EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS EMPRESARIALES

María M. Sánchez Martín

Grado en Administración y Dirección de Empresas.

Curso 2024/2025

Universidad Rey Juan Carlos

T. 1 EJERCICIOS RESUELTOS E. VECTORIALES

1. ¿Es el vector (1, 0, 4) combinación lineal de los vectores (1,0,1) y (0, 0, 2)?

Será combinación lineal si podemos encontrar $\propto_1 \ y \ \propto_2$ tal que:

$$(1,0,4) = \propto_1 (1,0,1) + \propto_2 (0,0,2)$$

$$(1,0,4) = (\propto_1, 0, \propto_1) + (0,0,2 \propto_2) = (\propto_1, 0, \propto_1 + 2 \propto_2)$$

Hay que ver si el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} 1 = \propto_1 \\ 0 = 0 \\ 4 = \propto_1 + 2 \propto_2 \end{cases} \rightarrow \propto_1 = 1; \propto_2 = \frac{3}{2}$$

Como tiene solución entonces podemos afirmar que si es combinación lineal.

2. ¿Es el vector (1, 0, 4) combinación lineal de los vectores (1,0,1) y (2, 0, 2)?

Será combinación lineal si podemos encontrar $\propto_1 \ y \ \propto_2$ tal que:

$$(1,0,4) = \propto_1 (1,0,1) + \propto_2 (2,0,2)$$

$$(1,0,4) = (\propto_1, 0, \propto_1) + (2 \propto_2, 0, 2 \propto_2) = (\propto_1 + 2 \propto_2, 0, \propto_1 + 2 \propto_2)$$

Hay que ver si el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} 1 = \propto_1 + 2 \propto_2 \\ 0 = 0 \\ 4 = \propto_1 + 2 \propto_2 \end{cases} \rightarrow Si\ restamos\ las\ dos\ ecuaciones\ queda - 3 = 0 \text{ ¡¡}$$

Como no tiene solución el vector (1,0,4) no es combinación línea de los dos vectores indicados.

3. ¿Para qué valores de k el vector (1,2,3) es combinación lineal de los vectores (1,0,1), (0,1,0) y (0,2,k)?

Será combinación lineal si podemos encontrar $\propto_1, \propto_2 \ y \ \propto_3$ tal que:

$$(1,2,3) = \propto_1 (1,0,1) + \propto_2 (0,1,0) + \propto_3 (0,2,k)$$

$$(1,2,3) = (\propto_1, 0, \propto_1) + (0, \propto_2, 0) + (0, 2 \propto_3, k \propto_3) = (\propto_1, \propto_2 + 2 \propto_3, \propto_1 + k \propto_3)$$

Hay que ver si el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} 1 = \propto_1 \\ 2 = \propto_2 + 2 \propto_3 \\ 3 = \propto_1 + k \propto_3 \end{cases} \rightarrow \ \propto_1 = 1;\ \propto_3 = \frac{2}{k}\ ;\ \propto_2 = \frac{2k-4}{k}$$

Por tanto la solución existiría siempre que $k \neq 0$ (ya que no existe la división entre 0)

4. ¿Es el conjunto {(1,1), (1,-1)} un sistema generador de $\mathbb{R}^2$?

En primer lugar, tengo que tener igual o más vectores que la dimensión de $\mathbb{R}^2$, como tengo dos vectores, este supuesto lo cumple.

Por otro lado, hay que comprobar que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de esos dos vectores. Es decir,

$$(x, y) = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1, -1) \rightarrow$$

$$(x, y) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$$

Hay que ver si el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 = y \end{cases}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 1 & -1 & | & y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow rango A = 2 \; y \; rango A^* = 2 \; ya \; que \; no \; puede \; ser \; mayor$$

Por tanto, el sistema es compatible, luego tiene solución que es lo que necesitaba para que fuese sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

5. ¿Es el conjunto {(1,1), (1,-1), (2,0)} un sistema generador de $\mathbb{R}^2$?

En primer lugar, tengo que tener igual o más vectores que la dimensión de $\mathbb{R}^2$, como tengo tres vectores, este supuesto lo cumple.

Por otro lado, hay que comprobar que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de esos tres vectores. Es decir,

$$(x, y) = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1, -1) + \alpha_3 (2,0) \rightarrow$$

$$(x, y) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2) + (2\,\alpha_3, 0) = (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\,\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2)$$

Hay que ver si el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\,\alpha_3 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 = y \end{cases}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2| & x \\ 1 & -1 & 0| & y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\rightarrow rango A = 2 \; y \; rango A^* = 2$$

$ya \; que \; no \; puede \; ser \; mayor \; al \; no \; poder \; hacer \; un \; determinate \; de \; orden \; 3.$

Por tanto, el sistema es compatible, luego tiene solución que es lo que necesitaba para que fuese sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

6. ¿Es el conjunto {(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)} un sistema generador de $\mathbb{R}^3$?

En primer lugar, tengo que tener igual o más vectores que la dimensión de $\mathbb{R}^3$, como tengo tres vectores, este supuesto lo cumple.

Por otro lado, hay que comprobar que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede poner como combinación lineal de esos tres vectores. Es decir,

$$(x, y, z) = \propto_1 (1,0,0) + \propto_2 (0,1,0) + \propto_3 (1,1,1) \rightarrow$$

$$(x, y, z) = (\propto_1, 0,0) + (0, \propto_2, 0) + (\propto_3, \propto_3, \propto_3) = (\propto_1 + \propto_3, \propto_2 + \propto_3, \propto_3)$$

Hay que ver si el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} \propto_1 + \propto_3 = x \\ \propto_2 + \propto_3 = y \\ \propto_3 = z \end{cases}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1| & x \\ 0 & 1 & 1| & y \\ 0 & 0 & 1| & z \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \rightarrow rango A = 3 \; y \; rango A^* = 4$$

$$ya \; que \; no \; puede \; ser \; mayor \; al \; no \; poder \; hacer \; un \; determinate \; de \; orden \; 3.$$

Por tanto, el sistema es compatible, luego tiene solución que es lo que necesitaba para que fuese sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

7. ¿Es el conjunto {(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)} un sistema linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$?

Para ver si los vectores son independientes basta con comprobar que la matriz formada por esos vectores tiene rango máximo. En este caso necesitaríamos que la matriz tuviese rango 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \; y \; como \; es \; distinto \; de \; 0 \; el \; rango \; de \; A \; es \; igual \; a \; 3 \; que \; es \; el \; máximo$$

Por tanto, el conjunto de vectores dados es linealmente independiente.

8. Estudia los valores de k para los cuales el sistema de vectores {(1,k,-1), (1,1,0), (1,1,-1)} es un sistema linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$?

Para ver si los vectores son independientes basta con comprobar que la matriz formada por esos vectores tiene rango máximo. En este caso necesitaríamos que la matriz tuviese rango 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1 + 0 - 1 + 1 + k = k - 1$$

El determinante se anula cuando k=1 y por tanto:

Si k=1 el determinante es 0, y el rango no puede ser 3 y no es máximo → $Los\ vectores\ serían\ dependientes.$

Si $k \neq 1$, el determinante es distinto de 0 y por tanto rango de A=3 que es máximo. El sistema en este caso sería linealmente independiente.

Por tanto, el conjunto de vectores dados es linealmente independiente.

9. ¿Es el conjunto {(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)} una base de $\mathbb{R}^3$?

Para ser base, en primer lugar, necesito que haya el mismo número de vectores que la dimensión de $\mathbb{R}^3$**.** En este caso coincide y hay tres vectores.

Una vez está esto comprobado tenemos lo siguiente:

Base= Sistema de Generadores + Sistema Linealmente Independiente.

En el ejercicio 6 se ha comprobado que es un Sistema de Generadores y en el ejercicio 7 se ha comprobado que es Linealmente Independiente. Por tanto, cumple las dos condiciones y el conjunto de vectores son una base.

