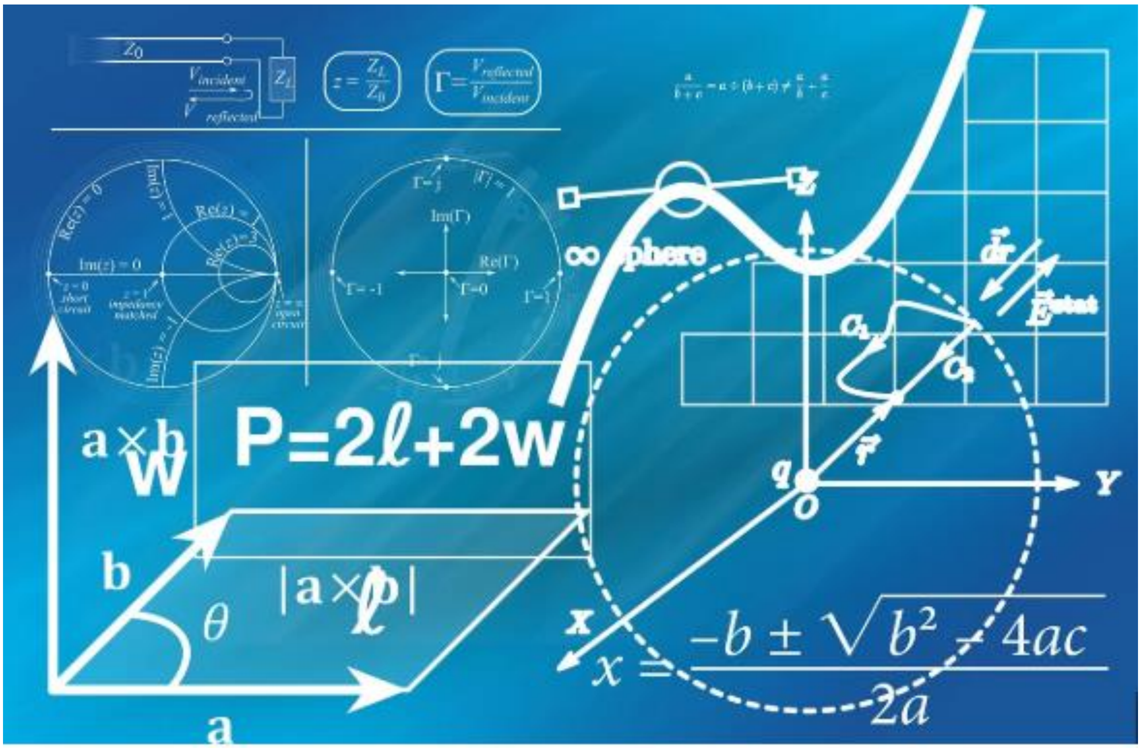
APUNTES DE MATEMÁTICAS EMPRESARIALES

María M. Sánchez Martín

Grado en Administración y Dirección de Empresas.

Curso 2024/2025

T. 1 ESPACIOS VECTORIALES



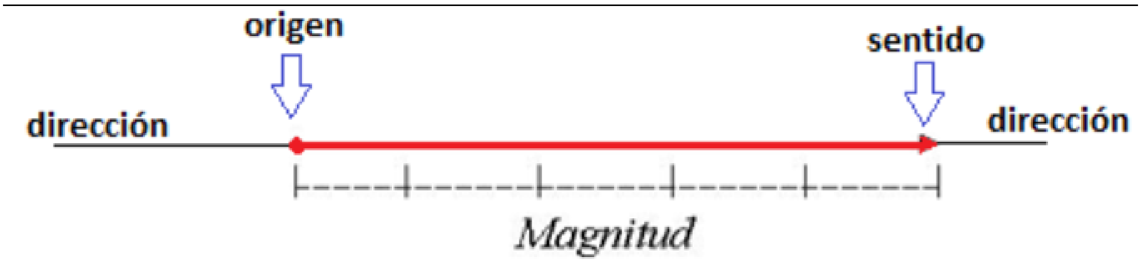
MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

INTRODUCCIÓN

El estudio de los vectores es un conocimiento que proviene de la física. En ella se distingue entre magnitudes escalares y magnitudes vectoriales. Se llaman magnitudes escalares a aquellas en las que sólo influye su tamaño. Por el contrario, se consideran magnitudes vectoriales aquellas en las que influye, además del tamaño, la dirección y el sentido en el que se aplican.

Un **vector** es todo segmento de recta dirigido en el espacio. Sus características son:

- Punto de aplicación: Punto exacto sobre el que actúa el vector.
- Módulo: Tamaño o longitud del vector. Para calcularlo es necesario conocer el origen y extremos del vector.
- Dirección: Orientación en el espacio de la recta que lo contiene.
- Sentidos: Indicado mediante una punta de flecha del extremo del vector que indica hacia qué lado se dirige.



DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL

Un espacio vectorial es una terna $(V, +, \cdot)$, *donde* V *es un conjunto no vacío y* $+, \cdot$ *son dos operaciones del tipo* $+ : V \times V \to V$ *y* $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ a las que llamaremos *"suma de vectores" y "producto por escalares"* respectivamente y conlas siguientes propiedades:

[A partir de ahora denotaremos $+(u, v) = u + v$ y $\cdot(\lambda, v) = \lambda v$*]*

1. $u + (v + w) = (u + v) + w, \ \forall u, v, w \in V$ *(Asociativa).*
2. $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$ *(Conmutativa).*
3. *Existe* $e \in V$ *tal que* $e + v = v + e = v, \ \forall v \in V$ *(Elemento Neutro).*
4. *Para cada* $v \in V$ *existe* w *tal que* $v + w = w + v = e$ *(Elemento Opuesto).*
5. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v, \ \forall v \in V, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
6. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *y* $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \ \forall u, v \in V$ *y* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(Distributiva).*
7. $1v = v, \forall v \in V$ *(Elemento Unidad).*

De forma abreviada, diremos que **V es un espacio vectorial**. A los elementos de V lo llamamos **vectores** y a los de $\mathbb{R}$, **escalares**.

EJEMPLO:

Si n es un número natural, se considera el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}$

Con la suma y producto por escalares siguientes:

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

$\mathbb{R}^n$ tiene esta estructura vectorial

ALGUNOS CONCEPTOS ESPECÍFICOS DE ESPACIÓS VECTORIALES:

1. COMBINACIÓN LINEAL:

Dado un conjunto de vectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, decimos que otro vector u $\in \mathbb{R}^n$ es **combinación lineal (C.L)** de los vectores del conjunto si existen *m* números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tales que:

$u = \alpha_1 . v_1 + \alpha_2 . v_2 + \alpha_3 . v_3 + \cdots + \alpha_m . v_m$

Diremos, además que los números reales, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son las **coordenadas del vector** u respecto a los vectores $v_1, \ldots, v_m$

EJEMPLO:

Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$ v_1=(2,1,-1) y v_2 =(3,2,0)

Podemos formar combinaciones lineales de estos vectores:

$\alpha(2,1,-1) + \beta(3,2,0) = (2\alpha + 3\beta, \alpha + 2\beta, -\alpha)$

Por ejemplo: $4(2,1,-1) - 2(3,2,0) = (2,0,-4)$

Podemos asegurar que el vector $(2,0,-4)$ es **"combinación lineal (C.L.)"** de los vectores v_1 *y* v_2

Además, sus coordenadas respecto a esos vectores serían 4 y -2.

PROPIEDAD:

El vector nulo es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores, $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$, tomando como coordenadas el escalar cero.

$$\vec{0} = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m$$

2. *DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL:*

Los vectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ son ***linealmente dependientes*** (LD) si alguno de ellos es combinación lineal del resto.

$$v_j = \propto_1 v_1 + \propto_2 v_2 + \cdots + \propto_{j-1} v_{j-1} + \propto_{j+1} v_{j+1+\cdots+} \propto_m v_m$$

EJEMPLO:

Los vectores de $\mathbb{R}^3$ {(1, 2, -1), (2, 0, 3), (3,2,2)} son linealmente dependientes ya que se puede observar que:

(3,2,2) = (1, 2, -1) + (2, 0, 3)

Los vectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ son ***linealmente independientes*** (LI) si ninguno de ellos es combinación lineal del resto.

EJEMPLO:

Los vectores de $\mathbb{R}^3$ {(1, 2, -1), (3,1,0)} son linealmente independientes.

Si fuesen dependientes uno de ellos tendría que ser múltiplo del otro. Es decir, tendría que existir un valor de $\propto$ *que verifique*:

(1, 2, -1)= $\propto$(3,1,0)

Igualando tendríamos $\begin{cases} 1 = 3\propto \\ 2 = \propto \\ -1 = 0 \end{cases}$ sólo por la última ecuación se vería que es imposible.

*PROPIEDAD: (**Condición necesaria y suficiente de Independencia Lineal**)*

Los vectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ son linealmente independientes si la única manera de obtener como combinación lineal de ellos el vector $\vec{0}$ es que todos los escalares valgan 0.

Es decir, $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ son **linealmente independientes** $\leftrightarrow$

$$\propto_1 . v_1 + \propto_2 . v_2 + \propto_3 . v_3 + \cdots + \propto_m . v_m = \vec{0} \rightarrow \propto_1 = \propto_2 = \cdots = \propto_m = 0$$

EJEMPLO:

Si consideremos los vectores siguientes {(1,2,-1),(1,1,2),(0,-1,3)} obtenemos el vector nulo como combinación lineal de ellos de la siguiente forma

(0,0,0) = 2(1,2,-1) - 2(1,1,2) +2(0,-1,3)

Hemos obtenido el vector nulo como C.L. de los vectores siendo las coordenadas distintas de cero, esto implica, según la propiedad anterior, que los vectores {(1,2,-1), (1,1,2), (0,-1,3)} son linealmente dependientes.

3. SISTEMA DE GENERADORES:

Sea V un espacio vectorial. Diremos que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$ son un **sistema generador** del espacio vectorial si todos los vectores del espacio son combinación lineal de dichos vectores.

Es decir, $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$ son **sistema generador de V** $\leftrightarrow \forall u \in V$

$\rightarrow u = \propto_1 . v_1 + \propto_2 . v_2 + \propto_3 . v_3 + \cdots + \propto_m . v_m$

NOTA:

$v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$ no tienen que ser necesariamente linealmente independientes, pero dentro de ellos al menos debe haber n independientes (dimV=n).

4. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL:

Diremos que n vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ son **base** del espacio vectorial si son linealmente independientes y sistema generador del espacio.
Se considera el mínimo número de vectores capaces de generar cualquier vector del espacio.
Denominaremos **dimensión del espacio vectorial** al número de vectores que forman cualquier base de un espacio vectorial y se escribe Dim(V) (En este caso Dim(V)=n).

NOTA:

- $Dim(\mathbb{R}^2)$ = 2, de modo que todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ (plano cartesiano) tienen 2 componentes, y sus bases, 2 vectores. Su base canónica sería {(1,0),(0,1)}.
- $Dim(\mathbb{R}^3)$ = 3, de modo que todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ (espacio *tridimensional*) tienen 3 componentes, y sus bases, 3 vectores. Su base canónica sería {(1,0,0),(0,1,0), (0,0,1)}.
- $Dim(\mathbb{R}^4)$ = 4, de modo que todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ tienen 4 componentes, y sus bases, 4 vectores. Su base canónica sería {(1,0,0,0),(0,1,0,0), (0,0,1,0),(0,0,0,1}.

