} + 10 \mathbf{j} - 10 \mathbf{k}\}$ N
- B) $\{-10 \mathbf{i} - 20 \mathbf{j} - 10 \mathbf{k}\}$ N
- C) $\{+ 20 \mathbf{i} - 10 \mathbf{j} - 10 \mathbf{k}\}$ N

D) Ninguna de las anteriores.



12. En 3-D, cuando no se conoce la magnitud ni la dirección de una fuerza, ¿cuántas incógnitas quedan para determinarla?

- A) Una
- B) Dos
- C) Tres
- D) Cuatro

Estática

4

Resultantes de Sistemas de Fuerzas



BY

SA



Universidad
Rey Juan Carlos

Depósito Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

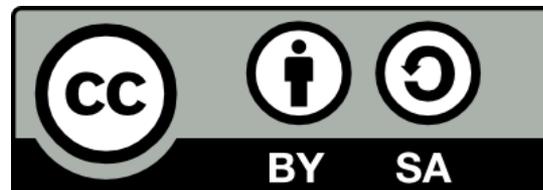
©2024 Manuel Arrayás Chazeta, Carlos Uriarte González

Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Attribution-ShareAlike 4.0 International” de Creative Commons,

disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Objetivos

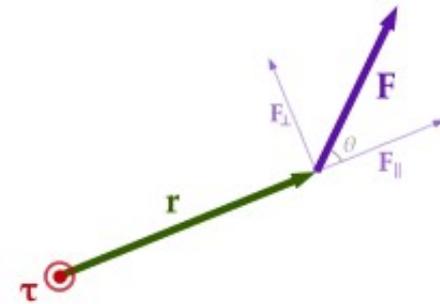
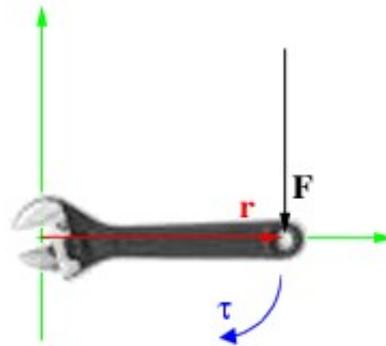
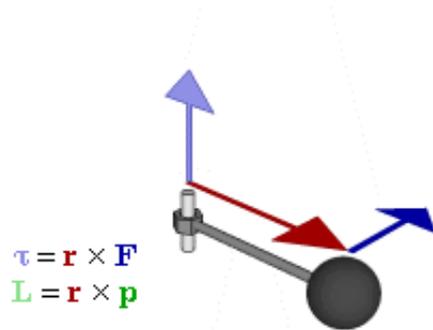
- Concepto de momento de una fuerza en una y dos dimensiones.
- Método para encontrar el momento de una fuerza referido a un eje dado.
- Definir el momento de un par.
- Determinar la resultante de un sistema de fuerzas no concurrente.
- Reducir una carga simple distribuida a una fuerza resultante con una localización específica.

Índice

1. Momento de una fuerza – Construcción escalar
2. Producto vectorial
3. Momento de una fuerza – Formulación vectorial
4. Principio de momentos
5. Momento de una fuerza respecto a un eje
6. Momento de un par
7. Simplificación de un sistema de fuerza y par
8. Simplificación extra de un sistema de fuerza y par
9. Reducción de una carga simplemente distribuida

4.1 Momento de una fuerza – construcción escalar

- *Momento* de una fuerza respecto a un punto o un eje – mide la tendencia de la fuerza que causa la rotación de un cuerpo respecto a un punto o un eje.
- Torque – tendencia a rotar causada por \mathbf{F}_x o momento $(\mathbf{M}_o)_z$



4.1 Momento de una fuerza - construcción escalar

Magnitud

- La magnitud de \mathbf{M}_O ,

$$\mathbf{M}_O = Fd \text{ (Nm)}$$

siendo d = distancia prependicular desde O a la línea de acción de la fuerza



Dirección

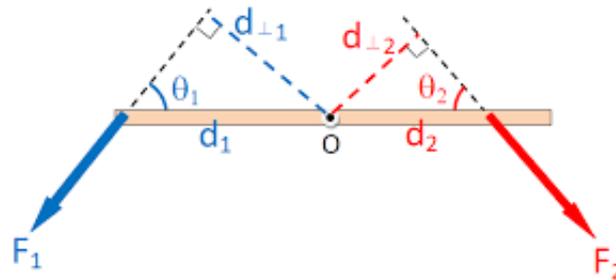
- Dirección mediante “la regla del sacacorchos”

4.1 Momento de una fuerza – construcción escalar

Momento resultante

- Momento resultante,

\mathbf{M}_{R0} = momentos de todas las fuerzas, $\mathbf{M}_{R0} = \sum Fd$



4.2 Producto vectorial

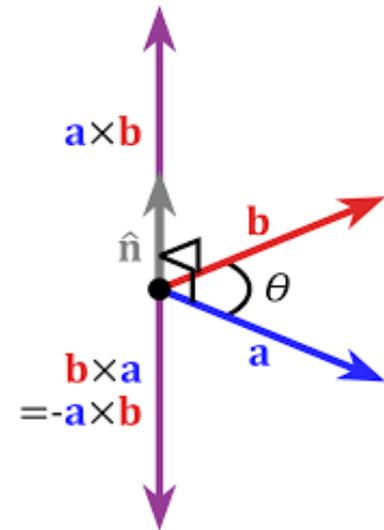
- El producto vectorial de dos vectores **A** y **B** da **C**, el cual se escribe como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Magnitud

- La magnitud de **C** es el producto de las magnitudes de **A** y **B**
- Y depende del ángulo θ , $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

$$C = AB \sin\theta$$



4.2 Producto vectorial

Dirección

- El vector **C** tiene dirección perpendicular al plano que contiene **A** y **B** de manera que **C** viene dado por la regla del sacacorchos.
- El vector **C** resulta

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin\theta)\mathbf{u}_C$$

4.2 Producto vectorial

Propiedades

1. La prop conmutativa no es válida

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

sino,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

• El producto vectorial $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ da un vector en sentido opuesto a \mathbf{C}

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{C}$$

4.2 Producto vectorial

Propiedades

2. Multiplicación por un escalar

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})a$$

3. Propiedad Distributiva

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$$

- El orden de los productos debe de mantenerse ya que no son conmutativos

4.2 Producto vectorial

Formulación cartesiana

- Usamos $C = AB \sin\theta$ para cada par de vectores cartesianos unitarios.
- Podemos expresarlo de manera más compacta como un determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

- El Momento de la fuerza \mathbf{F} respecto a O se puede expresar usando el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

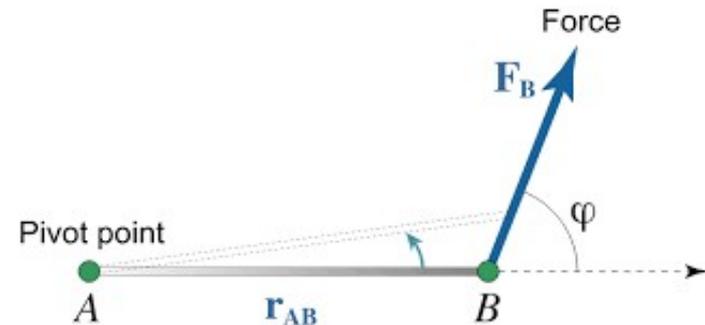
Magnitud

- Ya que la magnitud resulta,

$$M_O = rF \sin\theta$$

- Si \mathbf{r} se aplica en un punto de la línea de acción, ya que $d = r \sin\theta$,

$$M_O = rF \sin\theta = F (r \sin\theta) = Fd$$



4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

Dirección

- La dirección y sentido de \mathbf{M}_O se determinan por la regla del sacacorchos

*Note:

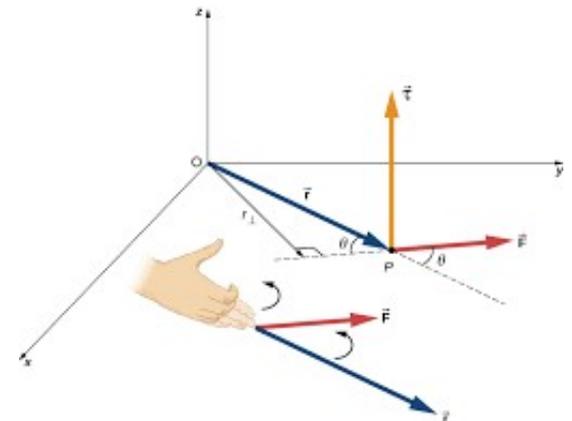
- “curl” de los dedos indica el sentido de la rotación.
- Mantener el orden de \mathbf{r} y \mathbf{F} ya que el producto vectorial es no conmutativo.