T. 1 EJERCICIOS RESUELTOS E. VECTORIALES (II parte)

1. Compruebe si el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Para ser subespacio vectorial tenemos que comprobar las dos propiedades:

a) Cogemos dos elementos de S:
(x,y,z) tal que x+2y-z=0
(a,b,c) tal que a+2b-c=0
Sumo los dos elementos (x,y,z)+(a,b,c)=(x+a, y+b, z+c) y compruebo si este vector resultante pertenece también a S. Para ello tiene que verificar la ecuación de S.

(x+a) + 2(y+b) – (z+c) =0 ¿? (tenemos que demostrar si lo cumple o no). Quitamos paréntesis:

x+a+2y+2b-z-c=0 ¿? Los agrupamos de otra manera

x+2y-z+a+2b-z=0 ¿? Ahora miramos las condiciones que cumplían (x,y,z) y (a,b,c) al principio y que verificaban la ecuación. Entonces vemos que tenemos 0+0=0 y esto sí que se cumple.

Por tanto, se verifica la igualdad y la suma pertenece a S.

b) Cogemos un elemento de $\mathbb{R}$ y un elemento de S:
$\alpha \in \mathbb{R}$ y (x,y,z) tal que x+2y-z=0.
Multiplico estos dos elementos α . (x,y,z)=($\alpha x, \alpha y, \alpha z$) y compruebo si el vector resultante verifica la ecuación y pertenece a S.
$\alpha x + 2\alpha y - \alpha z = 0$ ¿? (tenemos que demostrar si lo cumple o no).

Sacamos factor común α:

$\alpha(x + 2y - z) = 0$ y como lo de dentro del paréntesis vale 0 por ser la ecuación que cumplía (x,y,z) es cierta la igualdad y el producto pertenece a S.

Por tanto, se cumplen las dos propiedades lo que implica que S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, encuentra la dimensión y una base de dicho subespacio. Si es posible, amplíela para encontrar una base de $\mathbb{R}^3$.

En primer lugar, calculamos el número de vectores que tendría la base de S, es decir, su dimensión:

Dim S= nº de incógnitas – nº de ecuaciones independientes= 3-1=2.

(Hay una única ecuación y tres incógnitas que son x, y, z).

Por tanto, necesitamos dos vectores. Para encontrar esos dos vectores resolvemos el sistema de ecuaciones, que como en este caso sólo tiene una ecuación, tenemos que despejar una incógnita en función de las demás y luego parametrizar. Por ejemplo,

z=x+2y y por tanto su parametrización nos quedaría $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha + 2\beta \end{cases}$

Ahora un vector son los valores que van con α y otro los vectores que van con β

$$Base\ de\ S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

Por último, si quiero ampliar esta base a una base de $\mathbb{R}^3$**,** bastaría con elegir uno más que fuera independiente con ellos dos (ya que $\mathbb{R}^3$ necesita 3 vectores para su base y sólo tengo dos).

Se elige uno de la base canónica de $\mathbb{R}^3$**,** por ejemplo el $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se comprueba que es linealmente independiente con los otros dos:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ como el determinante es distinto de 0, son independientes y por tanto los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$**.**

Base de $\mathbb{R}^3$={$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$}

3. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x - z = 0; 2y + z = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, encuentra la dimensión y una base de dicho subespacio.

En primer lugar, calculamos el número de vectores que tendría la base de S, es decir, su dimensión:

Dim S= nº de incógnitas – nº de ecuaciones independientes

En este caso tenemos que ver si las ecuaciones que nos dan son independientes viendo si el rango de la matriz formada por los coeficientes es máximo:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces el rango de esa matriz es 2 que es el máximo. Por tanto, las dos ecuaciones son independientes.

Dim S= nº de incógnitas – nº de ecuaciones independientes=3-2=1

(Hay dos ecuaciones independientes y tres incógnitas que son x, y, z).

Por tanto, necesitamos un vector. Para encontrar ese vector resolvemos el sistema, que por tener más incógnitas que ecuaciones es compatible indeterminado y va a depender de un parámetro y que hemos visto que va a haber un vector. En este caso como en las dos ecuaciones está la z, despejamos x e y en función de z= α y la parametrización nos quedaría:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \dfrac{-\alpha}{2} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Ahora el vector son los valores que van con $\alpha \to Base\ de\ S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\}$

4. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ $\{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}); (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}); (\mathbf{3}.\mathbf{2}, -\mathbf{1})\}$ calcula la dimensión, una base y la ecuaciones del subespacio S que generan.

En primer lugar, comprobamos si los tres vectores que nos dan son independientes o nos sobra alguno. Para ello estudiamos el rango de la matriz formada por los tres vectores:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ si el rango es 3, significa que los tres vectores son independientes y me sirven los 3 para la base.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$=0 por tanto no tiene rango 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y por tanto tiene rango igual a 2 y me valen esos dos vectores, por tanto, dimS=2 y

$$Base\ de\ S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Por último, para calcular su ecuación introducimos esos dos vectores en una determinante junto con el vector genérico $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e igualamos a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \to z - 2y + x - 2z = 0;$$

Por tanto, la ecuación que nos piden sería: $x - 2y - z = 0;$

5. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ $\{(\mathbf{1}, \boldsymbol{a}, -\mathbf{1}); (\mathbf{2}, \boldsymbol{a}, \mathbf{0}); (\mathbf{3}.\mathbf{2}, -\mathbf{1})\}$ calcula el valor de a para que la dimensión del subespacio generado por los tres vectores tenga dimensión igual a 2. Calcula las ecuaciones de ese subespacio.

Para que tenga dimensión 2, el rango de la matriz formada por los tres vectores debe ser 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -a - 4 + 3a + 2a = 4a - 4$

Vemos cuando vale 0$\to 4a - 4 = 0 \to a = 1$

Es decir cuando $a = 1$ el determinante vale 0 y el rango ya no es 3. Para comprobar que es 2, teniendo en cuenta que $a = 1$ hacemos el determinante de la esquina superior $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ por tanto, el rango vale 2 y la dimensión del subespacio sería 2 como nos piden.

Por último, para calcular su ecuación introducimos esos dos vectores en una determinante junto con el vector genérico $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e igualamos a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z - 2y + x - 2z = 0;$$

Por tanto, la ecuación que nos piden sería: $x - 2y - z = 0$.

T. 2 EJERCICIOS RESUELTOS TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Estudie si la siguiente aplicación $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es lineal:

$$\boldsymbol{f(x,y) = (x+y, 2x-y, x)}$$

En primer lugar comprobamos si se cumple que $f(0,0) = (0,0,0)$, que sí se cumple (si no se cumpliera ya no sería aplicación lineal). Ahora para afirmar que es lineal, tendrían que cumplirse las otras dos propiedades:

i) Cogemos dos elementos de $\mathbb{R}^2$ (x,y), (a,b) y se tiene que verificar:

$$f\big((x,y)+(a,b)\big) = f(x,y) + f(a,b)$$

Veamos si se verifica:

$$f(x+a, y+b) ¿=? (x+y, 2x-y, x) + (a+b, 2a-b, a)$$

A la izquierda tenemos:

$(x+a+y+b, 2(x+a)-(y+b), x+a)$ quitamos los paréntesis y tenemos:
$(x+a+y+b, 2x+2a-y-b, x+a)$

A la derecha tenemos:
$(x+y+a+b, 2x-y+2a+b, x+a)$

Y ambas cosas son iguales. Por tanto, esta propiedad la cumplen.

ii) Cogemos un elemento de $\mathbb{R}^2$ (x,y) y un $\alpha \in \mathbb{R}$ y se tiene que verificar que:

$$f(\alpha(x,y)) = \alpha f(x,y)$$

Veamos si se verifica:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha(\mathrm{x}+\mathrm{y}, 2\mathrm{x}-\mathrm{y}, \mathrm{x})$$

A la izquierda tenemos:

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + \alpha y, 2\,\alpha x - \alpha y, \alpha x)$$

A la derecha tenemos:

$$\alpha(\mathrm{x}+\mathrm{y}, 2\mathrm{x}-\mathrm{y}, \mathrm{x}) = (\alpha\mathrm{x}+\alpha\mathrm{y}, 2\alpha\mathrm{x}-\alpha\mathrm{y}, \alpha\mathrm{x})$$

Ambas cosas son iguales y por tanto, esta propiedad también la cumple.

