Boletín de Ejercicios

Señales y Sistemas – Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos

Curso 2024/2025

Samuel Rey

Borja Imaz

Índice

PROBLEMAS TEMA 1: Señales en el dominio del tiempo

Problema 1

Expresar las siguientes señales en forma de exponenciales complejas

a) $x(t) = 2\cos\left(2\pi 60t + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $x(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + 4\,\mathrm{sen}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$.

[Sol: (a) $x(t) = e^{j2\pi 60t}e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j2\pi 60t}e^{-j\frac{\pi}{4}}$. (b) $x(t) = -e^{j\left(t+\frac{\pi}{6}\right)} - e^{-j\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}$].

Problema 2

Determinar el módulo y la fase (en función de t), así como la potencia y la energía, para las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}$.

b) $x(t) = \cos(t)$.

c) $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

[Sol: (a) $P_\infty = 1, E_\infty = \infty$. (b) $P_\infty = 1/2, E_\infty = \infty$. (c) $P_\infty = 0, E_\infty = 1/4$.]

Problema 3 (*)

Sea $x(t)$ una señal con $x(t) = 0$ para $t < 3$. Para cada una de las señales que se muestra a continuación, determinar los valores de t para los que se cumple que $x(t) = 0$.

a) $x(1-t)$.

b) $x(t/3)$.

c) $x(3t)$.

d) $x(1-t) + x(2-t)$.

e) $x(1-t) \cdot x(2-t)$.

[Sol: (a) $t > -2$. (b) $t < 9$. (c) $t < 1$. (d) $t > -1$. (e) $t > -2$.]

Problema 4

Encontrar la parte real de las siguientes señales y expresarla en la forma $Ae^{-\alpha t}\cos\omega t + \phi$, siendo A, α, ω, ϕ números reales, con $A > 0$ y $-\pi \leq \phi \leq \pi$.

a) $x(t) = -2$.

b) $x(t) = \sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t + 2\pi)$.

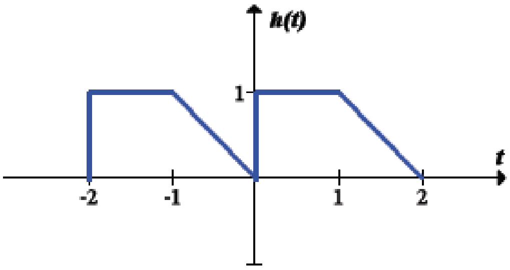
c) $x(t) = e^{-t}\sin(3t + \pi)$.

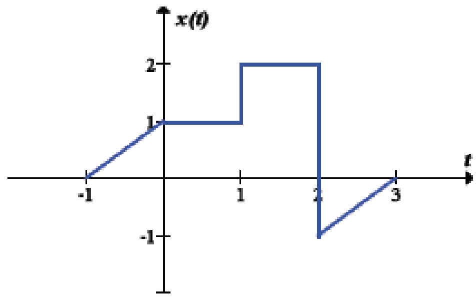
d) $x(t) = je^{(-2+j100)t}$.

[Sol: (a) $A = 2, \alpha = 0, \omega = 0, \phi = \pi$. (b) $A = 1, \alpha = 0, \omega = 3, \phi = 0$.
(c) $A = 1, \alpha = 1, \omega = 3, \phi = \pi/2$. (d) $A = 1, \alpha = 2, \omega = 100, \phi = \pi/2$.]

Problema 5 (*)

Dadas las señales $x(t)$ y $h(t)$, dibujar cada una de las siguientes señales.





a) $h(t + 3)$.

b) $h\left(\frac{t}{2} - 2\right)$.

c) $h(1 - 2t)$.

d) $4h\left(\frac{t}{4}\right)$.

e) $h\left(\frac{t}{2}\right)\delta(t + 1)$.

f) $h(t)[u(t + 1) - u(t - 1)]$.

g) $x(t)h(t + 1)$.

h) $x(t)h(-t)$.

Problema 6

Determinar si estas señales son periódicas. Si lo son, encontrar el periodo.

a) $x(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$.

c) $x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

[Sol: (a) $T = 2\pi/3$s. (b) $T = 2$s. (c) $T = 16$s.]

Problema 7 (*)

Calcular la derivada de las siguientes señales:

a) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ -1, & 2 \leq t < 4 \\ 1, & t \geq 4 \end{cases}$.

b) $x(t) = u(t+2) - u(t-2)$.

c) $x(t) = e^{j\pi t}u(t)$.

Problema 8 (*)

Integrar las siguientes señales calculando $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$:

a) $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$.

b) $x(t) = u(t+2) - u(t-2)$.

c) $x(t) = e^{j\pi t}u(t)$.

[Sol: (a) $y(t) = u(t+2) - u(t-2)$. (b) $y(t) = (t+2)u(t+2) + (2-t)u(t-2)$. (c) $y(t) = -\frac{j}{\pi}\left(e^{j\pi t} - 1\right)u(t)$.]

Problema 9

Considere la señal $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$. Calcule la energía total de

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau.$$

[Sol: $E_\infty = 4$ J.]

Problema 10 (*)

Considere la señal periódica de periodo $T = 2$, dada por:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -2, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

La derivada de esta señal está relacionada con el tren de impulsos periódico de periodo 2 segundos, dado por:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k).$$

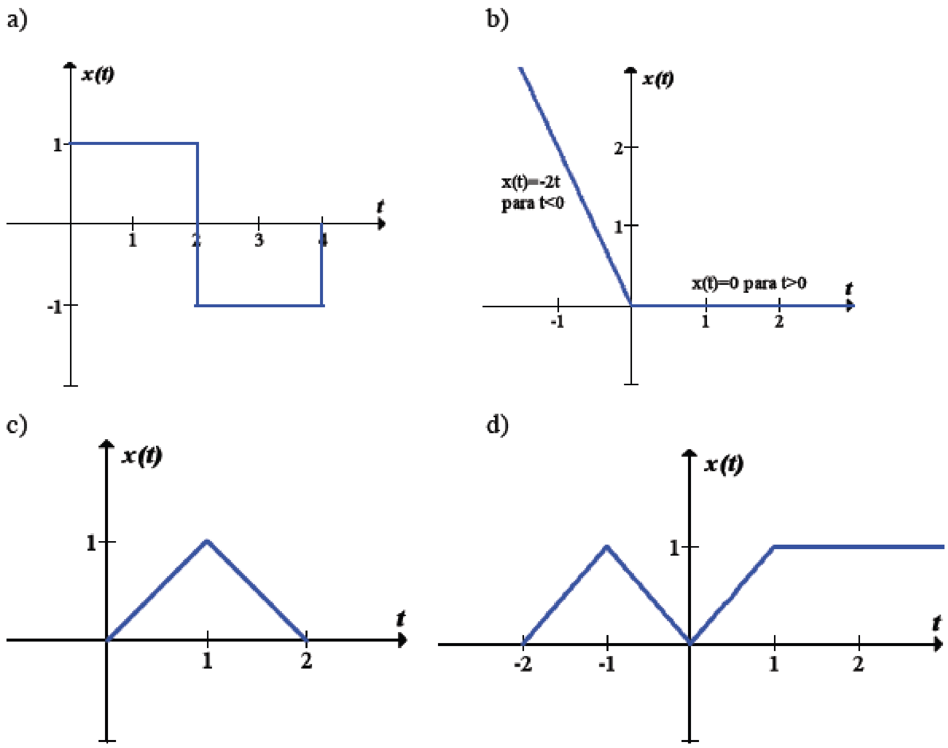
Determinar los valores de A_1, t_1, A_2, y t_2, para que

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2).$$

[Sol: $A_1 = 3, t_1 = 0, A_2 = -3, t_2 = 1$.]

Problema 11

Dibujar la parte par e impar de las siguientes señales:



Problema 12

Demostrar que $\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$.

Problema 13

Definimos la función $\Phi_{xy}(t)$ de dos señales $x(t)$ e $y(t)$ como:

$$\Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

- ¿Cuál es la relación entre $\Phi_{xy}(t)$ y $\Phi_{yx}(t)$?
- Supongamos que $x(t)$ es periódica. ¿Es también $\Phi_{xx}(t)$ periódica? ¿Con qué periodo?
- Calcular la parte impar de $\Phi_{xx}(t)$.

Problema 14

Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{par}^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_{impar}^2(t)dt.$$

Problema 15 (*)

Determinar el módulo y la fase, así como la potencia y la energía, de las secuencias:

a) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{8}\right)}$

b) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

Problema 16 (*)

Dada $x[n] = \sum_{k=-1}^{3} \delta[n-k] + \frac{1}{2}\delta[n-4]$, dibuje $y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$.

Problema 17

Estudie la periodicidad de las siguientes señales:

a) $x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{7}+2\right)$

b) $x[n] = e^{j7\pi n}$

c) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi}{8}-\pi\right)}$

d) $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} + e^{j\frac{2\pi}{5}n}$

e) $x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

f) $x[n] = 3e^{j\frac{3\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{5}}$

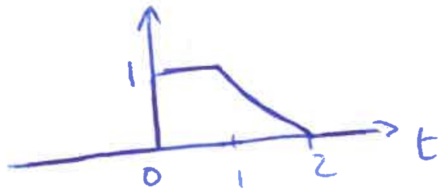
Problema 18 (*)

Calcule y represente la parte par y la parte impar de

$$x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n] + \delta[n-7].$$

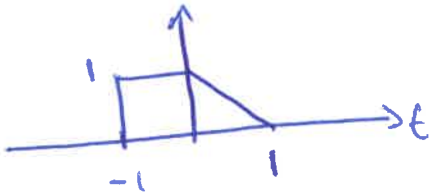
Cuestiones Tema 1

C1 $x(t)$

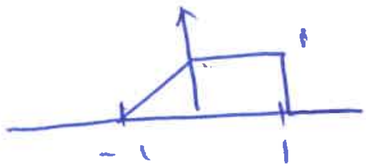


a) $y_1(t) = x(-t+1)$

$z(t) = x(t+1)$

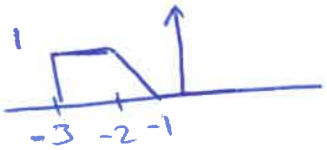


$y_1(t) = z(-t) = x(-t+1)$

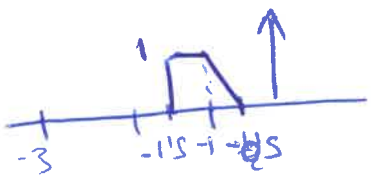


b) $y_2(t) = x(2t+3)$

$z(t) = x(t+3)$

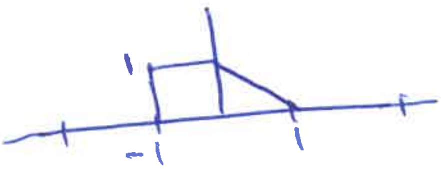


$y_2(t) = z(2t) = x(2t+3)$

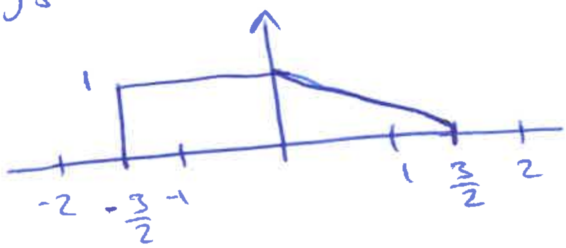


c) $y_3(t) = x(\frac{3}{2}t+1)$

$z(t) = x(t+1)$



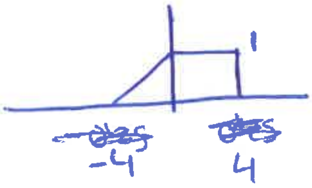
$y_3(t) = z(\frac{3}{2}t) = x(\frac{3}{2}t+1)$



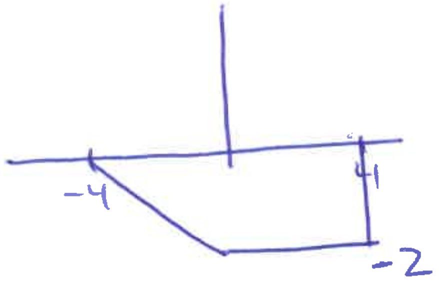
d) $y_4(t) = -2x(-\frac{t}{4}+1)+3$

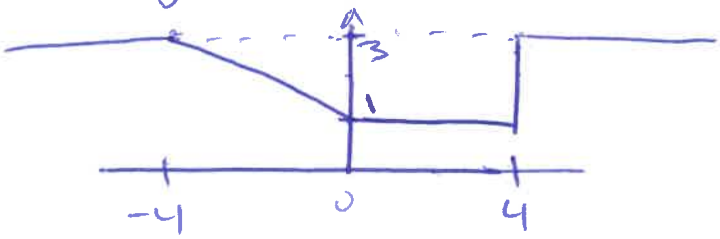
$z(t) = x(t+1)$; $u(t) = z(-t)$; $v(t) = z(-\frac{t}{4}) = x(-\frac{t}{4}+1)$

Ya hecho — Ya hecho $= y_1$

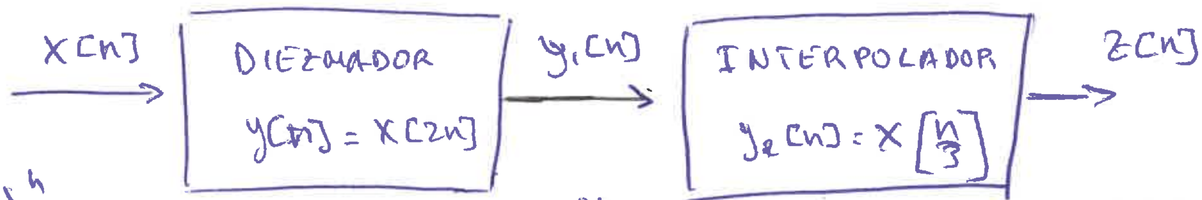


$w(t) = -2v(t) = -2x\left(-\frac{t}{4}+1\right)$; $y_4(t) = w(t) + 3$

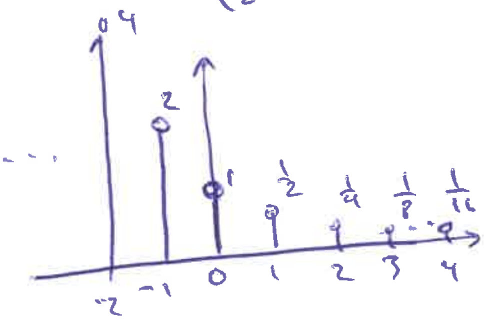




(2) * (e39) a)

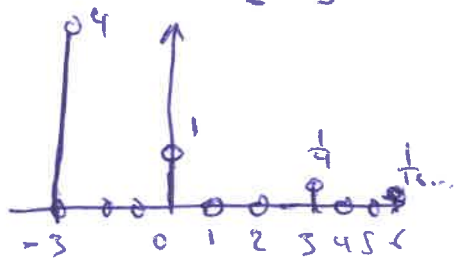


$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

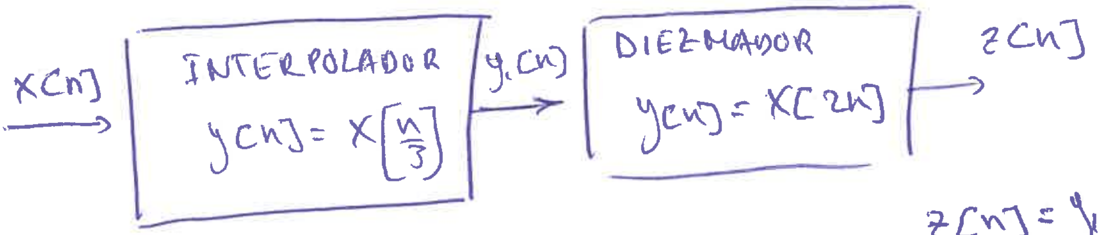


$y_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

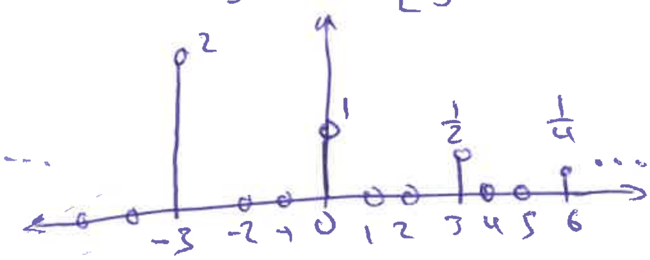
$z[n] = y_1\left[\frac{n}{3}\right]$



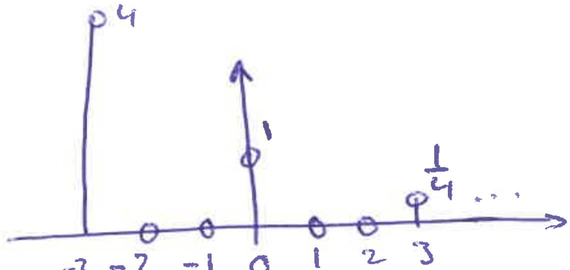
b)



$y_1[n] = x\left[\frac{n}{3}\right]$



$z[n] = y_1[2n]$



(C4) • a) $x_1(t) = \cos(\pi t) + j\,\text{sen}(\pi t)$

(C1)

$\underline{x_r(t)} = \cos(\pi t)$; $\underline{x_i(t)} = \text{sen}(\pi t)$

opt 1: $\underline{x_m^2(t)} = x_r^2(t) + x_i^2(t) = \cos^2(\pi t) + \text{sen}^2(\pi t) = 1$

$\underline{x_f(t)} = \text{artg}\left(\frac{x_i(t)}{x_r(t)}\right) = \text{artg}\left(\frac{\text{sen}(\pi t)}{\cos(\pi t)}\right) = \text{artg}(\text{tg}(\pi t)) = \pi t$

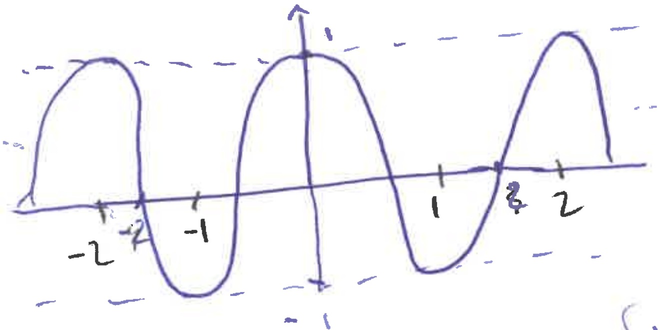
opt 2:

Por Euler: $x_1(t) = \cos(\pi t) + j\,\text{sen}(\pi t) = 1 e^{j\pi t}$ < módulo = 1 ; fase = πt.

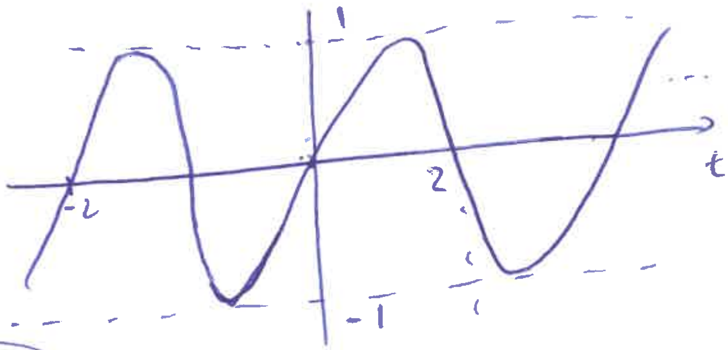
calcular el periodo:

$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0}$; $T_0 = \underline{2\ \text{seg}}$

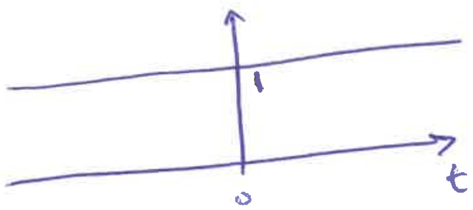
$x_r(t)$

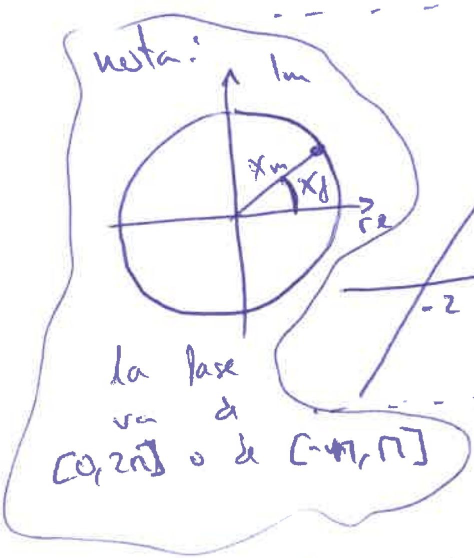


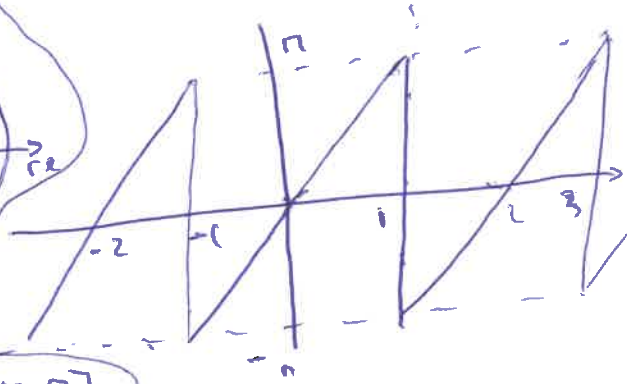
$x_i(t)$



$x_m(t)$







b) $x_2(t) = \sqrt{t}$

$\underline{x_r(t)} = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ $\underline{x_i(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ \sqrt{-t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$

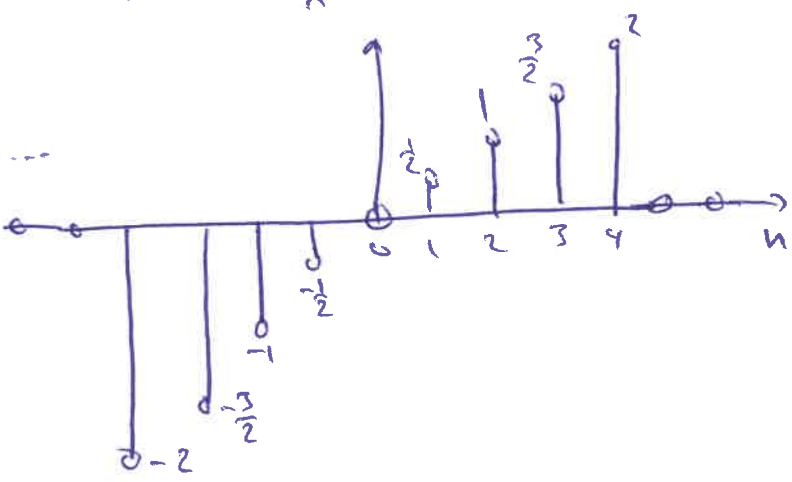
$x_2(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{si } t \geq 0 \\ j\sqrt{-t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$

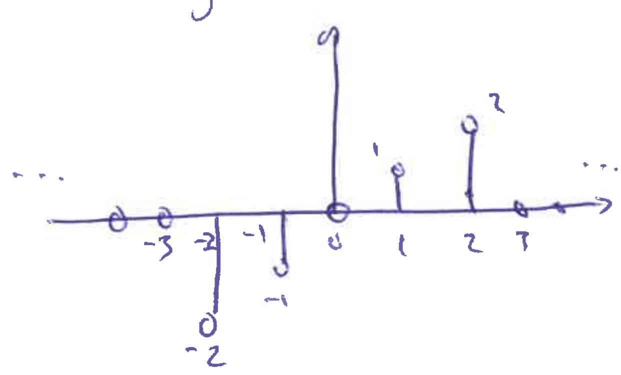
$\underline{x_m^2(t)} = \begin{cases} (\sqrt{t})^2 + 0^2, & t \geq 0 \\ 0^2 + (\sqrt{-t})^2, & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases} = |t|$

$x_f(t) = \begin{cases} \text{artg}\left(\frac{0}{\sqrt{t}}\right), & t \geq 0 \\ \text{artg}\left(\frac{\sqrt{-t}}{0}\right) & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} \text{artg}(0) & t \geq 0 \\ \text{artg}(\infty) & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & t < 0 \end{cases}$

(C3) a) $y_1[n] = x[2n]$

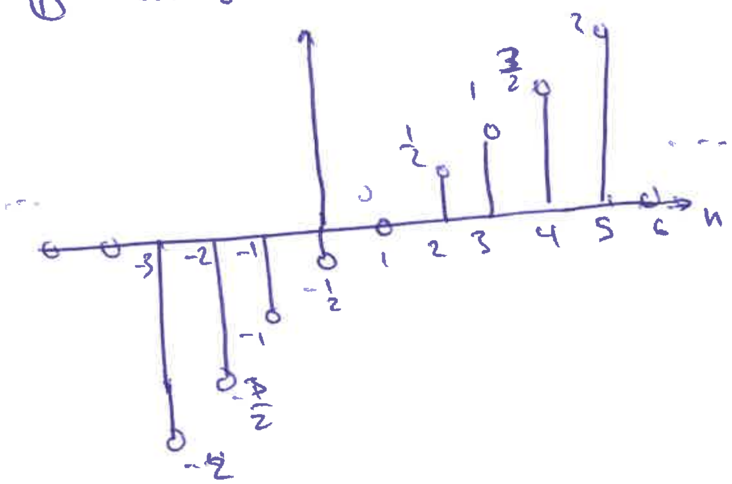
(C40)



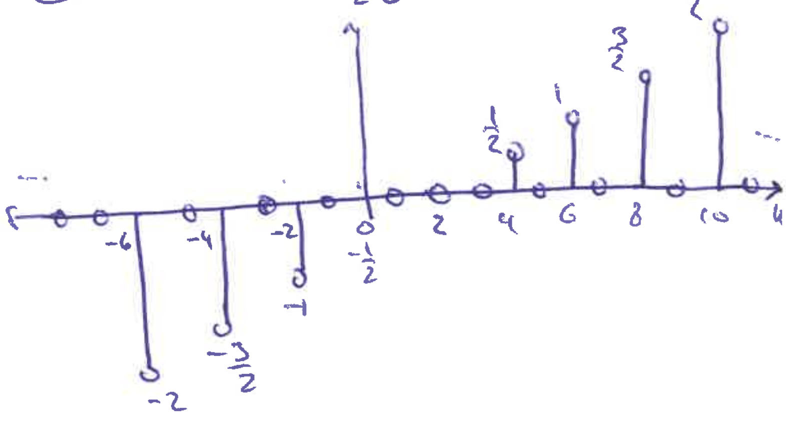


b) $y_2[n] = -x[\frac{n}{2}-1]+2$

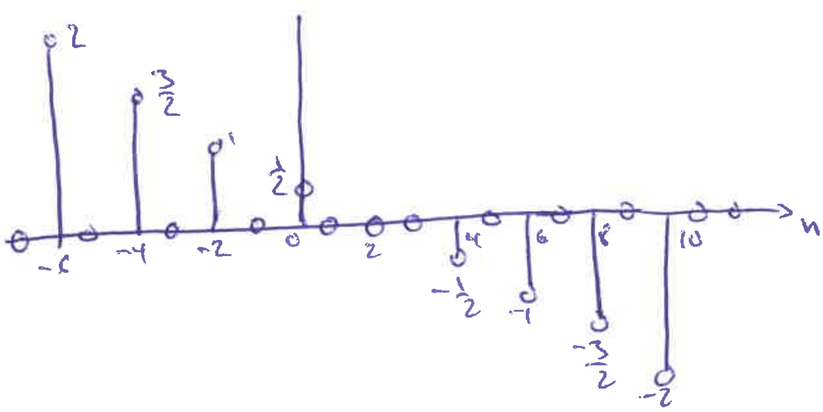
① $u[n] = x[n-1]$



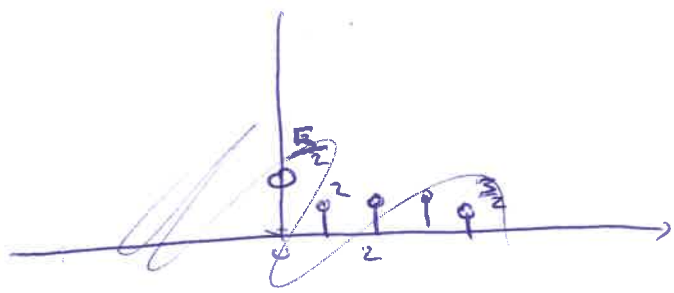
② $v[n] = u[\frac{n}{2}] = x[\frac{n}{2}-1]$

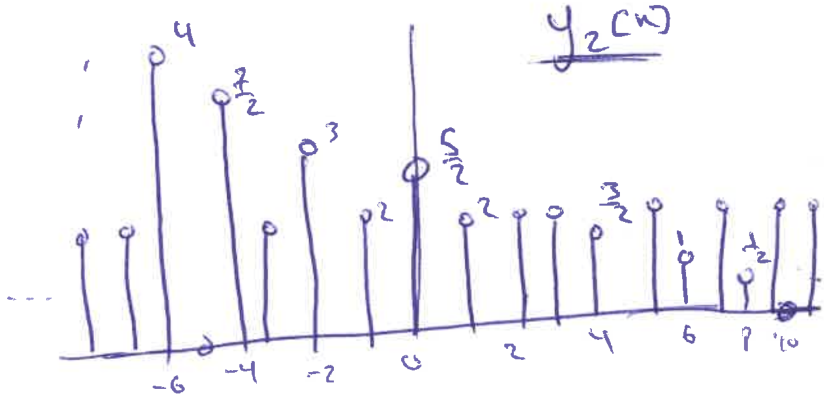


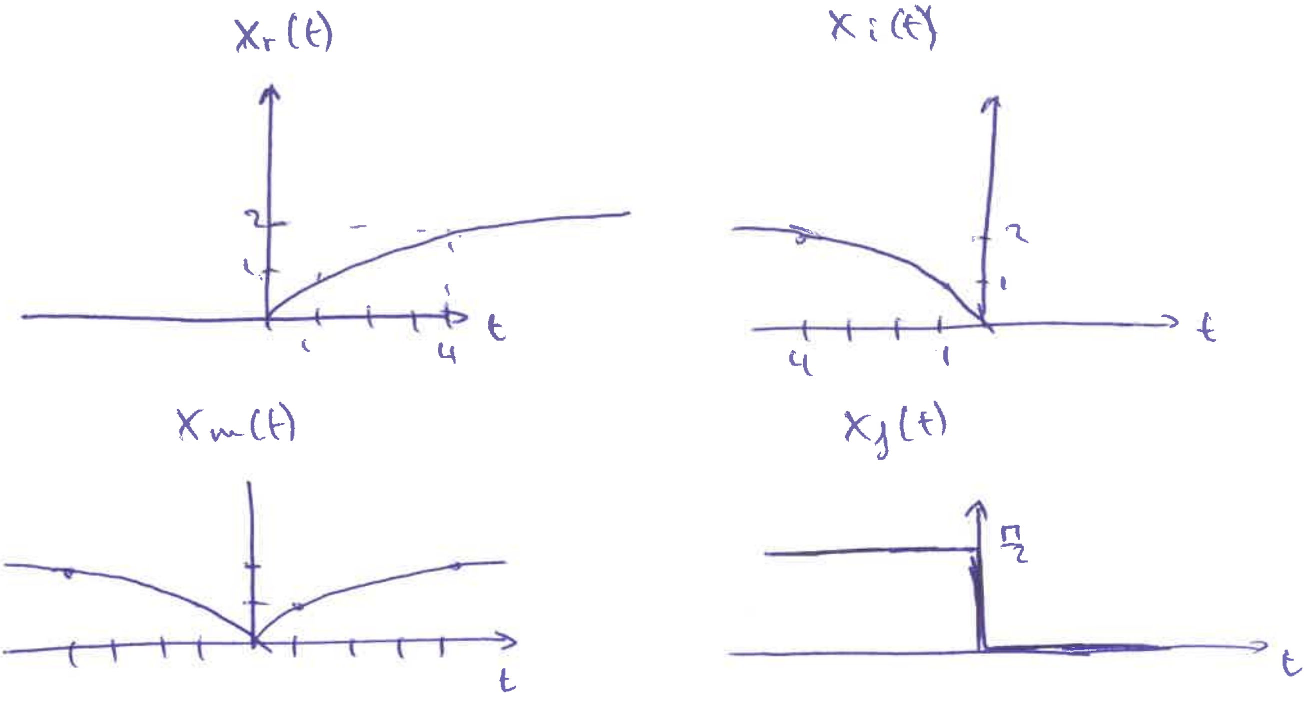
③ $w[n] = -v[n]$



④ $y_2[n] = w[n]+2 = -x[\frac{n}{2}-1]+2$







(C5) Tenemos que comparar $x(t)$ y $x(-t)$
(C3)

a) $x(t) = sen(\pi t)$

$x(-t) = sen(-\pi t) = -sen(\pi t) = -x(t) \rightarrow$ simetría impar

b) $y(t) = cos(2\pi t)$

$y(-t) = cos(-2\pi t) = cos(2\pi t) = y(t) \rightarrow$ simetría par

c) $z(t) = e^{-\alpha t}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

$z(-t) = e^{\alpha t} \longrightarrow$ no tiene simetrías.

(C6) a) $x(t) = sen(\pi t)$; $x(-t) = -sen(\pi t)$
(C4)

$x_p(t) = \frac{1}{2}(sen(\pi t) - sen(\pi t)) = 0$

$x_i(t) = \frac{1}{2}(sen(\pi t) + sen(\pi t)) = sen(\pi t) = x(t)$

Recordad que:

$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

$x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$

$x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

b) $y(t) = cos(2\pi t)$; $y(-t) = cos(2\pi t)$

$x_p(t) = \frac{1}{2}(cos(2\pi t) + cos(2\pi t)) = cos(2\pi t) = y(t)$

$x_i(t) = \frac{1}{2}(cos(2\pi t) - cos(2\pi t)) = 0$

c) $z(t) = e^{-\alpha t}$; $z(-t) = e^{\alpha t}$

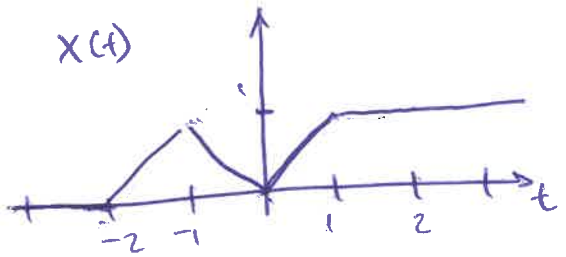
$z_p(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t}\right)$

$z_i(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}\right)$

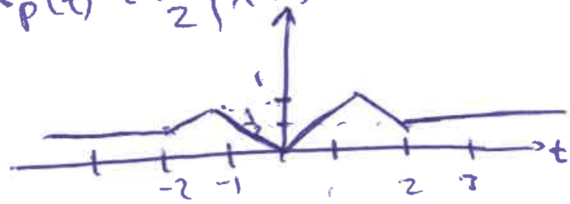
C7

(C5)

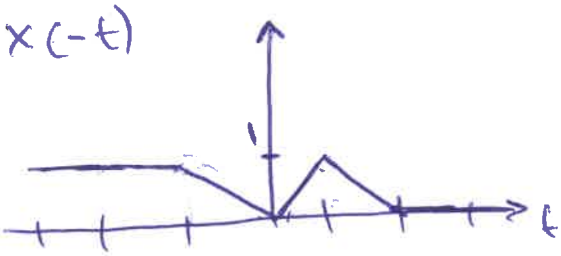
$x(t)$



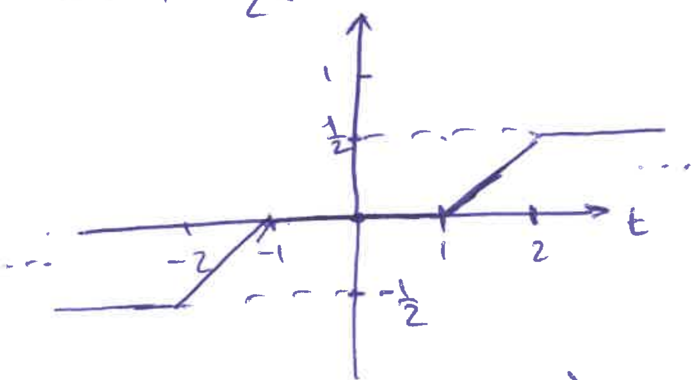
$x_p(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right)$



$x(-t)$

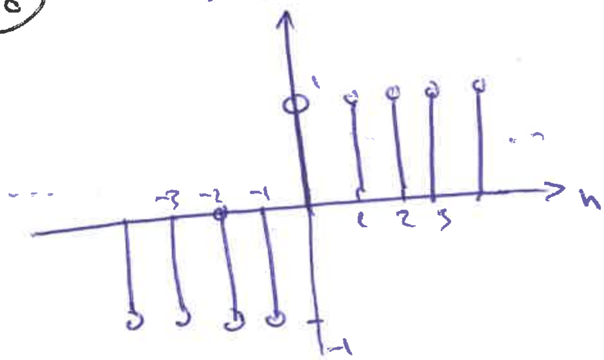


$x_i(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t)\right)$

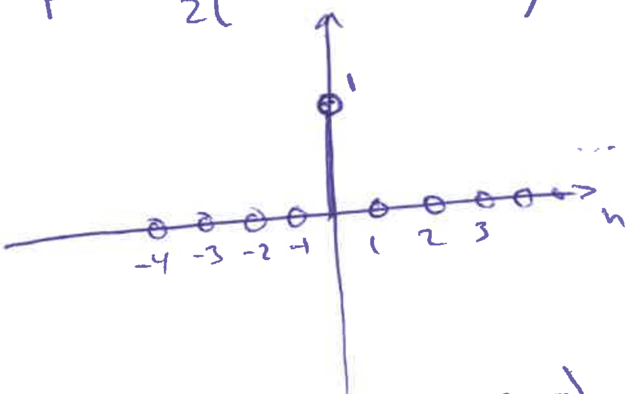


C8

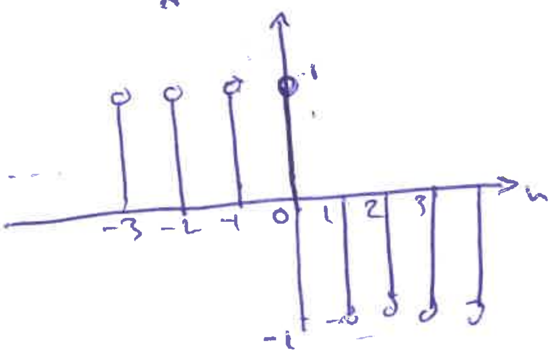
$x[n]$



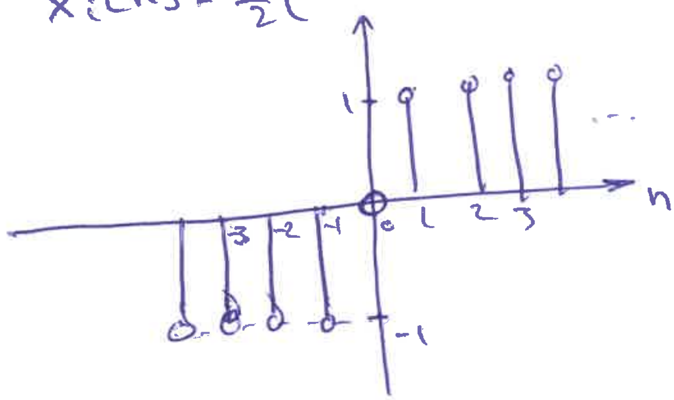
$x_p[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$



$x[-n]$



$x_i[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$



(C9) a) $x(t) = \cos(w_0 t) + j\sin(w_0 t) = e^{+jw_0 t}$

Recordar:

$x(t) = \frac{1}{2}[x_h(t) + x_a(t)]$

$x_h(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(-t)]$

$x_a(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x^*(-t)]$

(E6) $x(-t) = e^{-jw_0 t} \rightarrow x^*(-t) = e^{jw_0 t}$

$x_h(t) = \frac{1}{2}(e^{jw_0 t} + e^{jw_0 t}) = \underline{e^{jw_0 t}}$

$x_a(t) = \frac{1}{2}(e^{jw_0 t} - e^{jw_0 t}) = 0$

<u>x(t) es una señal hermítica</u>

b) $y(t) = e^{-2t} e^{5jt}$

$y(-t) = e^{2t} e^{-5jt} \rightarrow y^*(-t) = e^{2t} e^{5jt}$

$y_h(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} e^{5jt} + e^{2t} e^{5jt}) = \frac{1}{2} e^{5jt}(e^{-2t} + e^{2t})$

$y_a(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} e^{5jt} - e^{2t} e^{5jt}) = \frac{1}{2} e^{5jt}(e^{-2t} - e^{2t})$

(C10) $x(t) = x_r(t) + j x_i(t) \rightarrow$ por ser compleja

(E7) $x(t) = x^*(-t) \longrightarrow$ por ser hermítica

- Para que sean iguales tienen que serlo sus partes real e imag.:

$x_r(t) = x_r^*(-t) = x_r(-t) \longrightarrow x_r(t)$ es par.