4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

Principio de Transmisibilidad

- La fuerza \mathbf{F} aplicada en cualquier punto A, crea un momento respecto a O dado por $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$
- \mathbf{F} tiene las propiedades de un *vector deslizante*, ya que puede ser aplicada en cualquier punto de su línea de acción (principio de transmisibilidad).
- Por lo tanto

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}$$



4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

Formulación cartesiana

- Para la fuerza expresada en forma cartesiana,

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

- Expandiendo el determinante,

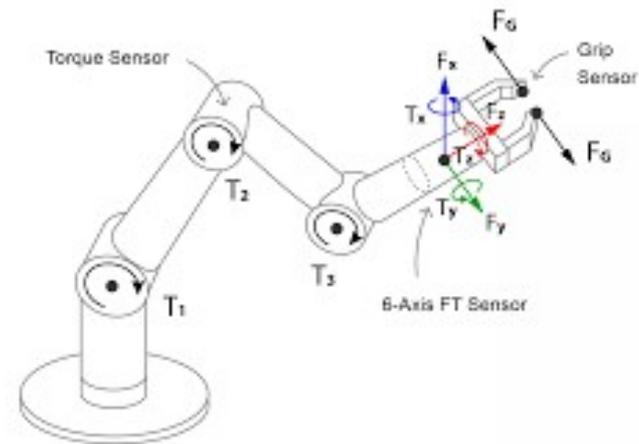
$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i} - (r_x F_z - r_z F_x)\mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\mathbf{k}$$

4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

Momento resultante de un sistema de fuerzas

- El momento de las fuerzas respecto a O puede determinarse mediante adición vectorial

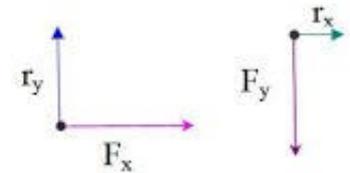
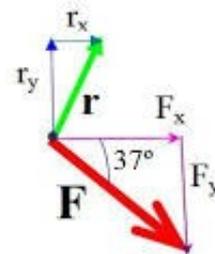
$$\mathbf{M}_{R0} = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



4.4 Principio de Momentos

- Conocido también como el teorema de Varignon:
“El Momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de esa fuerza respecto al punto”
- Ya que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 \end{aligned}$$



4.5 Momento de una fuerza respecto a un eje específico

- Para un momento de una fuerza alrededor de un punto, el momento y el eje de giro es siempre perpendicular al plano que forman la fuerza y la posición del punto.
- Análisis escalar o vectorial se usa entonces para encontrar la componente del momento a lo largo de un eje dado que pasa a través del punto.

4.5 Momento de una fuerza respecto a un eje específico

Análisis escalar

- Según la regla del sacacorchos o de la mano derecha, M_y está dirigido hacia el eje y positivo.
- Para cualquier eje, el momento es

$$M_a = F d_a$$

- La fuerza no contribuye al momento si su línea de acción pasa o es paralela al eje.

4.5 Momento de una fuerza respecto a un eje específico

Análisis vectorial

- Para la magnitud de \mathbf{M}_A ,

$$M_A = M_O \cos\theta = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}_a$$

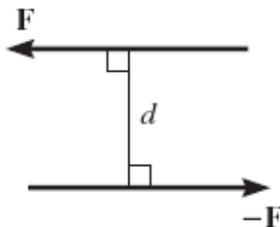
siendo $\mathbf{u}_a =$ vector unitario

- En forma de determinante,

$$|\vec{M}_a| = \vec{u}_{ax} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} u_{ax} & u_{ay} & u_{az} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

4.6 Momento de un par

- Par
 - Dos fuerzas paralelas
 - Misma magnitud pero direcciones opuestas
 - Separadas por una distancia perpendicular d
- Fuerza resultante = 0
- Tendencia a rotar en una dirección específica
- Momento del par = suma de los momentos de las fuerzas del par respecto a cualquier punto.



4.6 Moment de un par

Formulación vectorial

- Para el momento del par,

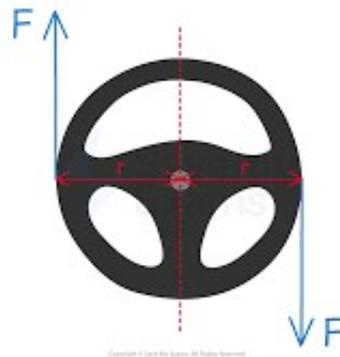
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- Ya que tomando el punto O en la línea de aplicación de $-\mathbf{F}$, el momento de esta fuerza es cero.
- \mathbf{r} se multiplica vectorialmente con la fuerza a la que es dirigido

4.6 Momento de un par

Pares equivalentes

- 2 pares son equivalentes si producen el mismo momento.
- Las fuerzas de pares equivalentes están en el mismo plano o en planos paralelos.



4.6 Momento de un par

Momento resultante de pares

- Los momentos de pares son *vectores libres* y por tanto pueden aplicarse en cualquier punto P y sumarse entonces vectorialmente.
- El momento resultante de dos pares en el punto P es

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

- Para más de 2 momentos, podemos usar

$$\mathbf{M}_R = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

4.7 Simplificación de sistema de fuerzas y pares

- Un sistema equivalente es aquel que causa los mismos *efectos externos* que los causados por el sistema de fuerzas y pares originales.
- Los efectos externos que causan un sistema son los movimientos de *traslación* y la *rotación* de un cuerpo.
- O se refieren a la fuerzas *reactivas* en los soportes si el cuerpo se mantiene fijo.

4.7 Simplificación de un sistema de fuerzas y pares

- La fuerza resultante actuando en el punto O y el momento del par resultante

$$F_R = \sum F$$
$$(M_R)_O = \sum M_O + \sum M$$

- Si las fuerzas están en el plano $x-y$ y los momentos de pares son perpendiculares a ese plano,

$$(F_R)_x = \sum F_x$$
$$(F_R)_y = \sum F_y$$
$$(M_R)_O = \sum M_O + \sum M$$

4.7 Simplificación de un sistema de fuerzas y pares

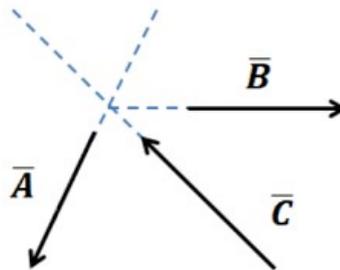
Procedimiento de análisis

1. Establecer los ejes de coordenadas con el origen en el punto O con una determinada orientación.
2. Sumar las fuerzas.
3. Sumar los momentos.

4.8 Simplificaciones extras de un sistema ***

Sistema de fuerzas concurrentes

- Un sistema de fuerzas *concurrentes* es aquel en el que las líneas de acción de todas las fuerzas se intersectan en un punto común O .