- $Dim(\mathbb{R}^n) = n$, de modo que todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ tienen n componentes, y sus bases,n vectores. Su base canónica sería {(1,0,0…0), (0,1,0…0), (0,0,0,…,1)}.

RELACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES Y MATRICES

Dado un espacio vectorial V tal que dimV=n; Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Formamos la matriz A de orden nxm siendo las columnas de la matriz cada uno de los vectores dados:

$$A=\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

1. Se verifica que el rango de A coincide con el número de vectores linealmente independientes entre los vectores dados.
   Por tanto:

   Si R(A)=m=nº vectores dados $\rightarrow$ $vectores\ linealmente\ independientes$

   Si R(A)<m=nº vectores dados $\rightarrow$ $vectores\ linealmente\ dependientes$

   EJEMPLO:

   Si consideremos los vectores siguientes {(1,2,-1),(1,1,2), (0,1,1)}, formamos la matriz:

   $$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   El máximo rango que puede tener la matriz A es 3. Estudiamos si $|A| \neq 0$ para ver si tiene rango máximo:

   $$|A| = 1 + 0 - 1 - 0 - 2 - 2 = -4 \neq 0$$

   Por tanto, R(A)=3 y los tres vectores dados sería linealmente independientes.

2. Para que sea sistema de generadores del espacio vectorial, el rango de la matriz debe coincidir la dimensión del espacio vectorial (dimV=n).

3. Como en $\mathbb{R}^n$ el número de componentes del vector y el número de vectores de una base coinciden, la matriz formada por los vectores de la base (A) es cuadrada y por tanto se verifica que si consideramos n vectores de $\mathbb{R}^n$ $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ y A la matriz cuadrada de orden n formada por dichos vectores, entonces los vectores forman base de $\mathbb{R}^n$ si y solo si $|A| \neq 0$.

   EJEMPLO:

Si consideremos los vectores siguientes {(1,2,-1),(1,1,2), (0,1,1)} de $\mathbb{R}^3$ para demostrar que es base bastaría ver si tengo tantos vectores al menos como la dimensión de espacio vectorial (en este caso dim$\mathbb{R}^3 = 3$) y si el determinante de la matriz formada por los vectores es distinta de 0.

En este caso tengo tres vectores y $|A| = 1 + 0 - 1 - 0 - 2 - 2 = -4 \neq 0$ por tanto podemos afirmar que {(1,2,-1),(1,1,2), (0,1,1)} son una base de $\mathbb{R}^3$.

SUBESPACIOS VECTORIALES

Sea U un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces U es un ***subespacio vectorial*** *si y solo si:*

1. *Si $u, v \in U$, entonces $u + v \in U$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in U$, entonces $\lambda u \in U$*

Equivalentemente si se verifica que $\lambda u+\beta v \in U$ *para* $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$ y $u, v \in U$

Un subespacio vectorial U puede ser definido de dos maneras:

1. Dando un conjunto de vectores generadores:
   U= L$\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ Siendo dimU=Rango$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$
2. Dado un sistema homogéneo de ecuaciones cartesianas que han de cumplir los vectores que pertenecen al subespacio:
   U={v∈V/ Av=$\vec{0}$} siendo A una matriz de orden mxn con m<n y

   dimU=dimV-Rango(A)

<u>EJEMPLO 1:</u> (determinación de base del subespacio a partir de sus ecuaciones cartesianas).

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \}$$

En primer lugar, se calcula la dimensión del subespacio a través de la matriz de coeficientes del sistema:

A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Calculamos su determinante y $|A| = 0$ por tanto el rango debe ser menor que 3.

Calculamos por ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ entonces R(A)=2.

dimU=dim$\mathbb{R}^3$-Rango(A)=3-2=**1**

Ahora ya sabemos el número de vectores que debe tener la base, 1 vector y como el Rango(A)=2 significa que una ecuación es redundante con las otras dos, y elimino la tercera que es la que no he usado para establecer el rango de A.

Por tanto, queda resolver el sistema compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Si llamamos $x = \propto$ despejando de la segunda tenemos que $z = \propto$ y de la primera $y = 2 \propto$ por tanto la solución sería:

$$\begin{cases} x = \propto \\ y = 2 \propto \\ z = \propto \end{cases}$$

Y la base del subespacio serían los coeficientes que van con $\propto$

B={(1,2,1)}

<u>EJEMPLO 2:</u> (determinación de las ecuaciones del subespacio a partir de una base)

Sea el siguiente subespacio U=L{(1, 2,-1), (0,2,1), (1,4,0)} de $\mathbb{R}^3$

Lo primero que habría que comprobar es si todos los vectores son independientes o hay alguno que podamos eliminar. Para ello comprobamos el rango de la matriz formada por los tres vectores:

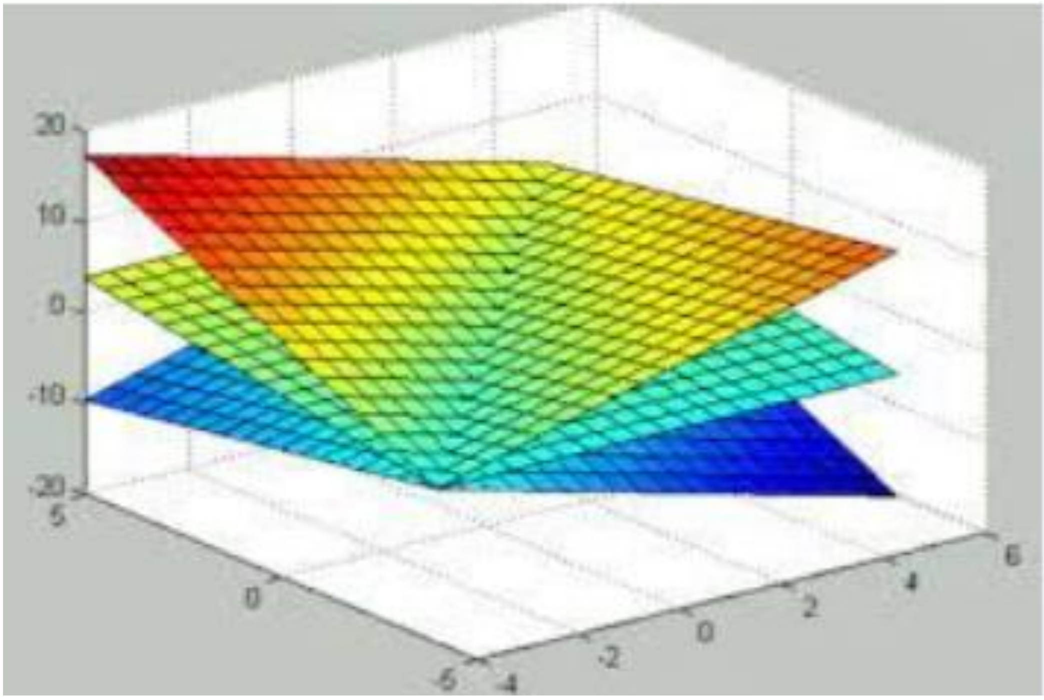
A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$ y por tanto no tiene rango 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto rango(A)=2 y dimU=2 con Base U={(1,2,-1), (0, 2,1)} para hallar las ecuaciones cartesianas u homogéneas de U, sabemos que cualquier vector (x,y,z) será dependiente con los dos de la base de U y por tanto:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 2 & y \\ -1 & 1 & z \end{bmatrix}$=0 resolviendo el determinante 2z+2x+2x-y=0→ $4x - y + 2z = 0$ es la ecuación cartesiana del subespacio.

T. 2 TRANSFORMACIONES LINEALES. PROCESOS SECUENCIALES LINEALES.



Universidad Rey Juan Carlos

MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

INTRODUCCIÓN:

En economía, uno de los estudios más recurrente que se suele hacer es de los procesos secuenciales, es decir, aquellos en los que se estudia la evolución de una situación a lo largo del tiempo o en un periodo de tiempo determinado. Cuando esta evolución se estudia de manera lineal, al conocer el estado inicial podemos conocer lo que ocurre después de n periodos analizando las transformaciones o aplicaciones lineales.

TRANSFORMACIÓN/APLICACIÓN LINEAL

Dados dos espacios vectoriales V y V', decimos que f:V→ V' es una aplicación lineal si:

1. $\forall u, v \in V \rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in V\ y\ \forall k \in \mathbb{R} \rightarrow f(ku) = kf(u)$

(Es equivalente a que $\forall u, v \in V$ y $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \rightarrow f(k_1 u + k_2 v) = k_1 f(u) + k_2 f(v)$)

<u>NOTA</u>:

Para toda aplicación lineal se cumple que $f(\vec{0})= \vec{0}$

<u>MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL</u>

Sea f:V→ V' una aplicación lineal entre esos dos espacios vectoriales donde dimV=n y dimV'=m entonces tenemos que: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

Donde

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$

………………………………

$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n$$

Si llamamos A= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ podemos expresar la aplicación lineal como $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

A es una matriz de dimensión mxn

EJEMPLO:

Sea f:$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que f(x,y)=(2x+y, x-y, 2x-3y) calcula su matriz asociada.

Según lo visto anteriormente la matriz asociada tiene dimensión 3x2 y la matriz es:

A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

y la expresión matricial de la aplicación lineal es f(x,y)= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} . \binom{x}{y}$

NOTA 1: Las columnas de la matriz coinciden con hacer la aplicación lineal de cada elemento de la base canónica del espacio del que parte la aplicación.

Si tomamos el ejemplo anterior, se comprueba que:

f(1,0)=(2,1,2)

f(0,1)=(1,-1,-3)

que son las columnas de la matriz A.

NOTA 2: Para realizar operaciones con aplicaciones lineales se puede hacer a través de sus matrices.

- Para sumar dos aplicaciones lineales, se suman sus matrices correspondientes. Por tanto, deben tener las mismas dimensiones.
- Para multiplicar un escalar por una aplicación lineal, se multiplica el escalar por la matriz de la aplicación.
- Para componer dos aplicaciones lineales, se multiplican sus matrices correspondientes. Por tanto, no todas pueden componerse ya que la multiplicación de matrices impone que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda ($M_{g0f} = M_g . M_f$).

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

En toda aplicación lineal $f: V \rightarrow V'$ podemos definir su núcleo y su imagen.

Llamamos **núcleo** de la aplicación lineal (Ker(f)) al conjunto de vectores de V que se transforman en el vector nulo de V'.

$$Ker(f) = \{u \in V / f(u) = 0_{V'}\}$$

Llamamos **imagen** de la aplicación lineal f (Im f) al subespacio generado por las columnas de la matriz de la aplicación.

$$Im(f) = \{v \in V' / \exists\, u \in V: f(u) = v\}$$

Y se verifica que dim($Im(f)) = rango(A)$.