$x_i(t) = x_i^*(-t) = -x_i(-t) \rightarrow x_i(t)$ es impar

- Si expresamos la señal en módulo y fase:

$x(t) = x_m(t)\, e^{j x_f(t)}$

$x(-t) = x_m(-t) \cdot e^{j x_f(-t)}$

$x^*(-t) = x_m(-t)\, e^{-j x_f(-t)}$

- Para que $x(t) = x^*(-t)$, los módulos y fases deben ser iguales:

$x_m(t) = x_m^*(-t) = x_m(-t) \longrightarrow x_m(t)$ es par.

$x_f(t) = -x_f(-t) \longrightarrow x_f(t)$ es impar.

(C11) $x_1(t) = x_1(t+T_0)$
(E9) $x_2(t) = x_2(t+T_0)$ $\Big\}$ $y(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow$ periódica?

Si es periódica existe T_y tal que:

$y(t) = y(t+T_y)$

Si $T_y = T_0$: $y(t+T_0) = x_1(t+T_0) + x_2(t+T_0) = x_1(t) + x_2(t) = y(t)$.

Sí es periódica con periodo T_0

*

(C12) $x_1(t) = x_1(t+T_1)$
(E10) $x_2(t) = x_2(t+T_2)$ $\Big\}$ $y(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow$ es periódica.

Probamos con m.c.m. $\{T_1, T_2\} \to T_y = K_1 T_1 = K_2 T_2$ con $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}$

$y(t+T_y) = x_1(t+T_y) + x_2(t+T_y) = x_1(t+K_1T_1) + x_2(t+K_2T_2)$

$= x_1(t) + x_2(t) = y(t)$ ✓

(C13) • $x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \longrightarrow$ las sinusoides por sí solas SIEMPRE son periódicas.
(E11)

Periodo: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ seg

• $x_2(t) = \sin(\omega_0 t + \frac{1}{2}) \longrightarrow$ el periodo depende de la frecuencia, no de la fase

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ seg

• $x_3(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\,\text{sen}(\omega_0 t) \longrightarrow$ periódica por ser una señal exp. imag. pura o por ser la suma de 2 sinusoides con misma freq.

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ seg

• $x_4(t) = \cos(10\pi t) \longrightarrow$ periódica $\omega_0 = 10\pi = \frac{2\pi}{T_0} \to T_0 = \frac{1}{5}$ seg

*

• $x_5(t) = \underbrace{\sin(10\pi t)}_{(1)} + \underbrace{\cos(20\pi t)}_{(2)}$

(1) $T_1 = \frac{1}{5}$ seg
(2) $T_2 = \frac{1}{10}$ seg $\Big\}$ $T_5 = \text{m.c.m.}\{\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\} = \frac{1}{5}$ seg

* $x_6(t) = \underbrace{\sin(10\pi t)}_{(1)} + \underbrace{\cos(20t)}_{(2)}$ // $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

(1) $T_1 = \frac{1}{5}$ seg.

(2) $T_2 = \frac{\pi}{10}$ seg

$T_6 = m.c.m.\{\frac{1}{5}, \frac{\pi}{10}\} \rightarrow \nexists$ no existe m.c.m., por lo tanto **no** es periódica

* $x_7(t) = \underbrace{\sin(10\pi t)}_{(1)} \underbrace{\cos(20\pi t)}_{(2)}$ → igual que la suma el producto de dos señales periódicas es periódico con periodo el m.c.m.

(1) $T_1 = \frac{1}{5}$ seg

(2) $T_2 = \frac{1}{10}$ seg

$m.c.m.\{\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\} = \frac{1}{5}$

$T_7 = \frac{1}{5}$ seg

(C14)

* $x_1(t) = e^{-t}$

(C12)

$\langle x_1(t)\rangle_{(2,3)} = \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x_1(t)\,dt = \frac{1}{3-2}\int_2^3 e^{-t}\,dt = -1\left[e^{-t}\right]_2^3 = e^{-2} - e^{-3}$

* $x_2(t) = t^2$;

$\langle x_2(t)\rangle_{(1,3)} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 x_2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 t^2\,dt = \frac{1}{6}\left[t^3\right]_1^3 = \frac{1}{6}(3^3 - 1) = \frac{26}{6}$

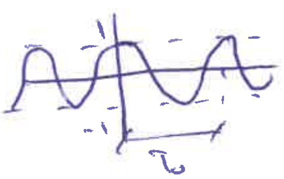
* $x_3(t) = |\sin(t)|$

Es periódica con $T_0 = \pi$ (ojo! no 2π)

$\langle x_3(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x_3(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,dt$

$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}$

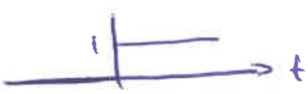
* $x_4(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t)$



$T_0 = 4$

$\langle x_4(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} \cos(\frac{\pi}{2}t)\,dt = 0$ (por consideraciones geométricas)

* $x_5(t) = u(t)$



$\langle x_5(t)\rangle_{(-1,3)} = \frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^3 u(t)\,dt =$

$= \frac{1}{4}\int_{-1}^0 0\,dt + \frac{1}{4}\int_0^3 1\,dt = \frac{1}{4}\left[t\right]_0^3 = \frac{3}{4}$

• $x_6(t) = u(t)$

$$\langle x_6(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T 1\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2T} = 1/2$$

• $x_7(t) = e^{j(5\pi t - \frac{1}{3})}$ → exp. compleja imag. pura.

$$\langle x_7(t)\rangle_{(-1,3)} = \frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^{3} e^{j(5\pi t-\frac{1}{3})}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{j5\pi}\left[e^{j(5\pi t-\frac{1}{3})}\right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{1}{j20\pi}\left(e^{j(15\pi - \frac{1}{3})} - e^{j(-5\pi-\frac{1}{3})}\right) = \frac{1}{j20\pi}\left(e^{j15\pi}e^{-\frac{j}{3}} - e^{-j5\pi}e^{-\frac{j}{3}}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{j}{3}}}{j20\pi}\left(\underbrace{e^{j15\pi}}_{\substack{\cos(15\pi)+j\sin(15\pi)\\ \cos(\pi)=-1 \quad j\cdot 0}} - \underbrace{e^{-j5\pi}}_{\cos(5\pi)-j\sin(5\pi)}\right) = \frac{e^{-\frac{j}{3}}}{j20\pi}\left(-1-(-1)\right) = 0$$

__Alternativa:__

$x_7(t) = e^{j(5\pi t-\frac{1}{3})} = \cos(5\pi t - \frac{1}{3}) + j\sin(5\pi t-\frac{1}{3})$. $T_0 = \frac{2}{5} = 0'4\,seg$

• El intervalo $(-1,3)$ tiene una duración de 4 seg → $10 T_0$ seg

• Coge 10 periodos completos.

$$\langle x_7(t)\rangle_{(-1,3)} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} e^{j(5\pi t-\frac{1}{3})}\,dt = \underbrace{\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}\cos(5\pi t-\tfrac{1}{3})\,dt}_{0} + \underbrace{\frac{j}{4}\int_{-1}^{3}\operatorname{sen}(5\pi t-\tfrac{1}{3})\,dt}_{0}$$

por coger intervalos completos.

$$= 0$$

C15 ✱ • $x_1[n] = n^2$ $\quad \langle x_1[n]\rangle_{(1,3)} = \frac{1}{3-1+1}\sum_{k=1}^{3} x_1[k] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} k^2 = \frac{14}{3}$

(37)

• $x_2[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ → señal periódica: $N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4 \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto:

$$\langle x_2[n]\rangle = \frac{1}{N_0}\sum_{k=\langle N_0\rangle} x_2[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \frac{1}{4}(1+0-1+0) = 0$$

Ojo! En T.D. el valor medio de una sinusoide no siempre es 0!

C16 (C13)

• Si $x(t)$ def. en energía: $E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$.

Por lo tanto: $P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\overset{<\infty}{E_\infty}}{2T} = 0$

• Si $x(t)$ def. en potencia:

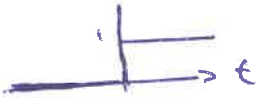
$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = C > 0$;

$\underbrace{\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt}_{E_\infty} = C \cdot \lim_{T\to\infty} 2T \longrightarrow E_\infty = C \cdot \infty = \infty$

C17 (C14)

• $E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$; $P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$

* • $x_1(t) = u(t)$



$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} 1^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2T} = \frac{1}{2} W$

* $E_\infty = \infty J$

• $x_2(t) = e^{-2t} \cdot u(t)$.

$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2t} \cdot u(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-4t} = -\frac{1}{4} \left[e^{-4t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{4}[0-1] = \frac{1}{4} J$

* $P_\infty = 0 W$

• $x_3(t) = e^{j(2t+\frac{\pi}{4})}$

$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |e^{j(2t+\frac{\pi}{4})}|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1 W$

? $E_\infty = \infty J$

• $x_4(t) = \cos(t) \longrightarrow T_0 = 2\pi$

$P_\infty = P_{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} |\cos(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} dt + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2t) dt} = \frac{1}{4\pi}(2\pi - 0) + \frac{1}{4\pi}\left[\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} W$

Nota: puede usarse que el valor medio de un coseno en periodos enteros es 0.

$A\cos(t) \rightsquigarrow P = \frac{A^2}{2}$

• $x_5(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t u(t)$.

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2t} dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4}\right)^t dt = *$$

$$* \int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} \rightarrow \int_0^\infty \left(\frac{1}{4}\right)^t dt = \left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^t}{\ln \frac{1}{4}}\right]_0^\infty = \frac{1}{-\ln 4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^\infty - \left(\frac{1}{4}\right)^0\right) = \frac{1}{\ln 4} \text{ J}$$

• $x_6(t) = (3+2j)\, u(t)$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x_6(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T 11\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{11\,T}{2T} = \frac{11}{2} \text{ W}$$

$E_\infty = \infty$ J

C18 (C38)

• $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

> Recuerda: si $\alpha < 1$
> $$\sum_{r=r_0}^{R} \alpha^r = \frac{\alpha^{r_0} - \alpha^{R-1}}{1-\alpha}$$

$$E_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_1[k]|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1-0}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \text{ J}$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}|x_1[n]|^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\cdot\frac{4}{3} = 0 \text{ W}$$

• $x_2[n] = e^{j\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} \rightarrow$ periódica de periodo $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{N_0} \rightarrow N_0 = 4$.

$$P_m = \frac{1}{N_0}\sum_{k=\langle N_0\rangle} |x[k]|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left|e^{j\left(\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}\right|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} 1 = \underline{1 \text{ W}}$$

$E_\infty = \infty$ J

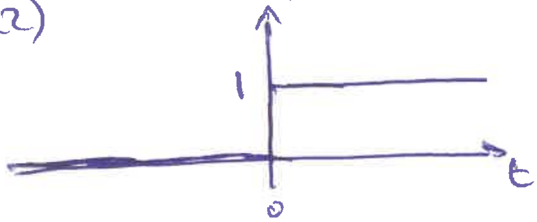
• $x_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) \rightarrow$ periódica con $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{N_0} \rightarrow N_0 = 8$

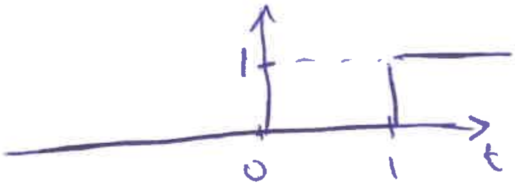
$$P_m = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right|^2 = \frac{1}{8}\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ W}$$

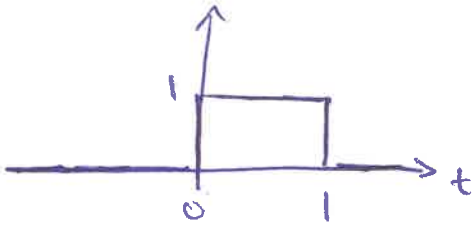
$E_\infty = \infty$.

C19 *
(C22)

• $x_0(t) = u(t) - u(t+1)$

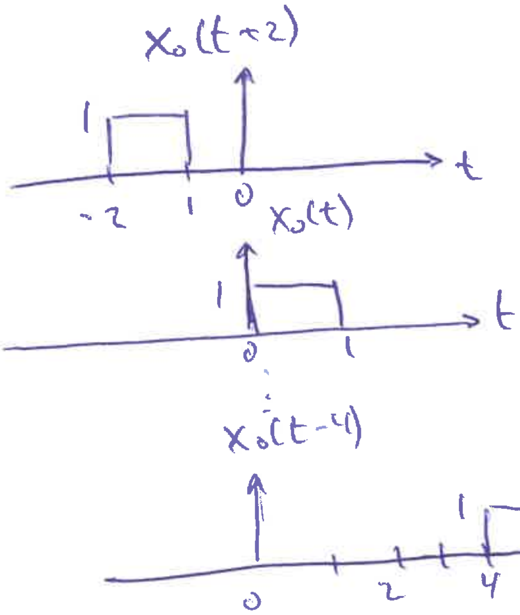


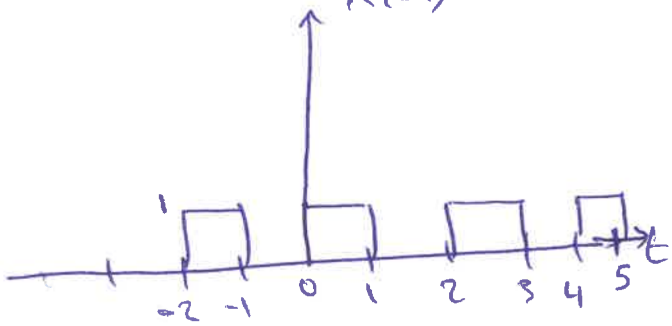




No es periódica.

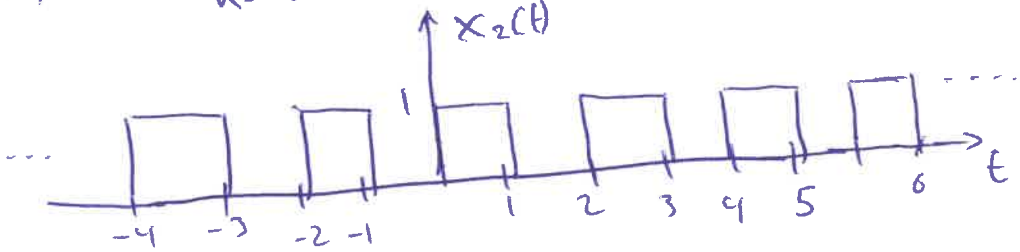
• $x_1(t) = \sum_{k=-1}^{2} x_0(t-2k) = x_0(t+2) + x_0(t) + x_0(t-2) + x_0(t-4)$





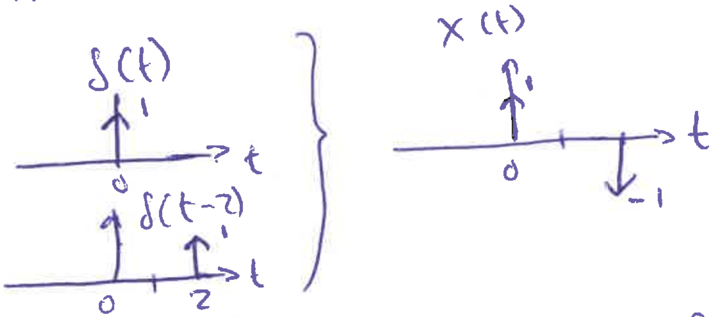
No es periódica.

• $x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t-2k) = \dots + x_0(t+2) + x_0(t) + x_0(t-2) + \dots$



Es periódica con periodo $T_0 = 2$ seg

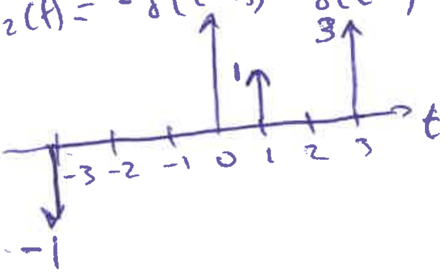
(C22) (C29) • $x_1(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$ *



$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) - \delta(t-2)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)\,dt =$$

$$= 1 - 1 = 0$$

* • $x_2(t) = -\delta(t+3) + \delta(t-1) + 3\delta(t-3)$

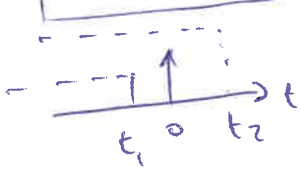


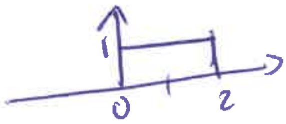
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+3)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)\,dt + 3\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)\,dt$$

$$= 3$$

(C23) (C30) * • Integral de $x_1(t)$ hasta t:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt - \int_{-\infty}^{t} \delta(t-2)\,dt = u(t) - u(t-2)$$

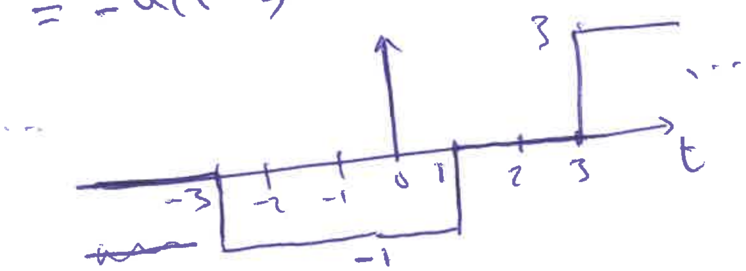




• Para $x_2(t)$:

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{t} \delta(t+3)\,dt + \int_{-\infty}^{t} \delta(t-1)\,dt + 3\int_{-\infty}^{t} \delta(t-3)\,dt$$

$$= -u(t+3) + u(t-1) + 3u(t-3).$$

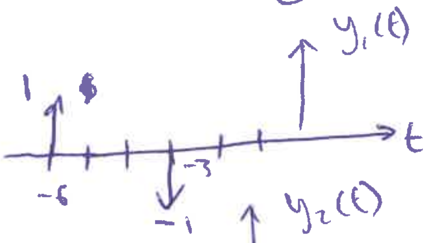


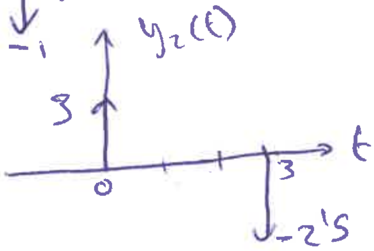
(C23) Recordar que $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

(C30)

• $x_1(t) = u(t+3) - 2u(t+3) + u(t+6) \to y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = -2\delta(t+3) + \delta(t+3) + \delta(t+6)$

$= -\delta(t+3) + \delta(t+6)$





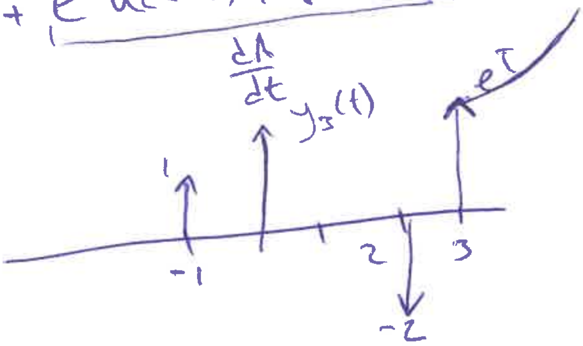
• $x_2(t) = 3u(t) - 2'5u(t-3)$

$y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = 3\delta(t) - 2'5\,\delta(t-3)$

*

• $x_3(t) = u(t+1) + \underbrace{e^t u(t-3)}_{A} - 2u(t)$

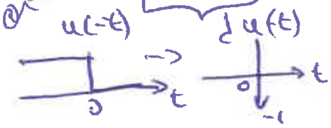
$y_3(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = \delta(t+1) + \underbrace{e^t u(t-3) + \delta(t-3)e^t}_{\frac{dA}{dt}} - 2\delta(t)$



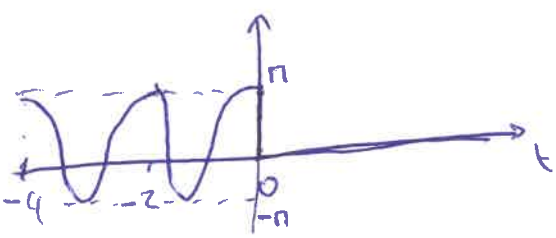
• $x_4(t) = \sin(\pi t)u(-t)$

$y_4(t) = \frac{dx_4(t)}{dt} = \pi\cos(\pi t)u(-t) + \sin(\pi t)\cdot(-\delta(t)) = \pi\cos(\pi t)u(-t) - \sin(0)\delta(t)$

$= \pi\cos(\pi t)u(t)$



$\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \pi \to T_0 = 2$ seg



(C24) $y(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \cancel{2u(t+2)}$ ↙ empieza en

(C31)

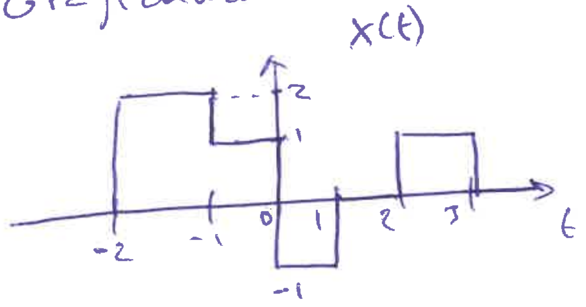
$x(t) = 2\,u(t+2) - u(t+1) - 2u(t) + u(t-1) + u(t-2) - u(t-3)$

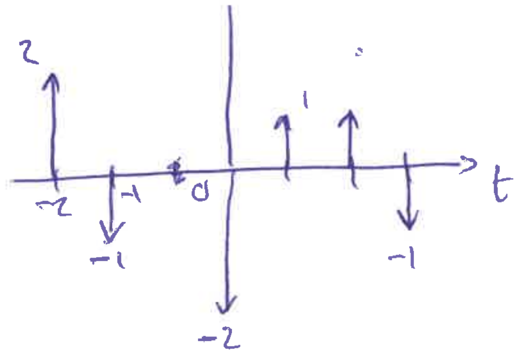
empieza en $t=-2$ con altura 2

en $t=-1$ baja 1 de altura

$$y(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = 2\delta(t+2) - \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2) - \delta(t-3)$$

Gráficamente:





(C25) $x(t) = |c|\,e^{j\phi}\,e^{\sigma t} e^{j\Omega t} = |c|\,e^{\sigma t} e^{j(\Omega t+\phi)}$; $c \in \mathbb{C}$ con módulo $|c|$ y fase ϕ

$\underline{x_m(t) = |c|\,e^{\sigma t}}$; $\underline{x_f(t) = \Omega t + \phi}$.

· Para la parte real usamos Euler:

$x(t) = |c|\,e^{\sigma t}\left(\cos(\Omega t+\phi) + j\sin(\Omega t+\phi)\right)$

$x_r(t) = |c|\,e^{\sigma t}\cos(\Omega t+\phi)$; $\underline{x_i(t) = |c|\,e^{\sigma t}\sin(\Omega t+\phi)}$

(C26) $x(t) = 100\cos(400\pi t + 60^\circ)$

(C19)

a) $A = 100$

b) $\omega_0 = 400\pi = 2\pi f$; $f = \frac{400\pi}{2\pi} = 200\,Hz$; $\omega_0 = 400\pi$ rad/seg.

c) $\phi_{gr} = 60^\circ$; $\phi_{rad} = \frac{60^\circ}{180}\cdot\pi = \frac{1}{3}\pi$ rad.

d) $\omega_0 = 400\pi = \frac{2\pi}{T_0} \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{400\pi} = \frac{1}{200}$ seg. $= 5$ ms.

e) en $t = 5\cdot 10^{-3}$ seg.

C27 $x(t)= e^{j\phi t} = \cos(\phi t) + j\,\mathrm{sen}(\phi t)$.

(C20) Como el seno y el coseno son periódicas con el mismo periodo T_0 $\longrightarrow$ $x(t)$ es periódica con periodo T_0.

C28 • $x_1(t) = j e^{10jt} = j(\cos(10t) + j\sin(10t))$

(C21) $\omega = \frac{2\pi}{T_0} = 10 \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ segs

• $x_2(t) = e^{(-1+j)t} = e^{-t+jt} = e^{-t}e^{jt}$.

Como el módulo e^{-t} no es periódico, $x_2(t)$ no es periódica

• $x_3(t) = 2\cos(\underbrace{10}_{\omega_1}t+1) - \sin(\underbrace{4}_{\omega_2}t-1)$

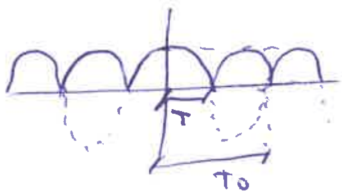
$\omega_1 = 10 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$; $\omega_2 = 4 = \frac{2\pi}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\Bigg\}$ $T_0 = \text{m.c.m.}\{\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\} = 1$ seg.

• $x_4(t) = \underbrace{1}_{\text{es per.}} + \underbrace{e^{j\frac{4\pi t}{7}}}_{T_1} + \underbrace{e^{j\frac{2\pi t}{5}}}_{T_2}$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{4\pi}{7} \rightarrow T_1 = \frac{7}{2}$; $T_0 = \text{m.c.m.}\{\frac{7}{2}, 5\} = 35$ seg.

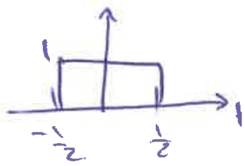
$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{5} \rightarrow T_2 = 5$

• $x_5(t) = \underbrace{\cos^2(2t - \frac{\pi}{3})}_{\text{periodo es la mitad del coseno}} \longrightarrow T = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{2}$



C29 $x(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases} = u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})$

(C23)



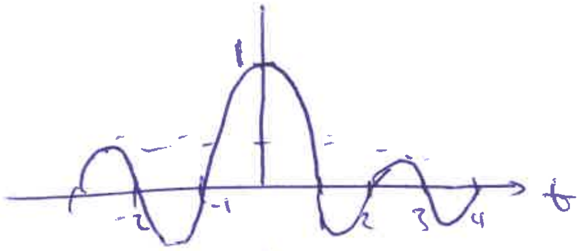
C30 $x(t) = u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi(t-\frac{1}{2}-k) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi(t - \frac{2k+1}{2})$

(C24) $u(t)$

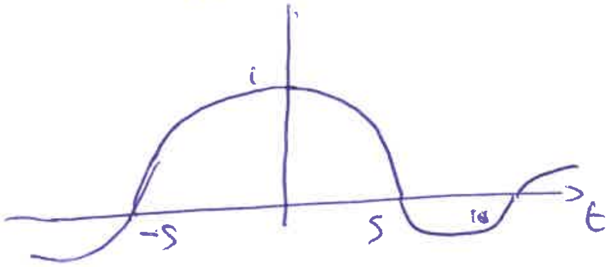
(31) • $\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$

(25)

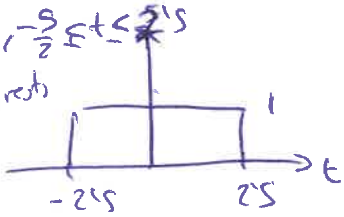
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



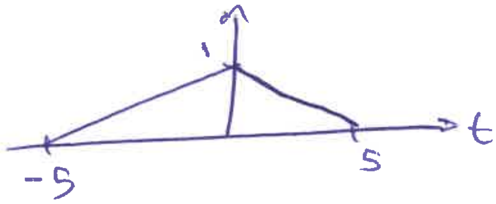
$$\text{sinc}\left(\frac{t}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)}{\frac{\pi t}{5}}$$



• $\Pi\left(\frac{t}{5}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{5}{2} \leq t \leq 2'5 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$



• $\Lambda\left(\frac{t}{5}\right) = \begin{cases} \frac{t}{5}+1; & -5 \leq t < 0 \\ -\frac{t}{5}+1; & 0 \leq t \leq 5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$



Problemas Tema 1

P1 a) $x(t) = 2\cos(2\pi 60t + \frac{\pi}{4})$

$$x(t) = 2\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j(2\pi 60t+\frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\pi 60t+\frac{\pi}{4})}\right) = e^{j(2\pi 60t+\frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\pi 60t+\frac{\pi}{4})}$$

b) $x(t) = 2\cos(t+\frac{\pi}{6}) + 4\,\mathrm{sen}(t-\frac{\pi}{3})$

$$x(t) = \frac{2}{2}\left(e^{j(t+\frac{\pi}{6})} + e^{-j(t+\frac{\pi}{6})}\right) + \frac{4}{2j}\left(e^{j(t-\frac{\pi}{3})} - e^{-j(t-\frac{\pi}{3})}\right)$$

$$= e^{jt}e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{-jt}e^{-j\frac{\pi}{6}} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(e^{jt}e^{-j\frac{\pi}{3}} - e^{-jt}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)$$

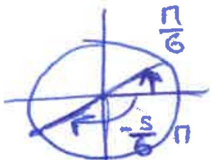
$$= e^{jt}e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{-jt}e^{-j\frac{\pi}{6}} + 2e^{jt}e^{-j(\frac{3\pi+2\pi}{6})} - 2e^{jt}e^{-j(\frac{3\pi-2\pi}{6})}$$

$$= e^{jt}e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{-j}e^{-j\frac{\pi}{6}} + 2e^{jt}e^{-j\frac{5\pi}{6}} - 2e^{jt}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$= e^{jt}e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{-jt}e^{-j\frac{\pi}{6}} - 2e^{jt}e^{j\frac{\pi}{6}} - 2e^{jt}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$= -e^{jt}e^{j\frac{\pi}{6}} - e^{-jt}e^{-j\frac{\pi}{6}} = -e^{j(t+\frac{\pi}{6})} - e^{-j(t+\frac{\pi}{6})}$$

$* \ \frac{1}{j} = -j$



$e^{-\frac{5}{6}\pi j} = -e^{j\frac{\pi}{6}}$

P2 a) $x(t) = e^{j(2t+\frac{\pi}{4})}$

$x_m(t) = |x(t)| = 1 \ \forall t$; $x_f(t) = \measuredangle\{x(t)\} = \frac{\pi}{4} + 2t$

Señal periódica con periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ seg.

$$P_\infty = \frac{1}{T}\int_{<T>}|x(t)|^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1^2\,dt = 1\ W$$

$E_\infty = \infty$ (def. en potencia).

b) $x(t) = \cos(t)$.

$|x(t)| = |\cos(t)|$; $\measuredangle\{x(t)\} = \text{arctg}\left(\dfrac{Im\{x(t)\}}{Re\{x(t)\}}\right) = ?$

por ser una señal real ~~positiva~~

$$= \begin{cases} 0, & |t| \le \frac{\pi}{2} \\ \pi, & \frac{\pi}{2} \le |t| < \pi \end{cases}$$ Periódica con período T

Periodo ~~del cuadrado~~: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi$

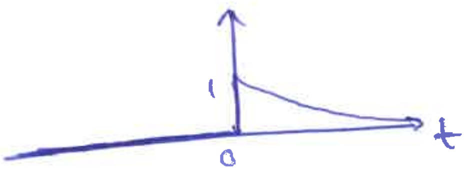
$$P_x = \frac{1}{T}\int_{<T>} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \dots = \frac{1}{2}\ W$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt = \frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2t)\, dt = \frac{1}{2}.$$

$\int_0^{2\pi}\cos(2t)\, dt = 0$

$E_x = \infty\ J$

c) $x(t) = e^{-2t}u(t)$



$|x(t)| = |e^{-2t}u(t)| = e^{-2t}u(t)$.

siempre es real y positiva

$\measuredangle\{x(t)\} = 0 \quad \forall t$

No periódica, de duración infinita pero convergente:

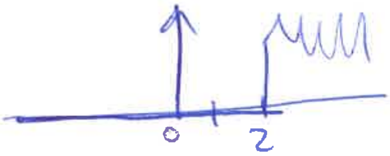
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_0^{\infty} (e^{-2t})^2\, dt = \int_0^{\infty} e^{-4t}\, dt = -\frac{1}{4}\left[e^{-4t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}\ J$$

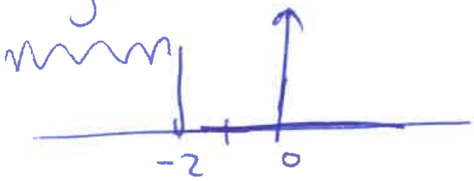
"(0-1)"

$P_x = 0\ W$ (def. en energía).

P3 $x(t) = 0, \quad t < 3$

a) $x(1-t)$; $u(t) = x(t+1)$ $\quad y(t) = u(-t)$

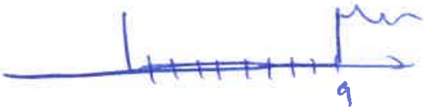




$x(1-t) = 0$ para $t > -2$.

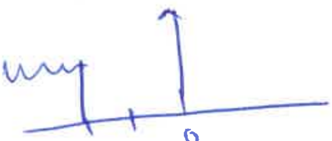
b) $x(3t) \cancel{= 0} \longrightarrow x(3t) = 0$ para $t < 1$

b) $x\left(\frac{t}{3}\right) \longrightarrow x\left(\frac{t}{3}\right) = 0$ para $t < 9$.

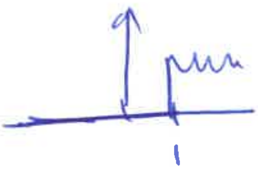


d) $y(t) = x(1-t) + x(2-t) \longrightarrow y(t) = 0$ para $t > -1$

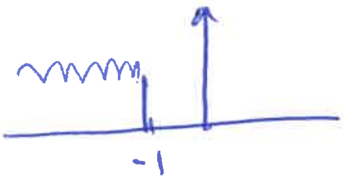
$x(1-t)$



$u(t) = x(t+2)$



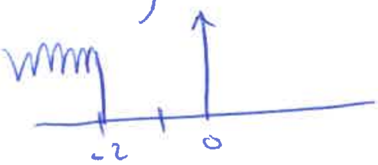
$v(t) = u(-t) = x(2-t)$



$y(t)$

e) $y(t) = x(1-t) \cdot x(2-t) \longrightarrow y(t) = 0$ para $t \geq -2$.