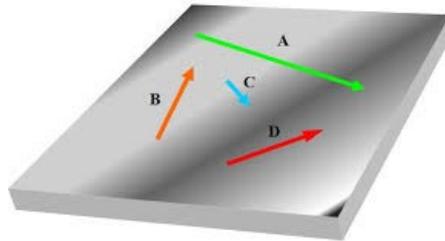


$$F_R = \sum F$$

4.8 Simplificaciones extras de un sistema

Sistema de fuerzas coplanares

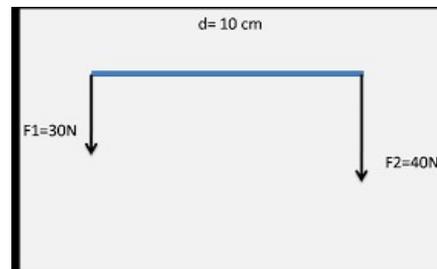
- Las líneas de acción de todas las fuerzas están en el mismo plano.
- La fuerza resultante del sistema también está en el mismo plano



4.8 Simplificaciones extras de un sistema

Sistema de fuerzas paralelas

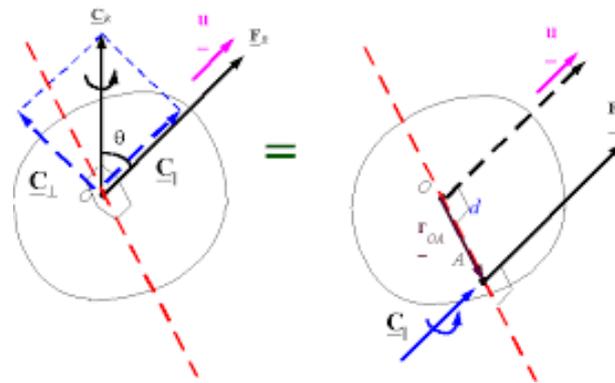
- Consiste en fuerzas que son todas paralelas a un eje, (ej al eje z).
- La fuerza resultante en el punto O debe de ser también paralela a este eje.



4.8 Simplificaciones extras de un sistema

Reducción a un sistema tornillo

- Una fuerza 3-D y un momento de par en O tienen una fuerza resultante equivalente en P
- Y un momento resultante de par que es *paralelo* a la fuerza resultante.



4.9 Reducción de una carga simplemente distribuida

- Una superficie grande de un cuerpo puede estar sujeta a una carga distribuida.
- Las cargas sobre la superficie se definen como una presión.
- La Presión se mide en Pascales (Pa): $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

Carga uniforme a lo largo de un eje

- El tipo más común de carga distribuida suele ser uniforme a lo largo de un eje (ejemplo y).

4.9 Reduction de una carga simplemente distribuida

Magnitud de la fuerza reultante

- La magnitud de $d\mathbf{F}$ está determinada por el elemento de área de la función .
- Para la longitud L ,

$$F_R = \int_L w(x) dx = \int_A dA = A$$

- *La magnitud de la fuerza resultante es igual al área total del diagrama de cargas.*

4.9 Reducción de una carga simplemente distribuida

Localización de la fuerza resultante

- $M_R = \sum M_O$
- $d\mathbf{F}$ produce un momento $xdF = x w(x) dx$ respecto a O
- Para todo el elemento,

$$M_{RO} = \sum M_O \qquad \bar{x} F_R = \int_L x w(x) dx$$

- Y resolviendo,

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

Estática

5

Equilibrio de un cuerpo rígido



BY

SA



Universidad
Rey Juan Carlos

Depósito Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

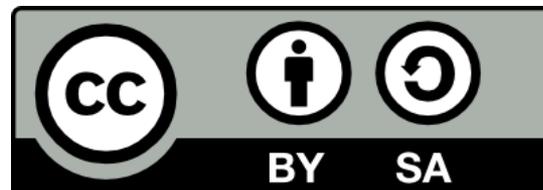
©2024 Manuel Arrayás Chazeta, Carlos Uriarte González

Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Attribution-ShareAlike 4.0 International” de Creative Commons,

disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Objetivos

- Escribir las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo rígido.
- Concepto de diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido.
- Resolver problemas de equilibrio para un sólido rígido.

Índice

1. Condiciones para el equilibrio del cuerpo rígido
2. Diagramas de cuerpo libre
3. Ecuaciones del equilibrio
4. Miembros de dos y tres fuerzas
5. Más diagramas de cuerpo libre
6. Nuevas ecuaciones de equilibrio
7. Ligaduras y determinación estática

5.1 Condiciones de equilibrio

- El equilibrio de un cuerpo se expresa como

$$F_R = \sum F = 0$$
$$(M_R)_O = \sum M_O = 0$$

Condición necesaria y suficiente

- Considere sumar los momentos respecto algún otro punto, tal como A, requerimos

$$\sum M_A = r \times F_R + (M_R)_O = 0$$

5.2 Diagramas de cuerpo libre

Reacciones en los soportes

- Si un soporte previene la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces sobre el cuerpo actúa una fuerza en esa dirección.
- Si previene la rotación, se desarrolla un momento de par sobre el cuerpo.

5.2 Diagramas de cuerpo libre

Fuerzas internas

- Fuerzas internas y externas actúan sobre un cuerpo rígido.
- Ya que las fuerzas internas actúan entre partículas contenidas dentro del contorno del DCL, no se pintan
- Las partículas o sistemas fuera del contorno ejercen fuerzas externas sobre el sistema.

5.2 Diagramas de cuerpo libre

Peso y centro de gravedad

- Cada partícula tiene un peso específico, y puede considerarse un sistema de fuerzas paralelas.
- El sistema se puede representar mediante una única fuerza resultante conocida como *peso* **W** del cuerpo
- El punto de aplicación del peso es conocido como el *centro de gravedad* (nótese que es independiente del punto elegido para calcularlo).

5.2 Diagramas de cuerpo libre

Procedimiento para dibujar un DCL

1. Esbozar la forma del cuerpo

- Imagine que el cuerpo está aislado, cortando o liberándolo de sus ligaduras.
- Dibuje esta situación.

2. Mostrar todas las fuerzas y momentos de pares

- Identifique todas las fuerzas externas y los momentos de pares que actúan sobre el cuerpo

5.2 Diagramas de cuerpo libre

3. Identifique cada carga y dé las dimensiones
 - Indicar las dimensiones
 - Las fuerzas y momentos conocidos deben de pintarse con sus etiquetas, magnitudes y direcciones

5.3 Ecuaciones de Equilibrio

Ecuaciones de equilibrio alternativas

- Para problemas coplanares de equilibrio,
 $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_O = 0$ (respecto al eje z, O cualquier punto).
- 2 formas alternativas de las 3 ecuaciones de equilibrio independientes: AB no II al eje y , ABC no colineales.

$$\sum F_x = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0 \quad , \quad \sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0$$

$(F_{Ry} = 0)$ $(F_{Ry} = 0)$; $(F_{Rx} = 0)$

5.3 Ecuaciones de Equilibrio

Procedimiento de análisis

DCL

- La fuerza o el momento tienen magnitud desconocida, pero podemos asumir sus líneas de acción
- Indicar las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas

5.3 Ecuaciones de Equilibrio

Procedimiento de análisis

Ecuaciones de equilibrio

- Aplicar $\sum M_O = 0$ respecto al pto O
- Orientar los ejes x, y a lo largo de las líneas que dan la resolución más simple de las fuerzas en sus componentes x, y
- Un resultado escalar negativo supone que el sentido es negativo respecto al que se asumió en el DCL

5.4 Miembros de 2 y 3 fuerzas

La solución se simplifica reconociendo miembros sujetos a solo 2 o 3 fuerzas

Miembros de 2 fuerzas

- Cuando las fuerzas se aplican a solo dos puntos de un elemento, el elemento se llama *miembro de dos fuerzas*
- Solo la magnitud de la fuerza debe de determinarse

5.4 Miembros de dos y tres fuerzas

Miembros de 3 fuerzas

- Cuando un elemento está sujeto a 3 fuerzas, las fuerzas son concurrentes o paralelas (si dos se cortan, la tercera también, ya que $M_o = 0$)

5.5 Diagramas de cuerpo libre 3D

Reacciones de los soportes

Como en el caso dimensional:

- Una fuerza es ejercida por un soporte
- Un momento de par se desarrolla cuando se impide la rotación de un miembro ligado
- La orientación de la fuerza se define por los ángulos de coordenadas α , β , γ

5.6 Ecuaciones de Equilibrio

Ecuaciones vectoriales de equilibrio

- Las dos condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido en forma vectorial,

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \sum \mathbf{M}_O = 0$$

Ecuaciones de equilibrio en forma escalar

- Si todas las fuerzas externas y momentos se expresan en forma cartesiana

$$\sum \mathbf{F} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_O = \sum M_x \mathbf{i} + \sum M_y \mathbf{j} + \sum M_z \mathbf{k} = 0$$

5.7 Ligaduras para un cuerpo rígido

Ligaduras redundantes

- Más soportes de los necesarios para el equilibrio
- Estáticamente indeterminado: más cargas desconocidas que ecuaciones