Además, se cumple que:

$\boxed{\textbf{dim(V)=dim}(\boldsymbol{Ker(f)}) + \ \textbf{dim}(\boldsymbol{Im(f)})}$

EJEMPLO: Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación del ejemplo anterior.

f:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que f(x,y)=(2x+y, x-y, 2x-3y) cuya matriz es:

A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

El rangoA=2 ya que es el máximo que puede tener y tenemos $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Por tanto dim$(Im(f)) = 2$. Lo que significa que tengo que tomar dos columnas independientes de la matriz. Como sólo tiene dos, cojo ambas y tenemos que:

Base $\boldsymbol{Im(f)} = \{(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{2}),(\mathbf{1},-\mathbf{1},-\mathbf{3})\}$ y para pasar a ecuaciones cartesianas, como ya vimos en el tema anterior:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 2 & -3 & z \end{bmatrix} = 0 \to -2z - 3x + 2y + 2x + 3y - z = 0 \to \boxed{-x + 5y - 3z = 0}$$

Ahora vamos a calcular el núcleo.

$\boxed{\textbf{dim(V)=dim}(\boldsymbol{Ker(f)}) + \ \textbf{dim}(\boldsymbol{Im(f)})}$

De aquí obtenemos que dim$(Ker(f)) = 0$ cuando se da este caso, sabemos entonces que $Ker(f) = \{\vec{0}\}$. Lo que saldría igual si aplicamos la definición.

Tendríamos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuya única solución es x=y=0.

CLASIFICACIÓN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Dada una aplicación lineal $f: V \to V$ decimos que es:

- **Inyectiva**: Si $f(u) = f(v) \to u = v$. La forma de comprobarlo será ver que dim$(Ker(f)) = 0$. La aplicación será un monomorfismo.
- **Sobreyectiva**: $Si\ \forall v \in V', \exists u \in V\ /\ f\ (u) = \ v$. La forma de comprobarlo será ver que dim$(Im(f)) = dim(V')$. La aplicación será un epimorfismo.
- **Biyectiva:** Si la aplicación es inyectiva y sobreyectiva. La aplicación será un isomorfismo.

EJEMPLO: Continuando con el ejemplo anterior como dim$(Ker(f)) = 0$ tenemos que es inyectiva.

Por otro lado, dim($Im(f)$) $= 2 \neq dim\mathbb{R}^3 = V'$ por tanto no es sobreyectiva ni biyectiva.

NOTA:

Para calcular la inversa de una aplicación lineal, la aplicación debe de ser biyectiva. La matriz de f^{-1} es la inversa de la matriz de f.

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Dada una aplicación lineal $f: V \to V$, decimos que un vector v es un **autovector** de la aplicación si se cumple $f(v) = \alpha v$. O lo que es lo mismo Av= αv siendo A la matriz de la aplicación. Al escalar α se le denomina el **autovalor** asociado al autovector.

Llamamos S_α al subespacio vectorial formados por todos los autovectores asociados al autovalor α

$$S_\alpha = \{v \in V / \, f(v) = \alpha v\}$$

Todos los autovectores asociados a un mismo autovalor son independientes entre sí.

EJEMPLO: Dada la aplicación lineal f(x,y)=(x+2y, 3x+2y) comprueba que el vector v=(4,6) es un autovector asociado al autovalor $\alpha = 4$.

Aplicamos la definición y comprobamos si f(4,6)=4.(4,6)

f(4,6)=(16, 24)

4.(4,6)=(16, 24)

Por tanto, si se cumple.

1. Cálculo de los autovalores

Dada una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por una matriz A, definimos el **polinomio característico** como:

$$p(\alpha) = |A - \alpha Id|$$

Las raíces de este polinomio característico son los autovalores de nuestra aplicación. Es decir, tenemos que plantear $p(\alpha) = |A - \alpha Id| = 0$.

EJEMPLO: Calcular los autovalores de la apliación cuya matriz asociada es la siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p(\alpha) = |A - \alpha Id| = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix} = (2-\alpha).(1-\alpha).(3-\alpha) = 0$$

Si resolvemos esa ecuación, como ya está factorizada, tenemos que los autovalores pedidos son:

$$\alpha = 2; \ \alpha = 1; \ \alpha = 3$$

2. Calculo de autovectores.

Los autovectores son la base de los diferentes subespacios asociados a cada autovalor

$$S_\alpha = \{v \in V / \, Av = \alpha v\}$$

Para encontrar la base de cada uno de estos subespacios, para cada autovalor, hay que encontrar la solución al sistema de ecuaciones:

$$(A - \alpha Id)\vec{x} = 0$$

(es decir calcular el $\ker(A - \alpha Id)$)

EJEMPLO: Vamos a calcular el subespacio asociado a cada autovalor del ejemplo anterior.

Para $\boldsymbol{\alpha = 2}$

$$(A - 2Id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = \beta \\ y = 2\beta \\ z = 2\beta \end{cases}$$

Por tanto, en este caso el subespacio está generado por sólo un vector, el (1,2,2) que es el autovector asociado a $\boldsymbol{\alpha = 2}$

$$S_2 = \{(1,2,2)\}$$

Para $\boldsymbol{\alpha = 1}$

$$(A - 1Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 0 \\ 2x = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$$

Por tanto, en este caso el subespacio está generado por sólo un vector, el (0,2,1) que es el autovector asociado a $\boldsymbol{\alpha = 1}$

$$S_1 = \{(0,2,1)\}$$

Para $\boldsymbol{\alpha = 3}$

$$(A - 3Id) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \beta \end{cases}$$

Por tanto, en este caso el subespacio está generado por sólo un vector, el (0,0,1) que es el autovector asociado a $\boldsymbol{\alpha = 3}$

$$S_3 = \{(0,0,1)\}$$

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

Dos matrices A y B son **semejantes**, si existe una matriz P, invertible tal que A.P=P.B, o lo que es lo mismo:

$$A = P.B.P^{-1}$$

Sea $f: V \rightarrow V$ con matriz asociada A, decimos que es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal semejante a ella. Es decir, si existe D diagonal y P invertible tal que:

$$A = P.D.P^{-1}$$

En el caso de que la matriz sea diagonalizable, la **matriz diagonal D**, estaría formada por los autovalores (repetidos según su multiplicidad) en la diagonal y el resto 0.

La **matriz P** estará formada por los autovectores asociados a cada autovalor.

¿Cuándo podemos decir que una matriz es diagonalizable?

1. <u>Cuando todos los autovalores son reales y distintos</u> (multiplicidad de cada uno de ellos igual a 1). Cada autovalor aparecerá una vez en la matriz diagonal y la matriz P se formará con los vectores asociados a cada autovalor.

2. <u>Cuando la dimensión de cada subespacio de autovalores coincide con la multiplicidad de dicho autovalor</u>. Es decir, si por ejemplo un autovalor se repite dos veces, el subespacio asociado a dicho autovalor tendrá que tener dos vectores. En la matriz diagonal aparecerá repetido el autovalor y en P se pondrán todos los vectores encontrados.

3. <u>Si la matriz asociada A es simétrica, es diagonalizable</u>.

<u>EJEMPLO 1:</u> Si continuamos con nuestro ejemplo para ver si la matriz A inicial es diagonalizable teníamos que nuestros autovalores eran todos reales y distintos.

$$\alpha = 2; \ \alpha = 1; \ \alpha = 3$$

Por tanto, podemos afirmar que es diagonalizable.

Además, teníamos hallados ya los subespacios asociados a cada uno de los autovalores:

$$S_2 = \{(1,2,2)\} \quad S_1 = \{(0,2,1)\} \qquad S_3 = \{(0,0,1)\}$$

Podemos construir P y D (ojo, en el orden que pongas en la matriz D los autovalores, hay que poner en la matriz P los autovectores).

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; y \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la relación de semejanza sería:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

<u>EJEMPLO 2: </u> Veamos un caso donde la matriz no es diagonalizable.

Sea A una matriz asociada a un endomorfismo

A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos sus autovalores:

$$\begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} = (1-\alpha)^2 . (2-\alpha) = 0$$

Los autovalores serían $\alpha = 1 \; doble \; y \; \alpha = 2$

Calculamos su subespacios asociados:

Para $\boldsymbol{\alpha = 1}$

$$(A - 1Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}$$

Por tanto, en este caso el subespacio está generado por sólo un vector, el (0,1,0) que es el autovector asociado a $\boldsymbol{\alpha = 1}$

$$S_1 = \{(0,1,0)\}$$

Como sólo hay un vector y el autovalor era doble la aplicación NO es diagonalizable. Tendrían que haber salido dos autovectores en el subespacio.

Ya no hace falta comprobar el otro autovalor porque cuando uno no cumple las condiciones ya no importa que el otro sí que lo haga.

PROCESOS SECUENCIALES LINEALES. POTENCIAS DE MATRICES

El mundo de la economía está lleno de situaciones en las que hay que encontrar la solución de un sistema dinámico que ha ido cambiando a lo largo del tiempo y que cada periodo viene determinado de forma lineal por el inmediatamente anterior:

$$x_{i+1} = A.x_i$$

Donde A es una matriz y x_i la situación del sistema en el periodo i.

Si quisiéramos conocer el estado en cualquier momento conociendo el estado inicial x_0 bastaría con plantear:

$$x_n = A^n.x_0$$

Por lo que conociendo la potencia de la matriz A, conoceríamos todos los estados.

<u>Calculo de potencias de una matriz diagonalizable</u>:

Sabemos que $A^2 = A.A$ y que $A^3 = A.A.A$, también entonces $A^n = A.A.A.\dots A$ (n veces), por tanto si queremos calcular A^{300} por el método habitual se convierte en algo muy complicado.

Cuando una matriz es diagonal, el proceso se simplifica mucho ya que, por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

Si A es diagonalizable, sabemos que es semejante a una matriz diagonal y que, por tanto:

$$A = P.D.P^{-1} \rightarrow \; A^n = P.D^n.P^{-1}$$

<u>EJEMPLO</u>

Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Que ya hemos visto que era diagonalizable en los ejemplos anteriores y que

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad y\quad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\2&1&1\end{pmatrix}$$

Si por ejemplo quisiéramos calcular A^{50} tendríamos:

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\2&1&0\\0&-1&3\end{pmatrix}^{50}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\2&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{50}.\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

Que es mucho más sencillo de calcular que multiplicar A cincuenta veces por si misma.

ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

La Geometría Euclídea se desarrolla en los siglos XIX y XX, tras la aparición del concepto de espacio vectorial. Recibe su nombre en honor a Euclides, matemático griego (~300 a.C.) quien estudió los conceptos básicos de la Geometría plana, aunque por supuesto no en un contexto vectorial.

Para generalizar esos conceptos geométricos, observamos el comportamiento de los vectores del plano. En $\mathbb{R}^2$ tenemos definido el producto escalar usual:

$$(u_1,u_2)\cdot(v_1,v_2)=u_1\,v_1+u_2\,v_2$$

Es una operación entre dos vectores, cuyo resultado es un escalar.

El producto escalar permite reconocer a los vectores ortogonales ya que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero.

Propiedades del producto escalar usual.

1. Conmutativa. $u\cdot v = v\cdot u$
2. Distributiva. $u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w$
3. Semiasociativa: $\propto (u\cdot v) = (\alpha\, u)\cdot v = u\cdot(\alpha\, v)$
4. Definida positiva: $v\cdot v \geq 0$, y se da la igualdad $v\cdot v = 0$ solamente para el vector $v = 0$.