$y(t)$



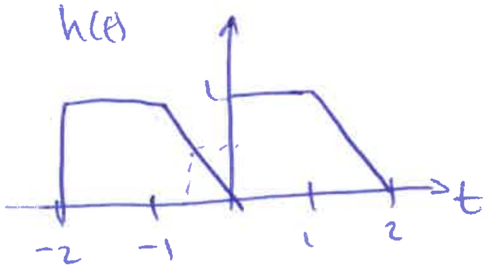
P4 a) $X(t) = -2 = 2\cos(\pi) \rightarrow \boxed{A=2,\ \phi=\pi,\ \omega=0,\ \alpha=0}$

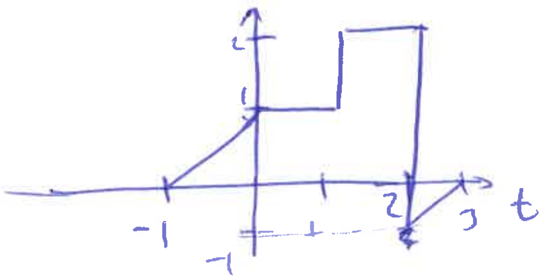
b) $X(t) = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} \cos(3t+2\pi)$

$X_r(t) = Re\{\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} \cos(3t+2\pi)\} = \sqrt{2}\cos(3t)\cancel{+2\pi}\, Re\{e^{j\frac{\pi}{4}}\} = \sqrt{2}\cos(3t)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

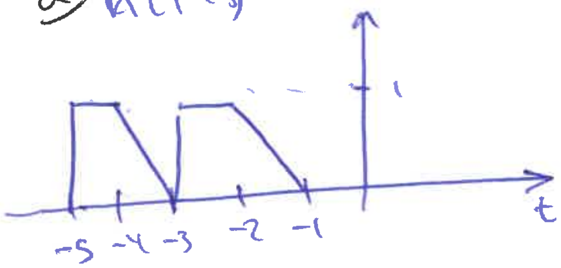
$= \cos(3t) \longrightarrow \boxed{A=1,\ \alpha=0,\ \omega=3,\ \phi=0}$

P5





a) $h(t+3)$

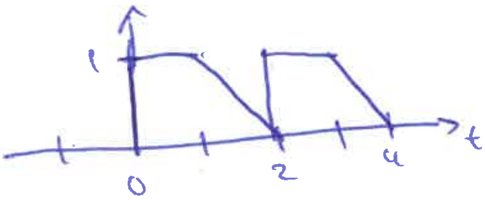


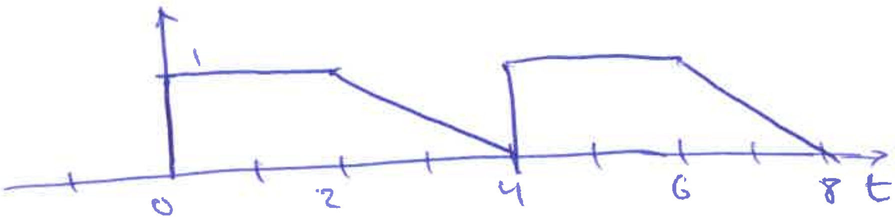
c)

b) $h\left(\frac{t}{2}-2\right)$

$w(t) = h(t-2)$

$y(t) = v\left(\frac{t}{2}\right)$

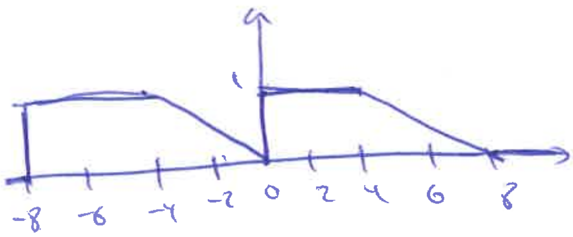


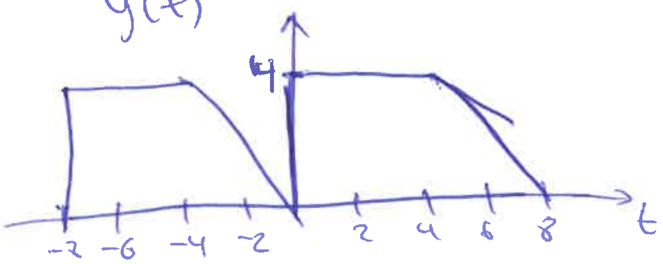


c) d) $y(t) = 4h\left(\frac{t}{4}\right)$

$v(t) = h\left(\frac{t}{4}\right)$

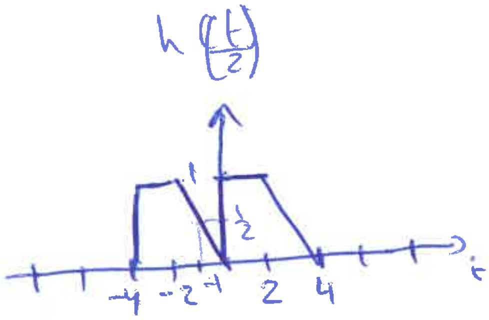
y(t)

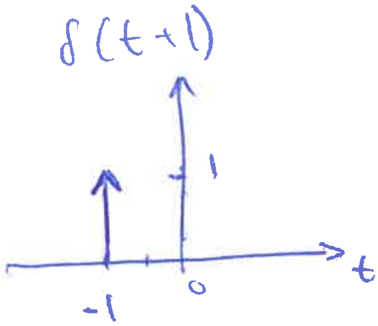


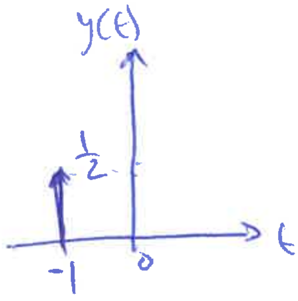


e) $y(t) = h\left(\frac{t}{2}\right)\cdot \underbrace{\delta(t+1)}_{0\ \forall t \text{ menos en } t=-1} = h\left(\frac{-1}{2}\right)\delta(t+1) = \frac{1}{2}\delta(t+1)$

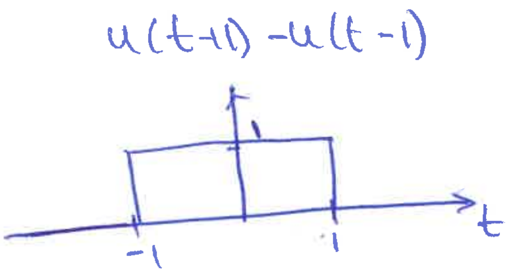
Gráficamente:

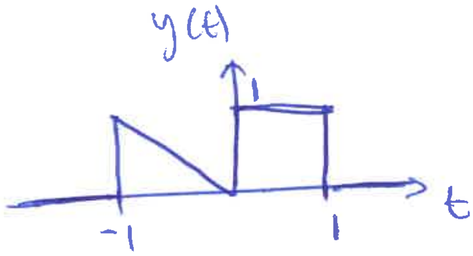




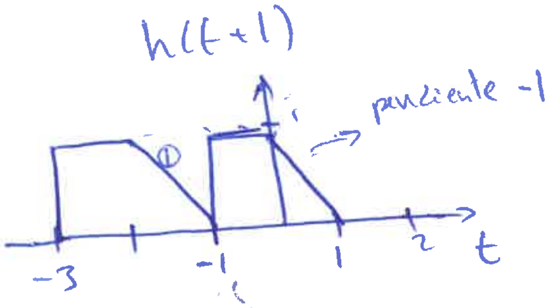


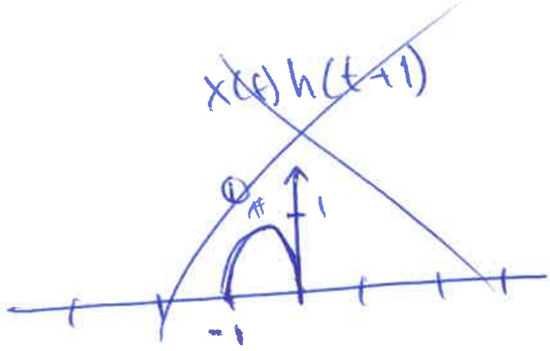
f) $y(t) = h(t)\cdot[u(t+1) - u(t-1)] = h(t)\cdot\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$





g) $y(t) = x(t)\cdot h(t+1)$





① $* \ h(t+1) = -t-1$

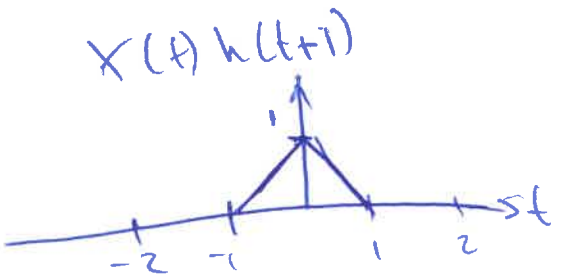
$x(t) = t-1$

$h(t+1)x(t) =$

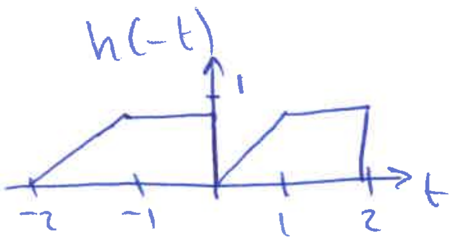
$(-t-1)\cdot(t-1) = -t^2+1$

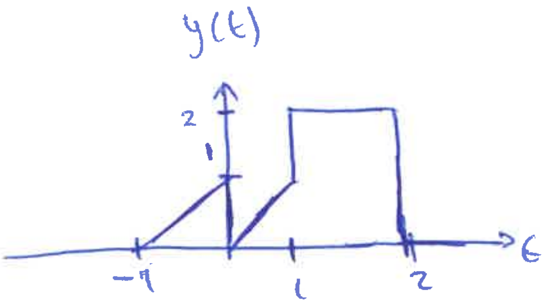
$= -(t+1)(t-1) = -(t^2-1)$

$= -t^2+1$



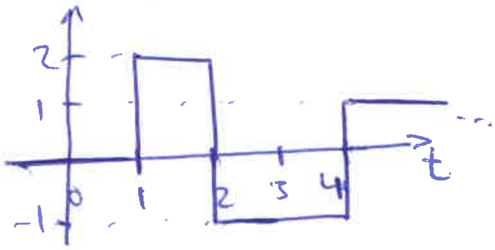
h) $y(t) = x(t)h(-t)$



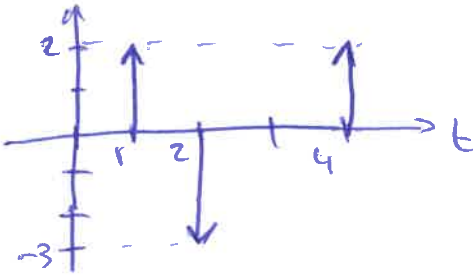


P7

a) $x(t)=\begin{cases} 0, & t<1 \\ 2, & 1\leq t<2 \\ -1, & 2\leq t<4 \\ 1, & t\geq 4 \end{cases}$

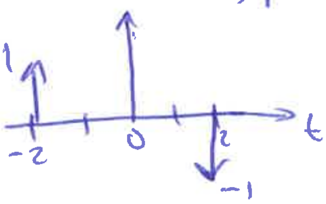


$$\frac{dx(t)}{dt} = 2\delta(t-1)-3\delta(t-2)+2\delta(t-4).$$



b) $x(t)= u(t+2)-u(t-2).$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t+2)-\delta(t-2)$$



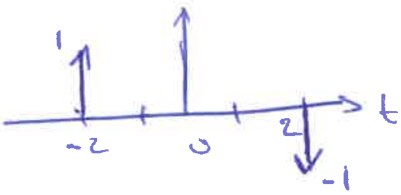
c) $x(t)= e^{j\pi t}u(t)$

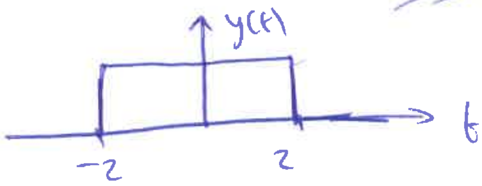
$$\frac{dx(t)}{dt} = \underset{e^{j\frac{\pi}{2}}}{j}\pi e^{j\pi t}u(t)+\delta(t)e^{j\pi t} = \pi e^{j(\pi t+\frac{\pi}{2})}u(t)+\delta(t)e^{j\pi t}.$$

P8 Calcular $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ para:

a) $x(t)= \delta(t+2)-\delta(t-2)$; $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau+2)\,d\tau - \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-2)\,d\tau$

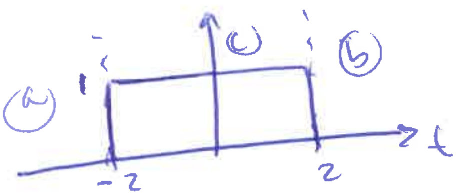
$= u(t+2)-u(t-2)$





b) $x(t)= u(t+2)-u(t-2)$

$y(t)=\int_{-\infty}^{t}(u(\tau+2)-u(\tau-2))\,d\tau =$

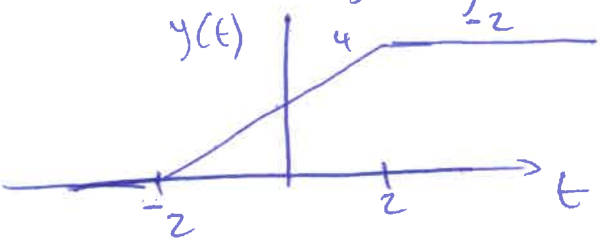


(a) $t<-2 \rightarrow y(t)=0$

(b) $t\geq 2 \rightarrow y(t)=\int_{-2}^{t} 1\,dt = 4$

(c) $-2\leq t<2 \rightarrow y(t)=\int_{-2}^{t} 1\,dt = t+2$

$y(t)=\begin{cases} 0, & t\leq -2 \\ t+2 & -2\leq t<2 \\ 4 & 2\leq t \end{cases}$



Nota: Alternativamente podemos expresar $y(t)$ como:

$$y(t) = (t+2)\,u(t+2) + (4-t+2)\,u(t-2) \quad (\text{por qué?})$$

c) $x(t) = e^{j\pi t}u(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{j\pi\tau}u(\tau)\,d\tau$$

$t<0: \; y(t) = \int_{-\infty}^{t} 0\,d\tau = 0$

$t\geq 0: \; y(t) = \int_{0}^{t} e^{j\pi\tau}\,d\tau = \frac{1}{j\pi}\left(e^{j\pi t}-1\right)$

Por lo tanto: $y(t) = \frac{1}{j\pi}\left(e^{j\pi t}-1\right)u(t)$

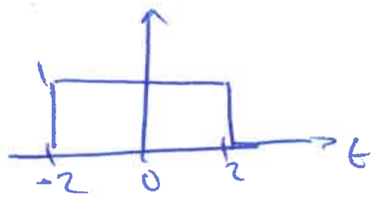
P9) $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

Sustituir directamente es complicado:

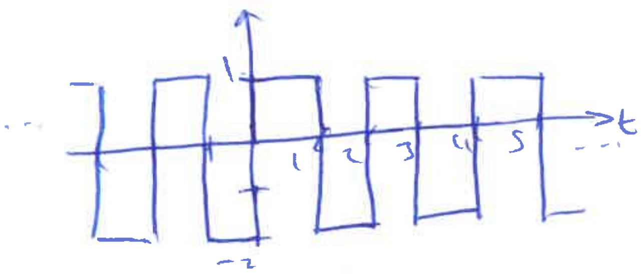
$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right|^2 dt$$

Pero recordando que $y(t) = u(t+2) - u(t-2)$:



$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt = \int_{-2}^{2} 1\,dt = 4 \,\text{J}$$

P10) $x(t) = \begin{cases} 1, & 0\leq t<1 \\ -2, & 1\leq t<2 \end{cases}$, periódica con $T=2$

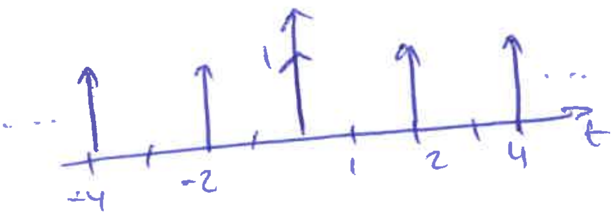


$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$$

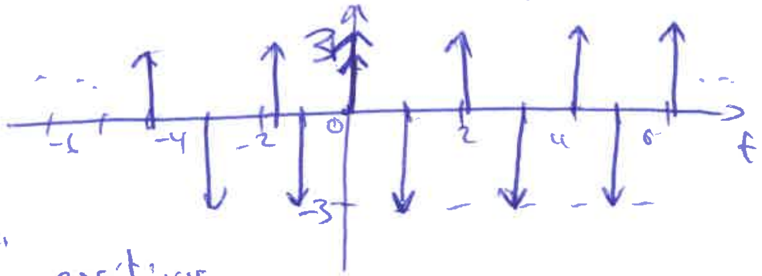
Encontrar A_1, t_1, A_2, t_2 para:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1\,g(t-t_1) + A_2\,g(t-t_2)$$

Representamos $g(t)$:



Si representamos $\frac{dx(t)}{dt}$

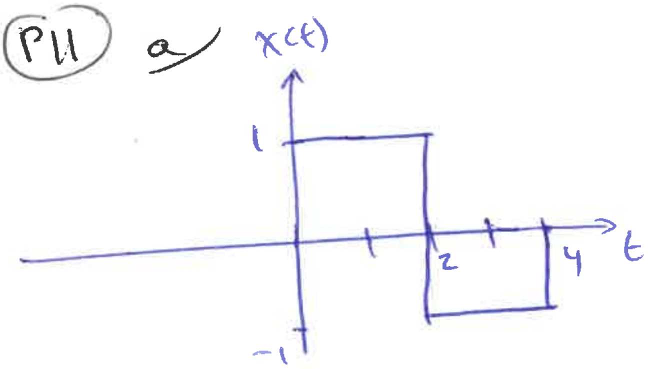


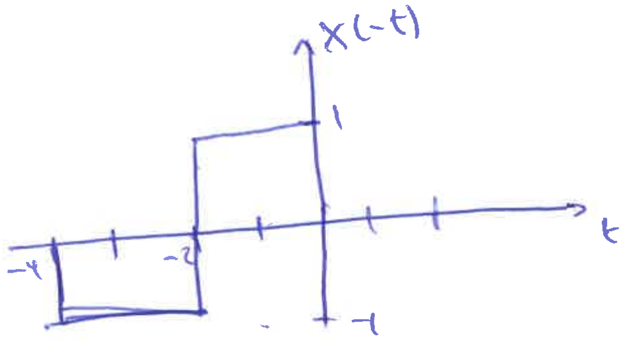
$A_1 = 3,\ t_1 = 0 \rightarrow$ para los "δ" positivos

$A_2 = -3,\ t_2 = 1$ para los "δ" negativos

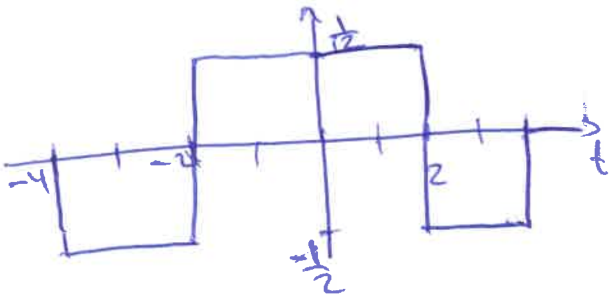
$$\frac{dx(t)}{dt} = 3\,g(t) - 3\,g(t-1)$$

P11 a)

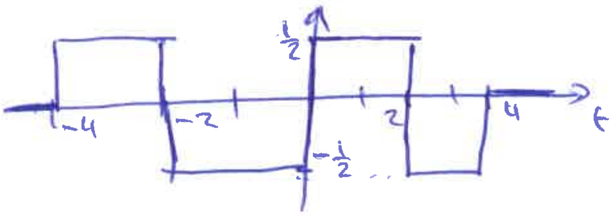




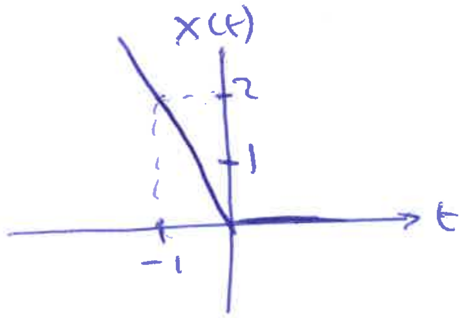
$x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$

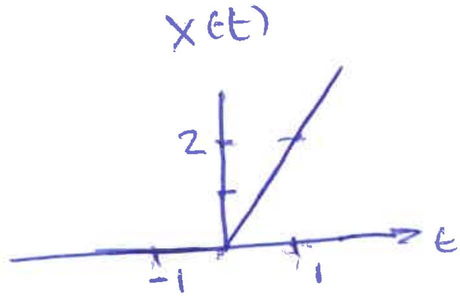


$x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

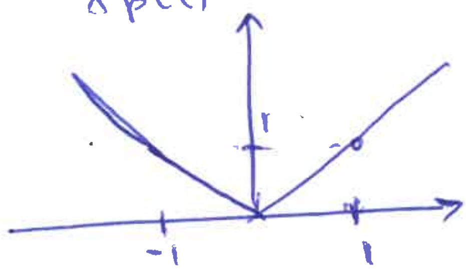


b)

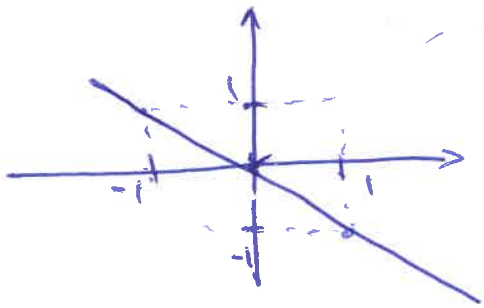




$x_p(t) =$



$x_i(t)$

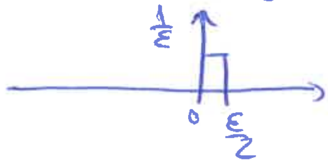


P12 Probar que $\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$.

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(u(t) - u(t-\varepsilon)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\,dt = 1$$

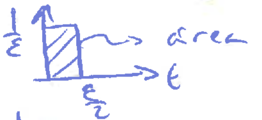
$$\delta_\varepsilon(2t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(u(t) - u(t-2\varepsilon)\right)$$

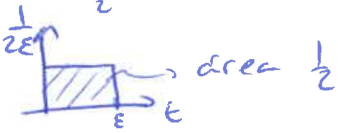


Área $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(2t)\,dt = \frac{1}{2}$

$$\delta(2t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(2t) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$$

Es lo mismo llevar al límite $\varepsilon \to 0$





P13 $\Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,y(\tau)\,d\tau$

a/ Relación entre $\Phi_{xy}(t)$ y $\Phi_{yx}(t)$?

$$\Phi_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\sigma)\,x(\sigma - t)\,d\sigma = \Phi_{xy}(-t)$$

cambio de variable: $\begin{cases} \tau \to \infty, & \sigma \to \infty \\ \tau \to -\infty, & \sigma \to -\infty \end{cases}$

$t + \tau = \sigma$

$\tau = \sigma - t$

$d\tau = d\sigma$

b/ Si $x(t) = x(t+T_0) \longrightarrow \Phi_{xx}(t)$ periódica?

$$\Phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

$$\Phi(t+T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(t+T_0+\tau)}_{\substack{\shortparallel \\ x(t+\tau) \text{ si } T=T_0}}\,x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \Phi_{xx}(t)$$

periódica con periodo T_0

c) Sabemos que $\Phi_{yx}(t) = \Phi_{xy}(-t)$

Por tanto: $\Phi_{xx}(t) = \Phi_{xx}(-t) \longrightarrow$ Simetría par

y la parte impar de $\Phi_{xx}(t) = 0$

P14 Demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2(t)\,dt$

Sabemos que: $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x_p(t)+x_i(t))^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2(t)\,dt +$$

$$+ \underbrace{2\int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)\,x_i(t)\,dt}_{I\ =0?}$$

$$I = \underline{\int_{-\infty}^{0} x_p(t)\,x_i(t)\,dt} + \int_{0}^{\infty} x_p(t)\,x_i(t)\,dt = \int_{\infty}^{0} x_p(-s)\,x_{im}(-s)\,(-ds) + \int_{0}^{\infty} x_p(t)\,x_i(t)\,dt$$

$s = -t \quad | \to t=0 \to s=0$

$ds = -dt \quad | \quad t \to -\infty \to s \to \infty$

$$= \int_{0}^{\infty} x_p(s)(-x_i(s))\,ds + \int_{0}^{\infty} x_p(t)\,x_i(t)\,dt = 0$$

P15 a) $x[n] = e^{j(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{8})} \longrightarrow$ periódica $N = \frac{2\pi}{\Omega} = 4$

$|x[n]| = 1$, $\measuredangle\{x[n]\} = x_j[n] = \frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{8}$;

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |x[k]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} 1^2 = 1\,W$$

$E_\infty = \infty \longrightarrow$ señal def. en potencia

P17 a) $x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{7} + 2\right)$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$; $\quad \cancel{N = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{7}} = \frac{7}{4}}$

Periódica si: $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{K}{N} \in \mathbb{Q} \rightarrow \frac{\frac{8\pi}{7}}{2\pi} = \frac{4}{7} = \frac{K}{N} \in \mathbb{Q}$

Periódica de periodo N.

b) $x[n] = e^{j7\pi n}$

$\omega_0 = 7\pi \rightarrow \frac{7\pi}{2\pi} = \frac{7}{2} \rightarrow$ Periódica con $N = 2$.

c) $x[n] = e^{-j(\frac{n}{8} - \pi)}$

$\omega_0 = \frac{1}{8} \longrightarrow \frac{\frac{1}{8}}{2\pi} = \frac{1}{16\pi} \neq \frac{K}{N} \in \mathbb{Q} \rightarrow$ no es periódica.

d) $x[n] = 1 + \underbrace{e^{j\frac{4\pi n}{7}}}_{A} + \underbrace{e^{j\frac{2\pi n}{5}}}_{B}$

A: $\frac{K}{N} = \frac{\frac{4\pi}{7}}{2\pi} = \frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$; B: $\frac{K}{N} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{2\pi} = \frac{1}{5}$

$N_A = 7$ $\qquad N_B = 5$

Periodo: $N = \text{m.c.m}\{7, 5\} = 35$

e) $x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}(n+\frac{1}{2})}$: $\omega_0 = \frac{2\pi K}{N}$, $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{K}{N} = \frac{\frac{3}{5}}{2\pi} = \frac{3}{10\pi} \notin \mathbb{Q}$

No es periódica.

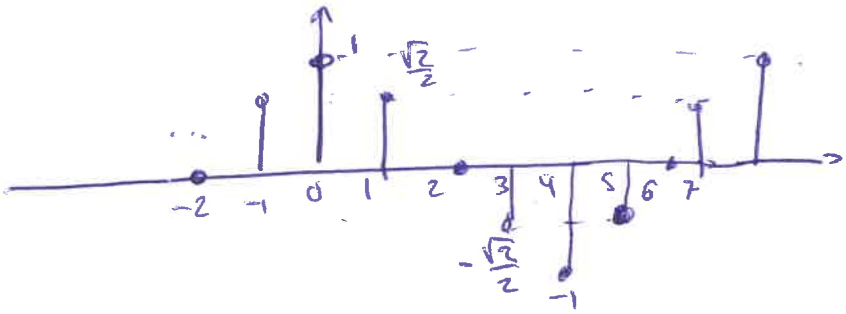
f) $x[n] = 3e^{j\frac{3\pi(n+\frac{1}{2})}{5}}$ $\quad \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\frac{3\pi}{5}}{2\pi} = \frac{3}{10} \in \mathbb{Q} \rightarrow$ periódica con $N = 10$

b) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \rightarrow N = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi K}{N}}$$

$$\frac{K}{N} = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8} \in \mathbb{Q}$$

Señal positiva que toma valores positivos y negativos:



Comprobamos si es periódica: $\frac{w_0}{2\pi} = \frac{K}{N} \in \mathbb{Q} \rightarrow$ ~~N=~~ $w_0 = \frac{K\,2\pi}{N}$ $\mathbb{Z}$

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8} = \frac{K}{N} \in \mathbb{Q} \rightarrow \text{Sí que es periódica.}$$

Alternativa: $N = \frac{2\pi}{w_0} \in \mathbb{Z} \rightarrow N = 8$ ✓

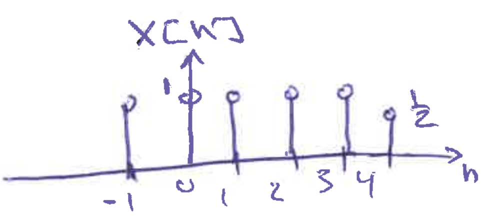
~~cos~~ $|x[n]| = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & \text{si } (-2 \pm KN) \leq n \leq (2 \pm KN) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & \text{si } (2 \pm KN) \leq n < (6 \pm KN) \end{cases}$ con $K \in \mathbb{Z}$

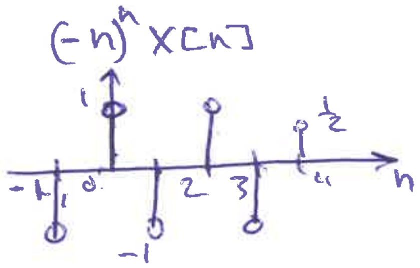
$$\measuredangle\{x[n]\} = \begin{cases} 0 & \text{si } (-2 \pm KN) \leq n \leq (2 \pm KN) \\ \pi & \text{si } (2 \pm KN) < n < (6 \pm KN) \end{cases}$$

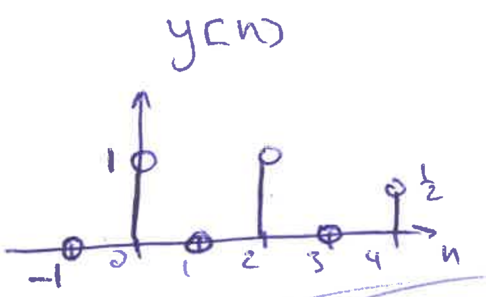
$$P_\infty = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{7} |x[n]|^2 = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \cdot 4 = \underline{2\ W}$$

$E_\infty = \infty \rightarrow$ señal def. en pot.

P16 Dado $x[n] = \sum_{k=-1}^{3} \delta[n-k] + \frac{1}{2}\delta[n-4]$, dibujar $y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$



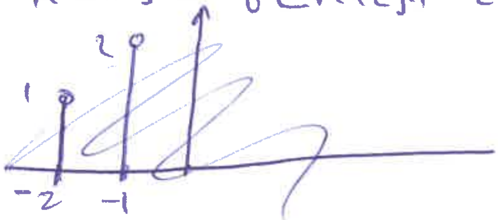


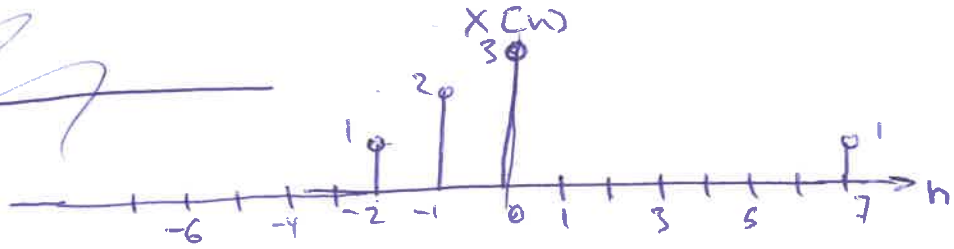


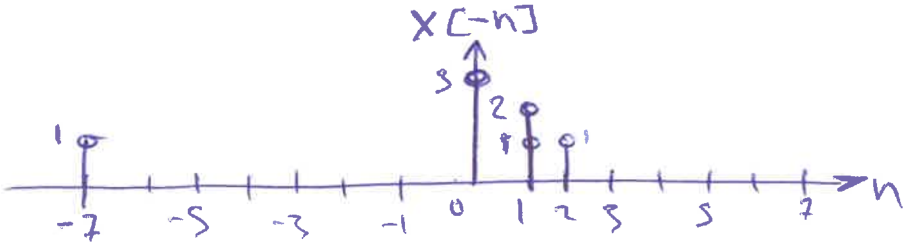
$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

P18 Calcule y represente la parte par e impar de

$$x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n] + \delta[n-7]$$

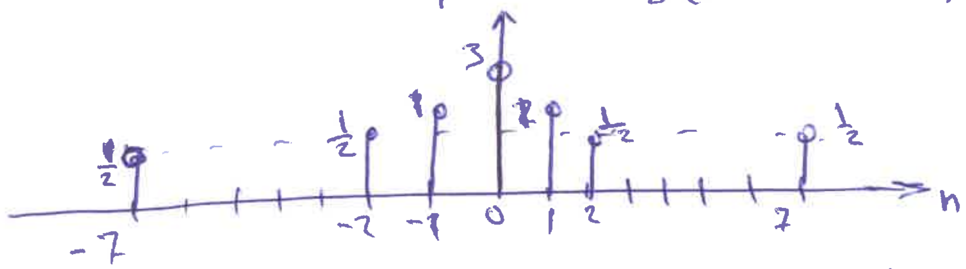




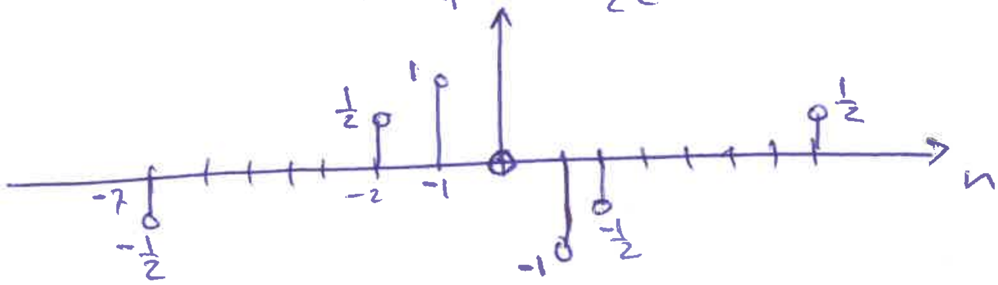


$$x_{par}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$$

~~$x_{par}[n] = \frac{1}{2}\delta[n-7]$~~



$$x_{imp}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$



PROBLEMAS TEMA 2: Sistemas en el dominio del tiempo

Problema 1 (*)

Considere un sistema de tiempo continuo, con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, relacionadas mediante $y(t) = x\,(sen(t))$.

a) ¿Es el sistema causal?

b) ¿Es el sistema lineal?

[Sol: (a) No. (b) Si.]

Problema 2 (*)

Determine (argumentando la respuesta) qué propiedades (memoria, invarianza temporal, linealidad, causalidad, estable) cumplen los siguientes sistemas de tiempo continuo:

a) $y(t) = x(t-2) + x(t+2)$.

b) $y(t) = x(t) \cdot cos(3t)$.

c) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$.

d) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \end{cases}$

e) $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$

f) $y(t) = x(t/3)$.

g) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

[Sol: (1) Lineal, estable. (2) Sin memoria, lineal, causal, estable. (3) Lineal. (4) Lineal, causal, estable.
(5) invariant, causal, estable. (6) Lineal, estable. (7) Invariante, lineal.]

Problema 3 (*)

Calcular y dibujar la convolución de las siguientes señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

Problema 4 (*)

Sean $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$ y $h(t) = e^{-3t}u(t)$.

a) Calcular $y(t) = x(t) * h(t)$.

b) Calcular $g(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right) * h(t)$.

c) ¿Qué relación hay entre $g(t)$ y $y(t)$?.

Problema 5 (*)

Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. En caso afirmativo, construya el sistema inverso. En caso negativo, encuentre un contraejemplo, dado por dos señales de entrada al sistema que den la misma salida.

a) $y(t) = x(t-4)$.

b) $y(t) = cos\,(x(t))$.

c) $y(t) = tx(t)$.

d) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

e) $y(t) = x(t)x(t-1)$.

f) $y(t) = x(1-t)$.

g) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$.

h) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

i) $y(t) = x(2t)$.

j) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} sin(\tau)x(\tau)d\tau$.

[Sol: (1) Invertible, $y(t) = x(t+4)$. (2) No invertible, $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = x(t) + 2\pi$. (3) No invertible, $x_1(t) = \delta(t)$ y $x_2(t) = 2\delta(t)$. (4) Invertible, $y(t) = dx(t)/dt$. (5) No invertible, $x_1(t) = \delta(t)$ y $x_2(t) = \delta(t-2)$. (6) Invertible. (7) Invertible, $y(t) = x(t) + dx(t)/dt$. (8) No invertible. (9) Invertible, $y(t) = x(t/2)$. (10) No invertible.]

Problema 6

Considere un SLIT cuya salida está relacionada con la entrada mediante:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

a) ¿Cuál es la respuesta al impulso $h(t)$ de este sistema?

b) ¿Cuál es la salida del sistema cuando la entrada es $x(t) = u(t+1) - u(t-2)$?

[Sol: (1) $h(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$s. (2) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1 - e^{-(t-1)}, & 1 \le t \le 4 \\ e^{-(t-4)} - e^{-(t-1)}, & t > 4 \end{cases}$]

Problema 7

Conteste razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) Considere un sistema invariante en el tiempo, con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Demuestre que si $x(t)$ es periódica con periodo T, entonces, la salida $y(t)$ es también periódica con periodo T.

b) Dé un ejemplo de un sistema invariante en el tiempo, y una señal de entrada $x(t)$ no periódica tal que la correspondiente salida $y(t)$ sea periódica.

[Sol: (2) $x(t) = t, y(t) = sen(x(t))$]

Problema 8 (*)

Conteste razonadamente las siguientes cuestiones:

a) Demuestre que la causalidad para un sistema lineal continuo es equivalente a la siguiente información: *Para cualquier instante temporal* t_0*, y cualquier entrada* $x(t)$*, tales que* $x(t) = 0$ *para* $t < t_0$*, la salida correspondiente* $y(t)$ *es también cero para* $t < t_0$.

b) Encuentre un sistema no lineal que satisfaga la condición anterior, pero que no sea causal.

c) Encuentre un sistema no lineal que sea causal, pero que no satisfaga la condición.

[Sol: (2)Por ej. $y(t) = x(t)x(t+1)$. (3)Por ej. $y(t) = x(t) + 1$.]

Problema 10

Suponga que $x(t) = u(t) - u(t-1)$, y que $h(t) = x(t/\alpha)$, donde $0 < \alpha \leq 1$.

a) Determine y dibuje $y(t) = x(t) * h(t)$.

b) Si $dy(t)/dt$ contiene sólo tres discontinuidades, ¿cuál es el valor de α?

[Sol: (1) $y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \alpha \\ \alpha, & \alpha \leq t < 1 \\ 1+\alpha-t, & 1 \leq t < (1+\alpha) \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$. (2) $\alpha = 1$.]

Problema 11 (*)

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique la respuesta.

a) Si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un SLIT, y $h(t)$ es periódica y diferente de cero, el sistema es inestable.

b) El inverso de un SLIT causal es siempre causal.

c) Si $|h(t)| \leq K$ para todo t, donde K es una constante real, entonces el SLIT cuya respuesta al impulso sea $h(t)$ será estable.

d) Si un SLIT tiene una respuesta al impulso $h(t)$ de duración finita, el sistema es estable.

e) Si un SLIT es causal, es estable.

f) La conexión en serie de un SLIT no causal con uno causal es necesariamente no causal.

g) Un SLIT es estable si, y sólo si, su respuesta al escalón $s(t)$ es absolutamente integrable, esto es, $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|dt < \infty$

h) Un SLIT es causal si, y solo si, su respuesta al escalón $s(t)$ es cero para $t < 0$.

[Sol: (1) V. (2) F. (3) F. (4) V. (5) F. (6) F. (7) F. (8) V.]

Problema 12

Sea un SLIT con respuesta impulsiva $h(t) = \delta(t - T_1) - \delta(t + T_1)$, al que se introduce la entrada:

$$x(t) = \begin{cases} T_0 + t, & -2T_0 \leq t < -T_0 \\ |t|, & -T_0 \leq t < T_0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

donde $T_0 > 0$. Dibujar las señales $x(t)$ y $h(t)$, y calcular gráficamente la salida del sistema. Considerar los casos $T_1 = 2T_0$ y $T_1 = T_0/2$.

Problema 13

Sean las señales reales $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{t}u(-t)$, y $z(t) = e^{-3t}u(t)$, calcular las siguientes convoluciones:

a) $r(t) = x(t) * x(t)$.

b) $v(t) = y(t) * z(t)$.

Problema 14

Para cada uno de los siguientes pares de señales, calcular la convolución para encontrar la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ de un SLIT cuya respuesta al impulso es $h(t)$.