5.7 Ligaduras para un cuerpo rígido

Ligaduras impropias

- La restricción impropia de los soportes causa inestabilidad
- Cuando las fuerzas reactivas son concurrentes en un punto, el cuerpo está impropriamente ligado o sujeto (en 3-D cuando intersectan un eje)

5.7 Ligaduras para un cuerpo rígido

Procedimiento de análisis

DCL

- Esboce la forma del cuerpo
- Pinte todas las fuerzas y momentos de pares que actúan sobre el cuerpo
- Pintar todas las componentes desconocidas con sentido positivo
- Indicar las dimensiones necesarias del cuerpo para calcular los momentos de las fuerzas

5.7 Ligaduras para un cuerpo rígido

Procedimiento de análisis

Ecuaciones de Equilibrio

- Aplicar las seis ecuaciones escalares o las dos vectoriales de equilibrio
- Cualquier conjunto de ejes, no ortogonales puede elegirse para esto
- Elija la dirección de un eje para sumar momentos de manera que intersecte tantas líneas de acción de las fuerzas desconocidas como sea posible

Estática

6

Análisis Estructural



Universidad
Rey Juan Carlos

Depósito Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

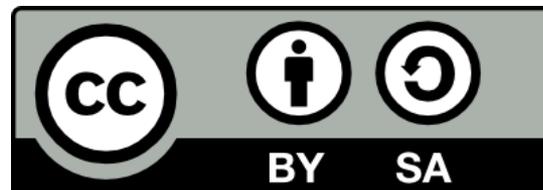
©2024 Manuel Arrayás Chazeta, Carlos Uriarte González

Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Attribution-ShareAlike 4.0 International” de Creative Commons,

disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Objetivos

- Determinar las fuerzas en los miembros de una estructura usando el método de uniones y secciones.
- Analizar las fuerzas que actúan en los miembros de armazones y bastidores compuestos de miembros conectados.

Índice

1. Estructuras simples
2. El método de uniones
3. Miembros nulo de fuerzas
4. El método de las secciones
5. Estructuras espaciales
6. Armazones, bastidores y máquinas

6.1 Estructuras simples

- Una estructura está compuesta de elementos delgados unidos entre sí por sus extremos. Ex: A

Estructuras planas

- Se usan para soportar techos y puentes
- La carga del techo se transmite a la estructura por una serie de tirantes o *purlins* (ganchos de vigueta, carril cruzado, correa)

6.1 Estructuras simples

Estructuras Planas

- El análisis de las fuerzas en los miembros es 2D
- Similar a las estructuras de los techos, la de los puentes también es coplanar

6.1 Estructuras simples

Hipótesis de diseño

- “Las cargas se aplican en las uniones”
 - Se desprecia el peso de cada miembro
- “Los miembros están unidos por pasadores sin rozamiento”
 - Se asume que en las conexiones, las líneas centrales de los miembros son *concurrentes*

Consecuencia: cada miembro es de 2 fuerzas.

6.1 Estructuras Simples

Estructura Simple

- La forma de una estructura debe de ser rígida, para prevenir el colapso.
- La forma más simple rígida (estable) es un triángulo
- Una estructura simple estará formada por triángulos.

6.2 El método de las uniones

Para determinar las fuerzas en cada miembro

- Si la estructura está en equilibrio, las uniones también
- DCL de las uniones
- El sistema de fuerzas actuando en cada unión es *coplanar y concurrente*
- $\sum F_x = 0$ and $\sum F_y = 0$ deben de satisfacerse en el equil

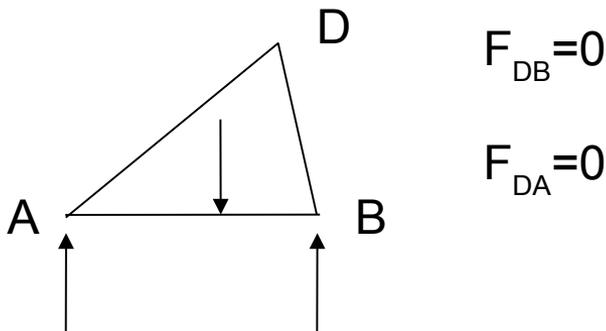
6.2 El método de las uniones

Procedimiento de análisis

- DCL de una unión con al menos 1 fuerza conocida y como máximo 2 desconocidas
- Si la unión es un soporte, encontrar las reacciones externas aplicadas al soporte
- Determinar el sentido correcto de las fuerzas
- Orientar de manera adecuada los ejes x, y
- Aplicar $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$
- Usando la solución, continuar con otras uniones para determinar todas las fuerzas

6.3 Miembros de fuerza nula

- El método de las uniones se simplifica si podemos identificar primero los miembros de fuerza nula
- Son los miembros que no soportan carga
- Cuando 3 miembros forman una unión, si dos son colineales, el tercero es un miembro de fuerza nula siempre que ninguna fuerza externa o reacción de un soporte sea aplicada a la unión



6.4 El método de las secciones

- Usado para determinar las tensiones dentro de un miembro
- Se basa en que si un cuerpo está en equilibrio, cualquier parte del mismo lo está también
- Una sección imaginaria se usa para cortar el miembro en 2 y en el DCL, las fuerzas internas se muestran como externas

6.4 El método de las secciones

- Se pueden cortar estructuras: buscaremos secciones que no corten a más de tres miembros (solo tenemos 3 ec de equil). Ex: la sección a-a
- Las fuerzas resultantes del corte son iguales y opuestas en cada parte, según las leyes de Newton
- Nótese que por el método de las uniones habría que analizar A, B y G para determinar F_{GC} por ej.

6.4 El método de las secciones

Procedimiento de análisis

DCL

- Decidir la sección de corte
- Determinar las reacciones externas en la estructura
- Dibujar el DCL se los elementos cortados que tienen el menor número de fuerzas actuando sobre él
- Asignar un sentido a las fuerzas desconocidas
 - Por inspección, considerando el momento
 - Por convenio: suponer que las fuerzas desconocidas en el corte son siempre de tensión, y si el signo sale cambiado, supondría que son de compresión

6.4 El método de las secciones

Procedimiento de análisis

Ecuaciones de Equilibrio

- Sumar momentos respecto a un punto de intersección de dos fuerzas desconocidas, para hallar una tercera
- Si dos fuerzas son paralelas, se pueden sumar fuerzas en las dirección perpendicular para hallar una tercera

6.5 Estructuras espaciales

- Formadas por miembros que se unen para formar una estructura 3D
- La más simple es un tetraedro
- Vemos que añadir más miembros sería redundante para sostener la fuerza **P**

6.5 Estructuras espaciales

Hipótesis de diseño

- Los miembros de una estructura espacial se pueden tratar como de *2 fuerzas*, siempre que las cargas externas se apliquen en la uniones
- Si el *peso* de los miembros no es despreciable, se puede considerar como una fuerza vertical aplicada la *mitad de su magnitud a cada extremo* del miembro

Método de las uniones

- Se resuelven $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$ en cada unión
- Aplicar a una unión con al menos 1 fuerza conocida y 3 desconocidas como máximo.

6.5 Space Trusses

Método de las secciones

- Si solo algunos miembros deben de determinarse.
- Las condiciones en las partes que deben satisfacerse son

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

- Eligiendo de manera adecuada las partes y los ejes, las fuerzas se pueden determinar usando solo una de estas condiciones

6.6 Armazones y máquinas

- Están compuestos de miembros multifuerzas
- Los armazones son estacionarios y se suelen usar para mantener cargas
- Se aplican las ecuaciones de equilibrio a cada miembro para determinar las fuerzas necesarias

6.6 Armazones y máquinas

DCL

- Se aísla cada parte dibujando un diagrama
 - Mostrar todas las fuerzas y pares sobre cada parte
 - Identificar las fuerzas y momentos conocidos y no
 - Aplicar las ecuaciones de equilibrio
 - Asignar un sentido a las fuerzas y momentos

Estática

7

Fuerzas Internas



Universidad
Rey Juan Carlos

Depósito Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

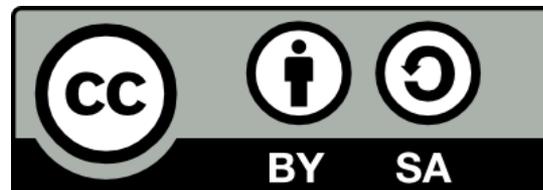
©2024 Manuel Arrayás Chazeta, Carlos Uriarte González

Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Attribution-ShareAlike 4.0 International” de Creative Commons,

disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Objetivos

- Método de las secciones para determinar las cargas internas o solicitaciones en un miembro.
- Describir la tensión interna de corte o cizalla y el momento interno de un miembro
- Analizar las fuerzas y la geometría de cables que soportan cargas.