Cualquier operación en un espacio vectorial que cumpla las anteriores propiedades, diremos que es un producto escalar (aunque no se trate del producto escalar usual).

Llamaremos espacio euclídeo a un espacio vectorial dotado de un producto escalar. El producto escalar se denotará por **u · v.** También se puede utilizar la notación **<u,v>.**

Ejemplos de producto escalar.

1. El producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$

   $(a_1,a_2,...,a_n) \cdot (b_1,b_2,...,b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$

2. En $\mathbb{R}^3$ podemos proponer otra operación que cumpla también las propiedades anteriores, y por tanto podremos llamarla un producto escalar. Por ejemplo, $(a,b,c) \cdot (a',b',c') = aa' + 2bb' + 3cc'$

MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

Conceptos geométricos

1. **Vectores ortogonales**.

Dos vectores **u, v** son ortogonales si su producto escalar es cero: **u · v = 0.**

2. **Norma o módulo de un vector**.

La norma o módulo de un vector $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Equivale a la "longitud" del vector. También se puede denotar || v || .

Con cualquier producto escalar, el único vector de módulo cero es el 0.

3. **Distancia entre dos vectores.**

La distancia entre **u** y **v** es la norma del vector diferencia entre ambos.

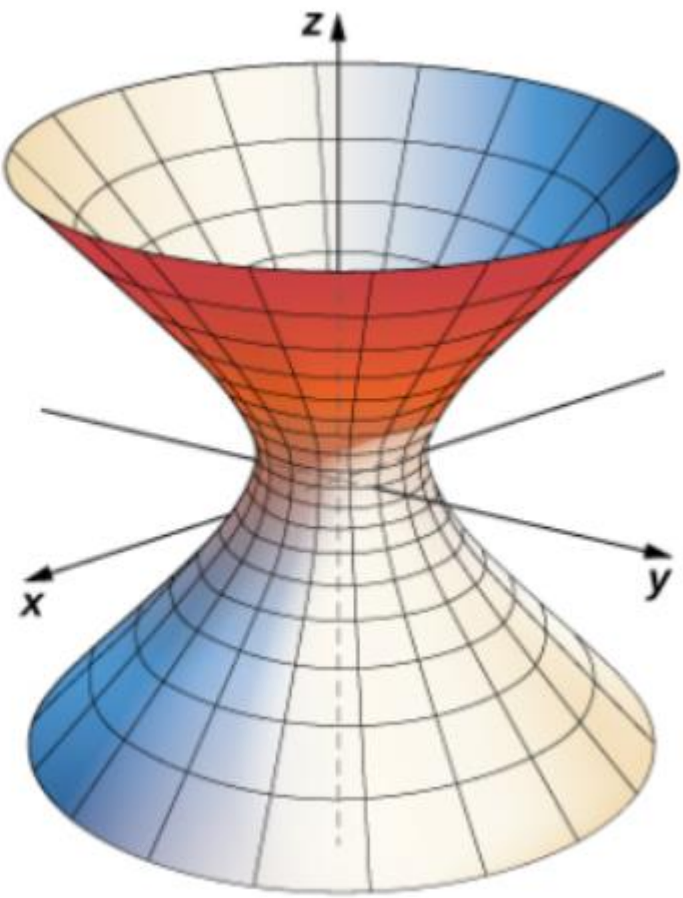
dist (u, v) = | u – v |

4. **Ángulo entre dos vectores.**

Es sabido que para el producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$ se tiene que **u · v** = | **u** | | **v** |cosα, donde α es el ángulo que forman ambos vectores. Por tanto, para generalizar la noción de ángulo a cualquier espacio euclídeo, definimos

ángulo(u, v) = $\boldsymbol{arcos}\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$

T. 3 FORMAS CUADRÁTICAS REALES.



MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

DEFINICIÓN DE FORMA CUADRÁTICA

Llamamos **forma cuadrática** real de n variables a una aplicación Q:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un número real dado por Q($\mathbf{x}$) $= \mathbf{x}^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ siendo A una matriz cuadrada de orden n y simétrica.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La forma Q($\mathbf{x}$) $= \mathbf{x}^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ es la **expresión matricial** de la forma cuadrática.

Si desarrollamos la expresión anterior Q($\mathbf{x}$) $= (x_1, x_2, \dots, x_n).\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=$

$=a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots$

A esta forma se la denomina **expresión polinómica** de la forma cuadrática.

Para pasar de una expresión a otra es de manera automática teniendo en cuenta dos cosas.

1) Cada elemento a_{kk} (diagonal) de la matriz coincide con los coeficientes de ${x_k}^2$.
2) Cada elemento a_{ij} y a_{ji} con $i \neq j$ de la matriz A es la mitad del coeficiente de x_{ij} de la expresión polinómica.

<u>EJEMPLO</u>: Dada la forma cuadrática de expresión matricial

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3).\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Hallar la expresión polinómica.

Los coeficientes cuadráticos son los de la diagonal principal 5, 3 y 1 los de los términos no cuadráticos hay que tener en cuenta por ejemplo que el coeficiente que acompaña a x_{12} viene de la suma de $a_{12} + a_{21} = 2 + 2 = 4$ en este caso y así con los demás.

Por tanto, la expresión polinómica nos queda:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

CLASIFICACIÓN DE LAS FORMAS CUADRÁTICAS

Sea $Q(\boldsymbol{x})$ una forma cuadrática podemos decir que es:

- **Definida positiva** si $Q(\boldsymbol{x}) > 0 \ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
- **Definida negativa** si $Q(\boldsymbol{x}) < 0 \ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
- **Semidefinida positiva** si $Q(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ \forall \boldsymbol{x}\ y\ \exists \boldsymbol{x_0} \neq 0\ tal\ que\ Q(\boldsymbol{x_0}) = 0$
- **Semidefinida negativa** si si $Q(\boldsymbol{x}) \leq 0 \ \forall \boldsymbol{x}\ y\ \exists \boldsymbol{x_0} \neq 0\ tal\ que\ Q(\boldsymbol{x_0}) = 0$
- **Indefinida** si asigna a algunos vectores a los que asigna valor positivo y otros negativo.

EXPRESIONES DIAGONALES. LEY DE LA INERCIA

Si la matriz asociada a $Q(\boldsymbol{x})$ es diagonal A=$\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$ entonces la expresión polinómica de $Q(\boldsymbol{x})$ es una expresión diagonal que sólo tiene términos cuadráticos:

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n).\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

<u>NOTA:</u>

Toda forma cuadrática tiene una matriz semejante diagonal y por tanto admite la expresión diagonal. Esto es debido a que es simétrica y ya habíamos visto en el tema anterior que todas las matrices simétricas son diagonalizables.

Para toda forma cuadrática Q:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A matriz asociada y $\propto_1, \propto_2, \dots, \propto_n$ autovalores de A, existe la expresión diagonal dada por:

$$Q(\mathbf{x}) = = \propto_1 x_1^2 + \propto_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

Hay más métodos para conseguir la expresión diagonal y ésta no tiene que ser única, pero nos centraremos en el método de los autovalores.

<u>EJEMPLO:</u> Dada la forma cuadrática de expresión polinómica

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2$$

Su expresión matricial sería:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3).\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Buscamos los autovalores de la matriz asociada:

$$\begin{bmatrix} 3-\alpha & -2 & 0 \\ -2 & 3-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 5-\alpha \end{bmatrix} = (5-\alpha).(\alpha^2 - 6\alpha + 5) = 0$$

Los autovalores sería α= 5 doble y α=1 simple. Sabemos que es diagonalizable sin calcular autovectores porque la matriz era simétrica. Por tanto, una expresión diagonal sería:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2$$

(Los coeficientes deben ser 1, 5 y 5 pero el orden es indistinto).

Ley de la Inercia de Sylvester:

Todas las matrices diagonales que representan a una misma forma cuadrática tienen en la diagonal principal el mismo número de términos positivos, el mismo número de términos negativos y el mismo número de términos nulos.

ESTUDIO DEL SIGNO DE UNA FORMA CUADRÁTICA

1. **Método de los autovalores:**

Si conocemos los autovalores de la matriz asociada a la forma cuadráticas, el estudio es inmediato:

- Definida Positiva: Todos los autovalores son positivos.
- Definida Negativa: Todos los autovalores son negativos.
- Semidefinida Positiva: Si todos los autovalores son positivos y hay alguno nulo.
- Semidefinida Negativa: Si todos los autovalores son negativos y hay alguno nulo.
- Indefinida: Si hay autovalores positivos y negativos.

EJEMPLO:

En la forma cuadrática del ejemplo anterior, los autovalores eran α= 5 doble y α=1. Como todos son positivos, la forma cuadrática es Definida Positiva.

2. **Método de los menores principales**:

Si A es la matriz asociada a una forma cuadrática, denominamos por $|A_i|$, i=1, 2,…,n a los menores principales de A. Procedemos a realizar la clasificación según el signo de esos menores principales:

- Definida Positiva: Si todos los menores principales de la matriz son mayores que 0.
- Definida Negativa: Si los menores principales de la matriz van alternando el signo comenzando por menos. Ningún menor puede ser 0.
- Semidefinida Positiva: Si todos los menores principales de la matriz son mayores que 0 salvo el determinante de A que es 0.
- Semidefinida Negativa: Si los menores principales de la matriz van alternando el signo comenzando por menos y el determinante de A es 0.
- Indefinida: En cualquier otro supuesto.

EJEMPLO:

La matriz asociada a la forma cuadrática del anterior ejemplo era $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ si analizamos el signo de los menores de esta matriz, tenemos:

$$|3| > 0; \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} > 0; \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} > 0$$

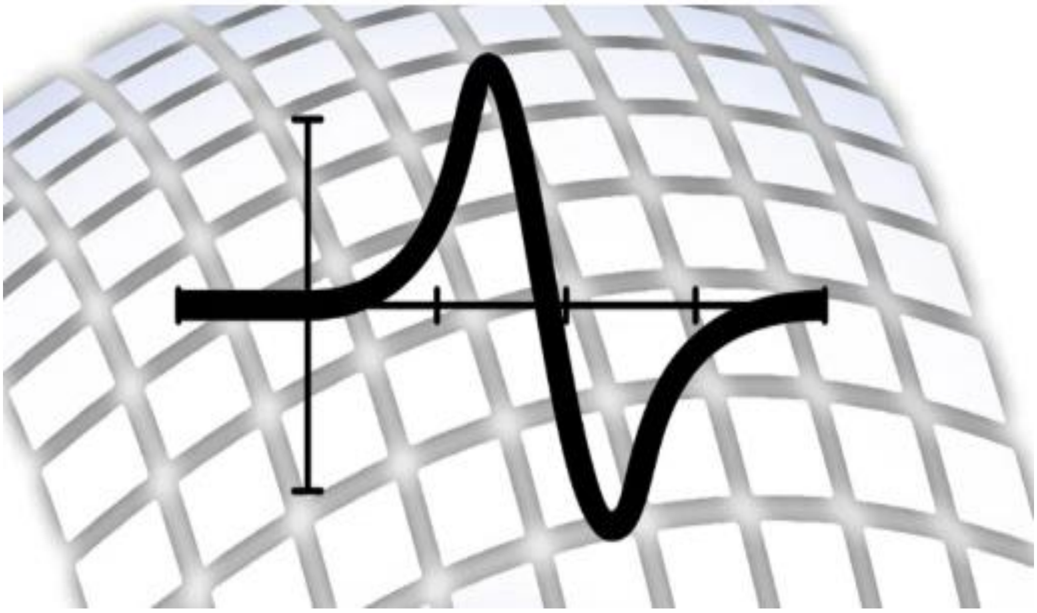
Como todos los menores principales son mayores que 0, la forma cuadrática es definida positiva (mismo resultado que el alcanzado con el método de los autovalores)

Signo de la una forma cuadrática restringida.