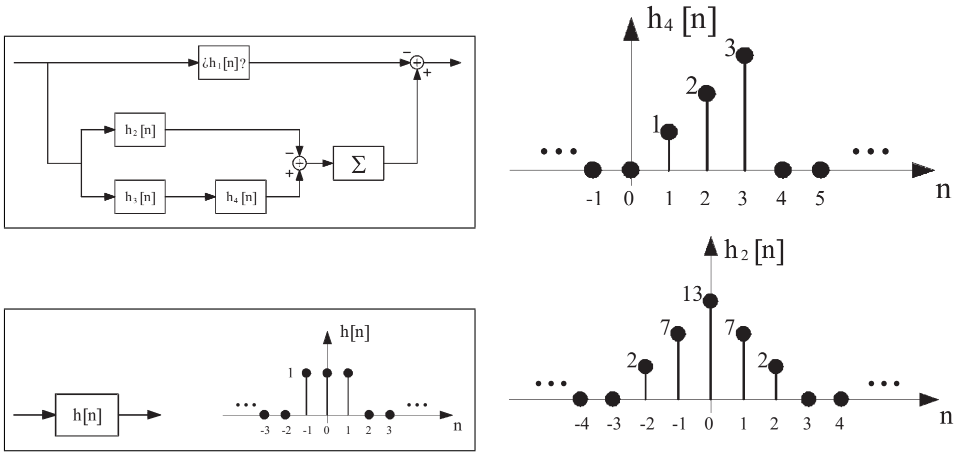
a) $x(t) = e^{-3t}u(t)$, con $h(t) = u(t - 1)$.

b) $x(t) = u(t) - 2u(t - 2) + u(t + 5)$, con $h(t) = e^{2t}u(1 - t)$.

c) $h(t) = u(t) - u(t - 1)$, con $\begin{cases} e^{t}, & t < 0 \\ e^{5t} - 2e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$

Problema 15 (*)

Considere la siguiente interconexión de Sistemas LTI, donde se sabe que $h_3[n] = h_4[-n]$. Determinar el valor de $h_1[n]$ para que la interconexión anterior pueda sustituirse por un único sistema $h[n]$ como se muestra en la figura.



Problema 16

Dada la respuesta al impulso, $h[n]$, de un sistema LTI, determine si el sistema es, además, sin memoria, causal, estable e invertible, en los siguientes casos:

a) $h[n] = 3 \cdot \delta[n]$.

b) $h[n] = u[n]$.

Problema 17

Considere las respuestas al impulso de los siguientes sistemas LTI discretos. Determine si cada sistema es causal y/o estable.

a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

b) $h[n] = (0'8)^n \cdot u[n+2]$

c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

Problema 18 (*)

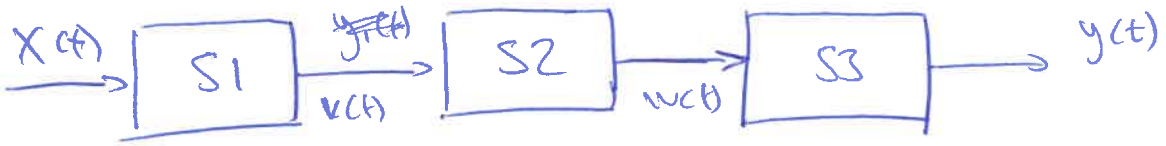
Considere los sistemas $(S_1) y[n] = x[n+2]$ y $(S_2) y[n] = x[-n]$.

- Obtenga la respuesta de cada uno de ellos cuando la entrada es $x[n] = 3 \cdot \delta[n+1] - \delta[n] + 2 \cdot \delta[n-1]$.
- Como S_1 es un sistema LTI, obtenga la salida por dos caminos diferentes: a partir de la propia definición del sistema, y utilizando la convolución.
- Compruebe que en el caso del sistema S_2 (que *no* es LTI) el segundo camino no es correcto.

Cuestiones Tema 2

C1 (S1) $y_1(t) = x_1^2(t)$; (S2) $y_2(t) = e^{x_2(t)}$; (S3) $y_3(t) = x_3(t-1)$

Asociación en serie:



$v(t) = x^2(t)$

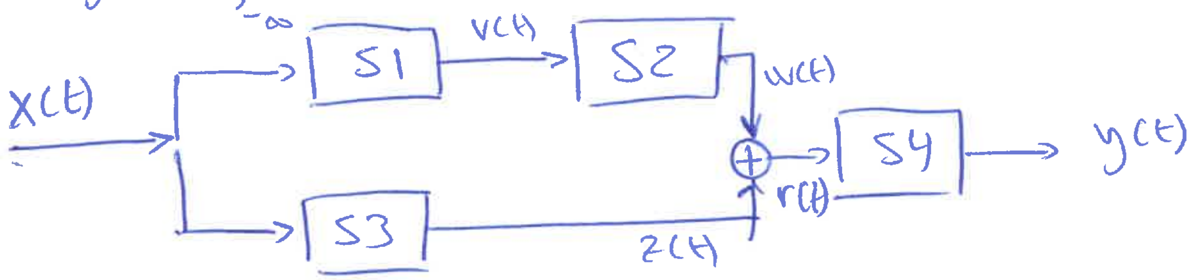
$w(t) = e^{v(t)} = e^{2x^2(t)}$

$$\boxed{y(t) = w(t-1) = e^{2x^2(t-1)}}$$

Ec. ~~total~~ del sistema total

C2 (S1) $y_1(t) = x_1^2(t)$ (S2) $y_2(t) = x_2(t+3)$ (S3) $y_3(t) = 2x_3(t)$

(S4) $y_4(t) = \int_{-\infty}^{t} x_4(\tau)\, d\tau$



$v(t) = x_1^2(t)$;

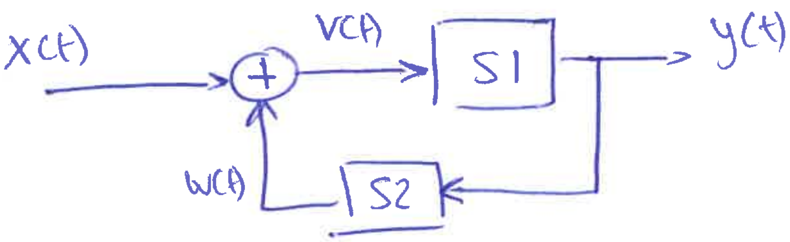
$w(t) = v(t+3) = x^2(t+3)$;

$z(t) = 2x(t)$

$r(t) = w(t) + z(t) = x^2(t+3) + 2x(t)$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} r(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} x^2(\tau+3) + 2x(\tau)\, d\tau}$$

C3 * (S1) $y_1(t)=x_1^2(t)$ (S2) $y_2(t)=x_2(t-1)$



$$v(t)=x(t)+w(t)=x(t)+y(t-1)$$

$$w(t)=y(t-1)$$

$$y(t)=\cancel{x^2(t)}\ v^2(t)=\left(x(t)+y(t-1)\right)^2$$

instante actual

C4 a) $y_1(t)=t\cdot x(t)$ $\rightarrow$ Sin memoria: la salida en "t" solo solo depende de "t".

b) $y_2(t)=x(t+4)$ $\rightarrow$ Con memoria, la salida en "t" depende de la entrada "t+4".

c) $y_3(t)=\sum_{k=-3}^{0} x(t-k)$ $\rightarrow$ Con memoria: la salida en "t" depende de "t-3", "t-2", y "t-1".

d) $y_4(t)=x(-t)$ $\rightarrow$ Con memoria; por ejemplo la salida en "t=2" depende de "t=-2".

e) * $y_5(t)=\cos(3t)\,x(t)$ $\rightarrow$ Sin memoria: la salida en "t" solo depende de "t".

f) * $y_6(t)=x(t)+0'5\,y(t-2)$ $\longrightarrow$ Con memoria: la salida en "t" depende de la salida en "t-2".

(C5) * a) $y_1[n] = n \cdot x[n]$ → sin memoria

(C25)

* b) $y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ → con memoria

* c) $y_3[n] = x[-n]$ → con memoria

(C6) * a) $y_1(t) = x(t-4)$ → sistema retardador, por lo que no destruye información, por lo que es invertible.

(C5)

Sistema inverso: $\boxed{z(t) = y(t+4).}$

b) $y_2(t) = \cos(x(t))$ → ¿se destruye información?

El coseno es periódico, y presenta ambigüedad en ángulos separados 2π radianes.

~~$x_1(t)=$~~ Busco 2 señales distintas que den la misma salida como contraejemplo:

$x_1(t) = 0 \quad \forall t \rightarrow y_1(t) = 1$
$x_2(t) = 2\pi \quad \forall t \rightarrow y_2(t) = 1$ } No invertible

c) $y_3(t) = t \cdot x(t)$ → Al multiplicar por 't' se destruye informac. en $t=0$.

Contraejemplo:

$x_1(t) = \delta(t) \rightarrow y_1(t) = 0$
$x_2(t) = 2\delta(t) \rightarrow y_2(t) = 0$ } No es invertible

d) $y_4(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$. La derivada destruye información al derivar constantes.

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = 2 \longrightarrow y_1(t) = 0 \\ x_2(t) = -3 \longrightarrow y_2(t) = 0 \end{array}\right\} \underline{\text{No invertible}}$$

[Nota: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ sí es invertible]

(7) *a) $y_1[n] = x^2[n]$

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] = 1 \longrightarrow y_1[n] = 1 \\ x_2[n] = -1 \longrightarrow y_2[n] = 1 \end{array}\right\} \underline{\text{No invertible}}$$

b) $y_2[n] = n \cdot x[n]$

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] = \delta[n] \Longrightarrow 0 \\ x_2[n] = 3\delta[n] \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \underline{\text{No invertible}}$$

c) $y_3[n] = \begin{cases} x[n-1] & ; \ n \geq 1 \\ 0 & ; \ n = 0 \\ x[n] & ; \ n \leq -1 \end{cases}$

Ojo! <u>No se destruye información</u>. El sistema da un corte en $n=0$ pero desplaza la posición 1 a la derecha.

El sistema inverso:

$$z[n] = \begin{cases} y[n+1] & ; \ n \geq 1 \\ y[n] & ; \ n \leq -1 \end{cases} \qquad \underline{\text{Invertible}}$$

Prueba:

$$z[n] = \begin{cases} y[n+1] = x[n-1+1] = x[n] & \text{si } n > 0 \\ z[0] = y[1] = x[0] & \text{si } n = 0 \\ y[n] = x[n] & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

(C8) (C6) a) $y_1(t) = x(t)\cos(t+1) \rightarrow$ Sist. causal. La salida de cada instante t no depende del futuro.

[nótese que $\cos(t+1)$ es un factor multiplicativo y no depende del ~~futuro de x(t)]~~ la salida ni de la entrada]

b) $y_2(t) = Ax(t) \longrightarrow$ Sist. causal. La salida no depende del futuro.

c) $y_3(t) = \text{Par}\{x(t+1)\} = \frac{1}{2}\left(x(t+1) + x(-t-1)\right)$

Sist. no causal. La salida depende del futuro.

d) $y_4(t) = \int_{-\infty}^{t+2} x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau + \int_{t}^{t+2} x(\tau)\,d\tau \rightarrow$ no causal

(C9) a) $y_1[n] = x[-n] \rightarrow$ sistema no causal. Usa el futuro en algunos casos: $y[-2] = x[2]$

b) $y_2[n] = x[n] - x[n-2]$

Solo usa presente y pasado $\rightarrow$ es causal

c) $y_3[n] = x[4n+1] \rightarrow$ usa el futuro: $y_3[1] = x[5]$.

no causal

d) $y_4[n] = \text{Par}\{x[n-1]\} = \frac{1}{2}\left(x[n-1] + x[-(n-1)]\right) = \frac{1}{2}\left(x[n-1] + x[-n+1]\right)$

Utiliza el futuro: $y[-1] = \frac{1}{2}\left(x[-2] + x[2]\right)$

No causal

C10 a) $y_1(t) = x^2(t)$

Si $|x(t)| \leq K_x \rightarrow |y_1(t)| = |x^2(t)| \leq K_x^2 = K_y \longrightarrow$ es estable

b) $y_2(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$. Buscar ejemplo que demuestre que es inestable:

$x(t) = u(t) \longrightarrow y_2(t) = \delta(t) \rightarrow$ no está acotado en $t=0$ $(\delta(0) = \infty)$.

No es estable

c) $y_3(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

Ejemplo de no estabilidad:

$x(t) = K \rightarrow y_3(t) = \int_{-\infty}^{t} K\, d\tau = \infty$ Sistema no estable

Otro ejemplo:

$x(t) = u(t) \rightarrow y_3(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = t \cdot u(t)$.

d) $y_4(t) = t \cdot x(t)$. $\rightarrow$ multiplica por t que no está acotado

Sist. inestable

e) $y_5(t) = x(-t)$.

$|x(t)| \leq K_x \rightarrow |y_5(t)| = |x(-t)| \leq \boxed{K_x = K_y} \longrightarrow$ Estable

f) $y_6(t) = x(t-2) + 3x(t+2)$

$|x(t)| \leq K_x \Rightarrow |y(t)| = |x(t-2) + 3x(t+2)| \leq \underbrace{|x(t-2)|}_{\leq K_x} + 3\underbrace{|x(t+2)|}_{\leq K_x}$

$\leq \boxed{4K_x = K_y}$ Estable

g) $y_7(t) = \text{Impar}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$

$|x(t)| \leq K_x \longrightarrow |y_7(t)| \leq |\frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]| \leq \frac{1}{2}[\underbrace{|x(t)|}_{\leq K_x} + \underbrace{|x(-t)|}_{\leq K_x}]$

$\leq \boxed{K_x = K_y}$ Estable

h) $y_8(t) = y_8(t-1) + x(t)$.

$x(t) = 1$ ~~u(t)~~ ; $y_8(t) = y_8(t-1) + x(t) = y_8(t-2) + 2x(t) =$

$= y_8(t-3) + 3x(t) = \ldots = y_8(t-\infty) + \infty x(t)$.

C11) a) * $y_1[n] = e^{x[n]}$.

$|x[n]| \leq K_x \longrightarrow |y_1[n]| = |e^{x[n]}| \leq e^{|x[n]|} \leq \boxed{e^{K_x} = K_y}$

Estable

b) $y_2[n] = u[n]\, x[n] + y_2[n-1]$. $\longrightarrow$ no es estable.

~~$y_2[n]$~~ Si $x[n] = 1 \ \forall n$, $y_2[n] \longrightarrow \infty$ a medida que $n \to \infty$

C12) a) * $y_1(t) = \cos[x(t)]$

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \cos[x(t)]$;

$y_1(t-t_0) = \cos[x_1(t-t_0)]$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \longrightarrow y_2(t) = \cos[x_2(t-t_0)] = y_1(t-t_0)$ Invariante

b) * $y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau$; $y_2(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\tau)\, d\tau$

$\tau - t_0 = \sigma$
$d\tau = d\sigma$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \longrightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau - t_0)\, d\tau = \int_{-\infty}^{2t-t_0} x_1(\sigma)\, d\sigma \neq y_1(t-t_0)$

Variante

c) * $y_3(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{x_1(t+\Delta) - x_1(t)}{\Delta}$

$y_3(t-t_0) = \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{x_1(t-t_0+\Delta) - x_1(t-t_0)}{\Delta}$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{x(t-t_0+\Delta) - x(t-t_0)}{\Delta}$

$y_1(t-t_0) = y_2(t) \rightarrow$ Invariante temporal

d) $y[n] = n + x[n]$

$x_1[n] \rightarrow y_1[n]; \quad y_1[n-n_0] = n - n_0 + x[n-n_0]$

$\neq$ Variante

$x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = n + x[n-n_0]$

e) $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = \sin(x[n]) \rightarrow y_1[n-n_0] = \sin(x[n-n_0])$

$x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = \sin(x[n-n_0])$ Invariante

f) * $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = n \cdot x[n] \rightarrow y_1[n-n_0] = (n-n_0)\, x[n-n_0]$

$x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = n\, x[n-n_0] \neq y_1[n-n_0]$

Variante

C13 a) $y_1(t) = t \cdot x(t)$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t\, x_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = t\, x_2(t)$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow y_3(t) = a t\, x_1(t) + b t\, x_2(t) = a y_1(t) + b y_2(t)$

Lineal

(C13) b/ $y_2(t) = x^2(t)$. (C9)

$x_1(t) \to y_1(t) = x_1^2(t)$

$x_2(t) \to y_2(t) = x_2^2(t)$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \to y_3(t) = x_3^2(t) = (a x_1(t) + b x_2(t))^2 =$

$= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + ab\, x_1(t) x_2(t) \neq a y_1(t) + b y_2(t)$.

No es lineal

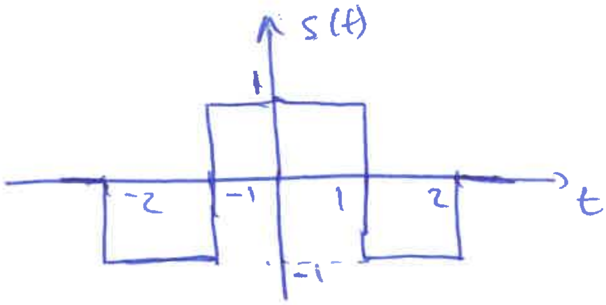
c/ $y(t) = 2x(t) + 3$.

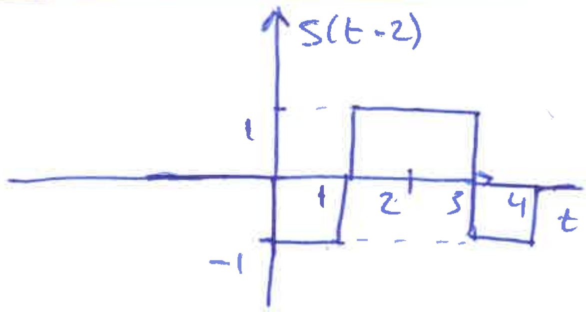
$x_1(t) \to y_1(t) = 2x_1(t) + 3$

$x_2(t) \to y_2(t) = 2x_2(t) + 3$

$x(t) = 0 \to y(t) = 3 \ \forall$ ∴ por tanto, como $y(t) \neq 0$ para $x(t) = 0$, no puede ser un sist. lineal

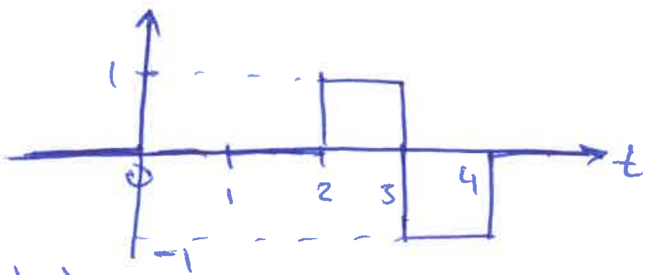
(C14) (C10)





a/ $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-2) & t \geq 0 \end{cases}$

La respuesta para la señal s(t) será:



Reescribimos:

$$\boxed{y(t) = (x(t) + x(t-2))\, u(t)}$$

Propiedades:

- Sistema con memoria → utiliza entradas del pasado.
- Sist. causal → no usa el futuro
- No invertible → destruye información en $t < 0$:

$x_1(t) = \delta(t+1) \to y_1(t) = 0$

$x_2(t) = \delta(t+3) \to y_2(t) = 0$

• Linealidad: $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = (x_1(t) + x_1(t-2))u(t)$
$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = (x_2(t) + x_2(t-2))u(t)$.

$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow y_3(t) = (x_3(t) + x_3(t-2))u(t)$

$y_3(t) = [ax_1(t) + bx_2(t) + ax_1(t-2) + bx_2(t-2)]u(t) = ay_1(t) + by_2(t)$.

Es lineal

• Invarianza: $x_1(t) \rightarrow y_1(t) \rightarrow y_1(t-t_0) = [x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2)]u(t-t_0)$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = [x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2)]u(t)$

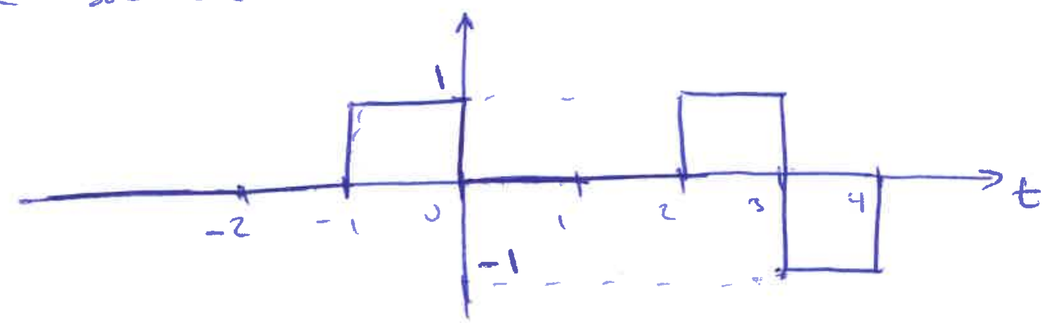
Es variante

• Estabilidad: es estable.

Si $|x(t)| \leq K_x \rightarrow y(t) = |(x(t) + x(t-2))u(t)| \leq |x(t)| + |x(t)| \leq$
$\leq 2K_x = K_y$.

b) $y(t) = \begin{cases} 0 ; & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) ; & x(t) \geq 0 \end{cases}$

La salida a $s(t)$



Propiedades: reescribimos como $y(t) = [x(t) + x(t-2)]\,u(x(t))$

• Sistema con memoria y causal → solo depende del presente y del pasado

• No invertible: $x_1(t) = -1 \rightarrow y_1(t) = 0$
$x_2(t) = -2 \rightarrow y_2(t) = 0$

• Linealidad:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0 & , x_1(t) < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & , x_1(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0, & x_2(t) < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2); & x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = \left\{\begin{matrix} 0; & x_3(t) < 0 \\ x_3(t) + x_3(t-2) & \text{si } x_3(t) \geq 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 0, & a x_1(t) + b x_2(t) < 0 \\ a x_1(t) + b x_2(t) + a x_1(t-2) + b x_2(t-2), & a x_1(t) + b x_2(t) \geq 0 \end{matrix}\right\} \neq a y_1(t) + b y_2(t)$$

No lineal

• Invarianza:

$$\cancel{y(t)}\; y(t-t_0) = \begin{cases} 0; & x_1(t-t_0) < 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2); & x_1(t-t_0) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \longrightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0; & x_1(t-t_0) < 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2); & x_1(t-t_0) \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1(t-t_0) = y_2(t) \longrightarrow \text{Invariante}$$

• También es estable por la misma causa que el sist. anterior

C16 (E12) Se sabe:

(1) $x_1(t) = \delta(t) \rightarrow y_1(t) = 4u(t)$

(2) $x_2(t) = u(t-1) \rightarrow y_2(t) = t\cdot\sin(4t)u(t)$.

(3) $x_3(t) = \delta(t-4) \rightarrow y_3(t) = 4\delta(t-2)$

(4) $x_4(t) = \delta(t) + \delta(t-4) \rightarrow y_4(t) = 4u(t)$.

• <u>Tiene memoria</u>: en (3), ~~el valor de~~ la respuesta al impulso en $t=4$ depende de $t=2$. (además, después vemos que no es causal y todos los no causales tienen memoria.

• <u>Causalidad</u>: por (3), <u>no</u> puede ser <u>causal</u>, y por (1) no puede ser anticausal → <u>no causal</u>

• <u>Invertibilidad</u>: (1) y (4) dan la misma salida → <u>no es invertible.</u>

• <u>Estabilidad</u>: en (2) entradas acotadas producen salidas no acotadas → <u>no es estable</u>

• <u>Linealidad</u>: $x_4(t) = x_1(t) + x_3(t)$ pero $y_4(t) \neq y_1(t) + y_3(t)$

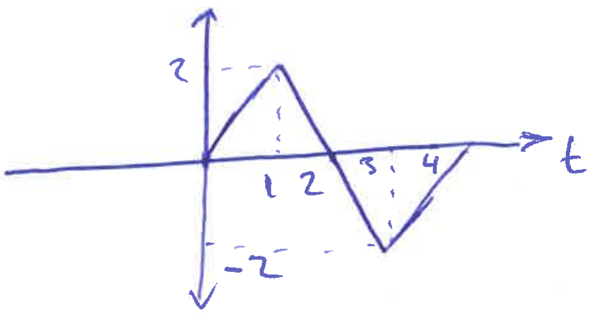
<u>No es lineal.</u>

• <u>Invarianza</u>: $x_3(t) = x_1(t-t_0)$ pero $y_3(t) \neq y_1(t-t_0)$ → <u>Variante</u>

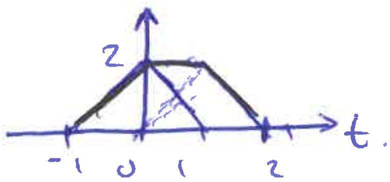
C17

(C13)

a) Respuesta a $x_2(t) = x_1(t) \cancel{*} - x_1(t-2) \longrightarrow y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$



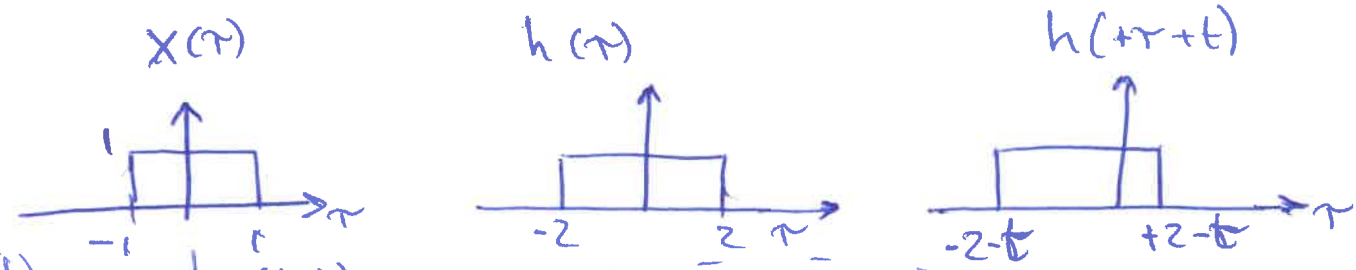
b) Respuesta a $x_3(t) = x_1(t+1) + x_1(t) \longrightarrow y_3(t) = y_1(t+1) + y_1(t)$

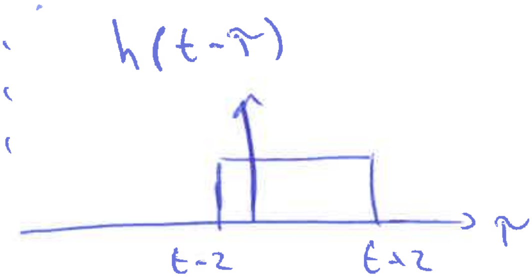


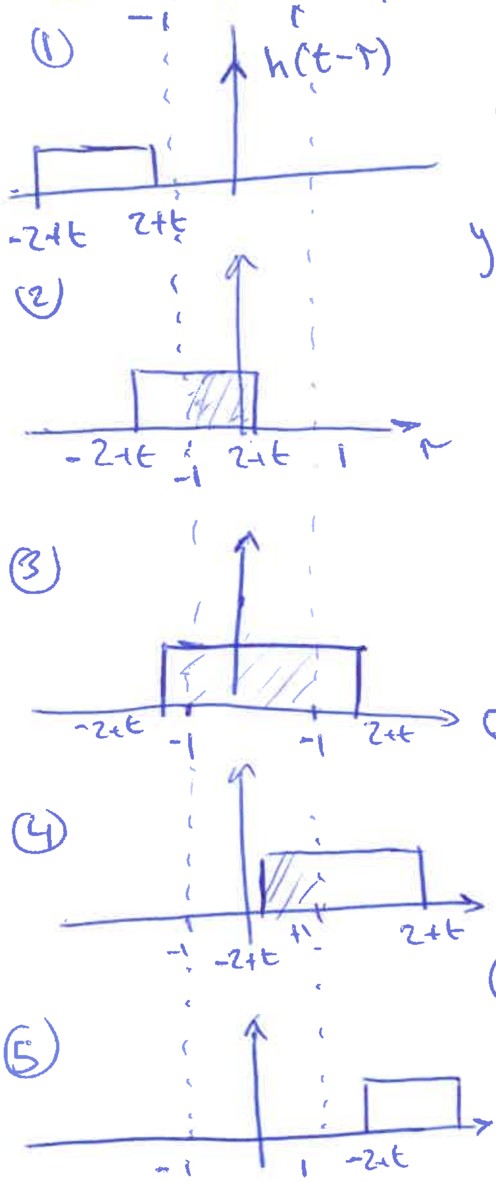
C18

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

* a (14) Conv. (c) y (d).







① $2+t < -1 \rightarrow \underline{t < -3}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$$

② $2+t > -1 \rightarrow t > -3$

$+2+t < 1 \rightarrow t < -1$

$\underline{-3 < t < -1}$

$$y(t) = \int_{-1}^{2+t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{2+t} 1\, d\tau = [\tau]_{-1}^{2+t} = t+3$$

③ $\left.\begin{array}{l} 2+t > -1 \\ t-2 < -1 \end{array}\right\}$ $\underline{-1 < t < 1}$

$$y(t) = \int_{-1}^{1} 1\, d\tau = 2$$

④ $\left.\begin{array}{l} -2+t > -1 \\ -2+t < 1 \end{array}\right\}$ $\underline{1 < t < 3}$

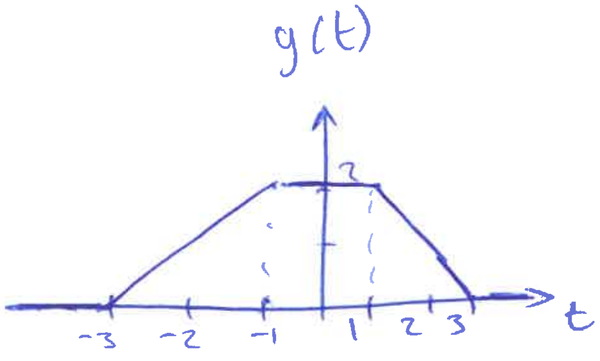
$$y(t) = \int_{-2+t}^{1} 1\, d\tau = [\tau]_{-2+t}^{1} = -t+3$$

⑤ $-2+t > 1 \rightarrow \underline{t > 3}$

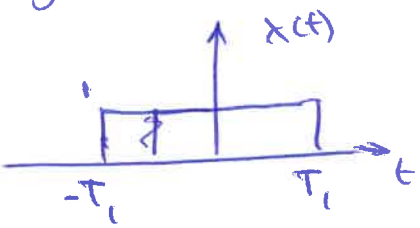
$$y(t) = \int_{t}^{\infty} 0\, d\tau = 0$$

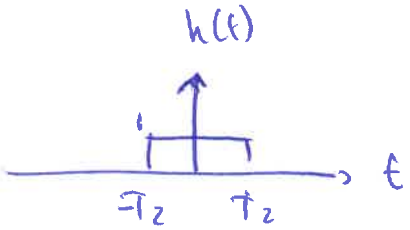
Agrupando:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -3 \\ t+3 & \text{si } -3 < t < -1 \\ 2 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -t+3 & \text{si } 1 < t < 3 \\ 0 & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

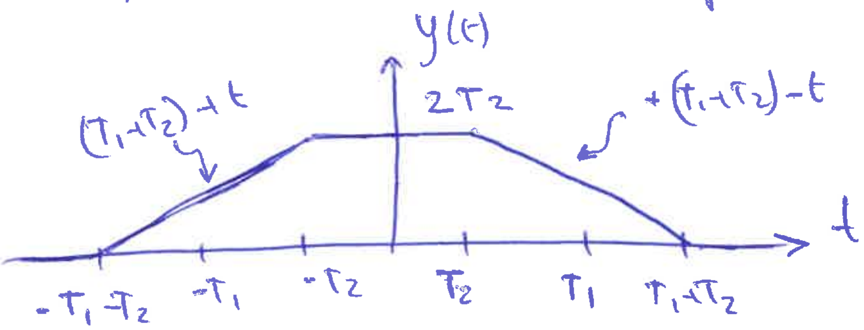


b) $y(t) = x(t) * h(t)$

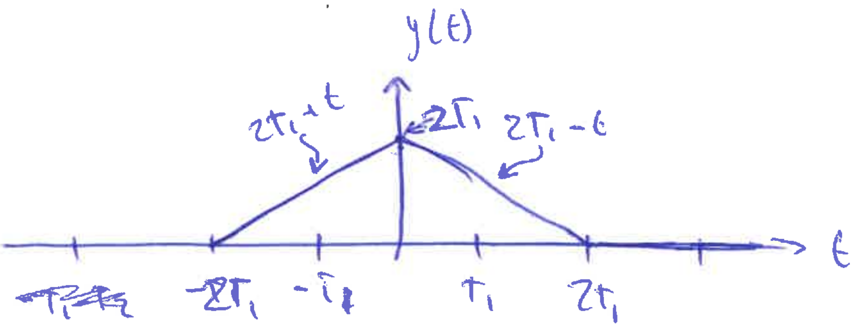




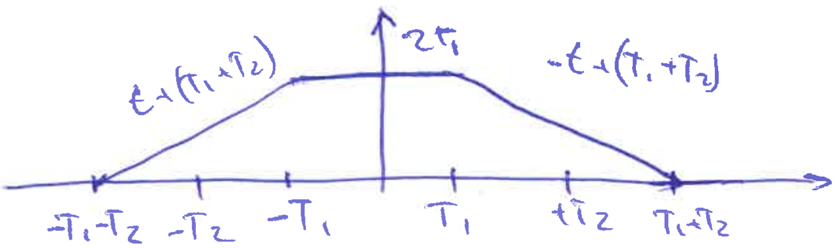
Segun el dibujo: $T_1 > T_2$ → mismo procedimiento



Si tuviesemos $T_1 = T_2$

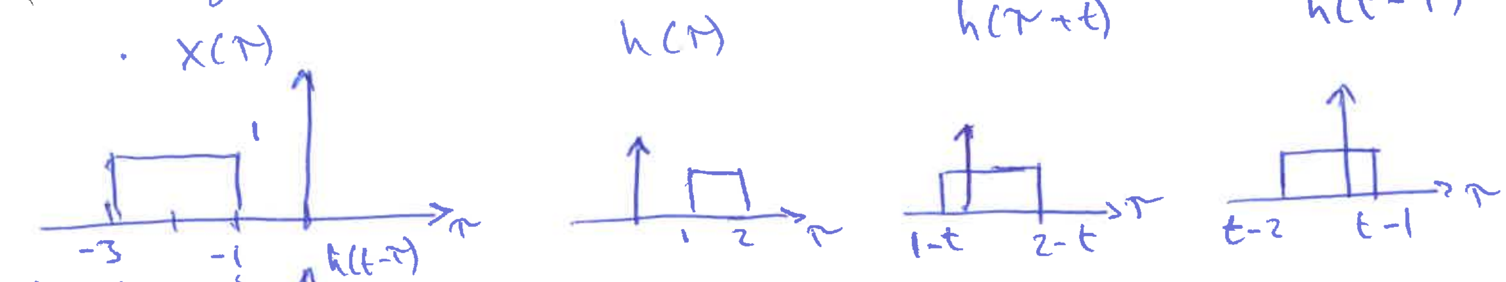


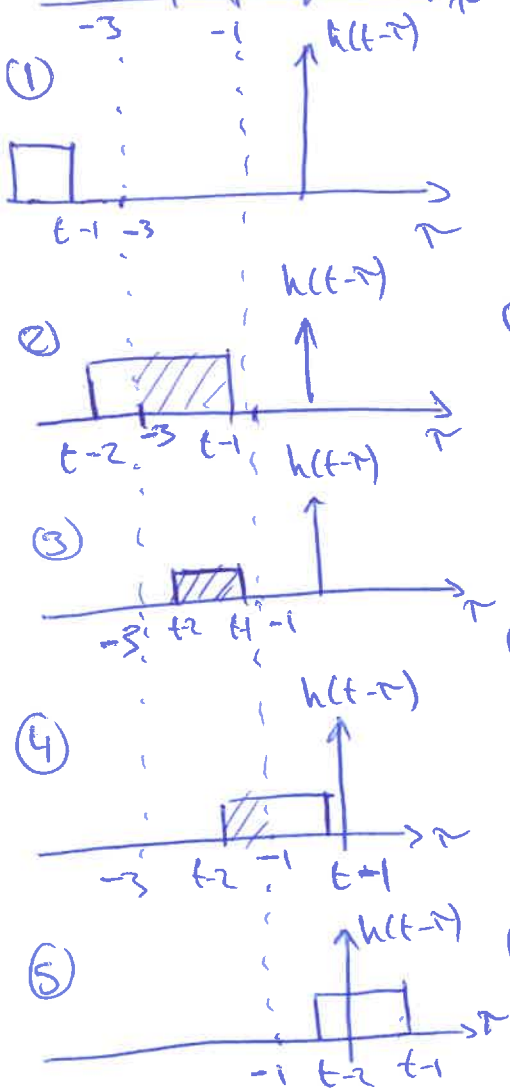
Si tuviesemos $T_1 < T_2$:



Nota: Una convolucion siempre empieza a ser distinto de 0 en la suma de los limites inferiores de ambas señales ($-T_1$ y $-T_2$ en el ejemplo) y comienza a ser 0 de nuevo en la suma de los limites superiores (T_1+T_2).

c) $y(t) = x(t) * h(t)$.





① $t-1 < -3 \rightarrow t < -2$

$y(t) = 0$.