Por tanto, f *es apliación lineal*.

2. Dada la siguiente aplicación $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ calcule su expresión matricial, su núcleo y su imagen.

$$\boldsymbol{f(x,y) = (x+y, 2x-y, x)}$$

La matriz de la aplicación tiene por columnas f(1,0)=(1,1,1) y f(0,1)=(1,-1,0) y por tanto la matriz sería:

$$Mf = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Coincide con poner en la primera columna lo que va con x y en la segunda lo que va con y.

Para calcular **el núcleo (Kerf)** calculamos:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (La (x,y) es de dos coordenadas porque pertenece al espacio de salida $\mathbb{R}^2$ y el (0,0,0) tiene tres coordenadas por que pertenece al espacio de llegada $\mathbb{R}^3$**)**

Para resolverlo, miramos en primer lugar cuantas ecuaciones son válidas estudiando el rango de la matriz, que en este caso es 2. Elijo dos, cuyo determinante sea distinto de 0, por ejemplo la segunda y la tercera ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto, las ecuaciones del núcleo serían: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ por tanto en este caso $Kerf = \{\vec{0}\}$ y $dimKerf = 0$ (ya que no hay ningún parámetro). Este es el caso en que la función es **inyectiva.** (f es inyectiva si $dimKerf = 0$)

Para calcular **la imagen (Imf)** calculamos:

$$dimImf = rango\ de\ la\ matriz = 2$$

Vemos además que se verifica que si tenemos una aplicación lineal $f: V \rightarrow V'$, entonces se verifica:

$$dimV = dimImf + dimKerf$$

En nuestro caso

$$dim\mathbb{R}^2 = 2 + 0 = 2$$

La base de la imagen está formada por tantas columnas de mi matriz como indica la dimensión, en este caso hay que elegir dos que sean independientes. Como sólo hay dos, pues son esas dos.

Base Imf={ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$} como la dimensión de la imagen no coincide con el espacio de llegada ya que $dimImf \neq \dim \mathbb{R}^3$ la aplicación NO es **sobreyectiva**.

La ecuación de la imagen será

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -z + y + x - z = 0 \rightarrow x + y - 2z = 0$$

Por tanto, como la función es $inyectiva + no\ sobreyectiva\ \rightarrow no\ biyectiva$ y la función NO admite inversa.

3. Dada la siguiente aplicación $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ calcule su expresión matricial, su núcleo y su imagen.

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = (x+y, 2x+z, 3x+y+z)}$$

La matriz de la aplicación tiene por columnas f(1,0,0)=(1,2,3), f(0,1,0)=(1,0,1), f(0,0,1)=(0,1,1) y por tanto la matriz sería:

$$Mf = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Coincide con poner en la primera columna lo que va con x, en la segunda lo que va con y, y lo que va con z en la tercera.

Para calcular **el núcleo (Kerf)** calculamos:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (La (x,y,z) es de tres coordenadas porque pertenece al espacio de salida $\mathbb{R}^3$ y el (0,0,0) tiene tres coordenadas por que pertenece al espacio de llegada $\mathbb{R}^3$**)**

Para resolverlo, miramos en primer lugar cuantas ecuaciones son válidas estudiando el rango de la matriz.

Calculo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 - 2 = 0$, por tanto no tiene rango 3. Miro si existe algún determinante de orden 2 distinto de 0.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, el rango de mi matriz es 2 y me quedo con las dos ecuaciones válidas que me dan ese determinante distinto de 0 (la primera y la segunda ecuación).

Por tanto, las ecuaciones del núcleo serían: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \propto \\ y = -\propto \\ z = -2\propto \end{cases}$ por tanto en este caso una base del $Kerf = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ (son los valores que acompañan a $\propto$ en la parametrización, y $dimKerf = 1$ (ya que no hay un parámetro que nos da el vector). En este caso, la función <u>no</u> es **inyectiva.** (f es inyectiva si $dimKerf = 0$)

Para calcular **la imagen (Imf)** calculamos:

$dimImf = rango\ de\ la\ matriz = 2$ (ya habíamos calculado el rango de la matriz cuando hemos calculado el núcleo)

Vemos además que se verifica que si tenemos una aplicación lineal $f: V \to V'$, entonces se verifica:

$$dimV = dimImf + dimKerf$$

En nuestro caso

$$dim\mathbb{R}^3 = 2 + 1 = 3$$

La base de la imagen está formada por tantas columnas de mi matriz como indica la dimensión, en este caso hay que elegir dos que sean independientes. Cogemos las dos que nos han servido para establecer que el rango de la matriz era dos.

Base Imf={$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$} como la dimensión de la imagen no coincide con el espacio de llegada ya que $dimImf \neq \dim \mathbb{R}^3$ no es sobreyectiva y podemos calcular las ecuaciones implícitas de la imagen metiendo en un determinante los dos vectores de su base y añadiendo un tercer vector genérico y dependiente con ellos de forma que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{bmatrix} = 0 \to 2x + 3y - y - 2z = 0 \to 2x + 2y - 2z = 0$$

Si simplificamos la ecuación, tendríamos que la ecuación de la imagen es:

$$x + y - z = 0$$

En cuanto a su clasificación, como no es inyectiva ni sobreyectiva, entonces no es biyectiva y no admite inversa.

4. Dada la siguiente aplicación $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ estudie si es diagonalizable e indique la relación existente entre la matriz asociada a la aplicación y su matriz diagonal semejante.

$$\boldsymbol{f(x, y, z) = (-x, 3x + y, 4x + 2y + 3z)}$$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta aplicación lineal:

$$Mf = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus autovalores:

$$\begin{bmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 3 & 1-\alpha & 0 \\ 4 & 2 & 3-\alpha \end{bmatrix} = (-1-\alpha)(1-\alpha)(3-\alpha) = 0 \to \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Como son tres autovalores reales y **distintos**, podemos afirmar desde ya que la aplicación lineal va a ser diagonalizable.

Calculamos el autovector asociado a cada uno de los autovalores:

$\boldsymbol{\alpha = -1}$

Introducimos el valor de α en la matriz y calculamos el núcleo:

$$\begin{pmatrix} -1-(-1) & 0 & 0 \\ 3 & 1-(-1) & 0 \\ 4 & 2 & 3-(-1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación no me sirve ya que es entera de 0, pero las otras dos sí, porque son independientes ya que $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces la dimensión sería:

Nº incógnitas-nº ecuaciones independientes=3-2=1

Es decir, voy a tener un parámetro y por tanto un vector (autovector). Resuelvo las ecuaciones:

$$:\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = \propto \\ y = -\frac{3}{2} \propto \\ z = -\frac{1}{4} \propto \end{cases}$$

Por tanto, el autovector asociado a α=-1 es $\vec{v}_{\alpha=-1} = (1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ (valores que van con α)

$\boldsymbol{\alpha = 1}$

Introducimos el valor de α en la matriz y calculamos el núcleo:

$$\begin{pmatrix} -1-1 & 0 & 0 \\ 3 & 1-1 & 0 \\ 4 & 2 & 3-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación y la segunda son iguales (proporcionales) por tanto una de ellas no me no me sirve, me quedo por ejemplo con la primera y miro a ver si es independiente de la tercera: como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ son independientes y la dimensión de mis espacio de autovectores sería:

Nº incógnitas-nº ecuaciones independientes=3-2=1

Es decir, voy a tener un parámetro y por tanto un vector (autovector). Resuelvo las ecuaciones:

$$:\begin{cases} -2x = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = -\propto \\ z = \propto \end{cases}$$

Por tanto, el autovector asociado a α=1 es $\vec{v}_{\alpha=1} = (0, -1, 1)$ (valores que van con α)

$\boldsymbol{\alpha = 3}$

Introducimos el valor de α en la matriz y calculamos el núcleo:

$$\begin{pmatrix} -1-3 & 0 & 0 \\ 3 & 1-3 & 0 \\ 4 & 2 & 3-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz no es 3 claramente, porque tengo una columna entera con ceros. Sí que es rango 2 ya que, por ejemplo $\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ y por tanto esas dos ecuaciones son independientes y la dimensión de mis espacio de autovectores sería entonces la dimensión sería:

Nº incógnitas-nº ecuaciones independientes=3-2=1

Es decir, voy a tener un parámetro y por tanto un vector (autovector). Resuelvo las ecuaciones:

$$:\begin{cases} -4x = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \propto \end{cases}$$

Por tanto, el autovector asociado a α=3 es $\vec{v}_{\alpha=3} = (0,0\ ,1)$ (valores que van con α)

Por tanto, ya hemos calculado los tres autovalores y sus correspondientes autovectores. Calculamos ahora la matriz D semejante y la matriz P tal que se cumpla que:

$A = P.D.P^{-1}$

La matriz D está formada por los autovalores en su diagonal y todos los demás valores 0.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz P está formada por los autovectores asociados a cada autovalor, en el mismo orden que los haya colocado en la matriz D. En nuestro caso:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & -1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto se verifica que, siguiendo
$A = P.D.P^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & -1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & -1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(No es necesario realizar el cálculo, salvo que queramos comprobar que lo hemos hecho todo correcto).

5. Dada la siguiente aplicación $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ estudie si es diagonalizable e indique la relación existente entre la matriz asociada a la aplicación y su matriz diagonal semejante.

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = (2x + y, x + 2y, z)}$$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta aplicación lineal:

$$Mf = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus autovalores:

$$\begin{bmatrix} 2-\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} = (1-\alpha)(2-\alpha)(2-\alpha) - (1-\alpha)$$

$$= (1-\alpha)\big((2-\alpha)(2-\alpha) - 1\big) = (1-\alpha)(\alpha^2 - 4\alpha + 3)0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Son tres autovalores reales pero $\alpha = 1$ se repite dos veces, no podemos afirmar desde ya que la aplicación lineal va a ser diagonalizable, tendremos que comprobar que para $\alpha = 1$ obtenemos dos autovector en lugar de 1 ya que se repite dos veces.

Calculamos el autovector asociado a cada uno de los autovalores:

$\boldsymbol{\alpha = 1}$

Introducimos el valor de α en la matriz y calculamos el núcleo:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La última ecuación no me sirve ya que es entera de 0 y las otras dos son iguales, por lo que el rango de la matriz sería 1, sólo hay una ecuación independiente. Entonces la dimensión sería:

Nº incógnitas-nº ecuaciones independientes=3-1=2

Es decir, voy a tener dos parámetro y por tanto dos vectores (autovectores) que es lo que necesitábamos para que fuera diagonalizable. Resuelvo la ecuación válida:

$$x + y = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \propto \\ y = -\propto \\ z = \beta \end{cases}$$

Por tanto, los autovectores asociados al autovalor α=1 son $\vec{v}_{1\alpha=1} = (1, -1\,, 0)$ (valores que van con α) y $\vec{v}_{2\alpha=1} = (0{,}0\,, 1)$ (valores que van con β).

$\boldsymbol{\alpha = 3}$

Introducimos el valor de α en la matriz y calculamos el núcleo:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación y la segunda son iguales (proporcionales) por tanto una de ellas no me no me sirve, me quedo por ejemplo con la primera y miro a ver si es independiente de la tercera: como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ son independientes y la dimensión de mis espacio de autovectores sería:

Nº incógnitas-nº ecuaciones independientes=3-2=1

Es decir, voy a tener un parámetro y por tanto un vector (autovector). Resuelvo las ecuaciones:

$$: \begin{cases} -x + y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \propto \\ y = \propto \\ z = 0 \end{cases}$$

Por tanto, el autovector asociado a α=3 es $\vec{v}_{\alpha=3} = (1{,}1\,, 0)$ (valores que van con α)

Por tanto, ya hemos calculado los autovalores y sus correspondientes autovectores. Calculamos ahora la matriz D semejante y la matriz P tal que se cumpla que:

$A = P.D.P^{-1}$

La matriz D está formada por los autovalores en su diagonal y todos los demás valores 0.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz P está formada por los autovectores asociados a cada autovalor, en el mismo orden que los haya colocado en la matriz D. En nuestro caso:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por tanto se verifica que, siguiendo
$A = P.D.P^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

(No es necesario realizar el cálculo, salvo que queramos comprobar que lo hemos hecho todo correcto).

6. Dada la siguiente aplicación $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ estudie si es diagonalizable e indique la relación existente entre la matriz asociada a la aplicación y su matriz diagonal semejante.

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = (x+y+z, -x+y-z, x+2z)}$$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta aplicación lineal:

$$Mf = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus autovalores:

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1-\alpha & -1 \\ 1 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} = (1-\alpha)^2(2-\alpha) - 1 - (1-\alpha) + (2-\alpha) = (1-\alpha)^2(2-\alpha)$$

$$= 0 \to \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Son tres autovalores reales pero $\alpha = 1$ se repite dos veces, no podemos afirmar desde ya que la aplicación lineal va a ser diagonalizable, tendremos que comprobar que para $\alpha = 1$ obtenemos dos autovector en lugar de 1 ya que se repite dos veces.

Calculamos el autovector asociado a cada uno de los autovalores:

$\boldsymbol{\alpha = 1}$

Introducimos el valor de α en la matriz y calculamos el núcleo:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-1 & -1 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La segunda y la tercera ecuación son iguales, elimino la segunda, entonces la matriz no tiene rango 3. Miro a ver si con la primera y la tercera el rango es dos $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que el rango de la matriz sería 2, hay dos ecuaciones independientes. Entonces la dimensión del subespacio de autovectores sería:

Nº incógnitas-nº ecuaciones independientes=3-2=1

Es decir, voy a tener un parámetro y por tanto un vector (autovector) lo que no me sirve para que sea diagonalizable ya al ser autovalor repetido α=1 deberían existir dos autovectores.

No hace falta que calcule el autovector ni nada más ya que al no ser diagonalizable, el ejercicio acaba aquí.

7. Dada la siguiente aplicación $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ calcule $\boldsymbol{A}^{20}$

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = (2x+y, x+2y, z)}$$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta aplicación lineal:

$$Mf = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para poder hallar $\boldsymbol{A}^{20}$ necesitamos que la matriz sea diagonalizable,

Calculamos sus autovalores:

$$\begin{bmatrix} 2-\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} = (1-\alpha)(2-\alpha)(2-\alpha) - (1-\alpha)$$

$$= (1-\alpha)\big((2-\alpha)(2-\alpha)-1\big) = (1-\alpha)(\alpha^2-4\alpha+3)0 \to \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Son tres autovalores reales pero $\alpha = 1$ se repite dos veces, no podemos afirmar desde ya que la aplicación lineal va a ser diagonalizable, tendremos que comprobar que para $\alpha = 1$ obtenemos dos autovector en lugar de 1 ya que se repite dos veces.