Sea Q$(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{Ax}$ una forma cuadrática restringida a la ecuación BX=0.

1. En primer lugar, se analizará la forma cuadrática con matriz asociada A. Si es definida (positiva o negativa) entonces la forma cuadrática restringida también lo será.
2. En otro caso, del sistema de ecuaciones BX=0, se puede despejar una variable en función de las demás y sustituirla en la expresión polinómica de la forma cuadrática original. Después, con las variables explícitas que quedan, se construye de nuevo la matriz asociada y se analiza el signo como al principio.

T. 4 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE FUNCIONES.



MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

Universidad Rey Juan Carlos

INTRODUCCIÓN

Una función f de n variables $x_{1,}x_2, \dots, x_n$ es una regla que a cada punto $(x_{1,}x_2, \dots, x_n)$ le asigna un número real $f(x_{1,}x_2, \dots, x_n)$.

El **dominio** de f se define como los puntos de $\mathbb{R}^n$ donde la función está definida, es decir:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists f(x)\}$$

La **imagen** de f son los valores que toma en $\mathbb{R}$:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}: x \in D \; con \; f(x) = y\}$$

Cuando n=2 la función solemos representarla como f(x,y). Cuando n=3 la representamos por f(x,y,z).

Ejemplo:

Calcula el dominio de la función $f(x, y) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y}$

Para que tenga sentido, lo de dentro de las raíces debe ser mayor o igual a 0.

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$y \geq 0 \rightarrow y \geq 0$$

Entonces podemos decir que

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 0\}$$

NOCIONES TOPOLÓGICAS

Definimos la **distancia euclídea** entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_{1,}x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_{1,}y_2, \dots, y_n)$ como una aplicación $d: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

Que cumple:

1. $d(x, y) \geq 0 \;\; y \; d(x, y) = 0 \; \leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \; \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

Ejemplo: Calcula la distancia entre los puntos (2,5) y (3,4).

$$d\big((2,5), (3,4)\big) = \sqrt{(3-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2}$$

a es menor o igual que r:

$$B(a, r) = \{\, x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}$$

:

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ decimos que **el límite de $f(x)$** cuando x tiende a x_0 es L$\in \mathbb{R}$ y se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ tal\ que\ si, 0 < d(x, x_0) < \partial\ entonces\ |f(x) - L| < \varepsilon$

Lo que indica que la función, por muy pequeño que escojamos el ε siempre va a existir un valor a partir del cual la función se acerca a L en un valor más pequeño que ese ε.

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ decimos que $\boldsymbol{f(x)}$ **es continua en $\boldsymbol{x_0}$** si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema de unicidad del límite: El límite de una función de varias variables en un punto, si existe, es único. $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{x^2+y^2}{x+y-2}$ determinar el límite de la función en el punto (1,-1).

$$\lim_{(x,y) \to (1,-1)} \frac{x^2 + y^2}{x + y - 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Cálculo de límites. Límites reiterados y direccionales:

En el caso unidimensional, para calcula el límite de una función en un punto, sólo nos podemos aproximar al punto por la izquierda o por la derecha. Por tanto, se calculan los límites laterales.

En el caso de varias variables, cuando al sustituir un punto nos aparece indeterminación, hay que calcular el límite a partir de la definición, lo cual se hace farragoso o calcular límites según infinitas trayectorias de aproximación al punto que tampoco es posible, por tanto, lo que hacemos es demostrar cuando no tiene límite viendo que los límites dobles o por diferentes trayectorias no coinciden.

Definimos los **límites reiterados** o sucesivos como:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

Si ambos límites no coinciden o alguno no existe, no existe el límite doble de la función f(x,y) en (x_0, y_0). Si coinciden calculamos algún límite direccional.

Siendo $y = y_0 + m.(x - x_0)$ la ecuación general de la recta que pasa por le punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ y que tiene pendiente m. Definimos los **límites direccionales o radiales** como:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ y=y_0+m.(x-x_0)}} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} f(x, y_0 + m.(x-x_0))$$

Si los valores de los límites direccionales no coinciden con el de los reiterados entonces tampoco existe el límite doble de la función. Si coincide, en caso de existir el límite, tomaría ese valor.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{3x-1-xy}{x+y-3}$ determinar el límite en el punto (1,2)

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3x-1-xy}{x+y-3} = \frac{0}{0}\ indeterminación$$

Hay que calcular los límites reiterados y direccionales.

Calculo en primer lugar los límites reiterados o sucesivos:

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 2} \frac{3x-1-xy}{x+y-3} = \lim_{x\to 1} \frac{3x-1-2x}{x+2-3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{y\to 2}\lim_{x\to 1} \frac{3x-1-xy}{x+y-3} = \lim_{x\to 1} \frac{3-1-y}{1+y-3} = \lim_{x\to 1} \frac{2-y}{y-2} = -1$$

Como los límites reiterados son distintos, el límite no existe.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ determinar el límite en el punto (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{0}{0}\ indeterminación$$

Hay que calcular los límites reiterados y direccionales.

Calculo en primer lugar los límites reiterados o sucesivos:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Como los límites reiterados coinciden, comprobamos que ocurre con los direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2mx}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3m}{x^2(x^2+m^2)} = 0$$

Como también da 0 podemos sospechar que el límite existe y que vale 0.

Continuidad:

Una función $f(x,y)$ es continua en el punto $(x_{0,}y_0)$ si existe $f(x_{0,}y_0)$ y es igual al límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (x_{0,}y_0)$, es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(x_{0,}y_0)} f(x,y) = f(x_{0,}y_0)$$

Diremos que $\boldsymbol{f(x)}$ **es continua** en su dominio si es continua en todos sus valores.

Ejemplo: Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2y + xy - 2y$
Esta función es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómica.

b) $g(x,y) = \frac{2xy+4}{x^2+y^2-9}$
La función g está definida y es continua siempre que $x^2 + y^2 - 9 \neq 0$, es decir es definida y continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo en los puntos de la circunferencia de centro (0,0) y radio 3.

c) $f(x) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ esta función por ser polinómica está siempre definida y es continua donde no se anule el denominador, es decir en este caso en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
En el (0,0) hemos visto en el ejemplo anterior que el límite existiría y valdría 0 pero la función no está definida en ese punto y por tanto no se cumple la condición de continuidad en el punto. Por tanto podemos decir que f(x) en continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

DERIVADAS PARCIALES

Para una función de una variable f(x), su derivada f'(x) mide la tasa de la variación de la función cuando x va cambiando. Para funciones de más variables, las derivadas parciales miden la velocidad de variación de la función respecto a los cambios en las variables independientes que intervienen. Por ejemplo si f(x,y) representa los beneficios de una empresa con x e y materias primas distintos, las derivadas parciales nos indican cómo y cuánto varían los beneficios cuando varía x o y.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ y\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

La derivada parcial de f con respecto a x en (x_0, y_0) se define como:

$$\frac{df}{dx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x}$$

La derivada parcial de f con respecto a y en (x_0, y_0) se define como:

$$\frac{df}{dy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta y}$$

En la práctica, la derivada parcial de f con respecto a y es la derivada de f(x,y) con respecto a y cuando x se mantiene constante.

Ejemplo: Calcula las derivadas parciales de la función $f(x,y) = x^2y + xy - 2y$

$$\frac{df}{dx} = 2xy + y$$

$$\frac{df}{dy} = x^2 + x - 2$$

GRADIENTE DE FUNCIONES REALES

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si existen todas las derivadas parciales de f en x_0, **el vector gradiente** de f en x_0 es:

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx_1}(x_0) \\ \cdots \\ \frac{df}{dx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Calcula el vector gradiente en el punto (1,2) de la función $f(x,y) = x^2y + xy - 2y$

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2xy + y \\ x^2 + x - 2 \end{pmatrix}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR. MATRIZ HESSIANA.

Las derivadas parciales $\frac{df}{dx}(x,y)$ y $\frac{df}{dy}(x,y)$ se denominan de primer orden ya que se ha derivado sólo una vez respecto a una de las dos variables. Pero a su vez, estas funciones constituyen funciones que pueden volver a derivarse, cada una de ellas, respecto de x y respecto de y.

Si $\frac{df}{dx}(x,y)$ lo volvemos a derivar respecto de x tendremos $\frac{d^2f}{dx^2}(x,y)$

Si $\frac{df}{dx}(x,y)$ lo volvemos a derivar respecto de y tendremos $\frac{d^2f}{dydx}(x,y)$

Si $\frac{df}{dy}(x,y)$ lo volvemos a derivar respecto de x tendremos $\frac{d^2f}{dxdy}(x,y)$

Si $\frac{df}{dy}(x,y)$ lo volvemos a derivar respecto de y tendremos $\frac{d^2f}{dy^2}(x,y)$

Estas serían las derivadas parciales de segundo orden.

Ejemplo: Dada la función $f(x,y) = x^2y + xy - 2y$

$\frac{df}{dx} = 2xy + y$; $\frac{df}{dy} = x^2 + x - 2$; $\frac{d^2f}{dx^2} = 2y$; $\frac{d^2f}{dydx} = 2x + 1$; $\frac{d^2f}{dy^2} = 0$; $\frac{d^2f}{dxdy} = 2x + 1$

Matriz Hessiana:

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que admite todas las derivadas parciales de segundo orden en x_0.