② $\left.\begin{array}{l} t-1 > -3 \\ t-2 < -3 \end{array}\right\} -2 < t < -1$

$$y(t) = \int_{-3}^{t-1} 1\, d\tau = t+2$$

③ $\left.\begin{array}{l} t-1 < -1 \\ t-2 > -3 \end{array}\right\} -1 < t < 0$

$$y(t) = \int_{t-2}^{t-1} 1\, d\tau = t-1-(t-2) = 1$$

④ $\left.\begin{array}{l} t-1 > -1 \\ t-2 < -1 \end{array}\right\} 0 < t < 1$

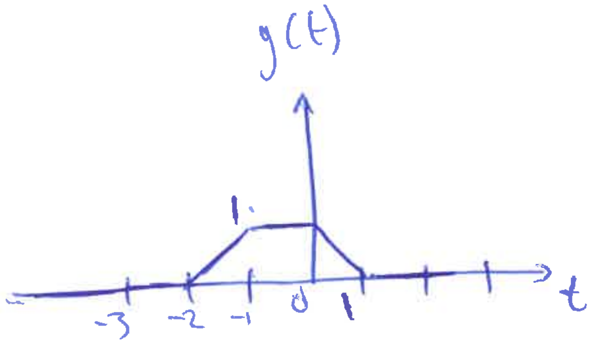
$$y(t) = \int_{t-2}^{-1} 1\, d\tau = -1-(t-2) = -t+1$$

⑤ $t-2 > -1 \rightarrow t > 1$

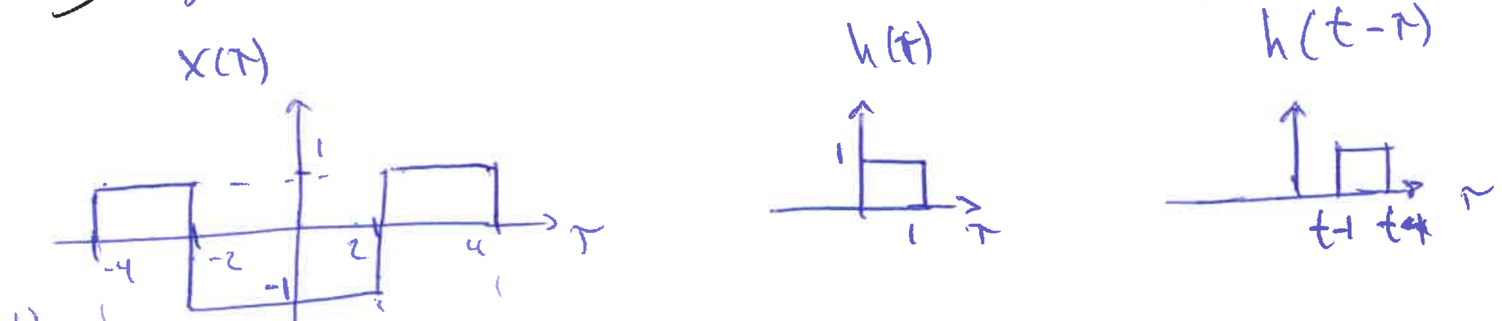
$y(t) = 0$

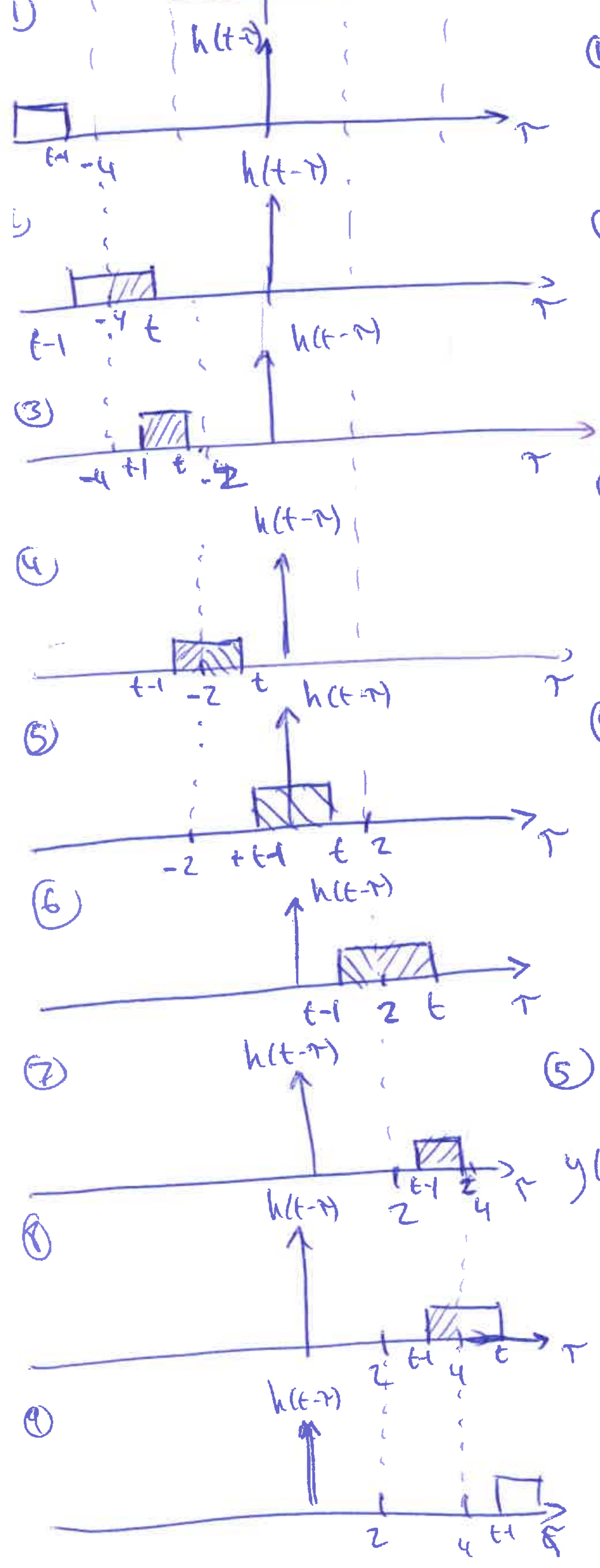
Agrupamos:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -2 \\ t+2 & \text{si } -2 \le t < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$$



d) $y(t) = x(t) * h(t)$





① ~~$t-\tau<-4 \rightarrow t<-3$~~ $t<-4$ $\quad y(t)=0$.

② $\left.\begin{matrix} t>-4 \\ t-1<-4 \end{matrix}\right\} -4<t<-3$

$$y(t)=\int_{-4}^{t} 1\cdot 1 \, d\tau = t+4$$

③ $\left.\begin{matrix} t-1>-4 \\ t<-2 \end{matrix}\right\} -3<t<-2$

$$y(t)=\int_{t-1}^{t} 1\cdot 1 \, d\tau = 1$$

④ $\left.\begin{matrix} t-1<-2 \\ t>-2 \end{matrix}\right\} -2<t<-1$

$$y(t)=\int_{t-1}^{-2} 1\cdot 1 \, d\tau + \int_{-2}^{t} -1\cdot 1 \, d\tau = -2-(t-1) + -1(t+2)$$

$$y(t) = -2t-3$$

⑤ $t<2$ y $t-1>-2 \rightarrow -1<t<2$

$$y(t)=\int_{t-1}^{t} 1\cdot -1 \, d\tau = -1(t-t+1) = -1$$

⑥ $t-1<2$ y $t>2 \rightarrow 2<t<3$

$$y(t)=\int_{t-1}^{2} 1\cdot -1 \, d\tau + \int_{2}^{t} 1\cdot 1 \, d\tau = -1(2-(t-1)) + t-2$$

$$= 2t-5$$

3) C18) d)

⑦ $t-1>2$ y $t<4 \rightarrow 3<t<4$

$$y(t)=\int_{t-1}^{t} 1\cdot 1\, d\tau = t-(t-1) = 1$$

⑧ $t>4$ y $t-1<4 \rightarrow 4<t<5$

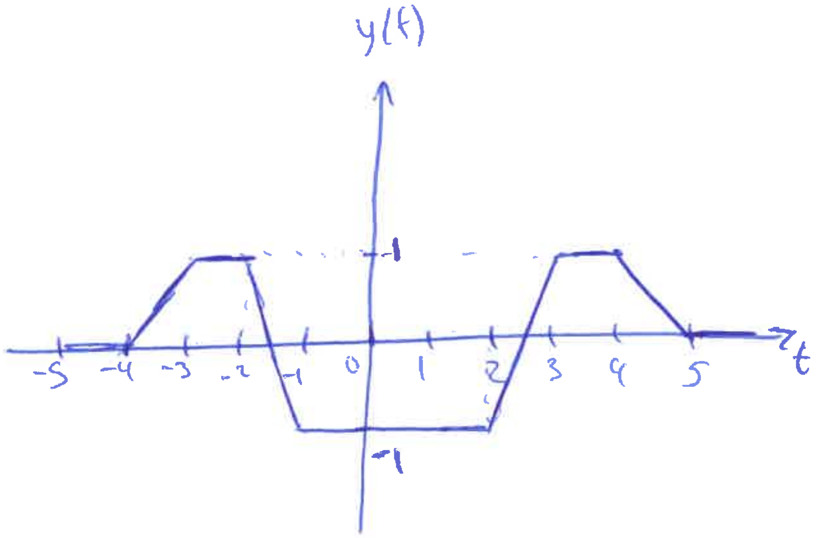
$$y(t)=\int_{t-1}^{4} 1\, d\tau = 4-t+1 = -t+5$$

⑨ $t-1>4 \rightarrow t>5$

$$y(t)=\int 0$$

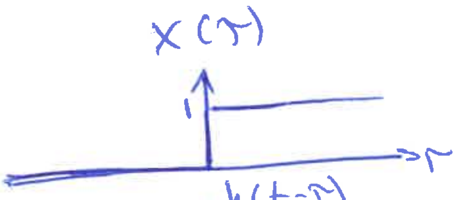
Agrupamos:

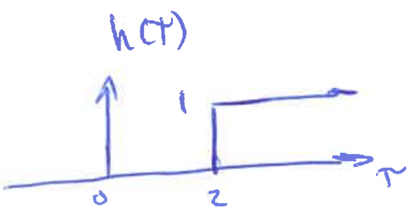
$$y(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<-4 \\ t+4 & \text{si } -4<t<-3 \\ 1 & \text{si } -3<t<-2 \\ -2t-3 & \text{si } -2<t\le -1 \\ -1 & \text{si } -1\le t<2 \\ 2t-5 & \text{si } 2\le t<3 \\ 1 & \text{si } 3\le t<4 \\ -t+5 & \text{si } 4\le t<5 \\ 0 & \text{si } t\ge 5 \end{cases}$$

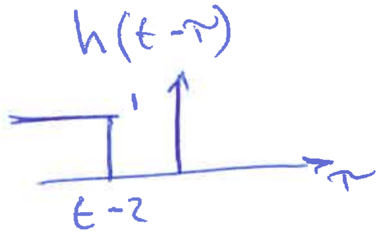


Nota: se cumple q empieza en $-4+0$ y termina en $4+1$.

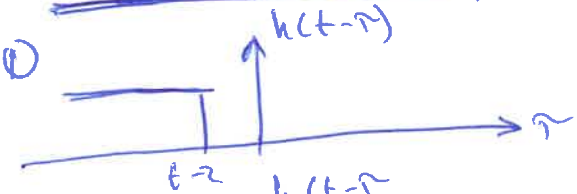
e) $y(t)=x(t)*h(t)$

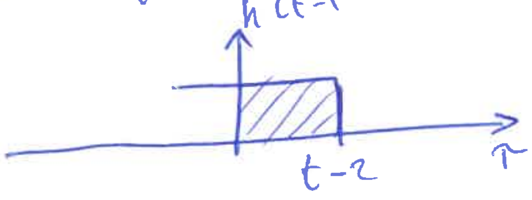






①





① $t-2<0 \rightarrow t<2$

$y(t)=0.$

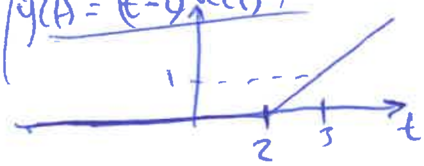
② $t-2>0 \rightarrow t>2$

$$y(t)=\int_{0}^{t-2} 1\cdot 1\, d\tau = t-2$$

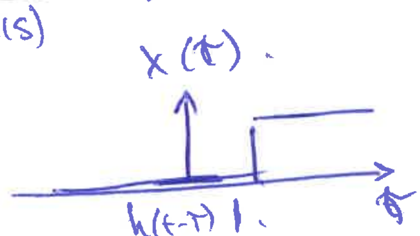
Agrupamos:

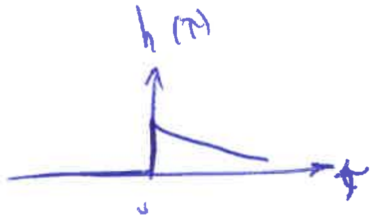
$$y(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\le 2 \\ t-2 & \text{si } t>2 \end{cases}$$

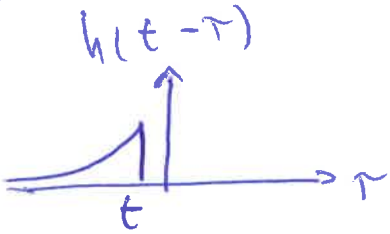
$\boxed{y(t)=(t-2)u(t)}$

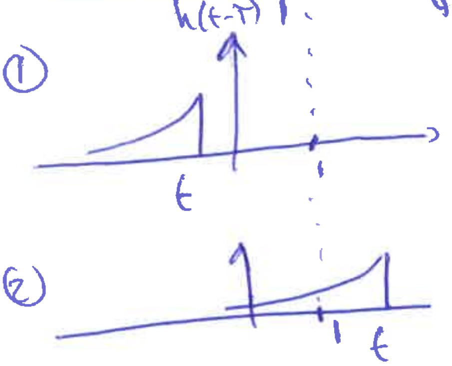


C19 (C15) $y(t) = x(t) * h(t)$ $\qquad h(t) = e^{-t}u(t)\ ;\quad x(t) = u(t-1)$







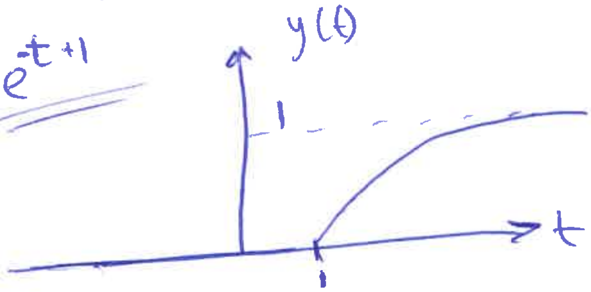


① $t<1$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$$

② $t \geq 1$: $y(t) = \int_1^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)}\, d\tau = e^{-t}\int_1^t e^{\tau}\, d\tau = e^{-t}\left[e^{\tau}\right]_1^t$

$$= e^{-t}(e^t - e^1) = 1 - e^{-t+1}$$



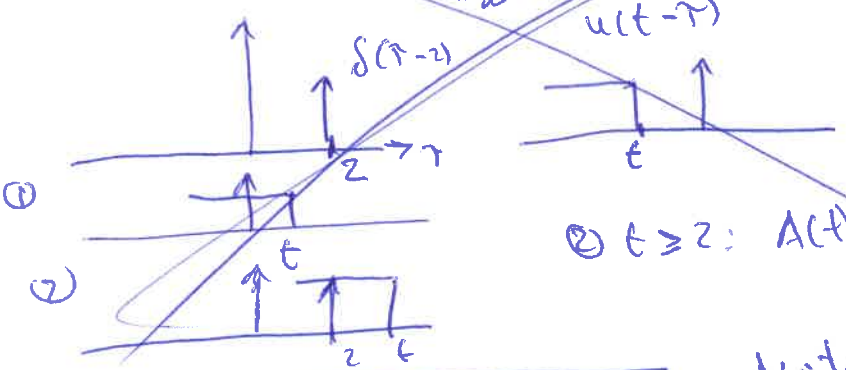
$$\boxed{y(t) = \left(1 - e^{-t+1}\right)u(t-1)}$$

C20 $x(t) = u(t) - u(t-1)\ ;\qquad h(t) = \delta(t-2)$

(C16)

$$y(t) = [u(t) - u(t-1)] * \delta(t-2) = \underbrace{u(t) * \delta(t-2)}_{A(t)} - u(t-1) * \delta(t-2)$$

$A(t) = u(t) * \delta(t-2) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-2) \cdot u(t-\tau)$



$t<2$

① $A(t) = 0$

② $t \geq 2$: $A(t) = \int_2^t 1 \cdot \cancel{\delta(2)}\ \delta(\tau-2)\, d\tau =$

$$\boxed{y(t) = u(t-2) - u(t-3)}$$

Nota: $h(t)$ es la salida del sistema cuando la entrada es $\delta(t)$. Si $h(t) = \delta(t-t_0)$, lo que indica es que el sistema solo desplaza las señales de entrada.

(C21)

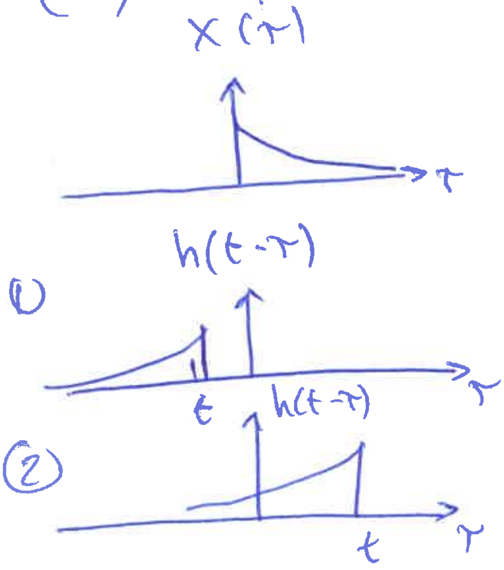
(C17) $y(t) = [u(t) - u(t-1)] * \delta(t) = \underline{u(t) - u(t-1)}.$

(C22)

(C18) $y(t) = \Lambda(t) * [\delta(t+1) - \delta(t-1)] = \underline{\Lambda(t+1) - \Lambda(t-1)}.$

(C23) $x(t) = e^{-\alpha t} u(t); \quad h(t) = e^{-\beta t} u(t).$

(C19)



① $t<0$: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau = 0 //$

② $t \geq 0$ $y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau$

$$= e^{-\beta t} \int_0^t e^{-(\alpha-\beta)\tau} d\tau \overset{(*)}{=} \frac{e^{-\beta t}}{-(\alpha-\beta)} \left[e^{-(\alpha-\beta)\tau} \right]_0^t$$

$$= + \frac{e^{-\beta t}}{-\alpha+\beta} \left(e^{-(\alpha-\beta)t} - 1 \right) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} //$$

* Valido si: $\beta \neq \alpha$.

Si $\beta = \alpha$:

$$I = e^{-\beta t} \int_0^t \underbrace{e^{-(\alpha-\beta)\tau}}_{1} d\tau = e^{-\beta t} [\tau]_0^t = t \cdot e^{-\beta t} //$$

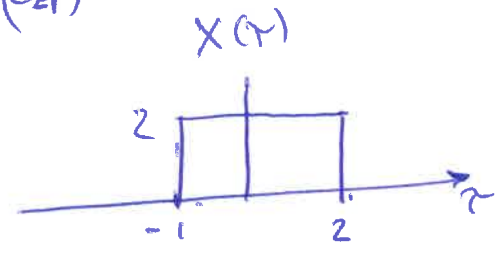
Por lo tanto:

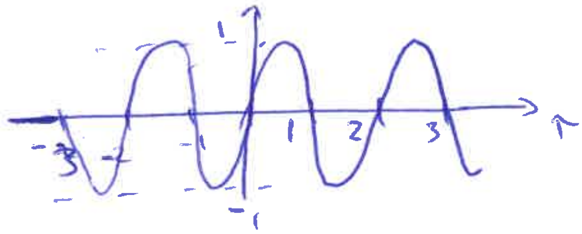
$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \right) u(t) \quad \text{si } \beta \neq \alpha. \\ y(t) &= t \cdot e^{-\beta t} u(t) \quad \text{si } \beta = \alpha \end{aligned}}$$

(25) * $x(t) = 2u(t+1) - 2u(t-2)$; $h(t) = \sin(\pi t)\, u(t+3)$.

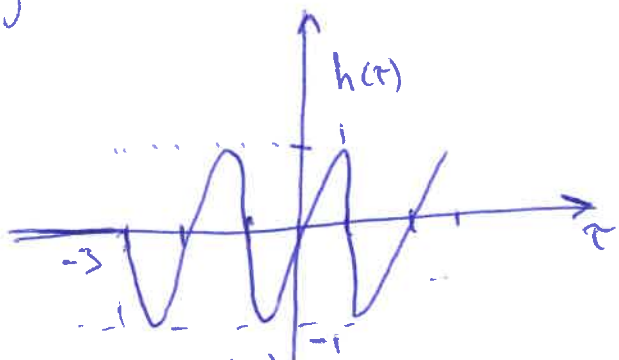
(2p)

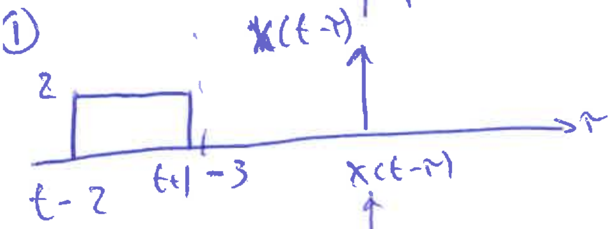
$[\omega_0 = \pi \to T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\ \text{seg.}]$

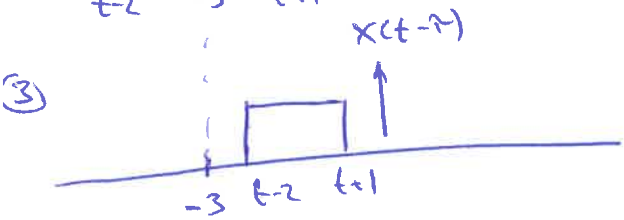




$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\, d\tau$$







① $t+1 < -3 \to \underline{t < -4}$

$\underline{y(t) = 0}$

② $t+1 > -3$ y $t-2 < -3 \to \underline{-4 < t < -1}$

$\cancel{y(t) = \int_{-3}^{t+1} 2\cdot \sin(\pi t)\cdot \sin[\pi(t-\tau)]\, d\tau}$

$$y(t) = \int_{-3}^{t+1} 2\cdot \sin(\pi\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\cos(\pi\tau)\right]_{-3}^{t+1} = -\frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{\cos(\pi t+\pi)}_{-\cos(\pi t)} - \overbrace{\cos(-3\pi)}^{\cos(-\pi) = -1}\Big]$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(-\cos(\pi t) + 1\right) = \underline{\frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi t) - 1\right)}$$

$t-2 > -3 \to \underline{t > -1}$

③ $$y(t) = \int_{t-2}^{t+1} 2\sin(\pi\tau)\, d\tau = -\frac{2}{\pi}\left[\cos(\pi\tau)\right]_{t-2}^{t+1} = -\frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\cos(\pi(t+1))}_{-\cos(\pi t)} - \cos(\pi t - 2\pi)\Big)$$

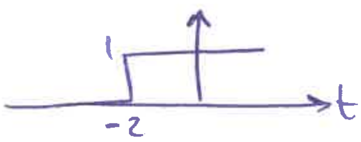
$$= \underline{\frac{4}{\pi}\cos(\pi t)}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le -4 \\ \frac{2}{\pi}[\cos(\pi t) - 1] & \text{si } -4 \le t < -1 \\ \frac{4}{\pi}\cos(\pi t) & \text{si } t \ge -1 \end{cases}$$

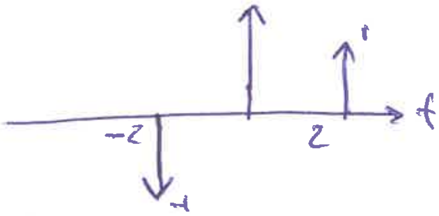
C26 $y(t) = x(t) * h(t)$

(C22)

$x(t) = u(t+2)$

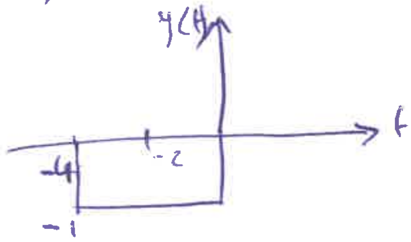


$h(t) = \delta(t-2) - \delta(t+2)$



$y(t) = u(t+2) * (\delta(t-2) - \delta(t+2)) = u(t+2) * \delta(t-2) - u(t+2) * \delta(t+2)$

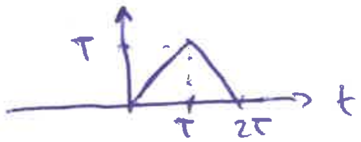
$= u(t) - u(t+4).$



C27

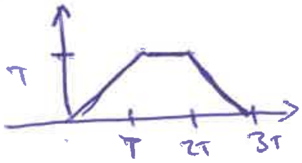
(C23)

$x_1(t)$



$h(t)$

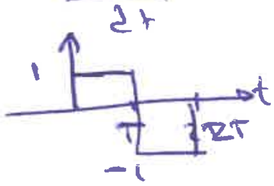
$x_2(t)$



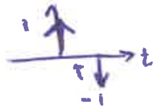
a) $y_1(t) = h(t) * h(t) = \ldots = x_1(t)$

b) $y_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} * h(t) = x_1(t) * \frac{dh(t)}{dt}$

$\frac{d\,x_1(t)}{dt}$



$\frac{dh(t)}{dt}$



$y_2(t) = x_1(t) * (\delta(t) - \delta(t-T)) = x_1(t) - x_1(t-T)$

c) $y_3(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} * h(t) = x_2(t) * \frac{dh(t)}{dt} = x_2(t) * (\delta(t) - \delta(t-T))$

$= x_2(t) - x_2(t-T)$

d) $y_4(t) = x_1(t) * h(t) = \ldots$

e) $x_2(t) * h(t) = \ldots$

f) $x_1(t) * \frac{dh(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} * h(t) = y_2(t) = x_1(t) - x_1(t-T)$.

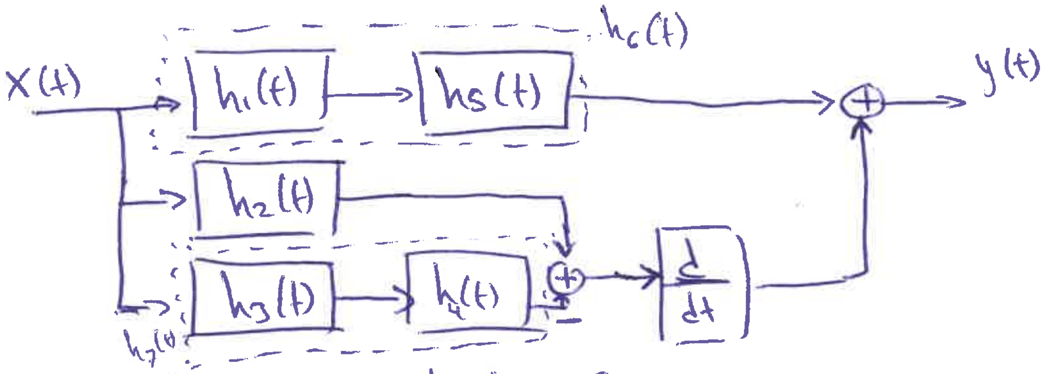
g) $\cancel{x_2(t)}$ $y_7(t) = x_2(t) * \frac{dh(t)}{dt} = y_3(t)$

h) $y_8(t) = \frac{dh(t)}{dt} * \frac{dh(t)}{dt} = [\delta(t) - \delta(t-T)] * [\delta(t) - \delta(t-T)] =$

$= \delta(t) - 2\delta(t-T) + \delta(t-2T)$

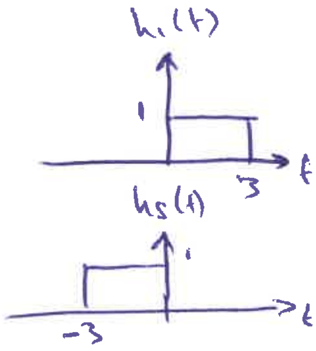
C28

(C24)



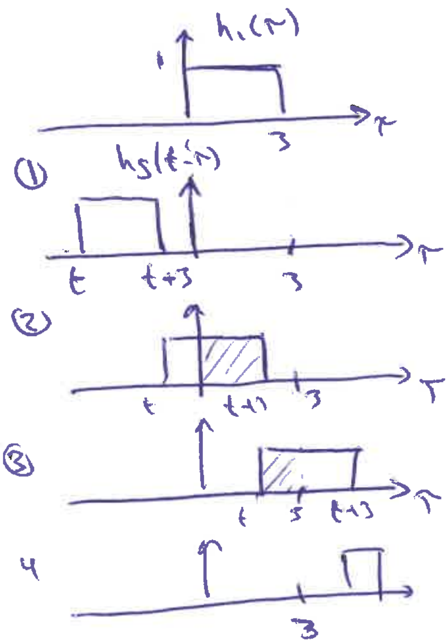
$h_1(t) = u(t) - u(t-3)$; $h_4(t) = \delta(t-1)$

$h_2(t) = h_3(t) = t \cdot u(t)$; $h_5(t) = h_1(-t)$



$h_c(t) = h_1(t) * h_5(t) = (u(t) - u(t-3)) * (u(-t) - u(-t+3))$

$= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)\, h_5(t-\tau)\, d\tau$



① $t+3 < 0 \rightarrow \underline{t < -3}$: $y(t) = 0$

② $\left.\begin{array}{l} t+3 > 0 \\ t < 0 \end{array}\right\} \underline{-3 < t < 0}$

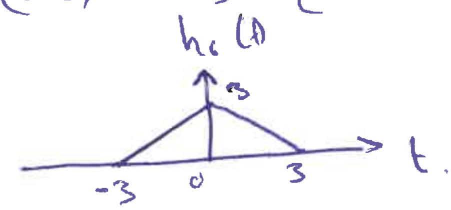
$y(t) = \int_0^{t+3} 1 \cdot 1 \, d\tau = [\tau]_0^{t+3} = \underline{t+3}$

③ $t < 3$ y $t+3 > 3 \rightarrow \underline{0 < t < 3}$

$y(t) = \int_t^3 1 \cdot 1 \, d\tau = [\tau]_t^3 = 3 - t$

④ $t > 3$: $y(t) = 0$

$$h_c(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < -3 \\ t+3 & si \quad -3 \le t \le 0 \\ 3-t & si \quad 0 < t \le 3 \\ 0 & si \quad t > 3 \end{cases} = (t+3)\,u(t+3) + \overbrace{[(3-t) - (t+3)]}^{-2t}\,u(t) + (0 - 3 + t)\,u(t-3)$$

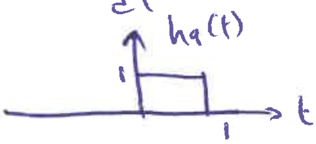


$h_7(t) = h_3(t) * h_4(t) = t \cdot u(t) * \delta(t-1) = (t-1)\,u(t-1)$

$h_8(t) = h_2(t) - h_7(t) = t \cdot u(t) - (t-1)\,u(t-1)$

$h_9(t) = \frac{d\,h_8(t)}{dt} = u(t) + \cancel{t\,\delta(t)} - [u(t-1) + \cancel{(t-1)\,\delta(t-1)}] = u(t) - u(t-1)$

$0 = \delta(0) \cdot 0$ $0 = \delta(1) \cdot (1-1)$



$$h_{eq}(t) = h_6(t) + h_9(t) = (t+3)\,u(t+3) - 2t\,u(t) - (3-t)\,u(t-3) + u(t) - u(t-1)$$

$$= (t+3)\,u(t+3) - (2t-1)\,u(t) - (3-t)\,u(t-3) - u(t-1)$$

Para dibujar: usar los dibujos de $h_6(t)$ y $h_9(t)$.

Problemas Tema 2

(P1) Sistema: $y(t) = x(\text{sen}(t))$

a/ $y(t)$ sólo se construye en los de $x(t)$ entre $t \in [-1, 1]$.

Por lo tanto, usará el futuro: por ejemplo ~~$t=-\pi \rightarrow y(-\pi) = x(0)$~~

$$t = -\pi \rightarrow y(-\pi) = x(\text{sen}(-\pi)) = x(0)$$

El sistema no es causal. Además usará también valores del pasado:

$$t = \pi \rightarrow y(\pi) = x(\text{sen}(\pi)) = x(0)$$

El sistema no es anticausal $\longrightarrow$ Sistema. NO CAUSAL

b/ $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(\text{sen}(t))$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(\text{sen}(t))$

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = x_3(\text{sen}(t)) = a \underbrace{x_1(\text{sen}(t))}_{y_1(t)} + b \underbrace{x_2(\text{sen}(t))}_{y_2(t)}$$

$y_3(t) = a y_1(t) + b y_2(t)$. $\Longrightarrow$ Sist. LINEAL

(P2) a/ $y(t) = x(t-2) + x(t+2)$.

- Sistema con memoria $\rightarrow$ depende de ~~otros~~ instantes pasados y futuros.
- Sistema no causal $\rightarrow$ en el instante "t" usa los valores de la entrada de "$t-2$" y "$t+2$"
- Es estable $\rightarrow$ si $|x(t)| \leq K_x \rightarrow |y(t)| \leq |x(t-2) + x(t+2)| \leq 2K_x = K_y$.

• Para conocer la inv. temporal:

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(t+2) \rightarrow y_1(t-t_0) = x_1(t-t_0-2) + x_1(t-t_0-2)$.

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = x_2(t-2) + x_2(t+2) = x_1(t-t_0-2) + x_2(t-t_0+2)$

$y_1(t-t_0) = y(t) \rightarrow$ Invariante temporal

• Para la linealidad.

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(t+2)$
$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t-2) + x_2(t+2)$

$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow$

$y_3(t) = x_3(t-2) + x_3(t+2) = ax_1(t-2) + bx_2(t-2) + ax_1(t+2) + bx_2(t+2)$
$= ay_1(t) + by_2(t)$

Sist. Lineal

?

b) $y(t) = x(t) \cdot \cos(3t)$

• Sin memoria: para conocer $y(t)$ solo necesita $x(t)$.

Ej: $y(1) = x(1) \cdot \cos(3) \rightarrow \cos(3)$ no es el futuro, es un coeficiente

• Es causal: todo sist. sin memoria es causal.

• Es estable: si $|x(t)| \leq K_x \rightarrow |y(t)| \leq |x(t) \cdot \cos(3t)| \leq K_x \cdot 1 = K_y$

• Invar. temp:
$y_1(t-t_0) = x_1(t-t_0) \cdot \cos(3(t-t_0))$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = x_2(t) \cdot \cos(3t) = x_1(t-t_0)\cos(3t)$.

$y_2(t) \neq y_1(t-t_0) \rightarrow$ ~~no~~ es ~~inv.~~ variante temp.

• Lineal: $x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t)\cos(3t)$

$x_2(t) \to y_2(t) = x_2(t)\cos(3t)$.

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \to y_3(t) = x_3(t)\cos(3t) = a x_1(t)\cos(3t)$
$+ b x_2(t)\cos(3)$

$y_3(t) = a y_1(t) + b y_2(t) \to$ es lineal

* c) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau$.

• Con memoria: para el valor de tiempo "t" depende de instantes pasados.

• Sist. no causal: usa información del pasado y del futuro:

Ej: $y(2) = \int_{-\infty}^{4} x(\tau)\, d\tau \to x(t)$ desde $-\infty$ a 4 para "$t=2$".

• No es estable. Por ejemplo, si $x(t)=1 \to |y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{t} 1\, d\tau\right| = \infty$ no está acotado.

• Invariante en el tiempo?

Cambio de variable
$\tau - t_0 = \alpha$
$d\tau = d\alpha$
si $\tau \to \infty \Rightarrow \alpha \Rightarrow \infty$
si $\tau \to 2t \to \alpha = 2t - t_0$

$y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x_1(\tau)\, d\tau$.

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \to y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\, d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau - t_0)\, d\tau}_{\text{difícil de comparar con } y_1(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{2t-t_0} x_1(\alpha)\, d\alpha$

Ahora vemos que: $y_1(t-t_0) \neq y_2(t)$.
Sist. variante temporal

• Lineal? $\left.\begin{array}{l} x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau \\ x_2(t) \to y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\, d\tau \end{array}\right\} x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$.

$y_3(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_3(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{2t} a x_1(\tau) + b x_2(\tau)\, d\tau = a\int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau + b\int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\, d\tau$

$y_3(t) = a y_1(t) + b y_2(t) \Longrightarrow$ Sist. lineal

d) $y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ x(t) + x(t-2) & t \geq 0 \end{cases}$ Nota: aparece en C14

- **Con memoria**: $y(3) = x(3) + x(1)$ → depende del pasado.
- **Causal**: no utiliza el futuro, solo el presente y el pasado.
- **Es estable**: si $|x(t)| \leq K_x \rightarrow |y(t)| \leq |x(t) + x(t-2)| \leq 2K_x = K_y$
- Inv. temporal?

$$y_1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t-t_0 \leq 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2) & \text{si } t-t_0 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

$$y_1(t-t_0) \neq y_2(t) \rightarrow \text{Variante Temporal}$$

- Lineal?

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t).$$

$$y_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \underbrace{a x_1(t) + b x_2(t) + a x_1(t-2)}_{a y_1(t)} + b x_1(t-2) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

(con $a y_2(t)$ marcado sobre $b x_2(t) + a x_1(t-2) + b x_1(t-2)$)

$$y_3(t) = a y_1(t) + b y_2(t) \rightarrow \text{Sist. Lineal}$$

e) $y(t) \begin{cases} 0 & \text{si } x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & \geq 0 \end{cases}$ Nota: resuelto en C14

$$*\ 8)\quad y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right)$$

- <u>Con memoria</u>: depende del pasado: $y(3) = x(1)$.
- <u>No causal</u>: tambien depende del futuro: $y(-3) = y(-1)$.
- <u>Estable</u>: no modifica la amplitud de la señal:

  Si $|x(t)| \leq K_x \rightarrow |y(t)| \leq K_x = K_y$.

- Invariante? $y_1(t-t_0) = x_1\left(\frac{t-t_0}{3}\right)$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = x_2\left(\frac{t}{3}\right) = x_1\left(\frac{t}{3} - t_0\right)$$

$$y_1(t-t_0) \neq y_2(t) \Rightarrow \text{Variante temporal}$$

- <u>Lineal</u): $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1\left(\frac{t}{3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1\left(\frac{t}{3}\right) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2\left(\frac{t}{3}\right) \end{array}\right\} x_3(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t).$$

$$y_3(t) = x_3\left(\frac{t}{3}\right) = a\,x_1\left(\frac{t}{3}\right) + b\,x_2\left(\frac{t}{3}\right) \Rightarrow y_3(t) = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$$

<u>S.t. Lineal</u>

$$9)\quad y(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta)}{\Delta}$$

$\rightarrow$ también vale la definicion $\lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta}$

- <u>Con memoria</u>: depende de instantes pasados.
- <u>No causal</u>: en la segunda definicion tambien depende del futuro
- <u>No es estable</u>: por ejemplo $u(t)$ esta acotada pero $y(t) = \delta(t)$ que no esta acotada.
- Invariante? $y_1(t-t_0) = \frac{d\,x(t-t_0)}{dt}$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \longrightarrow y_2(t) = \frac{d x_2(t)}{dt} = \frac{d\,x_1(t-t_0)}{dt}$$

$y_1(t-t_0) = y_2(t)$

<u>Es Invariante</u>

• Lineal?