Calculamos el autovector asociado a cada uno de los autovalores:

$\boldsymbol{\alpha = 1}$

Introducimos el valor de α en la matriz y calculamos el núcleo:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La última ecuación no me sirve ya que es entera de 0 y las otras dos son iguales, por lo que el rango de la matriz sería 1, sólo hay una ecuación independiente. Entonces la dimensión sería:

Nº incógnitas-nº ecuaciones independientes=3-1=2

Es decir, voy a tener dos parámetro y por tanto dos vectores (autovectores) que es lo que necesitábamos para que fuera diagonalizable. Resuelvo la ecuación válida:

$$x + y = 0 \to \begin{cases} x = \propto \\ y = -\propto \\ z = \beta \end{cases}$$

Por tanto, los autovectores asociados al autovalor α=1 son $\vec{v}_{1\alpha=1} = (1, -1\,, 0)$ (valores que van con α) y $\vec{v}_{2\alpha=1} = (0,0\,, 1)$ (valores que van con β).

$\boldsymbol{\alpha = 3}$

Introducimos el valor de α en la matriz y calculamos el núcleo:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación y la segunda son iguales (proporcionales) por tanto una de ellas no me no me sirve, me quedo por ejemplo con la primera y miro a ver si es independiente de la tercera: como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ son independientes y la dimensión de mis espacio de autovectores sería:

Nº incógnitas-nº ecuaciones independientes=3-2=1

Es decir, voy a tener un parámetro y por tanto un vector (autovector). Resuelvo las ecuaciones:

$$: \begin{cases} -x + y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \propto \\ y = \propto \\ z = 0 \end{cases}$$

Por tanto, el autovector asociado a α=3 es $\vec{v}_{\alpha=3} = (1,1\,, 0)$ (valores que van con α)

Por tanto, ya hemos calculado los autovalores y sus correspondientes autovectores. Calculamos ahora la matriz D semejante y la matriz P tal que se cumpla que:

$A = P.D.P^{-1}$

La matriz D está formada por los autovalores en su diagonal y todos los demás valores 0.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz P está formada por los autovectores asociados a cada autovalor, en el mismo orden que los haya colocado en la matriz D. En nuestro caso:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por tanto se verifica que, siguiendo
$A = P.D.P^{-1} \rightarrow \boldsymbol{A^{20}} = P.D^{20}.P^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{20} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

(No hace falta realizar el cálculo)

T. 3 EJERCICIOS RESUELTOS FORMAS CUADRÁTICAS

1. **Exprese la siguiente forma cuadrática en modo polinómico:**

$$\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ -1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

La diagonal son los elementos que van con x_1^2, x_2^2, x_3^2 y hay que tener en cuenta que cada posición a_{ij} hay que sumarla con la a_{ji}, esa suma es el coeficiente que irá con $x_i x_j$.

Por tanto:

$\mathrm{Q}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 16x_2x_3$

2. **Exprese la siguiente forma cuadrática en modo polinómico:**

$$\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

La diagonal son los elementos que van con x_1^2, x_2^2, x_3^2 y hay que tener en cuenta que cada posición a_{ij} hay que sumarla con la a_{ji}, esa suma es el coeficiente que irá con $x_i x_j$.

Por tanto:

$\mathrm{Q}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$

3. **Exprese en forma matricial la siguiente forma cuadrática:**
$\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$

La diagonal son los elementos que van con x_1^2, x_2^2, x_3^2 y hay que tener en cuenta que cada posición a_{ij} es igual a la a_{ji}, pues la matriz es simétrica y ese número se obtiene dividiendo entre dos el coeficiente que va con $x_i x_j$.

La expresión matricial sería:

$$\mathrm{Q}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4. **Exprese en forma matricial la siguiente forma cuadrática:**
$\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3$

La diagonal son los elementos que van con x_1^2, x_2^2, x_3^2 y hay que tener en cuenta que cada posición a_{ij} es igual a la a_{ji}, pues la matriz es simétrica y ese número se obtiene dividiendo entre dos el coeficiente que va con $x_i x_j$.

La expresión matricial sería:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3).\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5. **Estudie el signo de la siguiente forma cuadrática por el método de los autovalores:** $\mathbf{Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2}$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta forma cuadrática:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus autovalores:

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} = (1-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha) - (2-\alpha) = (2-\alpha)\cdot((1-\alpha)^2 - 1)$$
$$= (2-\alpha)\cdot(\alpha^2 - 2\alpha + 1 - 1) = (2-\alpha)\cdot(\alpha^2 - 2\alpha) = (2-\alpha)\cdot\alpha(\alpha - 2)$$
$$= 0 \to \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Como todos sus autovalores son positivos o 0, la forma cuadrática es Semidefinida Positiva.

6. **Estudie el signo de la siguiente forma cuadrática por el método de los autovalores:** $\mathbf{Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_2x_3}$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta forma cuadrátia:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus autovalores:

$$\begin{bmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -3-\alpha & 1 \\ 0 & 1 & -3-\alpha \end{bmatrix} = (-1-\alpha)(-3-\alpha)^2 - (-1-\alpha)$$
$$= (-1-\alpha)\cdot((-3-\alpha)^2 - 1) = (-1-\alpha)\cdot(\alpha^2 + 6\alpha + 9 - 1)$$
$$= (-1-\alpha)\cdot(\alpha^2 + 6\alpha + 8) = 0 \to \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = -4 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

Como todos los autovalores son negativos la forma cuadrática es Definida Negativa.

7. **Estudie el signo de la siguiente forma cuadrática por el método de los determinantes:** $\mathbf{Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3}$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta forma cuadrática:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los determinantes de los menores principales de la matriz:

$$|1| > 0\ ;\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0;\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 2 - 9 - 8 = -15 < 0$$

Como sale: +, -,- Esta forma cuadrática sería Indefinida.

8. **Estudie el signo de la siguiente forma cuadrática por el método de los determinantes:**
   $\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = \ 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta forma cuadrática:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos los determinantes de los menores principales de la matriz:

$$|2| > 0\ ;\ \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{vmatrix} = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4} > 0;\ \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Como sale: +, +,0 Esta forma cuadrática sería Semidefinida Positiva.

9. **Estudie el signo de la siguiente forma cuadrática**
   $\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = \ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ **restringida a:** $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta aplicación lineal:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, estudiamos el signo de la forma cuadrática sin restringir. (Da igual el método)

Calculamos los determinantes de los menores principales de la matriz:

$$|2| > 0\ ;\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 < 0;\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -2 < 0$$

Como sale: +, -, -. Esta forma cuadrática sería Indefinida. (Si fuese Definida Positiva o Definida Negativa, la forma restringida también lo sería sin realizar ningún cálculo adicional)

Ahora vamos a ver con la restricción:

Despejamos una incógnita en función de las otras: $x_1 - x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = x_2 - x_1$

Sustituimos en la forma cuadrática:

$\mathrm{Q}(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_2(x_2 - x_1) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 \rightarrow$
$\mathrm{Q}(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1x_2$

Escribimos la matriz de esta forma cuadrática:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus menores principales:

$$|2| > 0 \,; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

Como da +, - sigue siendo Indefinida.

10. Estudie el signo de la siguiente forma cuadrática
$\mathrm{Q}(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3$ restringida a: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

En primer lugar, escribimos la matriz asociada a esta aplicación lineal:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, estudiamos el signo de la forma cuadrática sin restringir. (Da igual el método)

Calculamos los determinantes de los menores principales de la matriz:

$$|-1| < 0 \,; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0; \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 > 0$$

Como sale: -, +, +. Esta forma cuadrática sería Indefinida. (Si fuese Definida Positiva o Definida Negativa, la forma restringida también lo sería sin realizar ningún cálculo adicional)

Ahora vamos a ver con la restricción:

Despejamos una incógnita en función de las otras: $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = x_2 + x_1$

Sustituimos en la forma cuadrática:

$\mathrm{Q}(x_1, x_2) = -\mathrm{x}_1^2 - \mathrm{x}_2^2 + 4\mathrm{x}_2.(x_2 + x_1) = -\mathrm{x}_1^2 - \mathrm{x}_2^2 + 4{\mathrm{x}_2}^2 + 4x_2x_1 \rightarrow$
$Q(x_1, x_2) = -\mathrm{x}_1^2 + 3\mathrm{x}_2^2 + 4x_2x_1$

Escribimos la matriz de esta forma cuadrática:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus menores principales:

$$|-1| < 0 \,; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7 < 0$$

Como da -, - sigue siendo Indefinida.

MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN

T.4 EJERCICIOS RESUELTOS CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

1. **Calcula el siguiente límite:** $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{2x+3y}{4x-3y}$

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{2x+3y}{4x-3y} = \frac{2.2+3.(-1)}{4.2-3.(-1)} = \frac{1}{11}$$

2. **Calcula el siguiente límite:** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2+2y}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2+2y} = \frac{0}{0}\ indeterminación$$

Calculamos los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{2x^2+2y} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2+2y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Como los límites reiterados son distintos, el límite doble no existe

3. **Calcula el siguiente límite:** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x^2+2y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x^2+2y^2} = \frac{0}{0}\ indeterminación$$

Calculamos los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{2x^2+2y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{2y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Los límites reiterados son iguales, pero no es concluyente. Calculamos límites radiales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x^2+2y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x^2+y^2}{2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+(mx)^2}{2x^2+2(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+m^2)}{x^2(2+2m^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+m^2)}{(2+2m^2)} = \frac{(1+m^2)}{(2+2m^2)}$$

Como el límite radial depende de m (pendiente de la recta desde la que me acerco) entonces el límite doble no existe.

4. **Calcula el siguiente límite:** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \frac{0}{0}\ indeterminación$$

Calculamos los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Los límites reiterados son iguales, pero no es concluyente. Calculamos límites radiales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3.mx}{2x^2+2(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^2(2+2m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(2+2m^2)} = 0$$

El límite radial no depende de m y por tanto podemos sospechar que el límite existe y que vale 0, aunque no lo podríamos afirmar con total seguridad.

5. **Estudia la continuidad de la siguiente función en (0,0)**

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x^2+2y} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

Para que f(x,y) sea continua en el (0,0), se tiene que verificar que:

$$\boldsymbol{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)}$$

$f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2+2y} = \frac{0}{0}\ indeterminación$$

Calculamos los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{2x^2+2y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2+2y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Como los límites reiterados son distintos, el límite doble no existe

Por tanto, no se verifica que

$$\boldsymbol{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)}$$

Y f(x) no es continua en (0,0).

6. **Estudia la continuidad de la siguiente función:**

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{1-x}{x-y}}$$

En las funciones que no están definidas a trozos, la continuidad de la función coincide con su dominio. Es una función racional y su dominio son todos los elementos de $\mathbb{R}^2$ menos aquellos que anulan el denominador.

En nuestro caso $Df(x,y): \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ x-y \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ x \neq y\}$

Podemos afirmar que $f(x)$ $es\ continua\ en$ $\mathbb{R}^2 - \{(x,y): x = y\}$

7. **Estudia la continuidad de la siguiente función en (0,0)**

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{2x^2+2y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

Para que f(x,y) sea continua en el (0,0), se tiene que verificar que:

$$\boldsymbol{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)}$$

$f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \frac{0}{0}\ indeterminación$$

Calculamos los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Los límites reiterados son iguales, pero no es concluyente. Calculamos límites radiales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0\ y=mx} \frac{x^3y}{2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3.mx}{2x^2+2(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^2(2+2m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(2+2m^2)} = 0$$

El límite radial no depende de m y por tanto podemos sospechar que el límite existe y que vale 0, aunque no lo podríamos afirmar con total seguridad.

Pero en este caso sí que podríamos decir que posiblemente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Y por tanto, f(x,y) es continua en (0,0).

8. **Calcula el gradiente de la siguiente función:**

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2y - 2x^2 + 3xy - y^3}$$

$$\frac{df(x,y)}{dx} = 2xy - 4x + 3y$$

$$\frac{df(x,y)}{dy} = x^2 + 3x - 3y^2$$

El gradiente sería $\nabla f(x,y) = (2xy - 4x + 3y, x^2 + 3x - 3y^2)$

9. Calcula el gradiente de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x,y) = e^{x^2-2xy+y^3}}$$

$$\frac{df(x,y)}{dx} = e^{x^2-2xy+y^3}.(2x - 2y)$$

$$\frac{df(x,y)}{dy} = e^{x^2-2xy+y^3}.(-2x + 3y^2)$$

El gradiente sería $\nabla f(x,y) = (e^{x^2-2xy+y^3}.(2x - 2y), e^{x^2-2xy+y^3}.(-2x + 3y^2))$

10. Calcula la matriz Hessiana de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2y - 2x^2 + 3xy - y^3}$$

$\frac{df(x,y)}{dx} = 2xy - 4x + 3y;\ \frac{df(x,y)}{dy} = x^2 + 3x - 3y^2; \frac{d^2f(x,y)}{d^2x} = 2y - 4;\ \frac{d^2f(x,y)}{d^2y} = -6y;$

$\frac{df(x,y)}{dxdy} = \frac{df(x,y)}{dydx} = 2x + 3$. La Hessiana sería:

$$H_{f(x,y)=}\begin{pmatrix} 2y-4 & 2x+3 \\ 2x+3 & -6y \end{pmatrix}$$

11. Calcula la matriz Hessiana de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = x^2y - 2xz + 2x^2 + 3xy - y^3 + 2z^2}$$

$\frac{df(x,y,z)}{dx} = 2xy - 2z + 4x + 3y;\ \frac{df(x,y,z)}{dy} = x^2 + 3x - 3y^2; \frac{df(x,y,z)}{dz} = -2x + 4z$

$\frac{d^2f(x,y,z)}{d^2x} = 2y + 4;\ \frac{d^2f(x,y,z)}{d^2y} = -6y;\ \frac{d^2f(x,y,z)}{d^2z} = 4$

$\frac{df(x,y,z)}{dxdy} = \frac{df(x,y,z)}{dydx} = 2x + 3;\ \frac{df(x,y,z)}{dxdz} = \frac{df(x,y,z)}{dzdx} = -2; \frac{df(x,y,z)}{dydz} = \frac{df(x,y,z)}{dzdy} = 0$

La Hessiana sería:

$$H_{f(x,y)=}\begin{pmatrix} 2y+4 & 2x+3 & -2 \\ 2x+3 & -6y & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

T.5 EJERCICIOS RESUELTOS DIFERENCIABILIDAD

1. **Comprueba si la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ es diferenciable en el punto (1,-1).**

f es diferenciable en (1,-1) si: $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{f(x,y)-f(1,-1)-\nabla f(1,-1).\binom{x-1}{y+1}}{\|(x,y)-(1,-1)\|} = 0$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) \to \nabla f(1,-1) = (2,-2)$$

$$f(1,-1) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2 + y^2 - 2 - 0 - (2,-2).\binom{x-1}{y+1}}{\|(x,y)-(1,-1)\|} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2 + y^2 - 2 - 2x + 2 + 2y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)^2 + (y+1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 0$$

Y, por tanto, la función si es diferenciable en el punto (1,-1).