Definimos la matriz Hessiana de f en x_0 como:

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2}(x_0) & \frac{d^2f}{dx_1dx_2}(x_0) \dots & \frac{d^2f}{dx_1dx_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^2f}{dx_ndx_1}(x_0) & \frac{d^2f}{dx_ndx_2}(x_0) \cdots & \frac{d^2f}{dx_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Ejemplo: : Dada la función $f(x,y) = x^2y + xy - 2y$ calcular la Hessiana en el punto (1,2)

$$Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

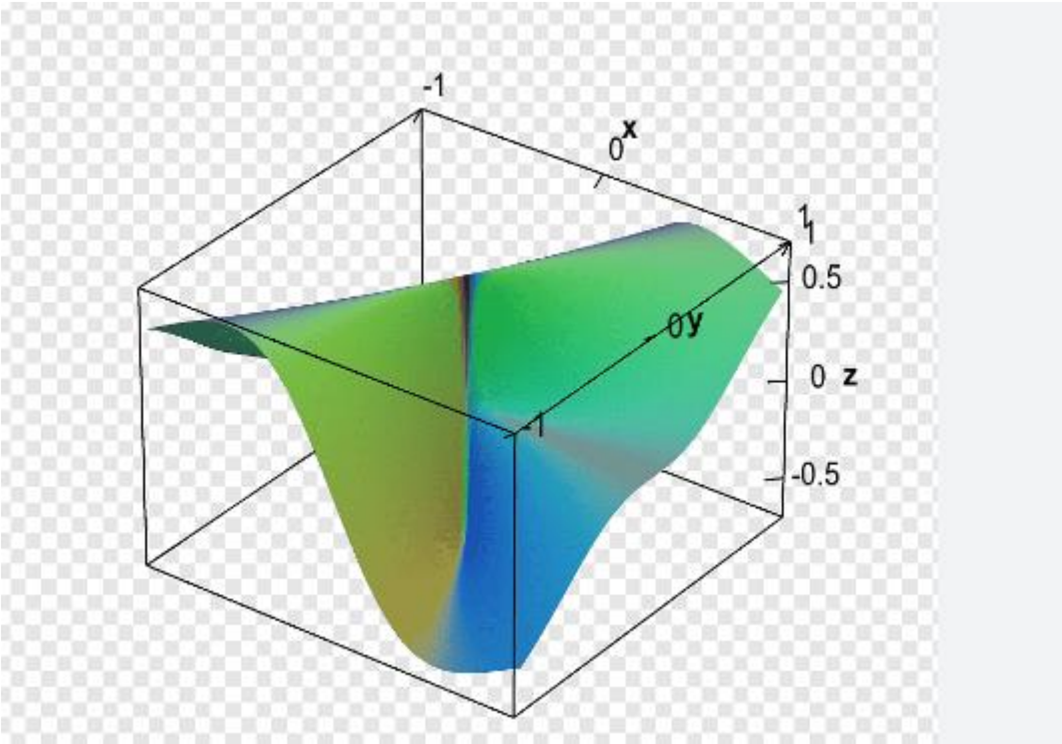
APLICACIONES ECONÓMICAS:

Dada una magnitud económica que depende de dos variables $f(x,y)$ se definen los siguientes conceptos:

1. Valor total en un punto (x_0, y_0): Es el valor que toma la función en un punto de su dominio (x_0, y_0).
2. Valor medio en un punto (x_0, y_0): Existe un valor medio respecto a cada una de las variables. Es el cociente entre el valor total y el valor de la variable correspondiente en un punto.
3. Valor marginal en el punto (x_0, y_0): Existe un valor marginal con respecto a cada una de la variables y coincide con la derivada parcial respecto a esa variable evaluada en el punto.
4. Elasticidad en el punto (x_0, y_0): También existe la elasticidad con respecto a cada una de la variables. Su fórmula respecto a x sería:

$$E_{f-x} = \frac{df}{dx}(x_0, y_0) . \frac{x_0}{f(x_0, y_0)}$$

T. 5 DIFERENCIABILIDAD.



MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

Universidad Rey Juan Carlos

INTRODUCCIÓN

Cuando se intenta generalizar el concepto de derivada a las funciones de más de una variable real, en particular la de dos variables, la primera dificultad que se encuentra es el no poder formar el cociente incremental para después tomar su límite. Manteniendo fija una de las variables la función depende sólo de la otra y respecto de ella sí es posible tomar su límite, obteniéndose las derivadas parciales. Ahora bien, nosotros sabemos que toda función derivable de una variable es continua mientras que si son dos o más las variables pueden existir las derivadas parciales sin que por ello se asegure la continuidad. Estos inconvenientes se obvian introduciendo el concepto nuevo de diferenciabilidad que en el caso de una variable es equivalente a la derivabilidad.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ a \in \mathbb{R}^n$ decimos que f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ si y sólo sí existe una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

L se denomina diferencial de la función f en a y se representa por L=Df(a).

Si tomamos las bases canónicas en cada uno de los espacios vectoriales considerados:

La aplicación lineal $L = Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene matriz asociada el gradiente de f en el punto a: ∇f(a).

Por tanto, podríamos escribir la definición anterior de diferencial de una función como:

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ a \in \mathbb{R}^n$ decimos que f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ si y sólo sí:

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \nabla \mathrm{f}(\mathrm{a}).(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$

EJEMPLO:

Comprar si la función $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ es diferenciable en el punto (1,0).

f es diferenciable en (1,0) si: $\lim_{(x,y) \to (1,0)} \frac{f(x,y) - f(1,0) - \nabla \mathrm{f}(1,0).\binom{x-1}{y-0}}{\|(x,y)-(1,0)\|} = 0$

$$\nabla f(x,y) = (2x-2, 2y) \to \nabla f(1,0) = (0,0)$$

$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} \frac{(x-1)^2 + y^2 - 0 - (0,0).\binom{x-1}{y-0}}{\|(x,y)-(1,0)\|} = \lim_{(x,y) \to (1,0)} \frac{(x-1)^2 + y^2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \to (1,0)} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 0$$

Y, por tanto, la función si es diferenciable en el punto (1,0).

CONDICIÓN SUFICIENTE DE DIFERENCIABILIDAD. TEOREMAS.

Teorema I:

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$ decimos que si f es diferenciable $a \in \mathbb{R}^n \rightarrow f\ es\ continua\ en\ a \in \mathbb{R}^n$.

Como consecuencia de este teorema también es cierto que si $f\ no\ es\ continua\ en\ a \in \mathbb{R}^n \rightarrow f\ no\ es\ diferenciable\ en\ a \in \mathbb{R}^n$.

Teorema II:

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$ decimos que si f es diferenciable $a \in \mathbb{R}^n \rightarrow$ f es derivable en $a \in \mathbb{R}^n$ según cualquier vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\bar{v} \neq 0$.

Además, se verifica:

$$f'_v(a) = \nabla f(a).\bar{v}$$

La existencia de todas las derivadas de una función en un punto según cualquier vector no nulo implica la diferenciabilidad de la función en dicho punto.

EJEMPLO:

Calcula la derivada de la función $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en el punto (1,0) según la dirección del vector

$\bar{v} = (1,-1)$.

$$\nabla f(x,y) = (2x-2, 2y) \rightarrow \nabla f(1,0) = (0,0)$$

$$f'_v(a) = \nabla f(a).\bar{v} = (0,0).\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Teorema III:

Podemos decir que la función se comporta:

- **Creciente** en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$ si $f'_v(a) > 0$.
- **Decreciente** en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$ si $f'_v(a) < 0$

EJEMPLO:

Estudia el comportamiento de la función $f(x,y) = 3x + y^2$ en el punto (1,0) según la dirección del vector

$\bar{v} = (1,-1)$.

$$\nabla f(x,y) = (3, 2y) \rightarrow \nabla f(1,0) = (3,0)$$

$f'_v(a) = \nabla f(a).\bar{v} = (3,0).\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 > 0$ y por tanto sería creciente.

Teorema IV (Condición suficiente de diferenciabilidad):

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$ decimos que si f es continua en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$, y existen todas las derivadas parciales en ese entorno y las derivadas parciales son continuas en

$a \in \mathbb{R}^n \to$ f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$.

Teorema V

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ a \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla f(a) \neq 0$ decimos que si f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n \to$ La derivada direccional de f en el punto $a \in \mathbb{R}^n$ es máxima, en valor absoluto, en la dirección del vector gradiente. Su valor es $\|\nabla f(a)\|$.

EJEMPLO:

Dada $f(x,y) = 2xy - 2x$ calcula la derivada direccional máxima en punto (1,3).

Por el teorema anterior, en el punto (1,3) la derivada direccional es máxima en la dirección del vector gradiente en ese punto.

$\frac{df}{dx} = 2y - 2;$

$$\frac{df}{dy} = 2x$$

$\nabla f(1,3) = (4,2)$ y su valor sería

$\|\nabla f(1,3)\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

TEOREMA DE SCHWARZ

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ a \in \mathbb{R}^n$, si se cumple que:

a) $\exists \frac{df}{dx_i}, \exists \frac{df}{dx_j}, \exists \frac{d^2 f}{dx_i dx_j}$ en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$.
b) $\frac{d^2 f}{dx_i dx_j}$ es continua en el punto $a \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $\exists \frac{d^2 f(a)}{dx_j dx_i}$ y $\frac{d^2 f(a)}{dx_j dx_i} = \frac{d^2 f(a)}{dx_i dx_j}$ y la matriz Hessiana es simétrica.

EXTREMOS RELATIVOS EN VARIAS VARIABLES:

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable la condición necesaria para que $a \in \mathbb{R}^n$ sea un extremo local es:

$$\nabla f(a) = 0$$

Es decir, tendríamos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{df(a)}{dx_1} = 0 \\ \dfrac{df(a)}{dx_2} = 0 \\ \dots \\ \dfrac{df(a)}{dx_n} = 0 \end{cases}$$

Una vez que tenemos nuestros posibles $a \in \mathbb{R}^n$, puntos críticos, tenemos que clasificarlos.

Sea a un punto crítico y $H_{f(a)}$ la matriz Hessiana de la función en ese punto, estudiamos el signo de $H_{f(a)}$ a través de sus menores principales como se estudiaba la matriz de una forma cuadrática.

- Si $H_{f(a)}$ es definida positiva, la función alcanzará un mínimo en el punto a.
- Si $H_{f(a)}$ es definida negativa, la función alcanzará un máximo en el punto a.
- Si $H_{f(a)}$ es indefinida, será un punto de silla.

EJEMPLO: Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$.

$$\frac{df(x,y)}{dx} = 2x + 1 + y = 0$$

$$\frac{df(x,y)}{dy} = 2y + 1 + x = 0$$

Resolvemos el sistema y obtenemos una solución, $\begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \end{cases}$

Calculamos la matriz Hessiana:

$$\frac{d^2f(x,y)}{d^2x} = 2$$

$$\frac{d^2f(x,y)}{d^2y} = 2$$

$$\frac{d^2f(x,y)}{dxdy} = \frac{d^2f(x,y)}{dydx} = 1$$

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Estudio el signo de sus menores principales: $|2| > 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$. Como es definida positiva, en el punto $(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$ tiene un mínimo.

Extremos Condicionados:

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, puede que la función esté condicionada a una restricción $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$. Para calcular los extremos relativos de esta función condicionada, construimos la función Langragiana:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta(g(x_1, x_2, \dots, x_n) - b)$$

Para optimizar esta función resolvemos:

$$\nabla L(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta) = 0$$

Es decir, tendríamos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dL(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta)}{dx_1} = 0 \\ \dfrac{df(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta)}{dx_2} = 0 \\ \dots \\ \dfrac{df(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta)}{dx_n} = 0 \\ \dfrac{df(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta)}{d\beta} = 0 \end{cases}$$

Una vez que tenemos nuestros posibles $a \in \mathbb{R}^n$, puntos críticos, tenemos que clasificarlos.

Sea a un punto crítico y $H_{L(a)}$ la matriz Hessiana de la función en ese punto (Hessiana Orlada), estudiamos el signo del determinante de $H_{L(a)}$.

- Si es positivo, habrá un máximo condicionado en el punto.
- Si es negativo, habrá un mínimo condicionado en el punto.

EJEMPLO: Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$ condicionado a x+y=2.