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &\to y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \\ x_2(t) &\to y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} \end{aligned}\right\} x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t).$$

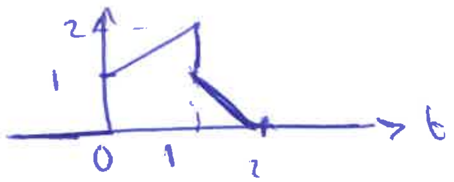
$$y_3(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{d[a x_1(t) + b x_2(t)]}{dt} = a\frac{dx_1(t)}{dt} + b\frac{dx_2(t)}{dt}$$

$$y_3(t) = a y_1(t) + b y_2(t). \Rightarrow \underline{\text{Sist. Lineal}}$$

P3 $y(t) = x(t) * h(t)$

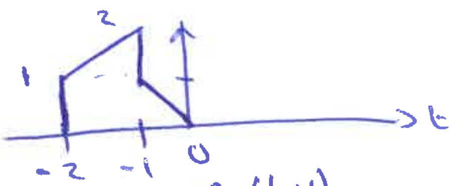
$$x(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \le t \le 1 \\ 2-t & 1 < t \le 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

$x(t)$

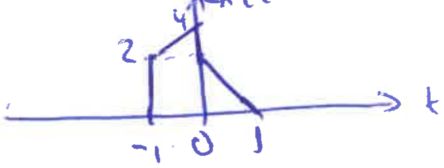


$$y(t) = x(t) * [\delta(t+2) + 2\delta(t+1)]$$
$$= x(t+2) + 2x(t+1)$$

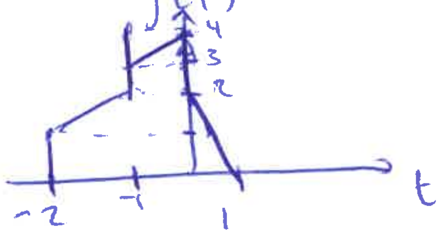
$x(t+2)$



$2x(t+1)$

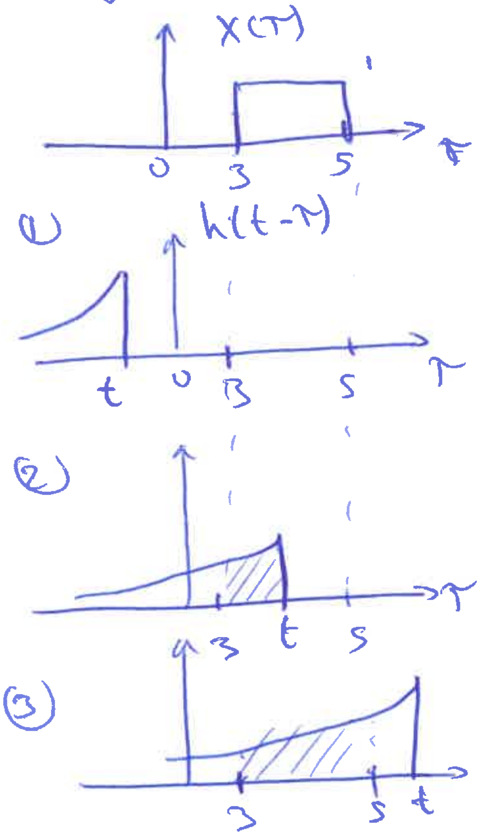


$y(t)$



P4 * $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$; $h(t) = e^{-3t}u(t)$

a) $y(t) = x(t) * h(t)$



① $\underline{t \leq 3}$

$\underline{y(t) = 0}$

② $\underline{3 < t \leq 5}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{+3}^{t} 1 \cdot e^{-3(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \int_{3}^{t} e^{-3t} e^{3\tau}\, d\tau = \frac{e^{-3t}}{3}\left[e^{3\tau}\right]_{3}^{t}$$

$$= \frac{e^{-3t}}{3}\left(e^{3t} - e^{9}\right) = \underline{\frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t+9}\right)}$$

③ $\underline{t > 5}$: $$y(t) = \int_{3}^{5} e^{-3(t-\tau)}\, d\tau = \int_{3}^{5} e^{-3t} e^{3\tau}\, d\tau = \frac{e^{-3t}}{3}\left[e^{3\tau}\right]_{3}^{5}$$

$$= \underline{\frac{e^{-3t}}{3}\left(e^{15} - e^{3}\right)}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 3 \\ \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t+9}\right) & 3 < t \leq 5 \\ \frac{e^{-3t}}{3}\left(e^{15} - e^{3}\right) & t > 5 \end{cases}$$

b) $g(t) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$; $\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t-3) - \delta(t-5)$.

$$g(t) = \left[\delta(t-3) - \delta(t-5)\right] * h(t) = h(t-3) - h(t-5) =$$

$$= \underline{e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5)}$$

c) Relación entre $g(t)$ e $y(t)$?

¿$g(t) = \frac{dy(t)}{dt}$?

$$\frac{dy(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } t<3 \\ e^{-3t+9} & \text{si } 3\le t<5 \\ e^{-3t+9} - e^{-3t+15} & \text{si } t\ge 5 \end{cases}$$

Se comprueba que $g(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

(P5) a) $y(t) = x(t-4) \longrightarrow$ Sist. inverso: $z(t) = v(t+4)$.

Prueba: ~~z(t) =~~ $\hat{x}(t) = y(t+4) = x(t-4+4) = x(t)$ ✓

b) $y(t) = \cos[x(t)]$

No invertible $\longrightarrow$ $x_1(t) = 0 \longrightarrow y_1(t) = 0$

$x_2(t) = 2\pi \longrightarrow y_2(t) = 0$

c) $y(t) = t \cdot x(t)$.

No invertible: $x_1(t) = \delta(t) \longrightarrow y_1(t) = 0$

$x_2(t) = 2\delta(t) \longrightarrow y_2(t) = 0$.

d) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$.

Invertible $\longrightarrow$ $z(t) = \frac{dv(t)}{dt}$.

Prueba: $z(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right] \overset{\text{teorema del integral}}{=} x(t)$

e) $y(t) = x(t)\,x(t-1) \longrightarrow$ Destruye información cuando $x(t)=0$ o bien $x(t-1)=0$.

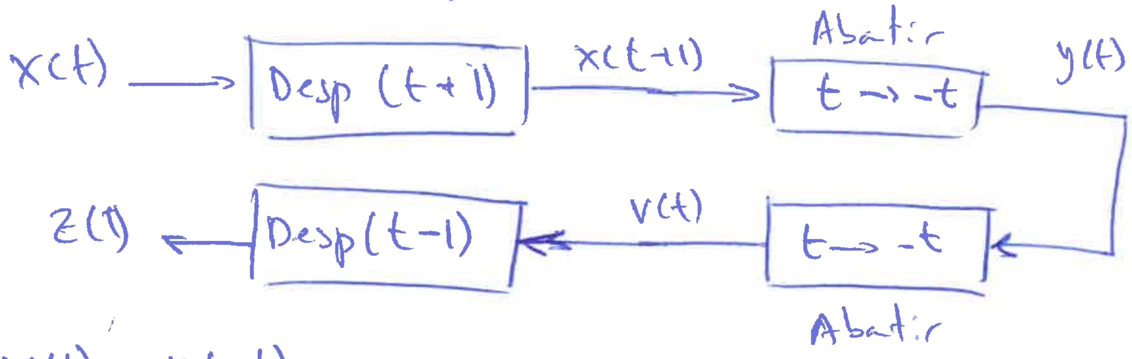
$x_1(t) = \delta(t) \longrightarrow y_1(t) = 0$

$x_2(t) = 2\delta(t) \longrightarrow y_2(t) = 0$

$\longrightarrow$ No invertible

f) $y(t) = x(1-t)$

Involucra varias operaciones:



$v(t) = y(-t)$

$\underline{z(t)} = v(t-1) = y(-(t-1)) = \underline{y(-t+1)}$

Comprobamos: $z(t) = y(-t+1) = x(1-(-t+1)) = x(1+t-1) = x(t)$

<u>Invertible</u>

(P6) SLIT dado por $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau-2)\, d\tau$

*a) $h(t)$? → comprobar $y(t)$ cuando $x(t) = \delta(t)$

$x(t) = \delta(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau-2)\, d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{2} \delta(\tau-2)\, d\tau$

$= e^{-t} e^{2} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-2)\, d\tau = \underline{e^{-(t-2)} u(t-2) = h(t)}$

b) $x(t) = u(t+1) - u(t-2) \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \ldots$

(P8) a) $\left.\begin{array}{l} x(t) = 0 \quad \forall t < t_0 \\ \text{Sist.} \begin{cases} \text{lineal} \\ \text{causal} \end{cases} \end{array}\right\}$ $y(t) = 0 \quad \forall\, t < t_0$

Por ser <u>Sist. causal</u>, $y(t) = f(x(t))$ con $t \in (-\infty, t_0)$, pero por ser en ese intervalo $x(t) = 0$, y por ser <u>Sist. lineal</u>, la respuesta a la entrada nula debe ser la salida nula. Por tanto:

$y(t) = 0 \quad \forall\ t \in (-\infty, t_0)$.

b) $x(t) = x(t)\,u(t) \longrightarrow y(t) = y(t)\,u(t)$

$x(t) = x(t)\,u(t-t_0) \longrightarrow y(t) = y(t)\,u(t-t_0)$.

El sistema $y(t) = x(t)\,x(t+1)$ no es lineal y cumple:

$x(t) = x(t)\,u(t-t_0) \rightarrow y(t) = \underbrace{x(t)\,u(t-t_0)}\cdot \underbrace{x(t+1)\,u(t-t_0+1)}$

$= x(t)\,x(t+1)\,u(t-t_0)$

c) El sistema $y(t) = x(t)+1$ no es lineal y no cumple la condición:

$x(t) = x(t)\,u(t) \longrightarrow y(t) = x(t)+1 = x(t)\,u(t)+1 \neq y(t)\,u(t)$ //

* (P11) a) $\left.\begin{array}{l} h(t) = h(t+T_0) \\ \text{SLIT} \end{array}\right\}$ Estable?

Si denominamos $K_s = \int_0^{T_0} |h(t)|\,dt$, entonces:

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_s = \infty \longrightarrow$ Inestable

b) El inverso de un SLIT causal es causal?

Buscamos un contraejemplo: $h(t) = \delta(t-4)$ (causal).

Su inverso: $h_i(t) = \delta(t+4)$ ya que $h(t) * h_i(t) = \delta(t-4) * \delta(t+4)$

$= \delta(t)$ y $h_i(t)$ no es causal

c) Si $|h(t)| \leq K \;\forall t$ y SLIT $\rightarrow$ ¿estable?

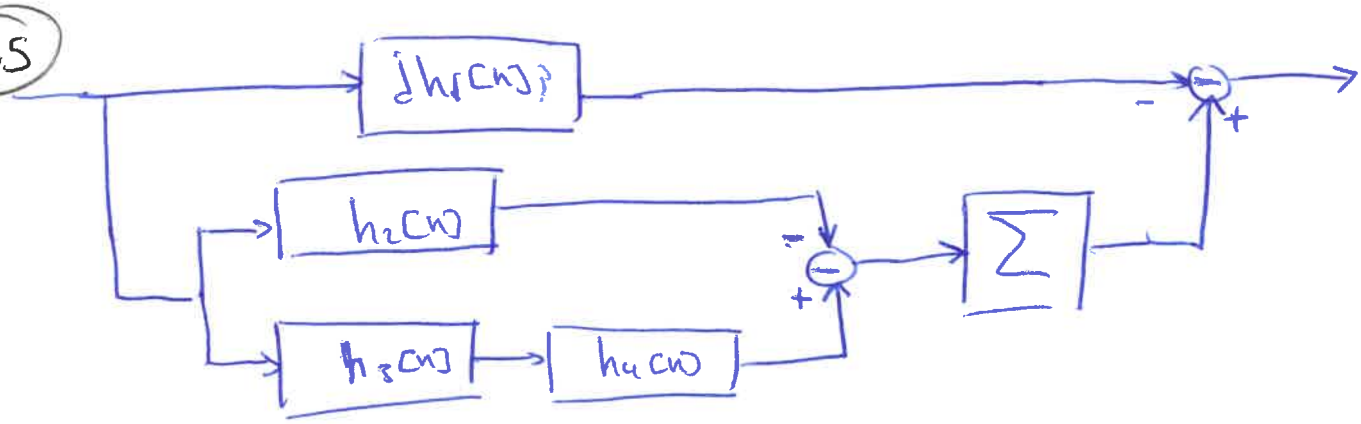
No. Por ejemplo: $h(t) = u(t)$ cumple la condición y no es estable. ~~ya que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \leq K$.~~

La condición de estabilidad implica: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \leq K$.

h) SLIT causal si y solo si su $s(t) = 0 \ \forall t < 0$.

Cierto. Es equivalente a decir que $h(t) = h_0(t)u(t)$.

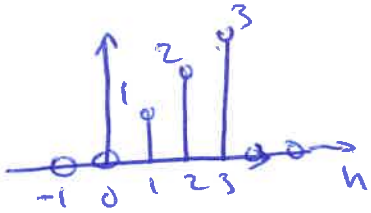
P15



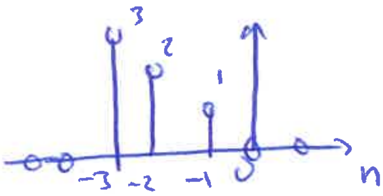
Sabemos que:

$h_2[n]$

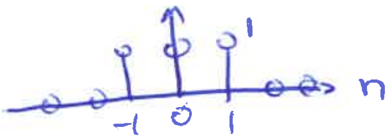
$h_4[n]$



$h_3[n] = h_4[-n]$



$h_{eq}[n]$



$$h_{eq\,3,4}[n] = h_3[n] * h_4[n] = h_3[n] * (\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3])$$

$$= h_3[n-1] + 2h_3[n-2] + 3h_3[n-3]$$

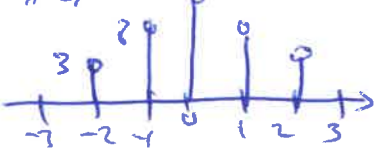
Como $h_3[n]$ podemos escribirlo como: $\cancel{\delta[n]}$: $h_3[n] = 3\delta[n+3] + 2\delta[n+2] + \delta[n+1]$

$$h_{eq\,3,4}[n] = \underbrace{3\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n]}_{h_3[n-1]} + \underbrace{6\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1]}_{2h_3[n-2]}$$

$$+ \underbrace{9\delta[n] + 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2]}_{3h_3[n-3]} =$$

$$= 3\delta[n+2] + 8\delta[n+1] + 14\delta[n] + 8\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

$h_{eq\,3,4}[n]$



d) ¿Un SLIT con $h(t)$ finito es estable

Si $h(t) = h_o(t)\left[u(t-t_1) - u(t-t_2)\right]$ y $h(t) < \infty$,

entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} |h_o(t)|\, dt < \infty$.

<u>Sistema estable</u>

e) Un SLIT causal es estable?

SLIT causal si $h(t) = h_o(t)\,u(t)$. $\longrightarrow$ $h(t) = u(t)$ no es estable.

<u>Falso</u>

f) $\longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow$

no causal   causal

$h_1(t) = \delta(t+1)$ $h_2(t) = \delta(t-1)$

$h_{eq}(t) = h_1(t) * h_2(t) = \delta(t) \longrightarrow$ <u>causal</u>

g) Un SLIT es estable si y solo si es absolutamente integrable su respuesta al escalón

¿ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\, dt < \infty \longrightarrow$ estable?

- Busco $h(t)$ absolutamente integrable cuya $s(t)$ no sea absolutamente integrable.

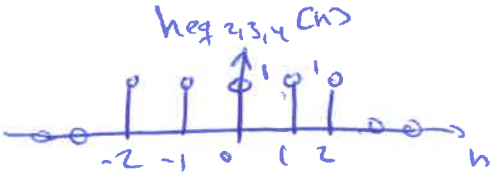
$$h(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \left[e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \overset{t\geq 0}{=} \int_0^{t} e^{-\tau}\, d\tau = \left[-e^{-\tau}\right]_0^{t} = 1 - e^{-t}$$

$s(t) = 0 \quad (t<0) \longrightarrow s(t) = (1-e^{-t})\,u(t)$

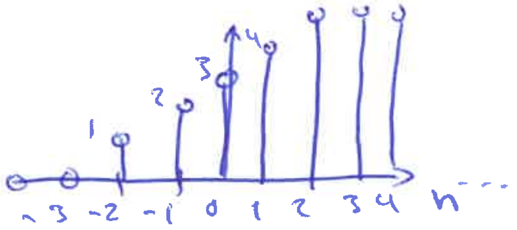
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\, dt = \infty$ <u>No es cierto</u>

$h_{eq_{2,3,4}}[n] = h_{eq_{3,4}}[n] - h_2[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$

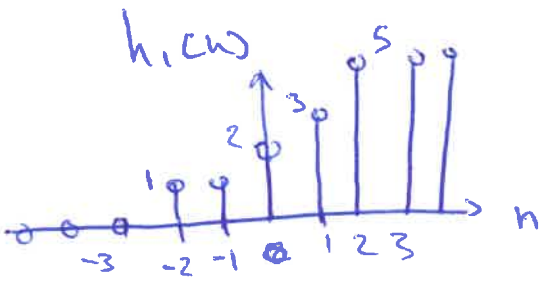


Ahora el sistema sumador: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$, cuya respuesta es $h_\Sigma[n] = u[n]$

$h_{eq_{2,3,4,\Sigma}}[n] = h_{eq_{2,3,4}}[n] * h_\Sigma[n] = u[n+2] + u[n+1] + u[n] + u[n-1] + u[n-2]$



Falta encontrar el $h_1[n]$ que consiga $h_{eq_{2,3,4,\Sigma}}[n] - h_1[n] = h_{eq}[n]$



Por lo tanto $h_1[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1] + 5u[n-2]$

P18 S1) $y[n] = x[n+2]$ S2) $y[n] = x[-n]$

a) $y_{S1} = x[n+2] = 3\delta[n+3] - \delta[n+2] + 2\delta[n+1]$.

$y_{S2} = x[-n] = 3\delta[-n+1] - \delta[-n\cancel{+2}] + 2\delta[-n-1] = \cancel{3\delta[n-1]}$

$= 3\delta[n-1] - \delta[n] + 2\delta[n+1]$

b) $h_{S1}[n] \Leftrightarrow$ salida de $y_{S1}[n]$ cuando $x[n] = \delta[n]$.

$h_{S1}[n] = \delta[n+2] \longrightarrow y_{S1}[n] = \delta[n] * x[n] = 3\delta[n+3] - \delta[n+2] + 2\delta[n+1]$

c) $h_{S_2}[n] = \delta[-n] = \delta[n]$.

$y_{S_2}[n] = h_{S_2}[n] * x[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$.

No coincide con el resultado del primer apartado.

PROBLEMAS TEMA 3: Señales y sistemas continuos en el dominio de la frecuencia

Problema 1 (*)

Una señal periódica de tiempo continuo $x(t)$ es real y tiene un periodo fundamental $T = 8$ s. Los coeficientes de la Serie de Fourier para $x(t)$ que son diferentes de cero son $a_1 = a_{-1} = 2$, $a_3 = a_{-3}^* = 4j$. Exprese $x(t)$ de la forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \, .$$

Problema 2 (*)

Calcule los coeficientes a_k del desarrollo en series de Fourier de la siguiente señal periódica de tiempo continuo con $\omega_0 = 2\pi$.

$$x(t) = \begin{cases} 0{,}5, & 0 \leq t < 0{,}5 \\ -0{,}5, & 0{,}5 \leq t < 1. \end{cases}$$

Problema 3

Considere las siguientes tres señales de tiempo continuo: $x(t) = \cos(4\pi t)$; $y(t) = \sin(4\pi t)$; $z(t) = x(t)y(t)$.

a) Determinar los coeficientes del DSF de $x(t)$.

b) Determinar los coeficientes del DSF de $y(t)$.

c) Determinar los coeficientes del DSF de $z(t)$ mediante la expresión directa del producto de las dos señales (sin utilizar propiedades).

Problema 4 (*)

Determinar el DSF de las siguientes señales de la figura 1:

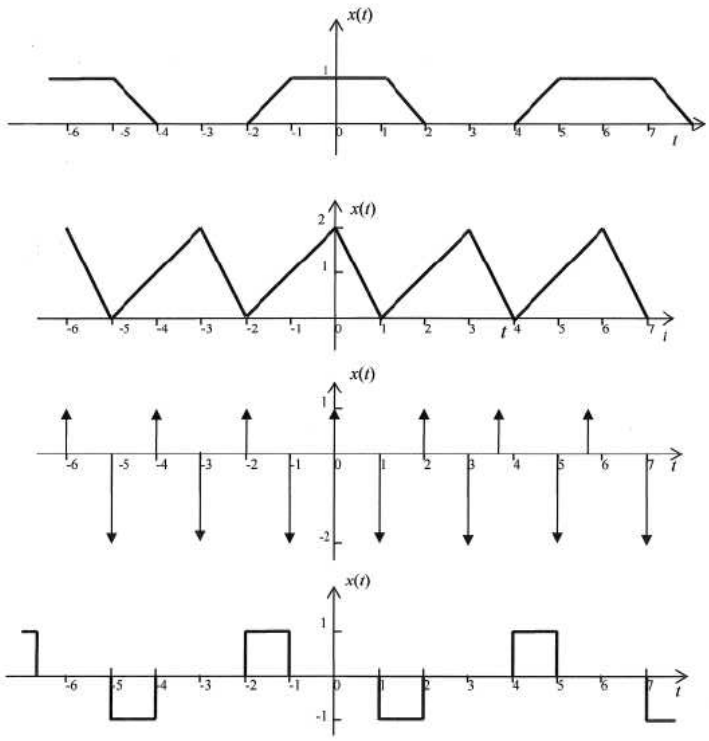


Figura 1: Señales Problema 4.

Problema 5 (*)

Conocemos la transformada de Fourier $X(j\omega)$ para la señal $x(t)$. Utilizar las propiedades para obtener las siguientes transformadas:

a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$.

b) $x_2(t) = x(3t-6)$.

c) $x_3(t) = \frac{d^2x(t-1)}{dt^2}$.

Problema 6

Considere la siguiente señal:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1 \\ (t+1)/2, & |t| \leq 1. \end{cases}$$

a) Determine la expresión de $X(j\omega)$.

b) Tomando la parte real de $X(j\omega)$, probar que es la TF de la parte par de $x(t)$.

c) ¿Cuál es la TF de la parte impar de $x(t)$?

Problema 7 (*)

Conocemos una señal y su TF, que son:

$$e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$$

a) Utilizar las propiedades de la TF para calcular la transformada de $te^{-|t|}$.

b) Aplicar ahora la propiedad de dualidad para determinar la TF de $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$.

Problema 8

Sea una señal cuya TF es $X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$ y sea $h(t) = u(t) - u(t-2)$.

a) ¿Es $x(t)$ periódica?

b) ¿Es $x(t) * h(t)$ periódica?

c) ¿Puede ser periódica la convolución de dos señales no periódicas?

Problema 9 (*)

Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de un SLIT causal con respuesta en frecuencia:

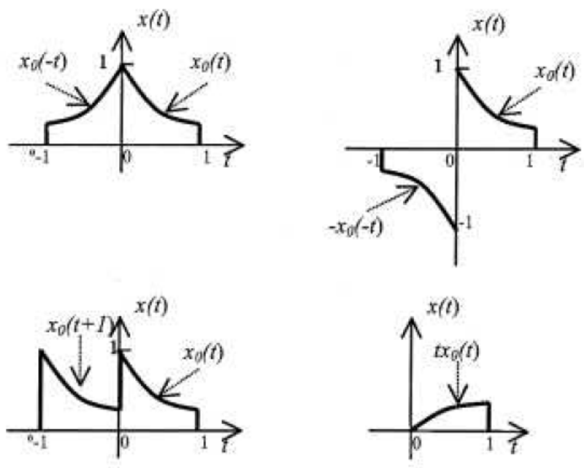
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

Para una entrada dada $x(t)$, este sistema produce la salida $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$. Determine $x(t)$.

Problema 10

Tenemos la siguiente señal: $x_0(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & resto. \end{cases}$

Determine la TF de las siguientes señales. (Nota: comience por determinar la TF de $x_0(t)$ y use propiedades de transformadas).



Problema 11 (*)

Calcular la convolución de las señales $x(t)$ y $h(t)$, obteniendo primero sus TF, y aplicando posteriormente las propiedades de la TF de una convolución (producto de transformadas) y transformada inversa:

a) $x(t) = te^{-2t}u(t)$ con $h(t) = e^{-4t}u(t)$.

b) $x(t) = te^{-2t}u(t)$ con $h(t) = te^{-4t}u(t)$.

c) $x(t) = e^{-t}u(t)$ con $h(t) = e^{t}u(-t)$.

Problema 12

Sean $x(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ y $h(t) = u(t+1) - u(t-3)$. Verificar que la TF de la convolución de estas dos señales es igual al producto de sus transformadas.

Problema 13

Sea $H(j\omega)$ la respuesta en frecuencia de un SLIT, calcular $h(t)$ en los siguientes casos:

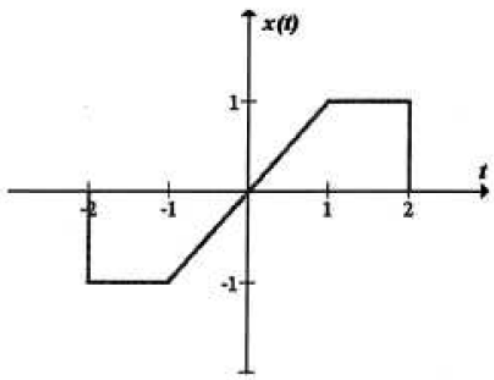
a) $H(j\omega) = 2\left(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\right) + 3\left(\delta(\omega-2\pi) - \delta(\omega+2\pi)\right)$.

b) $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$, con $|H(j\omega)| = 2\left(u(\omega+3) - u(\omega-3)\right)$ y $\angle H(j\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi$.

c) $H(j\omega) = \frac{\sin^2(3\omega)\cos(\omega)}{\omega^2}$.

Problema 14 (*)

Calcular la TF de la siguiente señal:



Problema 15 (*)

Considere un SLIT cuya función de transferencia se representa en la figura (a). Por otra parte, se considera la señal periódica mostrada en la figura (b).

a) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

b) Calcule la TF de $x(t)$.

c) Calcule los coeficientes del DSF de $x(t)$.

d) ¿Cuánto vale la potencia de la señal $x(t)$? ¿Qué porcentaje de esta potencia se encuentra a la salida del sistema?

e) Calcule la expresión en el dominio del tiempo de la señal a la salida del sistema.

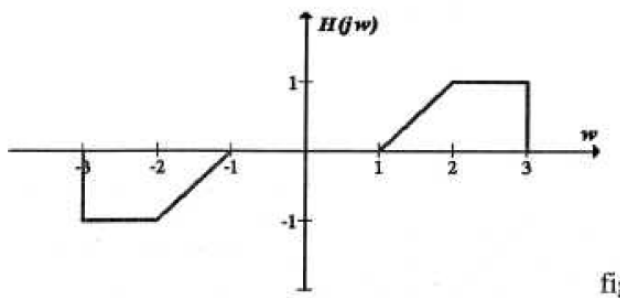


figura a)

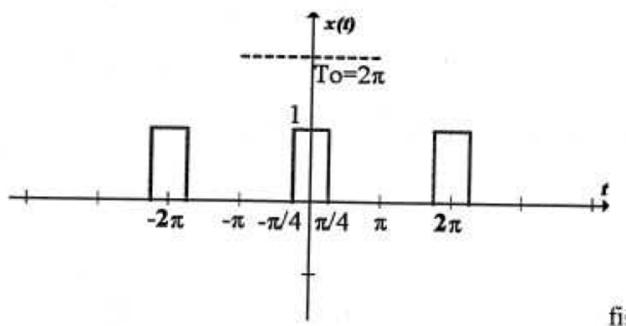


figura b)

Problema 16

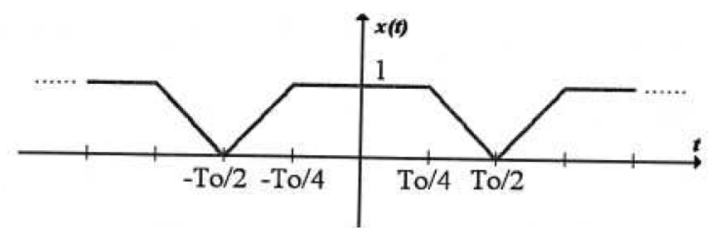
Considere la señal periódica de periodo T_0 representada en la figura .

a) Encuentre sus coeficientes del DSF.

b) Calcule su TF y represéntela gráficamente (espectro de la señal).

c) Dicha señal entra en un sistema cuya respuesta en frecuencia es $H(j\omega) = u(\omega+4\pi/T_0)-u(\omega-4\pi/T_0)$. ¿Qué porcentaje de la potencia de la señal de entrada se encuentra a la salida del sistema?

d) Calcular y representar gráficamente la expresión en el dominio del tiempo de la señal a la salida del sistema.



Problema 17 (*)

Sea $x(t)$ la entrada a un SLIT determinado por la siguiente respuesta al impulso:

$$h(t) = \frac{2W_1W_2}{\pi} sinc\left(\frac{W_1t}{\pi}\right) sinc\left(\frac{W_2t}{\pi}\right)$$

donde $W_1 > W_2$. Calcular la expresión de la salida del sistema $y(t)$, cuando

$$x(t) = \frac{(W_1 - W_2)^2}{2\pi} sinc^2\left(\frac{W_1 - W_2}{2\pi}t\right).$$

Problema 18 (*)

Sea $X(j\omega)$ la TF de $x(t)$, según se muestra en la figura.

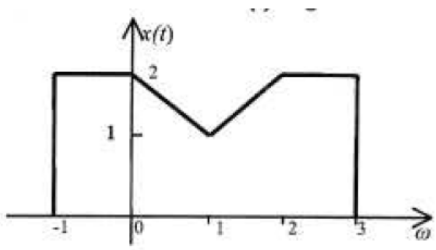
a) Encuentre $\angle X(j\omega)$.

b) Encuentre $X(j0)$.

c) Encuentre $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$.

d) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \|X(j\omega)\|^2 d\omega$

e) Dibuje la TF inversa de $Real\{X(j\omega)\}$.


x(t)
2
1
-1
0
1
2
3
ω

Cuestiones Tema 3

(C1) DSF de $x(t) = \underbrace{\cos(5\pi t + \frac{\pi}{3})}_{A} + \underbrace{\sin(10\pi t)}_{B}$

(C2)

Primero, miramos la periodicidad:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_A = 5\pi = \frac{2\pi}{T_A} \rightarrow T_A = \frac{2}{5}\,seg. \\ \omega_B = 10\pi = \frac{2\pi}{T_B} \rightarrow T_B = \frac{1}{5}\,seg \end{array}\right\} T_0 = m.c.m.\left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\} = \frac{2}{5}\,seg.$$

$\underline{\omega_0 = 5\pi \text{ rad/seg.}}$

Reescribimos $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j(5\pi t + \frac{\pi}{3})} + e^{-j(5\pi t + \frac{\pi}{3})}\right] + \frac{1}{2j}\left[e^{j10\pi t} - e^{-j10\pi t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\left(e^{j5\pi t} + e^{-j5\pi t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j10\pi t} - e^{-j10\pi t}\right)$$

Mirando la ecuación de análisis:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \ldots + a_{-2}e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + \ldots$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{2j}}_{a_{-2}} e^{-j2\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}}_{a_{-1}} e^{-j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}}_{a_1} e^{j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_2} e^{j2\omega_0 t}$$

$a_{-2} = \frac{-1}{2j} = \frac{1}{2}j$;

$a_{-1} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}} \overset{*}{=} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j$

$a_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}j$

$a_2 = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}j$

$a_k = 0 \; \forall k \neq \pm 1, \pm 2.$

$$* \; e^{-j\frac{\pi}{3}} = e^{-j\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{3}} + e^{j\frac{\pi}{3}}}_{\cos(-\frac{\pi}{3})} + \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{3}} - e^{j\frac{\pi}{3}}}_{2j\sin(\frac{\pi}{3})}\Big)$$

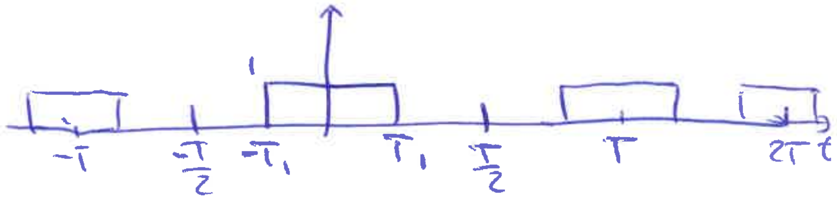
(C2) DSF de $x(t) = \underbrace{\cos(5\pi t + \frac{\pi}{3})}_{A} + \underbrace{\operatorname{sen}(10t)}_{B}$?

$\omega_A = 5\pi \longrightarrow T_A = \frac{2}{5}$ seg.

$\omega_B = 10 = \frac{2\pi}{T_B} \longrightarrow T_B = \frac{\pi}{5}$ seg.

$T_0 = \text{m.c.m} \left\{ \frac{2}{5}, \frac{\pi}{5} \right\}$ $\cancel{\exists}$

(C3) $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$



señal con periodo $T \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T} e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{-jTk\omega_0 t} \cdot \left[e^{-jk\omega_0 t} \right]_{-T_1}^{T_1}$$

$$= \frac{1}{jTk\omega_0} \left[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1} \right] = \frac{1}{\cancel{j}Tk\omega_0} 2\cancel{j} \sin(k\omega_0 T_1) = \frac{\cancel{2}\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$\hookrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Recordando que $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ ∴

$$a_k = \frac{\sin\left(\pi \frac{2k}{T} T_1\right)}{\pi \left(\frac{k2}{T} T_1\right) \frac{T}{2T_1}} = \frac{2T_1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{k2T_1}{T}\right) \longrightarrow$$

Si $T = 2T_1$, sinc con altura 1.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} x(t)\, e^{-j\omega_0 t \cdot 0}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\, dt = \frac{2T_1}{T}$$

C4 TF de $x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$ → real y par.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt$$

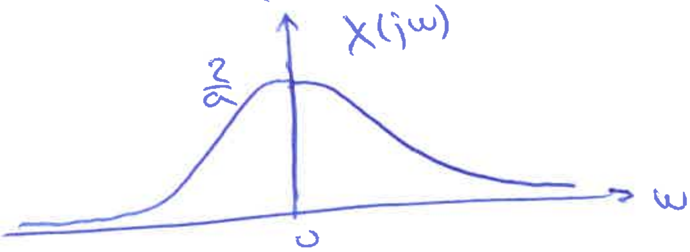
$$= \frac{1}{a-j\omega}\left[e^{(a-j\omega)t}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_{0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{a-j\omega}(1-0) - \frac{1}{a+j\omega}(0-1) = \underline{\underline{\frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}}}$$

Representar la P? Simplificamos.

$$X(j\omega) = \frac{a+\cancel{j\omega} + a - \cancel{j\omega}}{(a-j\omega)(a+j\omega)} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \rightarrow \text{real y par}$$

$$|X(j\omega)| = X(j\omega) \; ; \quad \measuredangle\{X(j\omega)\} = 0.$$



C5 • Demostrar linealidad:

$$z(t) = a\,x(t) + b\,y(t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (ax(t) + by(t))\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt + b\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, dt = \underline{aX(j\omega) + bY(j\omega)}.$$

• Desplazamiento: $y(t) = x(t-t_0) \overset{TF}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j\omega t}\, dt \;\; \circledast \leftarrow \begin{array}{l} t - t_0 = r \\ dt = dr \\ t = r + t_0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} t \to -\infty \Rightarrow r \to -\infty \\ t \to \infty \Rightarrow r \to \infty \end{array}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(r)\, e^{-j\omega(r+t_0)}\, dr = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(r)\, e^{-j\omega r}\, dr = \underline{e^{-j\omega t_0} X(j\omega)}$$

• Conjugado: $y(t) = x^*(t) \xleftrightarrow{TF} Y(j\omega) = X^*(-j\omega)$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad (a)$$

→ Cambio de variable parece difícil. Probamos otra cosa:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \longrightarrow X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{j\omega t}\, dt$$

$$\xrightarrow{\omega = -\sigma} X^*(-j\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad (b)$$

Comparando (a) y (b) $\Rightarrow Y(j\omega) = X^*(-j\omega)$ //

• Diferenciación: $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} j\omega X(j\omega)$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

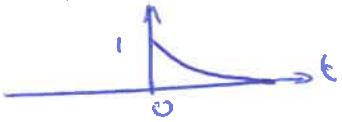
Probamos con: $x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(j\omega)\, j\omega}_{Y(j\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega \longrightarrow Y(j\omega) = j\omega\, X(j\omega).$$

~~Otra forma:~~ $\cancel{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \rightarrow}$ $Y(j\omega) = j\omega\, X(j\omega)$

C6 (C15)

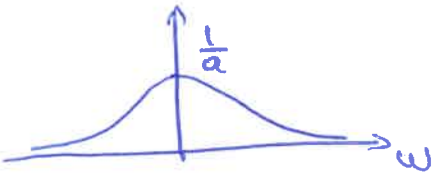
$x(t) = e^{-at}u(t)$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{-t(a+j\omega)}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{-1}{a+j\omega}\cdot(-1) = \underline{\underline{\frac{1}{a+j\omega}}} = \frac{a-j\omega}{(a+j\omega)(a-j\omega)} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$$

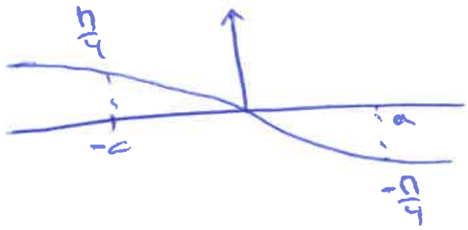
$$|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}\cdot\frac{a+j\omega}{a^2+\omega^2}} = \sqrt{\frac{a^2+\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{a^2+\omega^2}}$$



El módulo es par. Toda señal real tendrá un espectro par.

$$\measuredangle\{X(j\omega)\} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\omega}{a}\right)$$

Fase es Impar



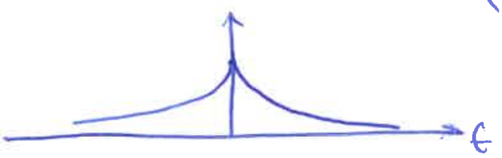
$X(j\omega) \rightarrow$ simetría hermítica.

C7 (C16)

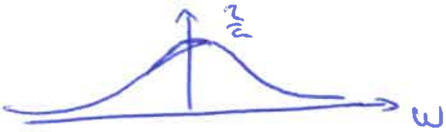
$$x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t}\, dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt$$

$\boxed{\text{Cuestión 4}}$ (*) $= \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.



$X(j\omega)$



C8

(CC17)

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = 2\cdot\frac{1}{2}\left(e^{-at}u(t) + e^{-a(-t)}u(-t)\right)$$

$$x(t) = 2\cdot \text{par}\{\underbrace{e^{-at}u(t)}_{f(t)}\}$$ sabemos que la TF es $\frac{1}{a+jw} = F(jw)$

$$X(jw) = \underbrace{2\cdot TF\{\text{par}[e^{-at}u(t)\}}_{2\,Re\{L(jw)\}} = 2Re\left\{\frac{a-jw}{a^2+w^2}\right\} = 2\frac{a}{a^2+w^2}.$$

C9

(CC18)

Sabemos que $x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-jw)$.

Demostración:

$$X^*(jw) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{jwt}\, dt.$$

Si cambiamos w por $-w$:

$$X^*(-jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{-jwt}\, dt = TF\{x^*(t)\}$$

Si además $x(t)$ es real:

$$X^*(-jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{-jwt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt = X(jw)$$

Observamos que la TF es hermítica.