2. **Estudia la diferenciabilidad de la función $f(x,y) = e^{x+y}.(x^2 - 4)$**

Calculamos sus derivadas parciales:

$$\frac{df}{dx} = e^{x+y}.(x^2 - 4) + e^{x+y}.2x$$

$$\frac{df}{dy} = e^{x+y}.(x^2 - 4)$$

Como ambas derivadas parciales existen y son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por el teorema de suficiencia, la función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

3. **Calcula la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2y^3 + x^3y^2 - 3x + 2y$ en el punto (2,3) según la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 1)$.**

En primer lugar, calculamos el gradiente calculando sus derivadas parciales:

$$\frac{df}{dx} = 2xy^3 + 3x^2y^2 - 3$$

$$\frac{df}{dy} = 3x^2y^2 + 2yx^3 + 2$$

$$\nabla f(x,y) = (2xy^3 + 3x^2y^2 - 3,\ 3x^2y^2 + 2yx^3 + 2) \to \nabla f(2,3) = (213, 158)$$

$$Df(2,3)_{\vec{v}} = \nabla f(2,3).(-1,1) = (213, 158).(-1,1) = -55$$

4. Estudia el comportamiento de la función $f(x,y) = x^2y^3 + 2y$ en el punto (1,1) según la dirección del vector $\vec{v} = (-1,0)$.

En primer lugar, calculamos el gradiente calculando sus derivadas parciales:

$$\frac{df}{dx} = 2xy^3$$
$$\frac{df}{dy} = 3x^2y^2 + 2$$

$$\nabla f(x,y) = (2xy^3,\ 3x^2y^2 + 2) \rightarrow \nabla f(1,1) = (2,5)$$

$Df(1,1)_{\vec{v}} = \nabla f(1,1).(-\mathbf{1},\mathbf{0}) = (2,5).(-1,0) = -2 < 0$ y por tanto la función es decreciente en el (1,1) según la dirección de ese vector.

5. Calcula el valor de la derivada direccional máxima de la función $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ en el punto (2,0)

La derivada direccional es máxima en la dirección del vector gradiente en ese punto.

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x}{x^2+y^2};$$
$$\frac{df}{dy} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$\nabla f(2,0) = \left(\frac{2.2}{2^2+0^2}, \frac{2.0}{2^2+0^2}\right) = (1,0)$. El valor de la derivada direccional máxima sería

$$\|\nabla f(2,0)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

6. Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$

En primer lugar, calculamos:

$$\frac{df}{dx} = 2x + 1 + y;$$
$$\frac{df}{dy} = 2y + 1 + x;$$

Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 1 + y = 0 \\ 2y + 1 + x = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2x - 1 \rightarrow 2.(-2x - 1) + 1 + x = 0$

$$\rightarrow -4x - 2 + 1 + x = 0 \rightarrow -3x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3} \quad y = \frac{-1}{3}$$

Calculamos la matriz Hessiana:

$\frac{d^2f(x,y)}{d^2x} = 2;\ \frac{d^2f(x,y)}{d^2y} = 2;$

$\frac{df(x,y)}{dxdy} = \frac{df(x,y)}{dydx} = 1$. La Hessiana sería:

$$H_{f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \rightarrow H_{f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el signo de la matriz por el método de los determinantes:

|2|>0 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$

La matriz es definida positiva y por tanto, el punto $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ es un mínimo.

7. Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

En primer lugar escribimos $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$ para simplificar las derivadas.

Calculamos:

$\frac{df}{dx} = y - 2xy - y^2;$
$\frac{df}{dy} = x - x^2 - 2xy;$

Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0 \\ x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}$

1. De la primera ecuación si y=0 sustituyo en la segunda y nos queda $x(1 - x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 1$ Nos quedaría los puntos (0,0) y (1,0).
2. De la primera ecuación si $y \neq 0 \rightarrow y = 1 - 2x$ Sustituyendo en la segunda ecuación tendríamos que: $x - x^2 - 2x(1 - 2x) = 0 \rightarrow\ x - x^2 - 2x + 4x^2 = 0 \rightarrow 3x^2 - x = 0 \rightarrow x(3x - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{3}$

Si $x = 0 \rightarrow y = 1 - 2.0 = 1\ y\ tendríamos\ el\ punto\ (0,1)$
Si $x = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}$ y tendríamos el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Calculamos la matriz Hessiana:

$\frac{d^2f(x,y)}{d^2x} = -2y;\ \frac{d^2f(x,y)}{d^2y} = -2x;$

$\frac{df(x,y)}{dxdy} = \frac{df(x,y)}{dydx} = 1 - 2x - 2y$. La Hessiana sería:

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Vemos que ocurre en cada uno de los puntos calculados:

$H_{f(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indefinida y por tanto en (0,0) hay un punto de silla.

$H_{f(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ indefinida y por tanto en (1,0) hay un punto de silla.

$H_{f(0,1)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ indefinida y por tanto en (0,1) hay un punto de silla.

$H_{f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

Estudiamos el signo de la matriz por el método de los determinantes:

$|\frac{-2}{3}|<0$ $\begin{vmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} > 0$

La matriz es definida negativa y por tanto, el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es un máximo.

8. Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = -3x^2 - 5y^2 - 7z^2 + 5x + 18y + 54z - 10$

Calculamos:

$\frac{df}{dx} = -6x + 5;$

$$\frac{df}{dy} = -10y + 18;$$

$$\frac{df}{dz} = -14z + 54;$$

Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -6x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{6} \\ -10y + 18 = 0 \rightarrow y = \frac{9}{5} \\ -14z + 54 = 0 \rightarrow z = \frac{27}{7} \end{cases}$

El punto que nos sale es $(\frac{5}{6}, \frac{9}{5}, \frac{27}{7})$

Calculamos la Hessiana:

$\frac{d^2f(x,y,z)}{d^2x} = -6;\ \frac{d^2f(x,y,z)}{d^2y} = -10;\ \frac{d^2f(x,y,z)}{d^2z} = -14$

$$\frac{df(x,y,z)}{dxdy} = \frac{df(x,y,z)}{dydx} = 0;\quad \frac{df(x,y,z)}{dxdz} = \frac{df(x,y,z)}{dzdx} = 0;\ \frac{df(x,y,z)}{dydz} = \frac{df(x,y,z)}{dzdy} = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow H(\frac{5}{6}, \frac{9}{5}, \frac{27}{7}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el signo:

$|-6|<0;$ $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 60 > 0;$ $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} < 0$

Por tanto, es definida negativa y en el punto $(\frac{5}{6}, \frac{9}{5}, \frac{27}{7})$ la función tiene un máximo relativo.

9. Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y$ sujeto a: $x - y = 1$

En primer lugar, construimos la función Langragiana:

$$f(x,y,\alpha) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + \alpha(x - y - 1)$$

Calculamos las derivadas parciales:

$\frac{df}{dx} = 2x + y - 2 + \alpha;$

$\frac{df}{dy} = x + 2y - 4 - \alpha;$

$\frac{df}{d\alpha} = x - y - 1;$

Planteamos el sistema $\begin{cases} 2x + y - 2 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -2x - y + 2 \\ x + 2y - 4 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = x + 2y - 4 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - y + 2 = x + 2y - 4 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -6 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2};\ \alpha = \frac{-3}{2}$

Calculamos la Hessiana Orlada:

$\frac{d^2 f(x,y,\alpha)}{d^2 x} = 2;\ \frac{d^2 f(x,y,\alpha)}{d^2 y} = 2;\ \frac{d^2 f(x,y,\alpha)}{d^2 \alpha} = 0$

$$\frac{df(x,y,\alpha)}{dxdy} = \frac{df(x,y,\alpha)}{dydx} = 1;\ \frac{df(x,y,\alpha)}{dxd\alpha} = \frac{df(x,y,\alpha)}{d\alpha dx} = 1;\ \frac{df(x,y,\alpha)}{dyd\alpha} = \frac{df(x,y,\alpha)}{d\alpha dy} = -1$$

$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow H(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ hay que hacer m-n menores principales donde m son las variables y n el número de restricciones.

m-n=2-1=1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} < 0 \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right) es\ un\ mínimo\ relativo\ condicionado.$$