Construimos la función Langragiana:

$$\mathrm{L}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \beta) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{xy} + \beta(\mathrm{x} + \mathrm{y} - 2)$$

$$\frac{dL}{dx} = 2x + 1 + y + \beta = 0$$

$$\frac{dL}{dy} = 2y + 1 + x + \beta = 0$$

$$\frac{dL}{d\beta} = x + y - 2 = 0$$

Resolvemos el sistema y obtenemos una solución, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \beta = -4 \end{cases}$

Calculamos la matriz Hessiana:

$$\frac{d^2L}{d^2x} = 2$$

$$\frac{d^2L}{d^2y} = 2$$

$$\frac{d^2L}{d^2\beta} = 0$$

$$\frac{d^2L}{dxdy} = \frac{d^2L}{dydx} = 1$$

$$\frac{d^2L}{dxd\beta} = \frac{d^2L}{d\beta dx} = 1$$

$$\frac{d^2L}{dyd\beta} = \frac{d^2L}{d\beta dy} = 1$$

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Su determinante vale -2. Como es menor que 0, tenemos un mínimo.

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Estudio el signo de sus menores principales: $|2| > 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$. Como es definida positiva, en el punto $(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$ tiene un mínimo.

T. 6 INTEGRAL INDEFINIDA

MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

INTRODUCCIÓN

El cálculo diferencial desarrolla métodos y aplicaciones que involucran a la derivada de una función conocida. Un proceso natural en el desarrollo histórico de las matemáticas, es dar una continuidad a los conocimientos que ya se disponen. Así, parece razonable estudiar un proceso recíproco al de la derivación.
Hallar una función de la que es conocida su derivada es lo que se conoce habitualmente por *Integración*.

El cálculo de integrales indefinidas es una práctica constante no solo en asignaturas de Matemáticas, sino que, además, aparece frecuentemente en el estudio de otras materias, generales como la Física, o más específicas como cualquier Tecnología. Así, por ejemplo, es imposible manejar la Integración Múltiple o la resolución de Ecuaciones diferenciales ordinarias sin un amplio bagaje en la determinación de primitivas. Asimismo, son variados los problemas como determinación de Centros de Gravedad o Momentos de inercia, Trabajo realizado por una fuerza, etc..., donde es imprescindible la utilización del cálculo integral.

Dada una función f(x), sabemos calcular su derivada f'(x). Cuando queremos realizar justo el proceso contrario, es decir a partir de f'(x) obtener f(x) es lo que llamamos **integración**.

Al resultado de la integración se la denomina **primitiva** de la función. Una vez obtenida la primitiva, para comprobar que se ha calculado correctamente, basta con derivarla y ver que se obtiene la función de la que hemos partido.

$$F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Ejemplo:

Si $\mathrm{F(x)} = x^2 - 1 \rightarrow F'(x) = 2x$. Entonces, podemos decir que una primitiva de $f(x) = 2x$

$será \quad F(x) = x^2 - 1$. Pero por ejemplo F(x)= $x^2 - 3$ también sería una primitiva, porque si la derivamos también nos queda F'(x)= $2x$. De hecho, todas las funciones de la forma $F(x) = x^2 + c$ son primitivas de

$f(x) = 2x$.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES:

1. $\int \mathrm{k.f(x)} = \mathrm{k} \int f(x)dx$
2. $\int \left(\mathrm{f(x)} \pm \mathrm{g(x)}\right)\mathrm{dx} = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

INTEGRALES INMEDIATAS

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
Función simple	**Función compuesta**	**Ejemplos**
$\int k dx = kx$		$\int dx = x$; $\int (-2)dx = -2x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$; $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}$	$\int \frac{f'}{2\sqrt{f}} dx = \sqrt{f}$	$\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} dx = \sqrt{x^3+1}$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f$	$\int \frac{3}{3x-5} dx = \ln(3x-5)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$	$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}$; $\int 4^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{4^{x^2}}{\ln 4}$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$	$\int e^{4x} \cdot 4 dx = e^{4x}$; $\int e^{-x}(-1) dx = e^{-x}$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$	$\int f' \cdot \cos f dx = \operatorname{sen} f$	$\int 3x^2 \cos(x^3-2) dx = \operatorname{sen}(x^3-2)$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$	$\int f' \operatorname{sen} f dx = -\cos f$	$\int 8x \operatorname{sen} 4x^2 dx = \cos 4x^2$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tag} x$ $\int (1+\operatorname{tag}^2 x) dx = \operatorname{tag} x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \operatorname{tag} f$ $\int (1+\operatorname{tag}^2 f) \cdot f' dx = \operatorname{tag} f$	$\int \frac{3}{\cos^2 3x} dx = \operatorname{tag} 3x$ $\int (1+\operatorname{tag}^2(5x-1)) \cdot 5 dx = \operatorname{tag}(5x-1)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \operatorname{arcsen} f$	$\int \frac{1/x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx = \operatorname{arcsen}(\ln x)$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f$	$\int \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arccos e^x$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctag} x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \operatorname{arctag} f$	$\int \frac{4}{1+(4x)^2} dx = \operatorname{arctag} 4x$

NOTA: En todos los casos se omite (por falta de espacio) la suma de la constante de integración, c.

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1. Descomposición en funciones elementales: Se hallan apoyándonos en la tabla de integrales inmediatas. Se transforma de alguna manera el integrando para poder aplicar la formula. En ocasiones hay que multiplicar o dividir por alguna constante o sumar o restar algún número.

Ejemplos:

a. $\int(3x^2-2x+4)\,dx = 3.\int x^2dx - 2.\int x\,dx + 4.\int 1\,dx = 3.\frac{x^3}{3} - 2.\frac{x^2}{2} + 4x + c$

b. $\int(2x+4)^2dx = \int(4x^2+16x+16)dx = 4.\int x^2dx + 16.\int x\,dx + 16.\int 1\,dx = 4.\frac{x^3}{3} + 16.\frac{x^2}{2} + 16x + c$

c. $\int\frac{(3x^3-2x^2+4x-3)}{x}dx = \int(3x^2-2x+4-\frac{3}{x})\,dx = 3.\int x^2dx - 2.\int x\,dx + 4.\int 1\,dx - 3.\int\frac{1}{x}\,dx = 3.\frac{x^3}{3} - 2.\frac{x^2}{2} + 4x - 3lnx + c$

d. $\int\frac{1}{1+2x}\,dx = \frac{1}{2}.\int\frac{2}{1+2x}dx = \frac{1}{2}.\ln(1+2x) + c$

2. Descomposición en fracciones simples: Cuando arriba no puede conseguirse la derivada del denominador, o no se puede dividir cada elemento del numerador entre el denominador como en los ejemplos anteriores, hay que expresar el numerador de la siguiente manera:

- Si tenemos $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ y el grado del numerador es mayor o igual que el denominador, se puede hacer la división y expresar $P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$ (Dividendo= divisor.cociente+resto). Entonces nos quedaría:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int\frac{C(x).Q(x)+R(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Ejemplo:

$$\int\frac{2x^3-3x+2}{x+1}\,dx =$$

$$(2x^3-3x+2) = (2x^2-5x+5).(x+1) - 3$$

$$\int\frac{2x^3-3x+2}{x+1}\,dx = \int\frac{(2x^2-5x+5).(x+1)-3}{x+1}dx = \int(2x^2-5x+5)dx - \int\frac{3}{x+1}dx$$
$$= 2.\frac{x^3}{3} - 5.\frac{x^2}{2} + 5x - 3.\ln(x+1) + c$$

- Si tenemos $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ y el grado del denominador es mayor o igual que el del denominador, hay que factorizar el denominador y descomponer la fracción en fracciones simples de la forma:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int\frac{A}{x-x_1}dx + \int\frac{B}{x-x_2}dx + \cdots + \int\frac{C}{x-x_n}dx$$

Cuando alguna raíz es múltiple, también su factor del denominador estará elevado al cuadrado.

Ejemplo:

1. $\int \frac{3}{x^2-1}\,dx =$

$$\frac{3}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1).(x-1)}$$

$$A(x-1)+B(x+1) = 3$$
$$Para\ x = 1\ nos\ queda\ 2B = 3 \rightarrow B = \frac{3}{2}$$
$$Para\ x = -1\ nos\ queda - 2A = 3 \rightarrow A = \frac{-3}{2}$$

$$\int \frac{3}{x^2-1}\,dx = \int \frac{\frac{-3}{2}}{x+1} + \int \frac{\frac{3}{2}}{x-1}dx = \frac{-3}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx$$
$$= \frac{-3}{2}.\ln(x+1) + \frac{3}{2}.\ln(x-1) + c$$

2. $\int \frac{3}{x^3-2x^2+x}\,dx =$

$$\frac{3}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A.(x-1)^2 + B.x.(x-1) + C.x}{x.(x-1)^2}$$

$$A.(x-1)^2 + B.x.(x-1) + C.x = 3$$
$$Para\ x = 1\ nos\ queda\ C = 3 \rightarrow C = 3$$
$$Para\ x = 0\ nos\ queda\ A = 3 \rightarrow A = 3$$
$$Para\ x = 2\ nos\ queda\ A + 2B + 2C = 3 \rightarrow B = \frac{-3}{2}$$

$$\int \frac{3}{x^3-2x^2+x}dx$$
$$= 3.\int \frac{1}{x}dx$$
$$+ \int \frac{\frac{-3}{2}}{x-1} + 3.\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = 3.lnx + \frac{-3}{2}\ln(x-1) + 3.\int (x-1)^{-2}dx = 3.lnx$$
$$+ \frac{-3}{2}\ln(x-1) + 3.\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

3. Método de integración por partes: Se suele utilizar cuando la relación entre las funciones que aparecen en el integrando no *existe. No tienen nada que ver.*
   En este caso, se aplica la siguiente fórmula:

$$\int \mathrm{u.dv} = \mathrm{u.v} - \int \mathrm{v.du}$$

   Hay que establecer quién de las funciones que aparecen es u y quién es dv.

   Ejemplo:

   $\int 2x.e^x dx =$

$$u = 2x \rightarrow du = 2dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int 2x.e^x dx = 2x.e^x - \int 2.e^x dx = 2x.e^x - 2.e^x + c$$

Como algo informal llamaremos "u" por prioridad a ALPES (A=arcos, L=logaritmos, P=polinomios, E=exponenciales, S=senos y cosenos). Por eso en nuestro caso, como teníamos un polinomio y una exponencial, he llamado "u" al polinomio.

4. Método de cambio de variable:

Una integral de la forma $\int f(x)dx$ puede escribirse de la forma $\int f(g(t)).g'(t)dt$

Siempre que definamos $x = g(t) \quad y \quad dx = g'(t)dt$

Esto se hace siempre que la segunda integral facilita el cálculo. Cuando se calcula la segunda integral, se debe deshacer el cambio de variable para obtener el resultado.