Índice

1. Fuerzas internas en miembros estructurales
2. Fuerzas de corte y momento y diagramas
3. Relaciones entre cargas distribuidas, cizalla y momento.
4. Cables

7.1 Fuerzas internas que se desarrollan en miembros o solicitaciones

- El diseño de cualquier miembro requiere que el material que se use sea capaz de soportar las cargas internas que actúan sobre él.
- Las cargas internas o solicitaciones se pueden determinar mediante el método de las secciones.

7.1 Cargas internas en miembros

- La fuerza interna **N**, actuando normal a la sección del corte de la viga, en dirección del eje
- **V**, actuando tangente a la sección de llama de corte o cizalla
- El momento de par **M** referido como momento flexión o momento flector.

7.1 Cargas internas en miembros

- En 3D, una fuerza interna de tres componentes y un momento de par en general actuarán en cualquier sección del cuerpo
- N_y es la fuerza normal, y V_x , V_z las componentes de la fuerza de corte
- M_y es el momento de torsión y M_x , M_z los momentos flectores

7.1 Cargas internas en miembros

Procedimiento de análisis

Reacciones de los soportes

- Antes del corte, determinar las reacciones de los soportes en los miembros
- Después del corte se pueden usar las ecuaciones de equilibrio para obtener las cargas internas

DCL

- Mantener todas las fuerzas, cargas distribuidas y momentos en sus lugares correspondientes y hacer un corte.
- DCL de la parte con menos cargas.

7.1 Cargas internas en miembros

Procedimiento de análisis

DCL (continuación)

- Indicar las componentes x, y, z componentes de las fuerzas y momentos de par
- Solo **N**, **V** y **M** actúan en la sección
- Determinar el sentido (por inspección o convenio)

Ecuaciones de equilibrio

- Los momento respecto a la sección (así **N**, **V** se eliminan de la ecuación)
- Si resulta un signo negativo, el sentido es opuesto.

7.2 Ecuaciones de corte, momento y diagramas

- Vigas – miembros estructurales diseñados para soportar cargas perpendiculares a sus ejes
- Una viga simplemente soportada está articulada en un extremo y apoyada en una rodadura en el otro
- Una viga voladiza está fija en un extremos y libre en el otro

7.2 Ecuaciones de corte, momento y diagramas

Procedimiento de análisis

Reacciones de los soportes

- Encontrar todas las fuerzas reactivas y momentos de pares que actúan sobre la viga
- Resolverlas en componentes

Reacciones de corte y momento

- Especificar coordenada x desde el extremo izquierdo
- Seccionar la viga en cada x perpendicular a su eje
- V es obtenida sumando las fuerzas perpendiculares a la viga
- M es obtenido sumando los momentos sobre el extremo seccionado

7.2 Ecuaciones de corte, momento y diagramas

Procedimiento de análisis

Reacciones de corte y momento (continuación)

- Pintar (V versus x) y (M versus x)
- Es conveniente pintar los diagramas debajo del DCL de la viga

7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

Carga distribuida

- Considere la viga AD sujeta a una carga arbitraria $w = w(x)$ y a una serie de fuerzas concentradas y momentos.
- Si la carga distribuida actúa hacia arriba la supondremos positiva.

7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

Carga distribuida

- Un DCL para un segmento pequeño de la viga de longitud Δx se elige en el punto x que no esté sujeto a una fuerza concentrada o a un momento de par.
- Los resultados obtenidos no se aplicarán en puntos de cargas concentradas.
- Las fuerza internas de corte y los momentos flectores se toman en sentido positivo.

7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

Carga distribuida

- La carga distribuida se reemplaza por una fuerza resultante $\Delta F = w(x) \Delta x$, que actúa a la distancia fraccional $k (\Delta x)$, desde el extremo derecho,

siendo $0 < k < 1$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; V + w(x) \Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -w(x) \Delta x$$

$$\sum M = 0; -V \Delta x - M + w(x) \Delta x [k (\Delta x)] + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x + w(x) k (\Delta x)^2$$

7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

Carga distribuida

Pendiente del
diagrama de corte $\frac{dV}{dx} = -w(x)$

Intensidad de
carga distribuida

Pendiente del
diagrama de momento $\frac{dM}{dx} = V$

Fuerza de corte

Cambio en la
fuerza de corte $\Delta V_{BC} = - \int w(x) dx$

Área bajo
el diagrama de
carga

Cambio en el
momento $\Delta M_{BC} = \int V dx$

Área bajo
el diagrama de
corte

7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

Fuerza y momento localizados

- DCL de un segmento pequeño con fuerza localizada
- $\Delta V = F$
- DCL de un segmento pequeño con momento localizado
- $\Delta M = M_0$

7.4 Cables

- Cables y cadenas se usan para soportar y transmitir cargas de un miembro a otro.
- En el análisis de fuerzas, el peso de los cables se desprecia.
- Se asume que el cable es perfectamente *flexible e inextensible*.
- Debido a su flexibilidad, los cables no ofrecen ninguna resistencia a las flexiones: $V=M=0$, $N=\text{Tensión}=T$
- La longitud permanece constante antes y después de la carga.



7.4 Cables

Cable sujeto a cargas concentradas

- Para un cable de peso despreciable, estará sometido a fuerzas de tensión constantes.
- Incógnitas: 4 reacciones en A y B, 3 tensiones, y_C , y_D
- Conocidas: h , L_1 , L_2 , L_3 y las cargas \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2
- 2 equations of equilibrium en A, B, C y D.
- Usar relaciones geométricas: •

Si L es conocida, se podrían

relacionar h , L_1 , L_2 , L_3 , y_C , y_D

usando el teorema de Pitágoras.

7.4 Cables

Cable sujeto a una carga distribuida

- Considere un cable de peso despreciable sujeto a una carga distribuida $w = w(x)$ medida en la dirección x .

7.4 Cables

Cable sujeto a una carga distribuida

- Para el DCL de una sección de longitud Δs
- Ya que la fuerza tensil cambia de manera continua, denotaremos por ΔT este cambio.
- La forma del cable se obtiene a partir del DCL de la sección e integrando dos veces (siendo F_H la tensión horizontal)

$$-T \cos \Theta + (T + \Delta T) \cos(\Theta + \Delta \Theta) = 0$$

$$-T \sin \Theta - w(x) \Delta x + (T + \Delta T) \sin(\Theta + \Delta \Theta) = 0$$

$$w(x) \Delta x - T \cos \Theta \Delta y + T \sin \Theta \Delta x = 0$$

$$T \cos \Theta = \text{const} = F_H$$

$$T \sin \Theta = \int w(x) dx \quad y = \frac{1}{F_H} \int \left(\int w(x) dx \right) dx$$

7.4 Cables

Cable sujeto a su propio peso

- Cuando se considera el peso del cable, la función de carga llega a ser una función de la longitud de arco s más que de x
- DCL de un segmento del cable

7.4 Cables

Cable sujeto a su propio peso

- Cuando se considera el peso del cable, la función de carga llega a ser una función de la longitud de arco s más que de x
- DCL de un segmento del cable

7.4 Cables

Cable sujeto a su propio peso

- Aplique las ecuaciones de equilibrio al sistema

$$T \cos \theta = F_H$$

$$T \sin \theta = \int w(s) ds$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(s) ds$$

- Reemplace dy/dx por ds/dx para poder integrar

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1}$$

7.4 Cables

Cable sujeto a su propio peso

- Resulta

$$\frac{ds}{dx} = \left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s) ds \right)^2 \right\}^{1/2}$$

- Separando las variables e integrando

$$x = \int \frac{ds}{\left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s) ds \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