(C11) Demostrar
(C6)

$$g(t) \xleftrightarrow{TF} f(jw) = G(jw)$$
$$f(t) \xleftrightarrow{TF} 2\pi g(-w) = F(jw).$$

$$f(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-jwt}\, dt = G(jw).$$

Hacemos un par de cambios de variable: $\left.\begin{matrix} w \to v \\ t \to r \end{matrix}\right\}$

$$f(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} g(r) e^{-jvt}\, dv \Rightarrow \begin{matrix} v \to t \\ r \to w \end{matrix}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w)\, e^{-jtw}\, dw \quad (a)$$

Por otro lado:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jw)\, e^{jwt}\, dw = \quad \begin{matrix} w = -v \\ dw = -dv \\ w \to \pm\infty \Rightarrow v \to \mp\infty \end{matrix} \qquad w \leftrightarrow v$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} F(-jv) e^{-jvt} (-dv) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(-jv) e^{-jvt}\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(-jw) e^{-jwt}\, dw \quad (b)$$

Por lo tanto (a) = (b), y tenemos

$$\frac{1}{2\pi} F(-jw) = g(w) \leftrightarrow F(-jw) = 2\pi g(w) \leftrightarrow \boxed{F(jw) = 2\pi g(-w)}$$

(C12) Demostrar la relación de Parseval:
(C8)

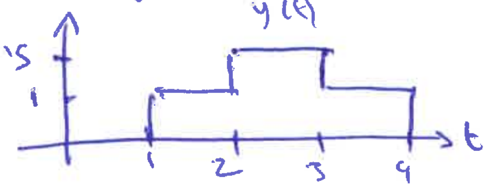
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(jw)|^2\, dw.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(jw)\, e^{-jwt}\, dw\right] dt$$

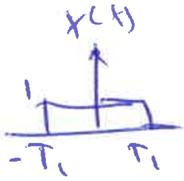
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(jw) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt}_{X(jw)}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(jw)\, X(jw)\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(jw)|^2\, dw$$

(C13) (C9) Conocida la TF de un pulso rectangular, encontrar la TF de $y(t) = u(t-1) + 0'5\,u(t-2) - 0'5\,u(t-3) - u(t-4)$.



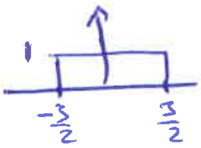
Partimos de conocer $x(t) = u(t+T_1) - u(t-T_1)$



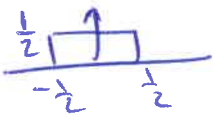
$$x(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

y(t) puede verse como la suma de dos pulsos escalados:

$$x_1(t) = \xleftrightarrow{TF} X_1(j\omega) = \frac{2\sin\left(\omega\frac{3}{2}\right)}{\omega}$$



$$x_2(t) \xleftrightarrow{TF} X_2(j\omega) = \frac{2\sin\left(\omega\frac{1}{2}\right)}{\omega}$$



Opción 1:

$$z(t) = x_1(t) + 0'5\,\cancel{x}(t) \xleftrightarrow{TF} Z(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)\cdot 0'5$$

$$Z(j\omega) = \frac{2\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{\omega} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\omega\right)}{\omega}$$

$$y(t) = z(t-2'5) \xleftrightarrow{TF} Y(j\omega) = e^{-j\omega 2'5}\,Z(j\omega)$$

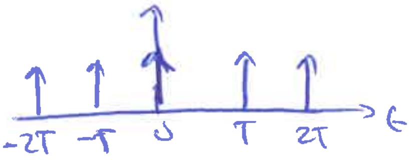
$$Y(j\omega) = \frac{e^{-j\omega 2'5}}{\omega}\left(2\sin\left(\tfrac{3}{2}\omega\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\omega\right)\right)$$

Opción 2:

$$y(t) = \cancel{x_2(t)}\; x_2(t-1'5) + 1'5\,x_2(t-2'5) + x_2(t-3'5)$$

$$Y(j\omega) = X_2(j\omega)\,e^{-j\omega 1'5} + 1'5\,X_2(j\omega)\,e^{-j\omega 2'5} + X_2(j\omega)\,e^{-j3'5\omega}$$

(C14) TF$\{x(t)\}$ $\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$



(C10)

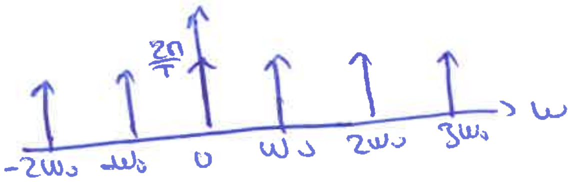
Señal periódica de periodo T → DSF.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-j\frac{2\pi}{T}t};$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\,dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)\,\underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{T}k\cdot 0}}_{1}\,dt=\frac{1}{T}\quad\forall k.$$

La TF de señales periódicas viene dada por:

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$$



(C15) TF de $x(t)=\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$.

(C11)

Anteriormente vimos que la TF de un pulso cuadrado entre $-T_1$ y T_1 era:

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{si } |t|<T_1\\ 0 & \text{si } |t|>T_1\end{cases}\xrightarrow{TF} g(\omega)=\frac{2\,\text{sen}(\omega T_1)}{\omega}$$

Entonces, ahora usamos la propiedad de dualidad:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t)\xrightarrow{TF} g(\omega)\\ g(t)\xrightarrow{TF} 2\pi f(-\omega)\end{array}}$$

Si $g(t)=\frac{2\,\text{sen}(tT_1)}{t}\xrightarrow{TF} g(j\omega)=\begin{cases}2\pi & |\omega|<T_1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$

Como $x(t)=\frac{\text{sen}(Wt)}{\pi t}=\frac{2}{2}\frac{1}{\pi}\frac{\text{sen}(Wt)}{t}\rightarrow X(j\omega)=\frac{2\pi}{2\pi}f(-j\omega)$

$$X(j\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } |\omega|<W\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

C16 TF de $~~y(t)~~ = x(t) = u(t)$
(C12)

Anteriormente vimos que $x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega) = 1$

Sabiendo que $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$ y usando las propiedades:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\, \delta(\omega)$$

En nuestro caso:

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot 1 + \pi \cdot 1 \cdot \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega).$$

Opt 2: $Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\infty} - e^{-j\omega 0}\right)$

$$= \frac{1}{j\omega} \quad \forall \omega \neq 0 \qquad \text{y } \omega = 0?$$

$\omega = 0$: $Y(j\omega) = \int_{0}^{\infty} 1\, dt$?

C17 TF de $x(t) = \delta(t - t_0)$
(C13)

Sabemos que $TF\{\delta(t)\} = 1$.

Aplicando: $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega)$

$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(j\omega)\, e^{-j\omega t_0}$

$$y(t) = 1 \cdot e^{-j\omega t_0}$$

C18 TF de $x(t) = t\, e^{-at} u(t)$, con $a > 0$.
(C14)

Si simplemente integramos queda algo complicado:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-at} u(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} t\, e^{-(a + j\omega)t}\, dt$$

C19 Respuesta en frecuencia para $y'(t)+3y(t)=x(t)$.

TF de la ecuación:

$$j\omega\, Y(j\omega) + 3\,Y(j\omega) = X(j\omega);$$

$$\boxed{Y(j\omega) = H(j\omega)\,X(j\omega)}$$

$$(j\omega+3)\,Y(j\omega) = X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega+3)}$$

C20 Respuesta en freq. de $3y''(t)+y(t) = 5x'(t)$.

$$3(j\omega)^2\,Y(j\omega) + Y(j\omega) = 5j\omega\, X(j\omega)$$

$$(3(j\omega)^2+1)\,Y(j\omega) = 5j\omega\, X(j\omega) \longrightarrow H(j\omega) = \frac{5j\omega}{3(j\omega)^2+1}$$

Aplicando integración por partes: $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$ con

$$\begin{cases} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^{-(a+jw)t}dt \Rightarrow v = \frac{-1}{a+jw}e^{-(a+jw)t} \end{cases}$$

$$X(jw) = \left[t\cdot\frac{-1}{a+jw}e^{-(a+jw)t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-1}{a+jw}e^{-(a+jw)t}dt = \frac{1}{a+jw}\int_0^\infty e^{-(a+jw)t}dt$$

$$= \frac{-1}{(a+jw)^2}\left[e^{-(a+jw)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{(a+jw)^2}.$$

Opción 2: usando propiedades

$$x(t) = t\underbrace{e^{-at}u(t)}_{z(t)}$$

ejercicio anterior

$$Z(jw) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-jwt}dt = \dots = \frac{1}{a+jw}$$

Sabemos que: $-jt\,z(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{dZ(jw)}{dw} \Longrightarrow \underbrace{t\,z(t)}_{x(t)} \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{j}\frac{d}{}$

$$\frac{d\frac{1}{a+jw}}{dw} = \frac{-j}{(a+jw)^2} = \frac{-j}{(a+jw)^2}$$

Por lo tanto: $TF^{-1}\left\{\frac{-j}{(a+jw)^2}\right\} = -jt\underbrace{e^{-at}u(t)}_{z(t)}$

Como a nosotros nos interesa la $TF\{te^{-at}u(t)\}$:

$$X(jw) = \frac{1}{-j}\frac{-j}{(a+jw)^2} = \frac{1}{(a+jw)^2}$$

Problemas Tema 3

(P1) $x(t) = x(t+T)$ con $T = 8$ seg. $x(t) \in \mathbb{R}$

$a_k = 0 \;\; \forall k \neq \pm 1, \pm 3.$

$a_1 = a_{-1} = 2$

$a_3 = a_{-3}^* = 4j$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)\ ?$$

Por ser periódica:

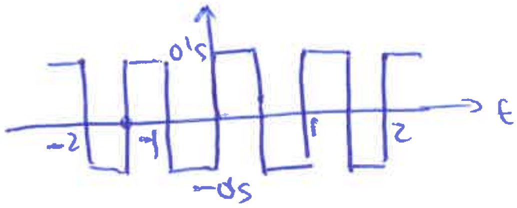
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k t}{T}} = a_3 e^{-j\frac{6\pi t}{T}} + a_1 e^{-j\frac{2\pi t}{T}} + a_1 e^{j\frac{2\pi t}{T}} + a_3 e^{j\frac{6\pi t}{T}}$$

$$= \underline{2 e^{j\frac{2\pi t}{T}} + 2 e^{-j\frac{2\pi t}{T}}} + \underline{4j e^{j\frac{6\pi t}{T}} - 4j e^{-j\frac{6\pi t}{T}}}$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 8\sin\left(\frac{3\pi t}{4}\right) = \underline{4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 8\cos\left(\frac{3\pi t}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

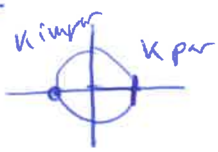
(P2) $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ $\qquad \omega_0 = 2\pi \rightarrow T = 1$ seg.



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\frac{2\pi k t}{T}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j\frac{2\pi k t}{T}} dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-j\frac{2\pi k t}{T}} dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\pi k} - 1}{-j2\pi k}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{e^{-j2\pi k}}^{\,1} - e^{-j\pi k}}{-j2\pi k}\right]$$

$$= \frac{1}{-j4\pi k}\left[e^{-j\pi k} - 1 - 1 + e^{-j\pi k}\right] = \frac{2}{-j4\pi k}\left[e^{-j\pi k} - 1\right]^*$$



$$= \frac{(-1)^k - 1}{-j2\pi k} = \frac{j\left((-1)^k - 1\right)}{2\pi k}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} 1\, dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\, dt = 0$$

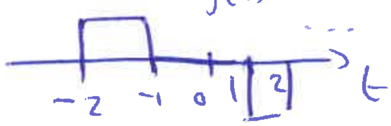
$$a_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k - 1}{-j2\pi k} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

P4 a/ DSF de $x(t)$

$T = 6$

Simplificamos usando propiedades:

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$



$\Longrightarrow$ Recordar que: Si $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ entonces $x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(t)\,d\tau$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} y(t)\, e^{-jw_0kt}\, dt = \frac{1}{6}\int_{-2}^{-1} e^{-jw_0kt}\, dt - \frac{1}{6}\int_{1}^{2} e^{-jw_0kt}\, dt$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{-jw_0k}\left[e^{-jw_0kt}\right]_{-2}^{-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{-jw_0k}\left[e^{-jw_0kt}\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{-j6w_0k}\left[e^{jw_0k} - e^{j2w_0k} - e^{-j2w_0k} + e^{-jw_0k}\right]$$

$w_0 = \frac{2\pi}{6}$

$$= \frac{1}{-j\cancel{2}\pi k}\left[\cancel{2}\cos(w_0k) - \cancel{2}\cos(2w_0k)\right] = \frac{1}{-j\pi k}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right)\right)$$

$$= \frac{1}{j\pi k}\left[\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right)\right] \quad \forall k \neq 0$$

Solucion aparte b ↓

$a_0 = 0$

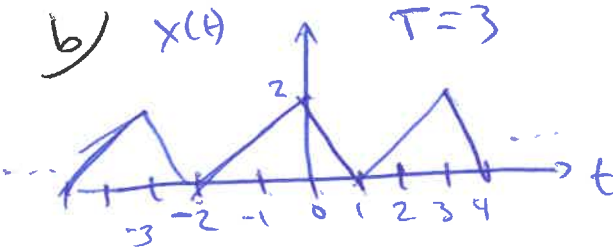
Entonces, si $x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(t)\, dt \xleftrightarrow{DSF} b_k = \frac{1}{jkw_0} a_k$

$$b_k = \frac{1}{jkw_0}\cdot\frac{1}{j\pi k}\left[\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right)\right] = \frac{-3}{k^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

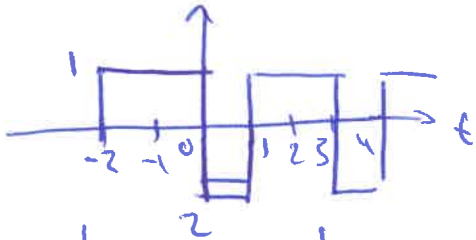
$\forall k \neq 0$

$k = 0 \longrightarrow b_0 = \langle x(t)\rangle = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $x(t)$ $T=3$



$\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$



$$y(t) \xleftrightarrow{DSF} a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} y(t)\, e^{-j\omega_0 k t}\, dt = \frac{1}{3}\int_{-2}^{0} e^{-j\omega_0 k t}\, dt - \frac{1}{3}\int_{0}^{1} +2e^{-j\omega_0 k t}\, dt$$

$$= \frac{1}{-j3\,\omega_0 k}\left[1 - e^{+j2\omega_0 k} - 2e^{-j\omega_0 k} + 2\right] = \frac{-1}{j2\pi k}\left[1 - e^{j2\omega_0 k} - 2e^{-j\omega_0 k} + 2\right]$$

$$= \frac{-1}{j2\pi k}\left[e^{j\omega_0 k}\left(e^{-j\omega_0 k} - e^{j\omega_0 k}\right) + 2e^{-j\frac{\omega_0 k}{2}}\left(e^{j\frac{\omega_0 k}{2}} - e^{-j\frac{\omega_0 k}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{\cancel{j2}\pi k}\left[-e^{j\frac{2\pi k}{3}} \cdot \cancel{2j}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + 2e^{-j\frac{\pi k}{3}}\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)\cdot \cancel{2j}\right]$$

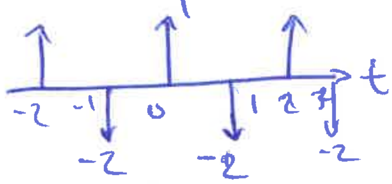
$$= \frac{1}{\pi k}\left[e^{j\frac{2\pi k}{3}}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - 2e^{-j\frac{\pi k}{3}}\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)\right] \quad \forall k \neq 0$$

$k=0 \rightarrow a_0 = 0.$

$$x(t) \xleftrightarrow{DSF} b_k = \frac{1}{jk\omega_0}a_k = \frac{-3j}{2\pi^2 k^2}\left[e^{j\frac{2\pi k}{3}}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - 2e^{-j\frac{\pi k}{3}}\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)\right] \quad \forall k \neq 0.$$

$k=1 \rightarrow b_k = <x(t)> = 1$

c) $T=2.$



$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{1'5} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{1'5} \left[\delta(t) - 2\delta(t-1)\right] e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{1'5} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 0}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{1'5} 2\delta(t-1)\, e^{-jk\omega_0 1}\, dt = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-jk\omega_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - e^{-j\pi k} = \frac{1}{2} - (-1)^k$$

P5 Conocemos $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega)$. Obtener la TF de las siguientes señales.

a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow X(j\omega)\, e^{-j\omega t_0}$$

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-j\omega)$$

Por tanto:

$$\begin{cases} z(t) = x(1+t) \longleftrightarrow e^{-j\omega(-1)} X(j\omega) = e^{j\omega} X(j\omega) = Z(j\omega). \\ w(t) = z(-t) \longleftrightarrow W(j\omega) = Z(-j\omega) = e^{-j\omega} X(-j\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(t) = x(t-1) \longleftrightarrow R(j\omega) = e^{-j\omega \cdot 1} X(j\omega) \\ s(t) = r(-t) \longleftrightarrow S(j\omega) = R(-j\omega) = e^{j\omega} X(-j\omega). \end{cases}$$

$$X_1(j\omega) = W(j\omega) + S(j\omega) = e^{-j\omega} X(-j\omega) + e^{j\omega} X(-j\omega)$$

$$= 2\cos(\omega)\, X(-j\omega)$$

b) $x_2(t) = x(3t-6)$

$$v(t) = x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$z(t) = x(t-6) \longleftrightarrow Z(j\omega) = X(j\omega)\, e^{-j\omega 6}$$

$$x_2(t) = z(3t) \longleftrightarrow X_2(j\omega) = \frac{1}{3} Z\left(j\frac{\omega}{3}\right)$$

$$X_2(j\omega) = \frac{e^{-j\omega 2}}{3} X\left(j\frac{\omega}{3}\right)$$

c) $x_3(t) = \dfrac{d^2 x(t-1)}{dt^2}$ $\qquad \dfrac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(j\omega)$

$$v(t) = x(t-1) \longleftrightarrow V(j\omega) = X(j\omega)\, e^{-j\omega}$$

$$x_3(t) = \frac{d^2 v(t)}{dt} \longleftrightarrow X_3(j\omega) = (j\omega)^2 V(j\omega)$$

$$X_3(j\omega) = -\omega^2 e^{-j\omega} X(j\omega)$$

P7 Sabemos que $x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{TF} X(jw) = \dfrac{2}{1+w^2}$

a) $TF\{ y(t) = t e^{-|t|} \}$

$$t \cdot x(t) \xleftrightarrow{TF} j \frac{d X(jw)}{dw}$$

$$\frac{d X(jw)}{dw} = \frac{-4w}{(1+w^2)^2}$$

$$Y(jw) = j \frac{d X(jw)}{dw} = \frac{-j4w}{(1+w^2)^2}$$

b) Aplicar la dualidad para obtener la TF $\dfrac{4t}{(1+t^2)^2} = h(t)$

$$f(t) \xleftrightarrow{TF} g(w)$$

$$g(t) \xleftrightarrow{TF} 2\pi f(-w).$$

$$f(t) = t e^{-|t|} \xleftrightarrow{TF} g(w) = \frac{-j4w}{(1+w^2)^2}$$ dualidad

$$g(t) = \frac{-4jt}{(1+w^2)^2} \xleftrightarrow{TF} 2\pi f(-w) = -2\pi w e^{-|w|}$$ linealidad

$$h(t) = \frac{1}{-j} \cdot g(t) \xleftrightarrow{TF} H(jw) = \frac{1}{-j} 2\pi f(-w) = + \frac{2\pi w}{j} e^{-|w|}$$

$$H(jw) = \frac{2\pi}{j} w e^{-|w|}$$

P9 $h(t) \xleftrightarrow{TF} H(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega+3}$, SLIT y causal.

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$ ¿$x(t)$?

De las tablas: $e^{-at}u(t)$ con $a>0 \xleftrightarrow{TF} \dfrac{1}{a+j\omega}$

Por lo tanto:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega} = \frac{4+\cancel{j\omega}-3-\cancel{j\omega}}{(3+j\omega)(4+j\omega)} = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}$$

Además: $Y(j\omega) = H(j\omega)\,X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{j\omega+3}{(3+j\omega)(4+j\omega)} = \frac{1}{4+j\omega}$$

$$x(t) = e^{-4t}u(t)$$

P11 a) $x(t) = t e^{-2t}u(t)$; $h(t) = e^{-4t}u(t)$

$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{TF} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

$\left.\begin{aligned} x(t) &= t e^{-2t}u(t) \\ h(t) &= e^{-4t}u(t) \end{aligned}\right\}$ $\quad e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{a+j\omega}$

$\quad t\,v(t) \longleftrightarrow j\dfrac{dV(j\omega)}{d\omega}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{4+j\omega}; \quad X(j\omega) = j\frac{d\,\frac{1}{2+j\omega}}{d\omega} = j\cdot\frac{-j}{(2+j\omega)^2} = \frac{1}{(2+j\omega)^2}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2}\,\frac{1}{(4+j\omega)}$$

Buscamos la descomposición en raíces simples:

$$\frac{1}{(4+j\omega)(2+j\omega)^2} = \frac{A}{4+j\omega} + \frac{B}{2+j\omega} + \frac{C}{(2+j\omega)^2}$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{1}{(4+jw)(2+jw)^2} = \frac{A(2+jw)^2 + B(4+jw)(2+jw) + C(4+jw)}{(4+jw)(2+jw)^2}$$

$$1 = A(2+jw)^2 + B(4+jw)(2+jw) + C(4+jw)$$

$$1 = A(4-w^2+4jw) + B(8+6jw-w^2) + C(4+jw)$$

Reordenamos:

$$1 = 4A+8B+4C + wj(4A+6B+C) + w^2(-A-B)$$

Aplicando el principio de identidad de polinomios tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4A+8B+4C=1 \\ 4A+6B+C=0 \\ -A-B=0 \end{array}\right\}$$ Cuyas soluciones son: $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$; $C=\frac{1}{2}$

$$Y(jw) = \frac{A}{4+jw} + \frac{B}{2+jw} + \frac{C}{(2+jw)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{4+jw} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2+jw} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2+jw)^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{-4t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}te^{-2t}u(t).$$

---

c) $x(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(jw) = \dfrac{1}{1+wj}$

$h(t) = e^{t}u(-t) \Longleftrightarrow x(-t) = X(-jw) \longrightarrow H(jw) = \dfrac{1}{1-wj}$

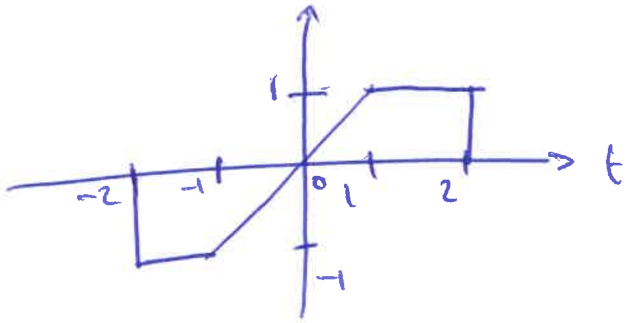
$$Y(jw) = \frac{1}{(1+wj)}\cdot\frac{1}{(1-wj)} = \frac{A}{1+wj} + \frac{B}{1-wj}$$

$$A(1-wj) + B(1+wj) = 1 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ -A+B=0 \end{array}\right\} \quad A=\tfrac{1}{2} \quad B=\tfrac{1}{2}$$

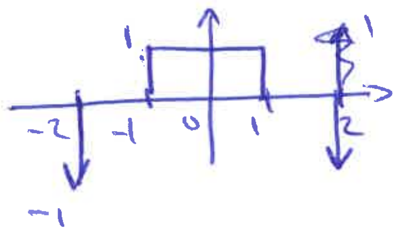
$$Y(jw) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+wj} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-wj}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{t}u(-t)$$

P14 TF de $x(t)$



$\frac{d\,x(t)}{dt}$



$$z(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} \longrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{t} z(\tau)\,d\tau$$

$$z(t) = \underline{\Pi(t)} - \delta(t+2) - \delta(t-2).$$

$$TF\{\Pi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t)\, e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\,dt = \frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right]$$

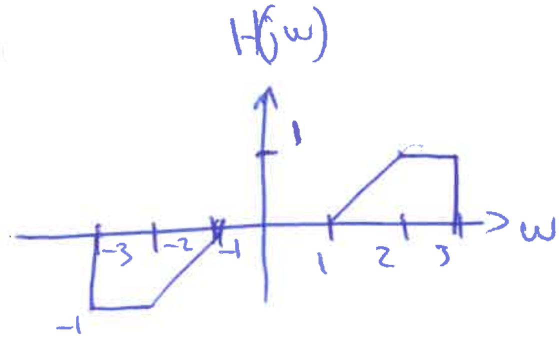
$$= \frac{2j\sin(\omega)}{j\omega} = \frac{2\sin(\omega)}{\omega}$$

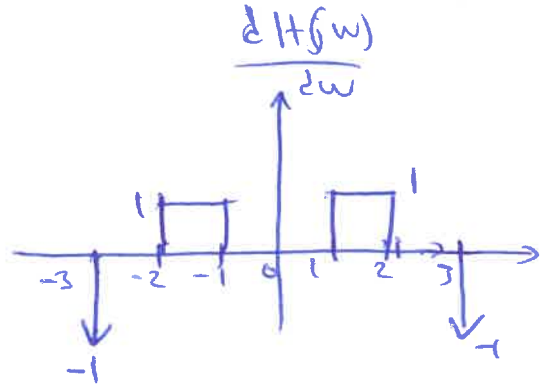
$$Z(j\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} - e^{j\omega 2} - e^{-j\omega 2} = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} - 2\cos(2\omega)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} z(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{TF} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} Z(j\omega) + \pi Z(0)\,\delta(\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{j\omega^2} - \frac{2\cos(2\omega)}{j\omega} + \pi(0) = \frac{-2j\sin(\omega)}{\omega^2} + \frac{2j\cos(2\omega)}{\omega}$$

P15





a) $Z(jw) = \dfrac{dH(jw)}{dw} = \Pi(w) * [\delta(w+1'5) + \delta(w-1'5)] - [\delta(w+3) + \delta(w-3)]$

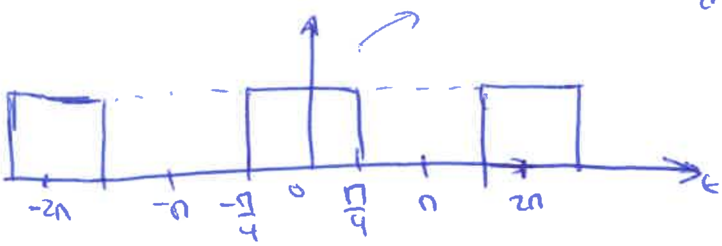
Sabemos que: $t\,v(t) \longleftrightarrow j\dfrac{dV(jw)}{dw}$

Por lo tanto: $z(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)}{\pi t} \cdot \dfrac{1}{\pi}\cos(1'5t) \cdot 2\pi - \dfrac{1}{\pi}\cos(3t)$

$z(t) = -j\,t\,h(t) \longleftrightarrow Z(jw) = \dfrac{dH(jw)}{dw}$

$h(t) = \dfrac{1}{-jt} z(t) = j\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)\cos(1'5t)}{\pi t^2} - \dfrac{j}{\pi t}\cos(3t)$

b) $x(t)$ $\quad T = 2\pi \rightarrow w_0 = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$



Tablas: $X(jw) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2\operatorname{sen}(k w_0 \frac{\pi}{4})}{k}}_{2\pi a_k} \delta(w - k w_0)$

$X(jw) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen}(k\frac{\pi}{4})}{k}\delta(w-k)$

c) Tablas: $a_k = \dfrac{\operatorname{sen}(k\frac{\pi}{4})}{k\pi}$

d) $P_x = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{\langle T_0\rangle} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\,W$

e) A la salida del sistema solo pasan las deltas en $k = \pm 2, \pm 3$:

$$y(t) = H(-3)a_{-3}e^{-j3t} + H(-2)a_{-2}e^{-j2t} + H(3)a_3e^{j3t} + H(2)a_2e^{j2t}$$

$H(-3) = H(-2) = -1$; $H(2) = H(3) = 1$

$$y(t) = -a_{-3}e^{-j3t} + -a_2e^{-j2t} \cancel{+} - a_3e^{j3t} + a_2e^{j2t}$$

$$P_y = \sum_{-k} |b_k|^2 = |a_{-3}|^2 + |a_{-2}|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2$$

$$= 2|a_3|^2 + 2|a_2|^2 = 2\left|\frac{sen(3\frac{\pi}{4})}{3\pi}\right|^2 + 2\left|\frac{sen(2\frac{\pi}{4})}{2\pi}\right|^2$$

$$= 0'06$$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{0'06}{0'25} = 0'24 \ (\simeq 24\%)$$

P17 Por ser SLIT podríamos calcular $y(t) = x(t) * h(t)$, pero esto es muy complicado con estas señales. Por lo tanto, vamos a la frecuencia: $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2W_1W_2}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{W_1t}{\pi}\right) \text{sinc}\left(\frac{W_2t}{\pi}\right)e^{-j\omega t}\,dt$$

Complicado... Aplicamos propiedades.

En la cuestión (11) calculamos:

$$z(t) = \frac{sen(Wt)}{\pi t} \xleftrightarrow{TF} Z(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

Por lo tanto: $h_1(t) = \frac{\pi}{W_1}\frac{sen(W_1t)}{\pi t} \xrightarrow{TF} H_1(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{W_1} & si\ |\omega| < W_1 \\ 0 & resto \end{cases}$

$h_2(t) = \frac{\pi}{W_2}\frac{sen(W_2t)}{\pi t} \xrightarrow{TF} H_2(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{W_2} & si\ |\omega| < W_2 \\ 0 & resto \end{cases}$

Ahora sacamos $H(jw)$:

$$H(jw) = \frac{2W_1W_2}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} L(jw);$$

$$H(jw) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \leq -W_1+W_2 \\ (W_1+W_2)+w & \text{si } -W_1-W_2 \leq w < -W_1+W_2 \\ 2W_2 & \text{si } -W_1+W_2 \leq w < W_1-W_2 \\ W_1+W_2-w & \text{si } W_1-W_2 \leq w < W_1+W_2 \\ 0 & \text{si } w > W_1+W_2 \end{cases}$$

Repetimos el proceso para $x(t)$.

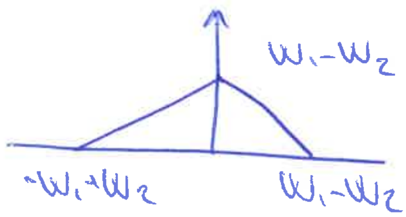
$$x(t) = \frac{(W_1-W_2)^2}{2\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{W_1-W_2}{2\pi} t\right) \text{sinc}\left(\frac{W_1-W_2}{2\pi} \cdot t\right)$$

$$X(jw) = \frac{(W_1-W_2)^2}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \, TF\left\{ \frac{\text{sen}\left(\frac{W_1-W_2}{2} \cdot t\right)}{\frac{W_1-W_2}{2} t} \right\} * TF\left\{ \frac{\text{sen}\left(\frac{W_1-W_2}{2} \cdot t\right)}{\frac{W_1-W_2}{2} t} \right\}$$

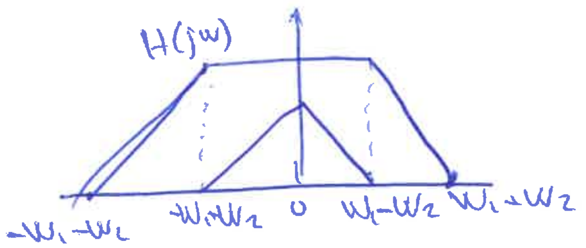
$$\hookrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{W_1-W_2} & \text{si } |w| < \frac{W_1-W_2}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$X(jw) = \left[u\left(w + \frac{W_1-W_2}{2}\right) - u\left(w - \frac{W_1-W_2}{2}\right)\right] * \left[u\left(w + \frac{W_1-W_2}{2}\right) - u\left(w - \frac{W_1-W_2}{2}\right)\right]$$

$$X(jw) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < -(W_1-W_2) \\ 2w + (W_1-W_2) & \text{si } -(W_1-W_2) \leq w < 0 \\ -2w + (W_1-W_2) & \text{si } 0 \leq w < +W_1-W_2 \\ 0 & \text{si } w > W_1-W_2 \end{cases}$$



Si pintamos $X(jw)$ y $H(jw)$



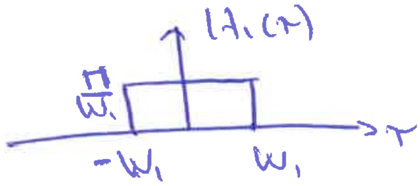
Por lo tanto: $Y(jw) = 2W_2 X(jw)$.

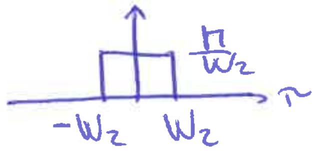
$$y(t) = 2W_2 \, x(t)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{W_2(W_1-W_2)^2}{\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{W_1-W_2}{2\pi} t\right)}$$

Ahora calculamos $H_1(j\omega) * H_2(j\omega)$:

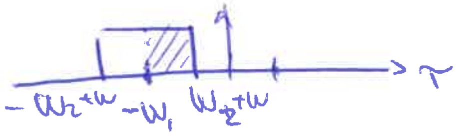
$$L(j\omega) = H_1(j\omega) * H_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\tau)\, H_2(\omega-\tau)\, d\tau$$



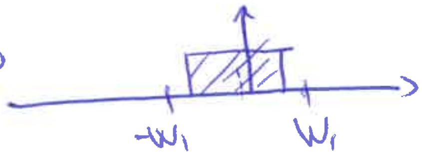


1

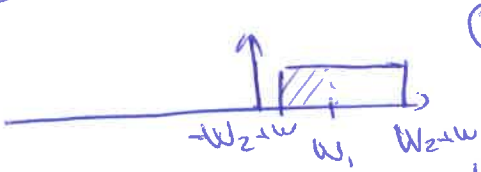
2



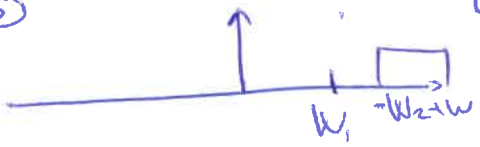
3



4



5



(1) $W_2+w \le -W_1 \longrightarrow \underline{w \le -W_1 - W_2}$

$L(jw) = 0.$

(2) $\left.\begin{array}{l} W_2+w > -W_1 \\ -W_2+w < -W_1 \end{array}\right\} \underline{-W_1-W_2 \le w < -W_1+W_2}$

$$L(jw) = \int_{-W_1}^{W_2+w} \frac{\pi^2}{W_1W_2}\, d\tau = \frac{\pi^2}{W_1W_2}(W_2+w+W_1)$$

(3) $\left.\begin{array}{l} -W_2+w \ge -W_1 \\ W_2+w < W_1 \end{array}\right\} -W_1+W_2 \le w \le W_1-W_2$

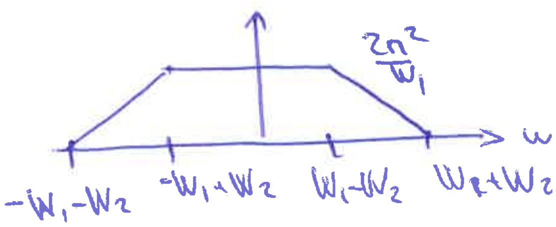
$$L(jw) = \int_{-W_2+w}^{W_2+w} \frac{\pi^2}{W_1W_2}\, d\tau = \frac{\pi^2}{W_1W_2}(W_2+\cancel{w}+W_2-\cancel{w})$$

$$= \frac{2W_2\pi^2}{W_1W_2} = \frac{2\pi^2}{W_1}$$

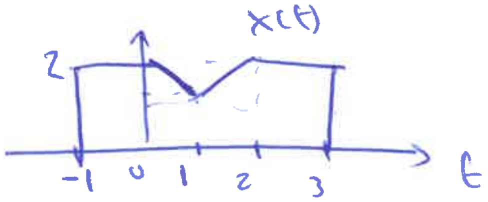
(4) $\left.\begin{array}{l} W_2+w > W_1 \\ -W_2+w < W_1 \end{array}\right\} \underline{W_1-W_2 \le w < W_1+W_2}$

$$L(jw) = \int_{-W_2+w}^{W_1} \frac{\pi^2}{W_1W_2}\, d\tau = \frac{\pi^2}{W_1W_2}(W_1+W_2-w)$$

(5) $-W_2+w > W_1 \longrightarrow \underline{w > W_1+W_2}$ $\quad L(jw) = 0.$



(P18) $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega)$



a/ $\sphericalangle \{X(j\omega)\}$

Definimos $x_0(t) = x(t+1) \longrightarrow x_0(t)$ es real y par,

$X_0(j\omega)$ es real y par $\longrightarrow \sphericalangle\{X_0(j\omega)\} = 0.$

~~x(t-1)~~. $x(t) = x(t+1) \longleftrightarrow X(j\omega) = X_0(j\omega)\, e^{j\omega}$

$\sphericalangle\{X(j\omega)\} = \sphericalangle\{X_0(j\omega)\} + \omega = 0 + \omega = \underline{\underline{\omega}}$

b/ $X(j0)$?

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \longrightarrow X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j0t}\, dt = \underline{\underline{7}}$

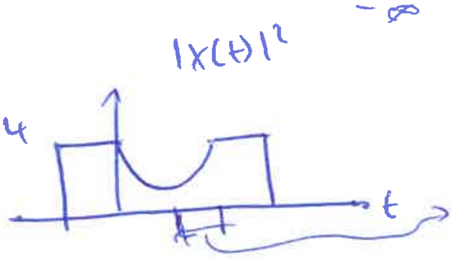
c/ ¿$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, d\omega$?

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \longrightarrow x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega \cdot 0}\, d\omega$

$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, d\omega = 2\pi\, x(0) = \underline{4\pi}$

d/ ¿$\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$?