Ejemplo:

1. $\int (3x+3)^4 dx =$

Si definimos $t = (3x+3) \rightarrow t^4 = (3x+3)^4 \; y \; dt = 3dx \rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$

$$\int t^4.\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}.\frac{t^5}{5} + c \rightarrow deshacemos\ el\ cambio\ de\ variable \quad \int (3x+3)^4 dx = \frac{1}{15}.(3x+3)^5 + c$$

2. $\int e^{4x} dx =$

Si definimos $t = 4x \rightarrow \; dt = 4dx \rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

$$\int e^t.\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}.e^t + c \rightarrow deshacemos\ el\ cambio\ de\ variable \quad \int e^{4x} dx = \frac{1}{4}.e^{4x} + c$$

APLICACIONES ECONÓMICAS

1. Una de las principales aplicaciones de la integración es el cálculo de áreas, que en el ámbito de la economía posibilita el análisis dinámico de funciones de pérdidas y ganancias, balance de pago, balances presupuestarios…

2. También permite la obtención de funciones total a partir de las funciones marginales.

Ejemplo:

Una empresa se dedica a la producción de un producto cuya cuantía representamos por x y cuya función de coste marginal es:

$$C'(q) = 50x^2 - 60x + 100$$

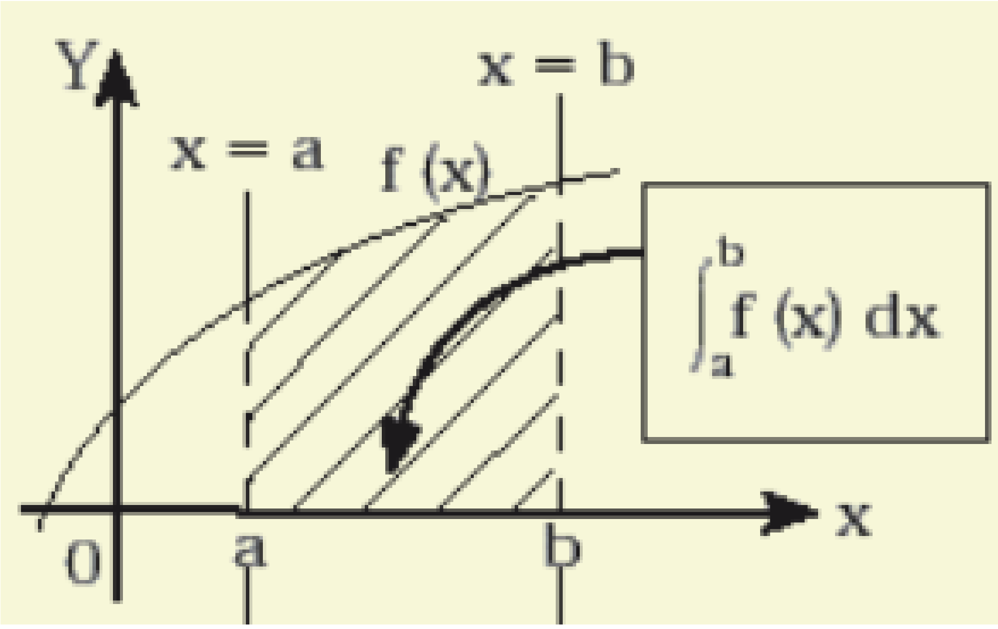
Sabiendo que el coste fijo es de 80. Obtenga la función de coste total:

$$C(x) = \int (50x^2 - 60x + 100)dx = \frac{50}{3}x^3 - \frac{60}{2}x^2 + 100x + c = \frac{50}{3}x^3 - 30x^2 + 100x + c$$

Como C(0)=80; entonces C(x)= $\frac{50}{3}x^3 - 30x^2 + 100x + 80$

3. También la integración tiene aplicación directa en el estudio de distribuciones de probabilidad.

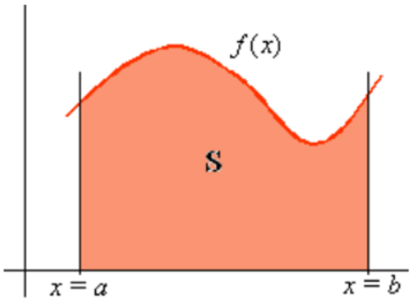
T. 7 INTEGRAL DEFINIDA



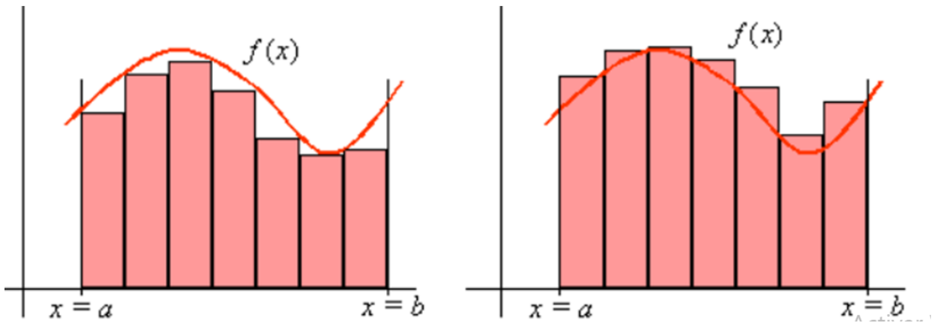
MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

INTEGRAL DEFINIDA: RIEMANN

La integral definida surge como concepto para poder calcular el área de un recinto limitado por arriba por una función continua, f(x), en su parte inferior el eje de abscisas y en los laterales por dos rectas verticales x=a y x=b tal y como se ve en la imagen:



La forma de cálculo de esta área antes de conocer el concepto de integral es recubrir la zona con rectángulos de bases lo más pequeñas posibles, que serán los intervalos y dos tipos de altura, el máximo que tomaba la función en el intervalo y el mínimo que tomaba la función en el intervalo, tal y como se ve en las siguientes imágenes:



Si los intervalos cada vez se dividiesen en otro más pequeños cada vez estos dos tipos de rectángulos se parecerían más. Por tanto, hacemos la división tantas veces como sea posible pasando al límite y el valor final de este límite que coincide con el área que queríamos calcular, se le llama **integral definida de f(x)** entre a y b y se escribe así:

$$\int_a^b f(x)dx$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. $k.\int_a^b f(x)dx = \int_a^b k.f(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5. Teorema Fundamental del Cálculo Integral: Si f(x) es una función continua en [a,b] y F(x) se define como

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt$$

Entonces F(x) es derivable en [a,b] y su derivada es F'(x)=f(x).

REGLA DE BARROW

Si F(x) es una primitiva de f(x), ($\int f(x)dx = F(x)$), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Otra forma de escribirlo sería:

$$\int_a^b f(x)dx = \big(F(x)\big)|_a^b = F(b) - F(a), \qquad siendo\ F'(x) = f(x)$$

<u>Ejemplo</u>:

Calcula

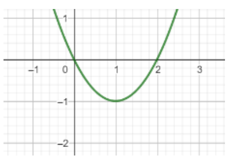
$$\int_0^2 (x^2 - 2x + 6)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 6x\right)|_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2\frac{2^2}{2} + 6.2\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2\frac{0^2}{2} + 6.0\right) = \frac{-16}{3}$$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL RIEMANN. CÁLCULO DE ÁREAS DE RECINTOS PLANOS.

Si tengo una función de la que tengo que calcular el área bajo la curva en un intervalo [a,b].

a. Si $f(x) \geq 0$ entonces el área S viene dada por $S = \int_a^b f(x)dx$.
b. Si $f(x) \leq 0$ entonces el área S viene dada por $S = -\int_a^b f(x)dx$

<u>Ejemplo 1:</u>
Dada $f(x) = x^2 - 2x$ calcula el área del recinto limitado por la función y el eje OX.



$$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}|_0^2) = \frac{4}{3}\,u^2$$

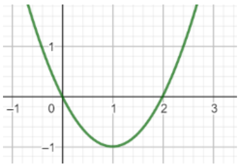
c. Si la función corta al eje OX en el intervalo. Obtenemos el punto c, de corte con el eje resolviendo la ecuación f(x)=0. En este caso calculamos:

$$S_1 = |\int_a^c f(x)dx|$$

$$S_2 = |\int_c^b f(x)dx|$$

El área pedida sería $S = S_1 + S_2$

Ejemplo 2:
Dada $f(x) = x^2 - 2x$ calcula el área del recinto limitado por la función entre x=0 y x=3.



$$f(x) = 0;\ x^2 - 2x = 0 \rightarrow x.(x-2) = 0 \rightarrow x = 0; x = 2$$

En el intervalo de integración, la función corta al eje en x=2. Por tanto, calculamos:

$$S_1 = |\int_0^2 (x^2 - 2x)dx| = \frac{4}{3} \text{(Calculado en el ejemplo anterior)}$$

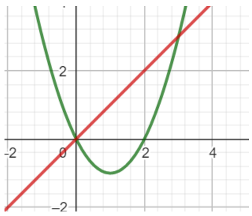
$$S_2 = |\int_2^3 (x^2 - 2x)dx| = (\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2})|_2^3 = |\left(\frac{27}{3} - 3^2\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)| = \frac{4}{3}$$

Por tanto, el área pedida sería $S = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} u^2$

d. Si el recinto viene limitado por dos curvas con $f(x)$ y $g(x)$, calculamos los puntos de corte entre ambas funciones haciendo $f(x) = g(x)$.
   - Si tienen dos puntos de corte con $a \le b \rightarrow S = |\int_a^b (f(x) - g(x))dx|$.
   - Si tienen tres puntos de corte con $a \le c \le b \rightarrow S = S_1 + S_2$ con

$$S_1 = |\int_a^c (f(x) - g(x))dx| \qquad S_2 = |\int_c^b (f(x) - g(x))dx|$$

Ejemplo 3: Sea $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = x$. Calcular el área entre las dos curvas:



Los puntos de corte entre las dos funciones son $x = 0$ y $x = 3$

$$S = |\int_0^3 (x^2 - 2x - x)dx| = |\int_0^3 (x^2 - 3x)dx| = (\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2})|_0^3 = |9 - \frac{27}{2}| = \frac{9}{2} u^2$$

INTEGRAL GAMMA

La integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ existe para valores positivos de la p y da origen a la llamada función gamma, que representaremos así:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p > 0$$

Propiedades:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \ p > 0$
3. $Si\ p \in \mathbb{N},\ \Gamma(p) = (p-1)!$
4. $Si\ k \in \mathbb{N},\ \Gamma(p+k) = p(p+1)\dots(p+k-1)\ \Gamma(p)$
5. $Si\ a > 0,\ \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$
6. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Ejemplo 1: Calcular $\int_0^{\infty} x^6 e^{-x}dx$

Identificamos esta integral con la integral gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p > 0$$

En nuestro caso p-1=6 y despejando p=7 para que quede la integral que nos piden.

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^{7-1}e^{-x}dx = \Gamma(7) = (7-1)! = 720$$

Ejemplo 2: Calcular $\int_0^{\infty} \sqrt[3]{x^4}e^{-x}dx$

Identificamos esta integral con la integral gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p > 0$$

En nuestro caso p-1=6 y despejando p=7 para que quede la integral que nos piden.

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{4}{3}} e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^{\frac{7}{3}-1}e^{-x}dx = \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) =$$

Tenemos la propiedad:

$$Si\ k \in \mathbb{N}, \qquad \Gamma(p+k) = p(p+1)\dots(p+k-1)\ \Gamma(p)$$
$$\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}+2\right) = \frac{1}{3}.\frac{4}{3}.\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}.\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$\left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\ se\ calcula\ con\ las\ tablas\ correspondientes\right)$