Estática

8

Fricción



Universidad
Rey Juan Carlos

Depósito Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

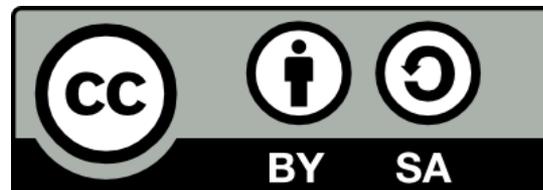
©2024 Manuel Arrayás Chazeta, Carlos Uriarte González

Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Attribution-ShareAlike 4.0 International” de Creative Commons,

disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Objetivos

- Introducir el concepto de fricción en seco
- Aplicaciones específicas de fuerzas de fricción sobre cuñas, tornillos, cintas y soportes de barras
- Investigar el concepto de resistencia al rodamiento

Índice

1. Características de la fricción en seco
2. Problemas con fricción en seco
3. Fuerzas de fricción sobre cuñas
4. Fuerzas de fricción sobre tornillos
5. Fuerzas de fricción sobre cintas
6. Fuerzas de fricción sobre soportes de barras, pasadores, articulaciones y discos
7. Fuerzas de fricción sobre cojinetes
8. Resistencia al rodamiento

8.1 Características de la fricción

Fricción

- Es la fuerza que resiste el movimiento de dos superficies en contacto que deslizan una sobre otra.
- Actúan tangente a la superficie en los puntos de contacto de los dos cuerpos.
- Se opone al movimiento o posible movimiento relativo a los puntos de contacto.
- Existen dos tipos de fricción – lubricada y seca o de Coulomb (fue el primero que las estudió en 1781).

8.1 Características de la fricción seca

- La **fricción lubricada** existe cuando la superficie de contacto está separada por una película de fluido (gas o líquido)
 - Depende de la velocidad del fluido y de su capacidad para resistir fuerzas de corte o cizalla.
- La **fricción de Coulomb** ocurre entre las superficies de contacto entre los cuerpos en ausencia de un fluido lubricante

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

- Considere el efecto causado al tirar horizontalmente de un bloque de peso uniforme \mathbf{W} que descansa sobre una superficie rugosa
- Consideremos que las superficies de contacto son no rígidas, esto es deformable, siendo el resto del bloque rígido.

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

- La fuerza normal $\Delta \mathbf{N}_n$ y la de fricción $\Delta \mathbf{F}_n$ actúan a lo largo de la superficie de contacto
- En el equilibrio, las fuerzas normales actúan hacia arriba para balancear el peso del bloque \mathbf{W} ; las fuerzas de fricción actúan hacia la izquierda para oponerse al movimiento del bloque por la fuerza \mathbf{P} .

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

- Existen muchas irregularidades microscópicas entre las dos superficies bloque-suelo
- Las reacciones que se producen en cada protuberancia las denotamos por $\Delta \mathbf{R}_n$
- Cada reacción se puede descomponer en una componente de fricción $\Delta \mathbf{F}_n$ y una normal $\Delta \mathbf{N}_n$

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

Equilibrio

- El efecto total de las fuerzas de fricción y normales se indican por sus resultantes \mathbf{N} y \mathbf{F}
- La distribución de $\Delta\mathbf{F}_n$ indica que \mathbf{F} es tangente a la superficie de contacto y opuesta en la dirección de \mathbf{P}
- La fuerza normal \mathbf{N} se determina de la distribución de las $\Delta\mathbf{N}_n$

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

Equilibrio

- **N** está dirigida hacia arriba, para equilibrar el peso **W**
- **N** actúa a cierta distancia x a la derecha de la línea de acción de **W**
- Esta localización es el centroide o el centro geométrico del diagrama de cargas, de manera que aplicada en ese punto, equilibra el efecto de “inclinación o volcado” causado por **P**

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

Movimiento inminente

- Cuando **P** se incrementa lentamente, **F** aumenta de manera similar hasta que toma un valor máximo **F_s**, llamado el límite de fuerza estática de fricción.
- Este límite de fricción estática **F_s** es directamente proporcional a la fuerza resultante normal **N**

$$F_s = \mu_s N$$

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

Movimiento inminente

- La constante of proporcionalidad μ_s se conoce como el coeficiente de fricción estática
- El ángulo Φ_s que \mathbf{F}_s forma con \mathbf{N} se llama ángulo de fricción estática

$$\varphi_s = \tan^{-1} \left(\frac{F_s}{N} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\mu_s N}{N} \right) = \tan^{-1} \mu_s$$

8.1 Características de la fricción seca

Valores típicos de μ_s

Metal sobre hielo: 0.03 - 0.05

Aluminio sobre aluminio: 1.10 - 1.70

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

Movimiento

- Cuando P es mayor que F_s , la fuerza de fricción toma un valor que es ligeramente menor que F_s , llamada fuerza de fricción cinética.
- El bloque no se mantendrá en equilibrio ($P > F_s$) sino que deslizará acelerándose.

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

Movimiento

- La caída de F_s (estática) a F_k (cinética) se puede explicar examinando las superficies de contacto.
- Cuando $P > F_s$, P tiene la capacidad de suavizar o “cortar” las protuberancias

8.1 Características de la fricción seca

Teoría de la fricción seca

- La fuerza resultante F_k es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza normal resultante N

$$F_k = \mu_k N$$

- La constante de proporcionalidad μ_k es el coeficiente de fricción cinética
- μ_k es típicamente 25% más pequeño que μ_s
- La resultante R_k tiene una línea de acción definido por Φ_k , (el ángulo de fricción cinética)

$$\varphi_k = \tan^{-1} \left(\frac{F_k}{N} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\mu_k N}{N} \right) = \tan^{-1} \mu_k$$

8.1 Características de fricción seca

Teoría de la fricción seca

- F es la fuerza de fricción *estática* si se mantiene el equilibrio.
- F es la fuerza *límite de fricción estática* cuando alcanza el valor máximo necesario en el que se puede mantener el equilibrio F_s
- F se llama de fricción *cinética* cuando ocurre deslizamiento entre las superficies en contacto.

8.1 Fricción seca

Resumen:

- La fuerza de fricción actúa tangente a las superficies de contacto.
- La fuerza de fricción estática máx F_s es independiente del área de contacto.
- La fuerza de fricción estática máx es mayor que la de fricción en movimiento (fuerza de fricción cinética)
- Cuando el deslizamiento está a punto de producirse, o se produce, la fuerza máx de fricción es proporcional a la fuerza normal, al igual que la fuerza de fricción cinética.

8.2 Problemas con Fricción

Tipos de problemas con fricción

- En todos los casos, la geometría y dimensiones se asumen conocidas
- 3 tipos de problemas en mecánica involucrando la fricción seca
 - Equilibrio
 - Movimiento incipiente en todos los puntos
 - Movimiento incipiente en algunos puntos de contacto

8.2 Problemas con fricción

Tipos de problemas con fricción

Equilibrio

- Número de incógnitas = Número total de ecuaciones de equilibrio disponibles
- Las fuerzas de fricción deben satisfacer $F \leq \mu_s N$; de lo contrario, ocurrirá deslizamiento y el cuerpo no podrá permanecer en equilibrio.
- Debemos determinar las fuerzas de fricción en A y C para comprobar que el equilibrio se mantiene.

8.2 Problemas con fricción

Equilibrio Versus Ecuaciones de fricción

- La fuerza de fricción siempre actúa oponiéndose al movimiento relativo si lo hubiera, o para impedir este movimiento sobre la superficie de contacto.
- Asumir el sentido requiere que F sea una fuerza de “equilibrio” es decir que $F \leq \mu_s N$. Si sale negativa implica que iba hacia el otro lado.
- Sin embargo, si $F = \mu_s N$, como esta ecuación relaciona dos vectores perpendiculares, el sentido debe ser el correcto desde el principio!