T.6 EJERCICIOS RESUELTOS INTEGRAL INDEFINIDA

1. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int (\boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 2}) \boldsymbol{dx} = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2x + c$

b) $\int (\boldsymbol{\frac{1}{x^2} - x^3 + \sqrt[3]{x^2}}) \boldsymbol{dx} = \int \left(x^{-2} - x^3 + x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{-1}{x} + \frac{x^4}{4} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

c) $\int \boldsymbol{3x^2 . e^{x^3} dx} = e^{x^3} + c$ (Ya que $\int f'.e^f = e^f + c$)

d) $\int \boldsymbol{\frac{2x-3}{x^2-3x+6} dx} = \ln(x^2 - 3x + 6) + c$ (Ya que $\int \frac{f'}{f} = lnf + c$)

e) $\int \boldsymbol{\frac{x}{x^2-6} dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-6} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 6) + c$

f) $\int (\boldsymbol{2x^5 + x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}}) \boldsymbol{dx} = \int (2x^5 + x^2 - 2.x^{-3} + \frac{1}{x}) = \frac{2x^6}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^{-2}}{-2} + lnx + c = \frac{x^6}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x^2} + lnx + c$

g) $\int \boldsymbol{x\sqrt{x^2+1}dx} = \int x.(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}.\int 2x.(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}.\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{\sqrt[2]{(x^2+1)^3}}{3} + c$

h) $\int \boldsymbol{\frac{x^2}{\sqrt{x}} dx} = \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

2. Calcula la siguiente integral por el método de cambio de variable:

$$\int \boldsymbol{x(5x^2 - 3)^7 dx}$$

$$t = 5x^2 - 3 \rightarrow dt = 10xdx \rightarrow dx = \frac{dt}{10x}$$

$$\int x(5x^2-3)^7 dx = \int x.t^7.\frac{dt}{10x} = \int \frac{t^7}{10} dt = \frac{1}{10}.\frac{t^8}{8} + C = \frac{1}{80}.(5x^2-3)^8 + C$$

3. Calcula la siguiente integral por partes:

$$\int (\boldsymbol{x^2-2}).\boldsymbol{e^x dx}$$

En ALPES, llamamos u al polinomio.

$$u = (x^2-2) \to du = 2xdx$$
$$dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int (x^2-2).e^x dx = (x^2-2).e^x - \int 2xe^x dx$$

Vuelvo a integrar por partes:

$$\mathbf{u = 2x \to du = 2dx}$$
$$\mathbf{dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x}$$
$$\int (\mathbf{x^2-2}).\mathbf{e^x dx} = (\mathbf{x^2-2}).\mathbf{e^x} - \int \mathbf{2xe^x dx}$$
$$= (\mathbf{x^2-2}).\mathbf{e^x} - [\mathbf{2x.e^x} - \int \mathbf{2e^x dx} = (\mathbf{x^2-2}).\mathbf{e^x} - \mathbf{2x.e^x} + \mathbf{2.e^x} + \mathbf{C}$$

4. Calcula la siguiente integral por partes:

$$\int \boldsymbol{xlnxdx} =$$

En ALPES, la u será el logaritmo.

$$u = lnx \to du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = xdx \to v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$
$$\int xlnxdx = lnx.\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x} = lnx.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = lnx.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + C$$

5. Calcula la siguiente integral racional $\int \frac{\mathbf{2x-1}}{(\mathbf{x-1})(\mathbf{x-2})} \boldsymbol{dx}$

$$\frac{\mathbf{2x-1}}{(\mathbf{x-1})(\mathbf{x-2})} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$A(x-2)+B(x-1)=2x-1$$

$$Si\ x=2 \rightarrow B=3$$

$$Si\ x=1 \rightarrow A=1$$

$$\int \frac{2\mathrm{x}-1}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2)}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx = \ln(x-1)+3\ln(x-2)+C$$

6. Calcula la siguiente integral racional $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2=1$$

$$Si\ x=1 \rightarrow B=-1$$

$$Si\ x=2 \rightarrow C=1$$

$$Si\ x=0 \rightarrow 2A+2+1=1 \rightarrow A=-1$$

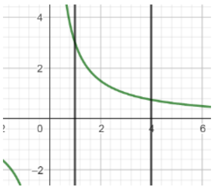
$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{-1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x-2}dx = -\ln(x-1)+\frac{1}{x-1}+\ln(x-2)+C$$

T.7 EJERCICIOS RESUELTOS INTEGRAL DEFINIDA

1. **Calcula las siguientes integrales definidas:**
   a. $\int_{-2}^{3}(x^2-4x)dx = \frac{x^3}{3} - 4.\frac{x^2}{2}|_{-2}^{3} = \left(\frac{3^3}{3}-2.3^2\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2.(-2)^2\right) = (9-18) - \left(\frac{-8}{3}-8\right)$ **=1,67.**

   b. $\int_{0}^{1} x.e^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 2x.e^{x^2-1}\,dx = e^{x^2-1}|_{0}^{1} = e^{0} - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}.$

2. **Calcula el área de la región limitada por $f(x) = \frac{3}{x}$, el eje OX y las rectas x=1 y x=4.**



Área= $\int_{1}^{4}\frac{3}{x}dx = 3lnx|_{1}^{4} = 3ln4 - 3ln1 = 3ln4\ \ u^2$

3. **Halla la superficie del recinto plano encerrado entre la curva de la función $f(x) = xe^{x}$ y el eje OX en el intervalo [-2,0].**

Área= $|\int_{-2}^{0} xe^{x}dx| =$

En primer lugar calculamos la integral indefinida:

$$\int xe^{x}dx = x.e^{x} - \int e^{x}dx = x.e^{x} - e^{x}$$

$$u = x \rightarrow du = 1dx$$
$$dv = e^{x}dx \rightarrow v = \int e^{x}dx = e^{x}$$

Área= $|\int_{-2}^{0} \boldsymbol{xe^{x}}dx| = \left|x.e^{x} - e^{x}|_{-2}^{0}\right| = |(-e^{0}) - (-2.e^{-2} - e^{-2})|$ =0,50 u^2

4. **Calcula el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = -x^2 - 2x$**

En primer lugar, calculamos los puntos de corte entre las dos funciones

$x^2 + x + 1 = -x^2 - 2x \rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow x = -1\ y\ x = \frac{-1}{2}$

Área= $|\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}(f(x) - g(x))dx| = |\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}(2x^2 + 3x + 1)dx\Big| = |2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + x|_{-1}^{\frac{-1}{2}}\Big| = \frac{1}{24}\ u^2$

5. Calcula el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

En primer lugar, calculamos los puntos de corte entre las dos funciones

$x^2 = x^3 - 2x^2 + 2x \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \rightarrow x = 0; x = 1 \; y \; x = 2$

Área= $\left| \int_0^1 \big(g(x) - f(x)\big)dx \right| + \left| \int_1^2 (g(x) - f(x))dx \right| = \left| \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx \right| =$
$\left| \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right| + \left| \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \right| = \left| \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) \right| + \left| (4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) \right| = \frac{1}{2}\, u^2$

6. Calcula la siguiente integral Gamma:

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$$

Identificamos esta integral con la integral gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0$$

En nuestro caso p-1=5 y despejando p=6 para que quede la integral que nos piden.

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{6-1} e^{-x} dx = \Gamma(6) = (6-1)! = 120$$

7. Calcula la siguiente integral Gamma: $\int_0^\infty x^{\frac{7}{3}} e^{-x} dx$

Identificamos esta integral con la integral gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0$$

En nuestro caso p-1=$\mathbf{\frac{7}{3}}$ y despejando p=$\mathbf{\frac{10}{3}}$ para que quede la integral que nos piden.

$$\int_0^\infty x^{\frac{7}{3}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{\frac{10}{3}-1} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{10}{3}\right) =$$

Tenemos la propiedad:

$$Si\; k \in \mathbb{N}, \qquad \Gamma(p+k) = p(p+1) \dots (p+k-1)\; \Gamma(p)$$

$$\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3} + 3\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \; se\; calcula\; con\; las\; tablas\; correspondientes)$

MARÍA M. SÁNCHEZ MARTÍN