8.3 Cuñas

- Una cuña es una máquina simple que se usa para transformar una fuerza aplicada en otra mucho más grande, dirigida aproximadamente a 90 grados de la fuerza aplicada.
- También se usan las cuñas para dar un pequeño desplazamiento o para ajustar una carga pesada
- Ejemplo una cuña para levantar un bloque de peso **W** aplicando una fuerza **P** a la cuña

8.3 Cuñas

- DCL de la cuña y el bloque
-
- Excluimos el peso de la cuña porque es pequeño comparado con el del bloque

8.4 Fuerzas de fricción en tornillos

- Los tornillos se usan como fijadores
- A veces también para transmitir potencia o movimiento de una parte de una máquina a otra
- Un tornillo de rosca cuadrada se usa normalmente para este último propósito, especialmente cuando se aplican grandes fuerzas a lo largo de su eje.
- Un tornillo se puede pensar como un plano inclinado enrollado alrededor de un cilindro.

8.4 Fuerzas de fricción en tornillos

- Una tuerca, inicialmente en A, sobre el tornillo, se mueve hasta B cuando se rota 360° alrededor del mismo.
- Esta rotación es equivalente a trasladar la tuerca por un plano inclinado de altura l y longitud $2\pi r$, siendo r el radio medio de la rosca
- Aplicando las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas, para el movimiento inminente hacia arriba resulta

$$M = rW \tan(\varphi_s + \theta)$$

8.4 Fuerzas de fricción en tornillos

Movimiento del tornillo hacia abajo

- Si la superficie del tornillo es muy deslizante, un tornillo puede rotar y deslizarse hacia abajo si la magnitud del momento aplicado se reduce a algún valor $M' < M$
- Esto hace que Φ_s en M pase a $-\Phi_s$ en M' , y el valor para el movimiento inminente hacia abajo resulta

$$M' = Wr \tan(\theta - \Phi_s)$$

- El caso de autobloqueo es para $\theta \leq \Phi_s$

$$M'' = Wr \tan(\Phi_s - \theta)$$

8.5 Fricción sobre correas planas

- Es necesario determinar las fuerzas de fricción entre las superficies de contacto
- Consideremos la correa plana que pasa sobre una superficie curvada fija
- Para mover la correa, $T_2 > T_1$
- Consideremos el DCL del trozo de la correa en contacto con la superficie
- **N** y **F** varían ambas en magnitud y dirección

8.5 Fricción sobre correas planas

- DCL de un elemento de longitud ds
- Asumiendo el movimiento de la cinta, la magnitud de la fuerza de fricción

$$dF = \mu dN$$

- Aplicando las ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0;$$

$$T \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \mu dN - (T + dT) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$dN - (T + dT) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

8.5 Fricción sobre correas planas

$$\mu dN = dT$$

$$dN = T d\theta$$

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

$$T = T_1, \theta = 0, T = T_2, \theta = \beta$$

$$\int \frac{dT}{T} = \mu \int d\theta$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu \beta$$

$$T_2 = T_1 e^{\mu \beta}$$

8.6 Fuerzas de fricción en soportes de anilla, pivotes y discos

- Los pivotes y anillas se usana para sostener cargas axiales en barras que rotan
- Las leyes de la fricción seca se aplican para determinar el momento **M** necesario para girar la barra cuando soporta una fuerza axial **P**

8.6 Fuerzas de fricción en soportes de anilla, pivotes y discos

Análisis de la fricción

- La anilla en la barra está sujeta a la fuerza axial \mathbf{P} y tiene área de contacto $\pi(R_2^2 - R_1^2)$
- La presión normal p (fuerza por unidad de superficie) se considera uniformemente distribuida sobre ese área – una asunción razonable se la anilla es nueva y sin deformar.
- Ya que $\sum F_z = 0$,
 p se estima como

$$p = P/\pi(R_2^2 - R_1^2)$$

$$dN = pdA, \quad dF = \mu_s dN, \quad dM - rdF = 0$$

$$dA = rd\theta dr, \quad M = 2\mu_s P(R_2^3 - R_1^3)/3(R_2^2 - R_1^2)$$

8.7 Fuerzas de fricción en cojinetes

- Cuando una barra o eje está sometido a cargas laterales, se usan cojinetes para soportarlos.
- Los cojinetes bien lubricados están sujetos a las leyes de la mecánica de fluidos.
- Cuando el cojinete no está lubricado, el análisis de la fricción puede hacerse con las leyes de la fricción en seco.
- Si la carga lateral es \mathbf{P} , la fuerza de reacción del cojinete \mathbf{R} , actuando en A sobre la barra es igual y opuesta a \mathbf{P} .

8.7 Fuerzas de fricción en cojinetes

- El momento necesario para mantener constante la rotación de la barra, se puede hallar sumando los momentos respecto al eje z,

$$\begin{aligned}\sum M_z &= 0; \\ M - (R \sin \varphi_k) r &= 0 \\ M &= Rr \sin \varphi_k\end{aligned}$$

- Si el cojinete está parcialmente lubricado, μ_k es pequeño, $\mu_k = \tan \Phi_k \approx \sin \Phi_k \approx \Phi_k$
- Resistencia de fricción

$$M \approx Rr\mu_k$$

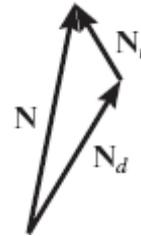
8.8 Resistencia de rodadura

- Para un cilindro rígido, de peso **W** rodando a velocidad constante sobre una superficie rígida, la fuerza normal es tangente al punto de contacto
- Sin embargo, un material duro (cilindro) comprimirá un o blando (superficie de apoyo)

8.8 Resistencia de rodadura

- Consideramos la fuerza resultante de la presión que actúa en el cilindro

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_d + \mathbf{N}_r$$



- Para mantener el cilindro en equilibrio, rodando de manera estacionaria, \mathbf{N} debe de ser concurrente con la fuerza \mathbf{P} y el peso \mathbf{W}
- Suma de los momentos respecto a A,

$$W_a = P (r \cos\theta)$$

$$W_a \approx Pr$$

$$P \approx (W_a)/r$$

Estática

10

Momentos de Inercia



Universidad
Rey Juan Carlos

Depósito Archivo Abierto Institucional de la URJC (BURJC Digital)

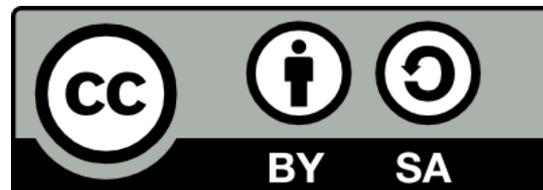
©2024 Manuel Arrayás Chazeta, Carlos Uriarte González

Algunos derechos reservados

Este documento se distribuye bajo la licencia

“Attribution-ShareAlike 4.0 International” de Creative Commons,

disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Objetivos

- Método para determinar el momento de inercia de un área
- Introducir el producto de inercia y cómo determinar el máx y mín momentos de inercia para un área
- Momento de inercia de una distribución de masas

Índice

1. Definición de Momentos de Inercia para Áreas
2. Teorema del eje-paralelo
3. Radio de giro de un área
4. Momentos of Inercia para Áreas compuestas
5. Producto de Inercia para un Área
6. Momento de Inercia para un Área
7. Círculo de Mohr para Momentos de Inercia
8. Momentos de inercia de una distribución de masas

10.1 Momentos de Inercia para Áreas

- El Centroide de un área se determina por el primer momento de un área respecto a un eje
- El segundo momento de un área respecto a un eje se conoce como momento de inercia
- El Momento de Inercia se origina siempre que uno relaciona la fuerza normal o la presión (fuerza por unidad de área con el momento)

10.1 Momentos de Inercia para Áreas

Momento de Inercia

- Consideremos el área A en el plano x - y
- Por definición, el momento de inercia del elemento de área dA respecto a los ejes x , y resulta

$$dI_x = y^2 dA \quad dI_y = x^2 dA$$

- Para el área completa, los momentos de inercia son

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

10.1 Momentos de Inercia para Áreas

Momento de Inercia

- También podemos tomar el segundo momento de dA respecto al “polo” O o eje z
- Esto se conoce como el momento polar de inercia

$$dJ_O = r^2 dA$$

siendo r la distancia perpendicular desde el polo (eje z) al elemento dA

- El momento polar de inercia para todo el área resulta

$$J_O = \int r^2 dA = I_x + I_y$$

10.2 Teorema del eje paralelo para un área

- Conocido el momento de inercia de un área respecto a un eje que pasa por su centroide, determine el momento de inercia respecto a un eje paralelo.
- Consideremos el momento de inercia del área
- Un elemento diferencial dA se localiza a una distancia arbitraria y' respecto al eje x' del centroide

.

10.2 Teorema del eje paralelo para un área

- La distancia fija entre el eje x paralelo a x' es d_y

- El momento de inercia de dA respecto al eje x

$$dI_x = (y' + d_y)^2 dA$$

- Para el área completa

$$I_x = \int (y' + d_y)^2 dA$$

$$\int y'^2 dA + 2d_y \int y' dA + d_y^2 \int dA$$

- La primera integral representa el momento de inercia del área respecto al eje centroidal

10.3 Radio de Giro de un Área

- El radio de giro de un área plana tiene unidades de longitud y es una cantidad que se usa para diseñar columnas
- Se define como

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad k_z = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

- Estas expresiones son a la expresión del momento de inercia de un elemento de área respecto a un eje

$$I_x = k_x^2 A \quad dI_x = y^2 dA$$

10.4 Momentos de Inercia para áreas compuestas

- Un área compuesta consiste de una serie de partes simples conectadas
- El Momento de inercia del área compuesta = suma algebraica de los momentos de inercia de todas sus partes

Procedimiento de análisis

Partes

- Dividir el área en partes y localizar el centroide de cada parte respecto al eje de referencia dado

Teorema del eje paralelo

- Determinar el momento de inercia de cada parte respecto a sus ejes centroidales

10.4 Momentos de Inercia para áreas compuestas

Procedimiento de análisis

Teorema del eje paralelo

- Cuando el eje centroidal no coincide con el eje de referencia, se usa el teorema del eje paralelo

Suma

- Momento de inercia total resulta de sumar los momentos de inercia de sus partes

10.5 Producto de Inercia para un Área

- El Momento de inercia de un área es diferente para cada eje respecto al que se calcula
- Calcularemos el producto de inercia para el área además de los momentos de inercia respecto a los ejes x , y dados
- El Producto de inercia para un elemento de área dA localizado en el punto (x, y) se define como

$$dI_{xy} = xy dA$$

- Y resulta para el total

$$I_{xy} = \int xy dA$$

10.5 Producto de Inercia para un Área

Parallel Axis Teorema de eje paralelo

- El producto de inercia de dA respecto a los ejes x, y

$$dI_{xy} = \int (x' + d_x)(y' + d_y) dA$$

- Para el área total,

$$dI_{xy} = \int (x' + d_x)(y' + d_y) dA$$

$$\int x'y' dA + d_x \int y' dA + d_y \int x' dA + d_x d_y \int dA$$

- La cuarta integral representa el área total A ,

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y$$

10.6 Momentos de Inercia respecto a ejes inclinados

- Es necesario a veces calcular I_u , I_v e I_{uv} para un área respecto a un sistema de ejes inclinados u, v conocidos los valores de θ , I_x , I_y e I_{xy}
- Usamos ecuaciones de transformación que relacionan los ejes x, y con los u, v

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = y \cos \theta - x \sin \theta$$

$$dI_u = v^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{uv} = uv dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA$$

10.6 Momentos de Inercia respecto a ejes inclinados

- Integrando,

$$I_u = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_v = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{uv} = I_x \sin \theta \cos \theta - I_y \sin \theta \cos \theta + 2I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

- Simplificando mediante identidades trigonométricas,

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

10.6 Momentos de Inercia respecto a ejes inclinados

- Podemos simplificar a

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + 2I_{xy} \cos 2\theta$$

- El momento polar de inercia respecto al eje z que pasa a través del punto O es,

$$J_O = I_u + I_v = I_x + I_y$$

10.6 Momentos de Inercia respecto a ejes inclinados

Momentos principales de Inercia

- I_u , I_v , I_{uv} dependen del ángulo de inclinación θ de los ejes u , v
- El ángulo $\theta = \theta_p$ define la orientación de los ejes principales del área

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2 \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\theta = \theta_p$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

10.6 Momentos de Inercia respecto a ejes inclinados

Momentos principales de Inercia

- Sustituyendo cada una de las razones para el seno y el coseno, tenemos

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

- Los resultados dan el momento de inercia máx y mín para el área
- Se puede demostrar que $I_{uv} = 0$, i.e. el producto de inercia respecto a los ejes principales es cero
- Cualquier eje simétrico representa un eje principal de inercia para el área

10.7 Círculo de Mohr

- Se encuentra que

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

- En un problema, I_u y I_v son la variables y I_x , I_y , I_{xy} son conocidas

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

- Cuando pintamos esta ecuación, sobre ejes que representan los momentos y productos de inercia, la gráfica resulta un círculo

10.7 Círculo de Mohr

- El círculo construido se conoce como círculo de Mohr, de radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

y centro $(a, 0)$ donde $a = (I_x + I_y)/2$

10.7 Círculo de Mohr

Procedimiento de análisis

Determinar I_x, I_y, I_{xy}

- Establecer los ejes x , y para el área, con el origen localizado en el punto P de interés y determinar I_x, I_y, I_{xy}

Construcción del Círculo

- Construir un sistema de coord rectangular, de manera que la abscisa representa el momento de inercia I y la ordenada el producto de inercia I_{xy}

10.7 Círculo de Mohr

Construcción del Círculo

- Determine el centro del círculo O , localizado a una distancia $(I_x + I_y)/2$ del origen, y pintar al punto de referencia A de coordenadas (I_x, I_{xy})
- Por definición, I_x es siempre positivo, mientras que I_{xy} puede ser positivo o negativo.
- Conecte el punto de referencia A con el centro del círculo, y determinarse la distancia OA (el radio del círculo) por trigonometría
- Dibujar al círculo

10.7 Círculo de Mohr

Momentos of Inercia Principales

- Los puntos en donde el círculo intersecta a la abscisa dan los valores de los momentos de inercia principales I_{\min} y I_{\max}
- El producto de inercia será cero en esos puntos

Ejes principales

- Este ángulo representa dos veces el ángulo desde el eje x axis del área en cuestión al eje del momento de inercia máximo I_{\max}
- El eje par ael momento de inercia mín I_{\min} es perpendicular al eje del I_{\max}

10.8 Momento de inercia de una distribución

- El momento de inercia se define como la integral del segundo momento respecto a un eje de todos los elementos de masa que componen un cuerpo
- El momento de inercia respecto al eje z resulta

$$I = \int r^2 dm$$

- El eje que se elige normalmente pasa a través del centro de masa G del cuerpo

10.8 Momento de inercia de una distribución

- Si el cuerpo consiste de un material de densidad variable $\rho = \rho(x, y, z)$, el elemento de masa se puede expresar como $dm = \rho dV$

- Usando el elemento de volumen

$$I = \int r^2 \rho dV$$

- Y si ρ es constante,

$$I = \rho \int r^2 dV$$

10.8 Momento de inercia de una distribución

- Si el cuerpo consiste de un material de densidad variable $\rho = \rho(x, y, z)$, el elemento de masa se puede expresar como $dm = \rho dV$

- Usando el elemento de volumen

$$I = \int r^2 \rho dV$$

- Y si ρ es constante,

$$I = \rho \int r^2 dV$$

10.8 Momento de inercia de una distribución

Procedimiento de análisis

Elemento de capa

- Para una capa de altura z , radio y , espesor dy , el volumen resulta: $dV = (2\pi y)(z)dy$

Elemento de disco

- Para un disco de radio y , espesor dz , el volumen resulta: $dV = (\pi y^2) dz$

10.8 Momento de inercia de una distribución

Teorema de eje paralelo

- Si el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje que pasa por el centro de masa es conocido, el momento de inercia respecto a cualquier otro eje paralelo se determina por el teorema del eje paralelo,

$$r^2 = (d + x')^2 + y'^2$$

- Para el momento de inercia respecto al eje z,

$$I = \int r^2 dm = \int [(d+x')^2 + y'^2] dm$$
$$\int (x'^2 + y'^2) dm + 2d \int x' dm + d^2 \int dm$$

10.8 Momento de inercia de una distribución

Teorema del eje paralelo

- Para el momento de inercia respecto al eje z,

$$I = I_G + md^2$$

Radio de giro

- Usando el radio de giro k , para expresar el momento de inercia,

$$I = mk^2 \quad \text{or} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$