Por parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = 2\pi\, E_x.$



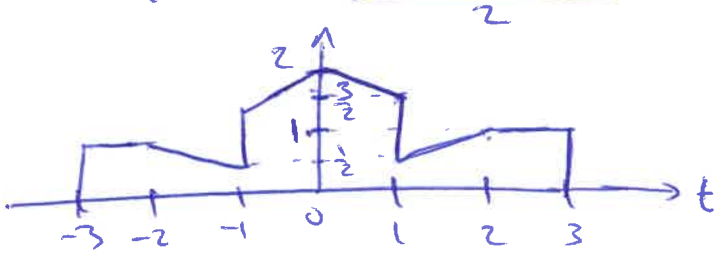
$I = \int_1^2 t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}$; $E_x = 2 \cdot I + 2 \cdot 4 = 2 \cdot \frac{7}{3} + 8$

$\underline{\underline{2\pi E_x = \frac{76}{3}\pi}}$

e) TF^{-1} de $Re\{X(jw)\}$

Por las propiedades: $Par\{x(t)\} \xleftrightarrow{TF} Re\{X(jw)\}$

Por lo tanto: $Par\{x(t)\} = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$



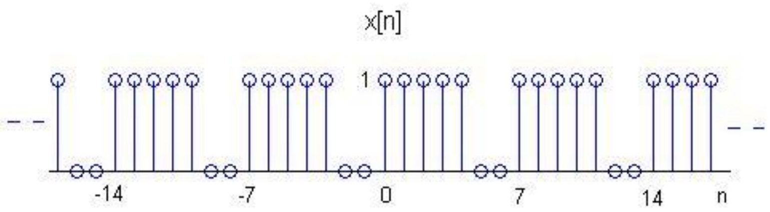
EJERCICIOS TEMA 4: Señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia

Parte I: DSF de señales periódicas discretas

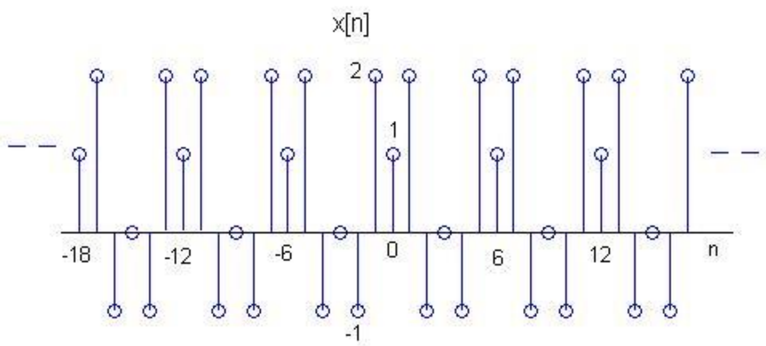
Ejercicio 1

Determine los coeficientes de la serie de Fourier para cada una de las siguientes señales periódicas discretas. Represente la magnitud y la fase de los coeficientes a_k para cada uno de los DSF calculados.

a) *x[n]*



b) *x[n]*



c) *x[n]* periódica con periodo 4 y

$$x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right), \quad para\ 0 \leq n \leq 3$$

d) *x[n]* periódica con periodo 16 y

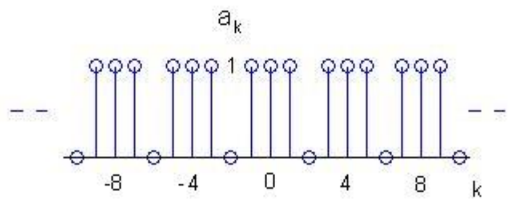
$$x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right), \quad para\ 0 \leq n \leq 15$$

Ejercicio 2

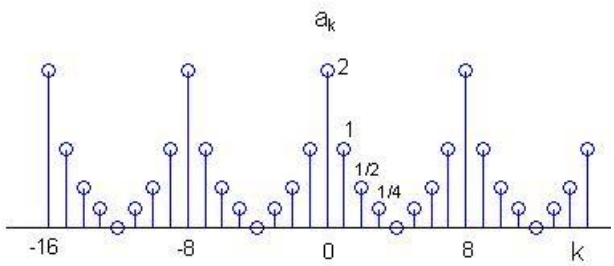
En cada uno de los siguientes apartados se especifican los coeficientes de la serie de Fourier de una señal que es periódica con periodo 8. Determine la señal *x[n]* para cada uno de los casos.

a) $a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$

b) a_k



c) a_k



Ejercicio 3

Sea:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

a) Suponga que N es par y que *x[n]* en la ecuación anterior satisface

$$x[n] = -x\left[n + \frac{N}{2}\right], \quad \forall n$$

Demuestre que $a_k=0$ para cada valor entero par de k.

b) Suponga que N es divisible entre 4. Demuestre que si

$$x[n] = -x\left[n + \frac{N}{4}\right], \quad \forall n$$

entonces $a_k=0$ para cada valor de k que es múltiplo de 4.

c) En forma general, suponga que N es divisible entre un entero M. Demuestre que si

$$x[n] = -x\left[n + \frac{N}{M}\right], \quad \forall n$$

entonces $a_k=0$ para cada valor de k que es múltiplo de M.

Ejercicio 4

Considere un sistema LTI discreto con respuesta al impulso:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

Encuentre la representación en serie de Fourier de la salida y[n] para cada una de las siguientes entradas:

a) $x[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4l]$

b) $x[n]$ es periódica con periodo 6 y

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm 1 \\ 0, & n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$$

Ejercicio 5

Dos operaciones relativamente comunes en el procesado de señales discretas son el diezmado y la interpolación. El diezmado consiste en descartar muestras de una secuencia discreta, comprimiendo o acortando de esta manera la señal. La interpolación consiste en insertar nuevas muestras entre dos instantes consecutivos de la secuencia, expandiendo o alargando la señal. En este problema se exploran los efectos de la interpolación de secuencias discretas utilizando un sistema sencillo: el interpolador lineal.

a) Un interpolador lineal es un sistema que presenta una respuesta al impulso unitario.

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - |n|/L, & |n| \le L \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Demuestre que su respuesta en frecuencia tiene la forma siguiente:

$$H_{lin}\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{L}\left(\frac{\sin(\Omega L/2)}{\sin(\Omega/2)}\right)^2$$

Para ello tenga en cuenta que la función valor absoluto se puede escribir como

$$|n| = \begin{cases} -n, & n \le 0 \\ n, & n \ge 0 \end{cases}$$

También resulta necesaria la siguiente fórmula para el sumatorio de una serie:

$$\sum_{n=0}^{N}(a+nb)x^n = \frac{a-(a+bN)x^{N+1}}{1-x} + \frac{bx(1-x^N)}{(1-x)^2}$$

(que es válida siempre $x \neq 1$)

b) La manera de obtener una señal de salida y[n] interpolada por un factor L a partid de la señal de entrada x[n] es la siguiente:

1º. Se realiza un escalamiento de la señal *x[n]* por un factor *L*, construyéndose una nueva señal $x_{(L)}[n]$.

$$Escalamiento: \quad x_{(L)}[n] = \begin{cases} x[n/L], & n\ múltiplo\ de\ L \\ 0, & resto \end{cases}$$

2º. Se utiliza la señal $x_{(L)}[n]$ como entrada al interpolador lineal, obteniéndose la señal de salida interpolada *y[n]*.

Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de la señal de salida y[n]

Ejercicio 6

Sea x[n] una señal periódica de periodo N con DSF tal que: $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$

Suponiendo que conoce los coeficientes a_k, calcule la representación en serie de Fourier de las siguientes señales:

a) $y[n] = x[n]\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$

b) $y[n] = x[n]\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta[n-lN]$

c) $y[n] = x[n]\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta\left[n-\frac{lN}{3}\right]$

Ejercicio 7

Considere una señal periódica discreta x[n] con coeficientes de Fourier $\{a_k\}$ de la que se conoce la siguiente información:

- x[n] es real y par
- x[n] es periódica con periodo 10
- $a_{12} = 5$;
- $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}\lfloor x[n] \rfloor^2 = 50$

Se pide:

a) determinar a_k para $-5 \leq k \leq 5$
b) expresar x[n] como una sinusoide
c) determinar el periodo *fundamental* de x[n]

Parte II: TF de señales discretas

Ejercicio 1

Determine la transformada de Fourier para cada una de las siguientes señales. Represente la magnitud de cada una de las transformadas calculadas.

a) $x[n] = u[n] - u[n-4]$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$

c) $x[n] = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right) u[-n]$

d) $x[n] = \begin{cases} n, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

e) $$x[n] = x[n-6]$$
$$x[n] = u[n] - u[n-5], \quad 0 \leq n \leq 5$$

Ejercicio 2

Determine, para cada uno de los apartados, la secuencia *x[n]* a la que corresponde las transformadas de Fourier siguientes:

a) $X\left(e^{j\Omega}\right) = 1 + 3e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} - 4e^{-j3\Omega} + e^{-j10\Omega}$

b) $X\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j\frac{\Omega}{2}}, \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi$

c) $X\left(e^{j\Omega}\right) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} \leq |\Omega| \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \frac{3\pi}{4} \leq |\Omega| \leq \pi, \quad 0 \leq |\Omega| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

d) $X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2} k\right)$

Ejercicio 3

Considere un sistema LTI discreto con respuesta al impulso:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Calcule la expresión de *y[n]* (salida del sistema) a partir de su transformada de Fourier $Y(e^{j\Omega})$, para cada una de las siguientes entradas:

a) $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

b) $x[n] = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

Ejercicio 4

La respuesta en frecuencia de un sistema viene dada por:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1 + 2e^{-j\Omega} - 3e^{-j2\Omega}}{1 - e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$$

a) Escriba la ecuación en diferencias que representa dicho sistema.

b) Dibuje la representación esquemática del sistema como diagrama de bloques (adición y multiplicación de líneas de retardos).

c) Calcule la respuesta al impulso h[n] del sistema.

Ejercicio 5

Dada la señal *y[n]* se pide:

$$y[n] = \begin{cases} x\left[n/L + n_0\right] & n \text{ múltiplo de } L \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Relacionar la TF de *y[n]* ($Y(e^{j\Omega})$) con la TF de *x[n]* ($X(e^{j\Omega})$). Para demostrarlo no debe emplearse ninguna propiedad, debiendo basarse la demostración en la fórmula de análisis de la TF. Todos los pasos de la demostración tienen que estar justificados de manera clara.

b) Si $x[n]=3$ para todo n, $L=2$ y $n_0=0$, representar $X(e^{j\Omega})$, $Y(e^{j\Omega})$ e *y[n]*. Además, escribir una expresión analítica para *y[n]*.

Ejercicio 6

Sea $x[n]= x_1[n]\cdot x_2[n]$, con $x_1[n]=na^n u[n]$ y sea $X(e^{j\Omega})$ la TF de $x[n]$ que tiene la siguiente expresión:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j(\Omega-\pi/4)}\right)^2} + \frac{e^{-j(\pi/2)}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j(\Omega+\pi/4)}\right)^2}\right)e^{-j(\Omega-\pi/4)}$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, determine el valor del coeficiente a así como el de la secuencia $x_2[n]$ y de su transformada de Fourier $X_2(e^{j\Omega})$.

Ejercicio 7

Considere un sistema A del que la única información que se tiene es que, tal y como se representa en la figura inferior, cuando a la entrada se introduce la señal $x[n]$ indicada, el sistema responde con la salida $y[n]$ indicada:

$$x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n) + 2\sin(\frac{\pi}{4}n) \longrightarrow \boxed{\quad A \quad} \longrightarrow y[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n) + 2\sin(\frac{\pi}{8}n)$$

Considerando únicamente esta información, justifique si A puede ser o no un sistema LTI.

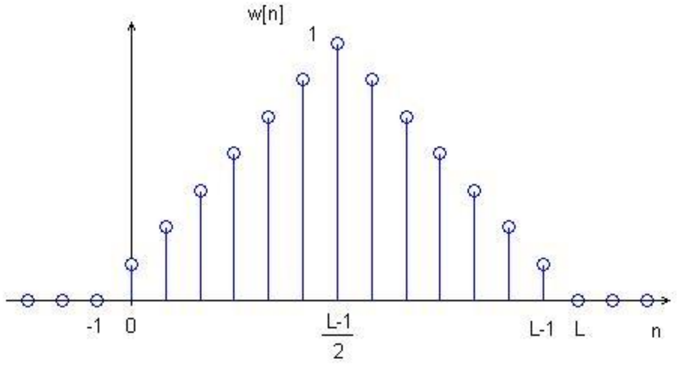
Ejercicio 8

Sean dos secuencias discretas:

$$x_1[n] = Ae^{j(\Omega_1 n+\phi_1)}$$
$$x_2[n] = Ae^{j(\Omega_2 n+\phi_2)}, \quad con\ \Omega_1 < \Omega_2$$

a) Calcular la $TF\{x[n]\}$ siendo $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

b) Si $w[n]$ es la que aparece en la figura inferior,



y sabiendo que *L* es impar, calcule:

b.1) La TF de *w[n]*.

b.2) El módulo y la fase de la TF de *w[n]*.

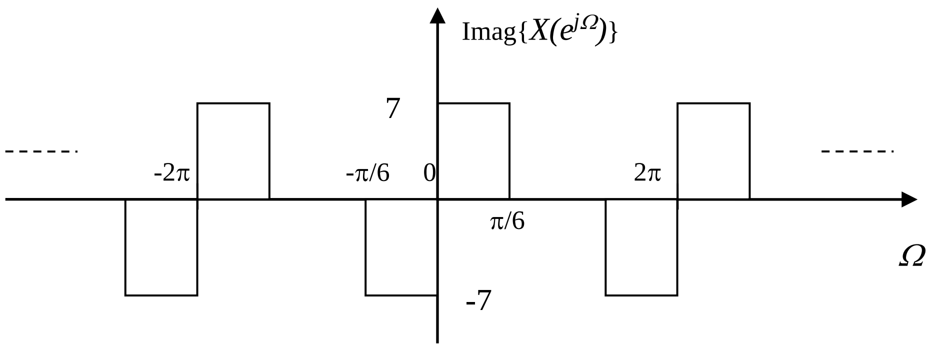
b.3) Los ceros de la TF de *w[n]*.

c) Considere un sistema LTI discreto cuya respuesta al impulso es *w[n]*. Calcule la transformada de Fourier de *y[n]* sabiendo que la secuencia *y[n]* representa la salida del sistema LTI cuando la entrada es *x[n]* (es decir, *y[n]=x[n]*w[n]*).

d) Considere la señal *z[n]= x[n]·w[n]*. ¿Cuál es la longitud de la señal *x[n]*? ¿Cuál es la longitud de la señal *z[n]*? Calcule la transformada de Fourier de *z[n]*.

Ejercicio 9

La secuencia *x[n]* tiene como TF $X(e^{j\Omega})$. Se sabe además que $X(e^{j\Omega})$ es imaginaria pura (es decir, que su parte real vale cero). Teniendo en cuenta que la figura inferior representa la parte imaginaria de $X(e^{j\Omega})$, se pide:



a) Representar la parte real e imaginaria de la TF de *y[n]* siendo *y[n]=x[n]*x[n]*.

b) Si *w[n]* es el producto de *x[n]* por la secuencia $s[n]=(-1)^n$, representar la parte real e imaginaria de $W(e^{j\Omega})$ (transformada de *w[n]*).

c) Representar la parte real e imaginaria de la TF de r*[n]* siendo r*[n]=x[n]· x[n]*.

Ejercicios tema 2

Parte I: DSF

Ejercicio 1

a) $x[n]$ $\quad N=7$

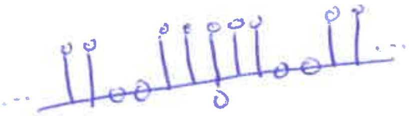
opt. 1:

$$a_k = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{7}kn} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{7}kn} =$$

$$= \frac{1}{7}\,\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{7}k5}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{7}k}} = \frac{1}{7}\,\frac{e^{-j\frac{\pi}{7}k5}\left(e^{j\frac{\pi}{7}k5}-e^{-j\frac{\pi}{7}k5}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{7}k}\left(e^{j\frac{\pi}{7}k}-e^{-j\frac{\pi}{7}k}\right)} = \underbrace{\frac{1}{7}\,\frac{\cancel{2j}\sin\left(\frac{\pi}{7}k5\right)}{\cancel{2j}\sin\left(\frac{\pi}{7}k\right)}}_{|a_k|}\;\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{7}k4}}_{\measuredangle a_k}$$

opt 2: por las tablas:

$z[n]$

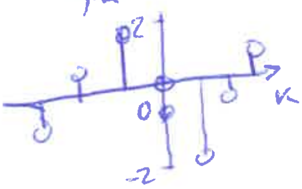


$$z[n] \longleftrightarrow b_k = \frac{1}{7}\,\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{7}k\,\frac{5}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{7}k\cdot\frac{1}{2}\right)}$$

$$x[n] = z[n-2] \longleftrightarrow a_k = e^{-j\frac{2\pi}{7}\cdot 2k}\, b_k$$

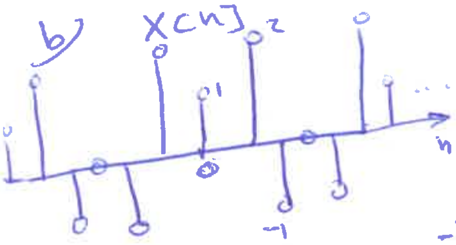
$|a_k|$

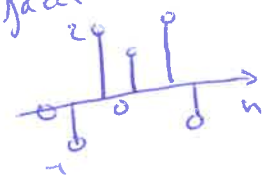
$\measuredangle a_k$



periódico

b) $x[n]$ $\quad N=6 \longrightarrow$ fácil entre -3 y 2





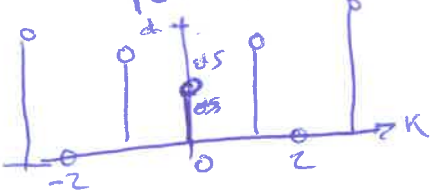
$\rightarrow$ $x[n]$ es real y par $\hookrightarrow$ a_k reales y par

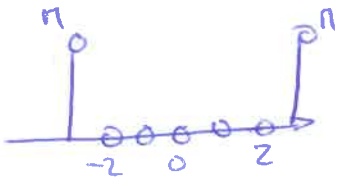
$$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=-3}^{2} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{6}kn} = \frac{1}{6}\left[1+2\left(e^{j\frac{2\pi}{3}k}+e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)-1\left(e^{j\frac{2\pi}{3}k}+e^{j\frac{2\pi}{3}k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[1+4\cos\left(\frac{\pi k}{3}\right)-2\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\right]$$

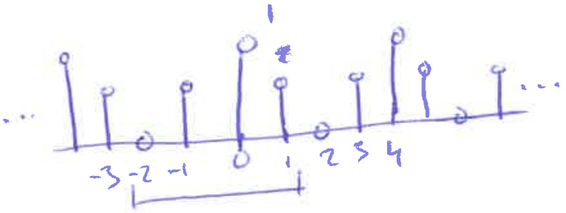
$\measuredangle \rightarrow$ comprobar si: $a_k > 0$ o $a_k < 0$

$|a_k|$





c) $x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ para $0 \le n \le 3$, y $N = 4$

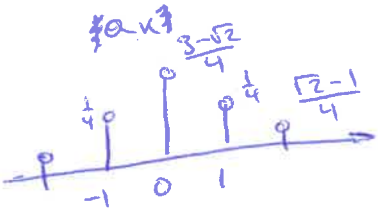


$x[0] = 1$
$x[1] = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x[2] = 0$
$x[3] = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Señal real y par

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = \frac{1}{4}\left[1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(e^{j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[1 + 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right]$$

$k = 0$



$\to \measuredangle = 0 \quad \forall k.$

d) $x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ para $0 \le n \le 15$ y $\bar{N} = 16$

~~Nos damos cuenta que el mínimo periodo es $N=8$ (entran 2 periodos completos de $x[n]$ en $\bar{N}=16$ muestras).~~

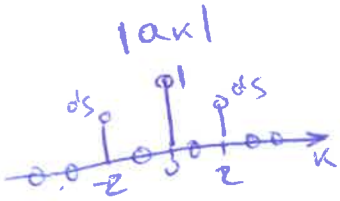
Usamos ec. de síntesis:

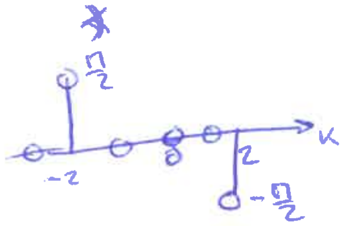
$$x[n] = \sum_{n=\langle 16 \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{16}n} \to x[n] = 1 - \sin\left(\frac{2\pi}{8}n\right) = 1 - \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{8}n} - e^{-j\frac{2\pi}{8}n}\right)$$

$$\boxed{a_0 = 1; \quad a_2 = \frac{-1}{2j}; \quad a_{-2} = +\frac{1}{2j}}$$

$a_2 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad a_{-2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\to$ Si hubiésemos considerado $N=8$ entonces habríamos obtenido a_1 y a_{-1}.





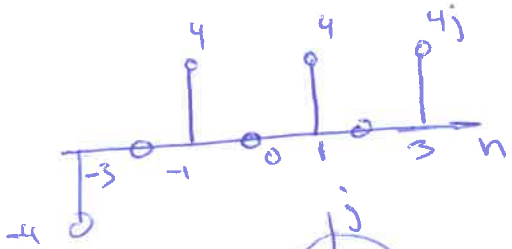
Ejercicio 2 $\quad N=8$

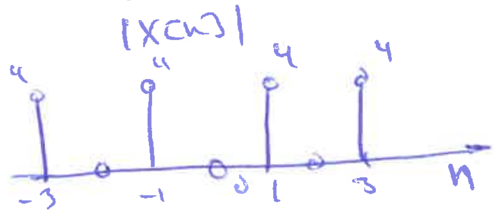
a) $a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$

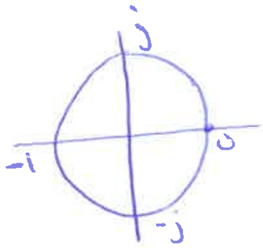
Ec. de análisis: $\boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$

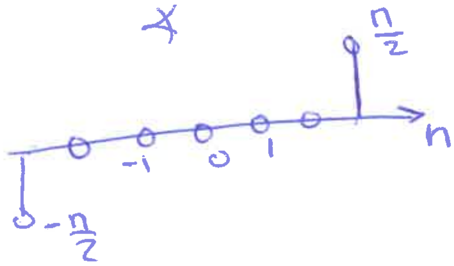
$$a_k = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{k\pi}{4}} + e^{-jk\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{3k\pi}{4}} - e^{-j\frac{3k\pi}{4}}\right) = \underset{N\delta[n+1]}{\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi k 2}{8}}} + \underset{N\delta[n-1]}{\frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi k}{8}}} + \underset{N\delta[n+3]}{\frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{8}3k}} - \underset{N\delta[n-3]}{e^{-j\frac{2\pi 3}{8}}}$$

$$x[n] = 4\left(\delta[n+1] + \delta[n-1]\right) + \frac{4}{j}\left(\delta[n+3] - \delta[n-3]\right)$$

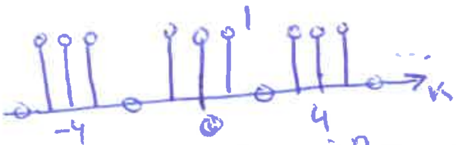








b) N=8 $\quad a_k$



Opt. 1: $x[n] = \sum_{k=-4}^{3} \overset{1}{a_k}\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} =$ ⟶ $a_k = 1$ menos para $k=-2, k=2$

$= \cancel{1 + e^{j\frac{2\pi}{4}n} + e^{-j\frac{2\pi}{8}n} + e^{-j\frac{2\pi}{8}3} + e}$

$$= \underset{k=0}{1} + \underset{k=1}{e^{j\frac{\pi}{4}n}} + \underset{k=-1}{e^{-j\frac{\pi}{4}n}} + \underset{k=3}{e^{j\frac{3\pi}{4}n}} + \underset{k=-3}{e^{-j\frac{3\pi}{4}n}} + \underset{k=-4}{e^{-j\pi n}} = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + (-1)^n$$

Opt. 2

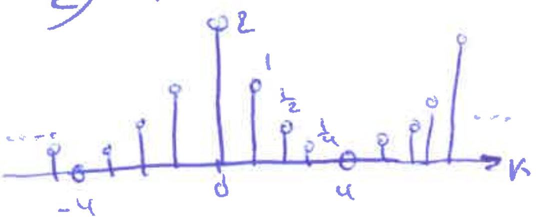
$$a_k = 1 - \delta[k+2] - \delta[k-2] \Rightarrow x[n] = 8\delta[n]\, e^{j\frac{2\pi}{8}2n} - e^{-j\frac{2\pi}{8}2n} = 8 - 2\cos\frac{2\pi}{8}2n$$

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 8\,\delta[n+8\ell] - \cancel{\cos}$$

Nota: si $a_k = 1 = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

⟶ $x[n] = \delta[n] * N$

e) $N=8$



real y par → real y par

$$x[n] = \sum_{k=-3}^{3} x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = 2 + 1\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{-j\frac{3\pi}{4}n}\right) =$$

$$= \underline{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}$$

Ejercicio 3

Sea $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

a) Si N es par y $x[n] = -x[n+\frac{N}{2}]$ demostrar que $a_k=0$ par k par.

Opt 1:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \frac{1}{N}\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} x[p+\tfrac{N}{2}] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(p+\frac{N}{2})} = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} -x[p] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(p+\frac{N}{2})}$$

$p = n - \frac{N}{2} \rightarrow n = p + \frac{N}{2}$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+\frac{N}{2})} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n]\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+\frac{N}{2})}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\left(1 - e^{j\pi k}\right) \longrightarrow$$

k es par → $(1-e^{j\pi k}) = 0 \rightarrow a_k = 0$

k impar → $(1-e^{-j\pi k}) = 2 \quad a_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Opt 2:

Por propiedades: $x[n] \longleftrightarrow a_k$; $-x[n+\frac{N}{2}] \longleftrightarrow -a_k e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}k}$

Por el enunciado: $x[n] = -x[n+\frac{N}{2}]$

Combinándolas: $a_k = -a_k e^{j\pi k} \longrightarrow \begin{cases} k \text{ par: } a_k = -a_k \,;\ 2a_k = 0 \,;\ \underline{a_k = 0} \\ k \text{ impar: } a_k = a_k \rightarrow \text{Tautología} \\ \quad \nexists \text{ restricción en } a_k \end{cases}$

b) N múltiplo de 4, $x[n] = -x[n+\frac{N}{4}]$

$x[n] \longleftrightarrow a_k$; $-x[n+\frac{N}{4}] \longleftrightarrow -a_k e^{j\frac{2\pi}{N}k\frac{N}{4}} \Rightarrow a_k = -a_k e^{j\frac{\pi}{2}k}$

Si k múltiplo de 4 → $a_k = -a_k \Rightarrow \underline{a_k = 0}$

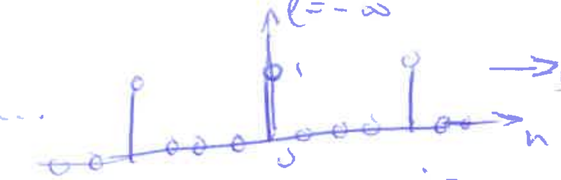
c) N múltiplo de M, $x[n] = -x[n+\frac{N}{M}]$

$a_k = -a_k e^{j\frac{2\pi}{N}k\frac{N}{M}} = -a_k e^{j\frac{2\pi}{M}k} \longrightarrow$ Si k múltiplo M: $a_k = -a_k \rightarrow \underline{a_k = 0}$

Ejercicio 4

Dado $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$, encontrar DSF de la salida y cuando:

a) $x[n]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta[n-4l]$



$\longrightarrow \boxed{N=4}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{3}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{4}\quad\forall k$$

$$H(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\,e^{-j\Omega n}\;;\quad h[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & \text{si } n\geq 0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & \text{si } n<0\end{cases}$$

$$H(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n}e^{-j\Omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(2e^{-j\Omega}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^{n}$$

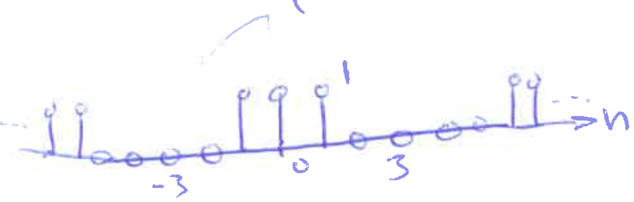
$$=\cancel{\text{err}}\quad \underbrace{=\frac{0-1}{1-2e^{-j\Omega}}+\frac{1-0}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}}\;=\frac{+\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\frac{-1}{1-2e^{-j\frac{\pi}{2}k}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}k}}=\frac{-1}{1-2(-j)^k}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}(-j)^k}$$

$$b_k\quad DSF\{y[n]\}=b_k=a_k\,H(e^{j\frac{\pi}{2}k})=\frac{-\frac{1}{4}}{1-2(-j)^k}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}(-j)^k}$$

$$\boxed{b_0=\frac{3}{4}\;;\quad b_1=\frac{3}{20}\;;\quad b_2=\frac{1}{12}\;;\quad b_3=\frac{3}{20}\;;}$$

b) $x[n]=\begin{cases}1 & n=0,\pm 1\\ 0 & n=\pm 2,\pm 3\end{cases}\qquad N=6$



$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=-1}^{1}e^{-j\frac{\pi}{3}nk}=\frac{1}{6}\left[1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{j\frac{\pi}{3}k}\right]=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right).$$

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\frac{-1}{1-2e^{-j\frac{\pi}{3}k}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}k}}$$

$$b_k=a_k\,H(e^{j\frac{2\pi}{3}k})=\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)\right]\cdot\left[\frac{-1}{1-2e^{-j\frac{\pi}{3}k}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}k}}\right]$$

$$\boxed{b_0=\frac{3}{2}\;;\; b_1=\frac{1}{3}\;;\; b_2=0;\; b_3=\frac{-1}{18}\;;\; b_4=0;\; b_5=\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 6

Sea $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ y asumiendo a_k conocidos.

a) $y[n] = x[n]\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$

$a_k = DSF\{x[n]\}$; $b_k = DSF\left\{\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)\right\}$; $c_k = DSF\{y[n]\} = \underbrace{\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}}_{\text{convolución periódica.}}$

Opt. 1

$$b_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi n}{N}3}+e^{-j\frac{2\pi n}{N}3}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{2}\delta[k-3]+\frac{1}{2}\delta[k+3]$$

Opt. 2

* $\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right) = \frac{1}{2}\left(\underset{b_3}{e^{j\frac{2\pi n}{N}\cdot 3}}+\underset{b_{-3}}{e^{-j\frac{2\pi n}{N}\cdot 3}}\right)$; $b_k = \frac{1}{2}\delta[k-3]+\frac{1}{2}\delta[k+3]$

$$c_k = \frac{1}{2}a_{k-3}+\frac{1}{2}a_{k+3} \quad \forall k$$

b) $y[n] = x[n]\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta[n-lN]$

$$b_k = DSF\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta[n-lN]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \quad \forall k$$

$$c_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{l=\langle N\rangle} a_l = \frac{x[0]}{N} \quad \forall k$$

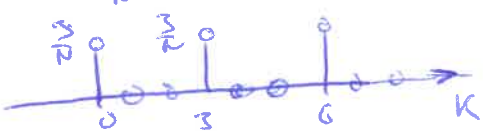
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \Rightarrow x[0] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$$

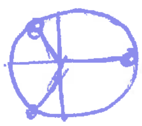
c) $y[n] = x[n]\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta[n-l\frac{N}{3}]$

$$b_k = DSF\{\delta[n-l\tfrac{N}{3}]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}\left(\delta[n+\tfrac{N}{3}]+\delta[n]+\delta[n-\tfrac{N}{3}]\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\left(1+e^{j\frac{2\pi k}{3}}+e^{-j\frac{2\pi k}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{N}+\frac{2}{N}\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right)$$

Evaluamos b_k para distintos $k=0,1,2,\dots$ $b_0=\frac{3}{N}$; $b_1=0$ $b_2=0$





$\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$

$\dots\ 1\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ 1\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ 1\dots$

$$c_k = \frac{3}{N}a_k+\frac{3}{N}a_{k-3}+\frac{3}{N}a_{k-6}\dots = \frac{3}{N}\sum_{l=0}^{\frac{N}{3}-1}a_{k-3l}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_k = \frac{3}{N}\sum_{l=0}^{\frac{N}{3}-1}a_{k-3l}}$$

Ejercicio 7

- $x[n] \longleftrightarrow a_k$; $x[n]$ real y par; $N=10$; $a_{12}=5$; $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50$

- $x[n]$ real y par $\Rightarrow a_k$ es real y par.
- $N=10 \longrightarrow$ 10 coeficientes a_k.
- $a_{12}=5 \longrightarrow a_2 = a_{-2} = 5$
- $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50 \longrightarrow$ Parseval: $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2 = \sum_{k=-5}^{4}|a_k|^2 = 50$

a) a_k para $-5 \leq k \leq 4$?

Parseval: $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2 = 50 = a_{-5}^2 + a_{-4}^2 + a_{-3}^2 + \dots + a_4^2$

$$50 = a_{-2}^2 + a_2^2 + \sum_{\substack{k=-5 \\ k\neq 2 \\ k\neq -2}}^{4} a_k^2 \Rightarrow \sum_{\substack{k=-5 \\ k\neq 2 \\ k\neq -2}}^{4} a_k^2 = 50 - 5^2 - 5^2 = 0$$

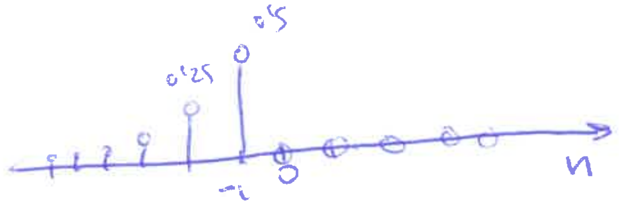
$$\underline{a_k = 5\,\delta[k-2] + 5\,\delta[k+2]}$$

b) $x[n] = \sum_{n=-5}^{4} a_k e^{j\frac{2\pi}{10}kn} = 5\left(e^{j\frac{2\pi}{5}n} + e^{-j\frac{2\pi}{5}n}\right) = 10\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$

c) Aunque es periódica con periodo 10 el periodo fundamental es $\underline{N=5}$.

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$; $\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{N_0} \rightarrow \underline{N_0 = 5}$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot u[-n-1] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1}$



$$x[n] = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1}\cdot u[-n-1] = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\cdot u[-n]}\ast\delta[n+1]$$

$$z[n] \longleftrightarrow Z(e^{j\Omega})$$

$$z[-n] \longleftrightarrow Z(e^{-j\Omega})$$

$$TF\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot u[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 1\, e^{-j\Omega n} = \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$TF\{\delta[n+1]\} = e^{j\Omega}$$

$$\underline{X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{+j\Omega}}\, e^{j\Omega}\cdot\frac{1}{2}}$$

$\rightarrow$ Si tuviésemos $u[n]$? TF? $\rightarrow$ no definida en energía!

c) $x[n] = \underbrace{2^n u[-n]}_{x_1}\ \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}_{x_2}$

$$x[n] = x_1[n]\cdot x_2[n] \xleftrightarrow{TDF} X(\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)\otimes X_2(\Omega)$$

Cálculo $X_1(\Omega)$: $x_1[n] = 2^n u[-n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] \Rightarrow x[n] \xleftrightarrow{TF} X(\Omega) \Rightarrow x[-n] \xleftrightarrow{TF} X(-\Omega)$

$$TF\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}e^{-j\Omega\infty}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \Longrightarrow \underline{X_1(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}}$$

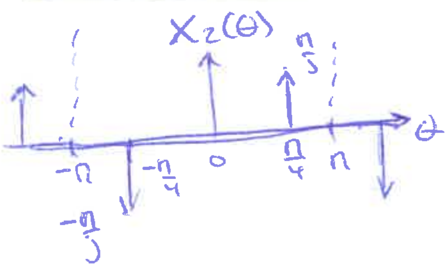
Cálculo $X_2(\Omega)$:

$$x_2[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \xleftrightarrow{TF} X_2(\Omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\Omega - k\Omega_0) = \frac{2\pi}{2j}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{4}-2\pi k\right) - \delta\left(\Omega+\frac{\pi}{4}-2\pi k\right)\right]$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \xleftrightarrow{DF} a_1 = \frac{1}{2j};\ a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

Cálculo $X(\Omega)$: $X(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_2(\theta)\cdot X_1(\Omega-\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{X}_2(\theta)\cdot X_1(\Omega-\theta)\,d\theta$

con $\hat{X}_2(\theta)$ siendo 1 periodo de $X_2(\theta)$



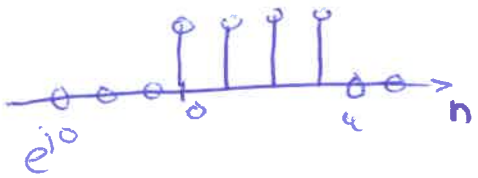
$$\hat{X}_2(\theta) = \frac{\pi}{j}\left[\delta\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) - \delta\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Ejercicios tema 2

Parte II: TF

Ejercicio 1

a) $x[n] = u[n] - u[n-4]$ $\quad X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{3} \left(e^{-j\Omega}\right)^n$



$$= \frac{1 - e^{-j\Omega 4}}{1 - e^{-j\Omega}} = (*)$$

$$1 - e^{-j\Omega 4} = e^{-j2\Omega}\left(e^{+j2\Omega} - e^{-j2\Omega}\right) = e^{-j2\Omega}\, 2j\, \mathrm{sen}(2\Omega)$$

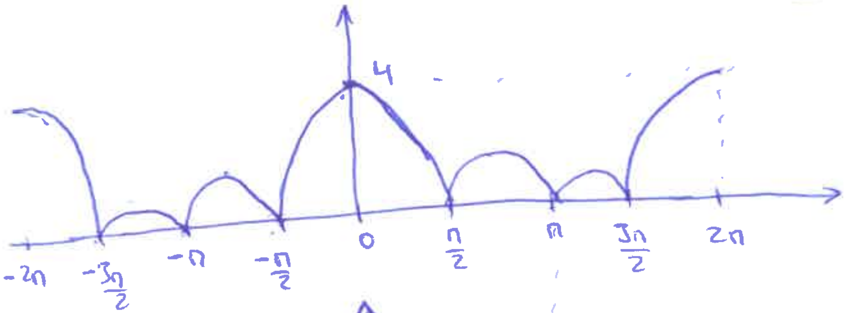
$$1 - e^{-j\Omega} = e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right) = e^{-j\frac{\Omega}{2}}\, 2j\, \mathrm{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$(*) = \frac{\cancel{2j} e^{-j2\Omega}\, \mathrm{sen}(2\Omega)}{\cancel{2j} e^{-j\frac{\Omega}{2}}\, \mathrm{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)} = \frac{e^{-j\frac{3\Omega}{2}}\, \mathrm{sen}(2\Omega)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

Recordar

$$X(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|\, e^{j\measuredangle X(e^{j\Omega})}$$

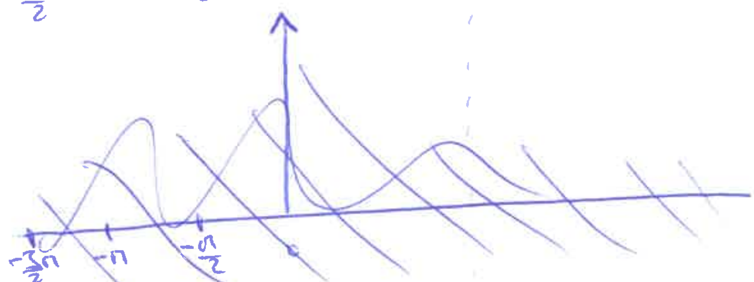
$$|X(e^{j\Omega})| = \left|\frac{\mathrm{sen}(2\Omega)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right|$$



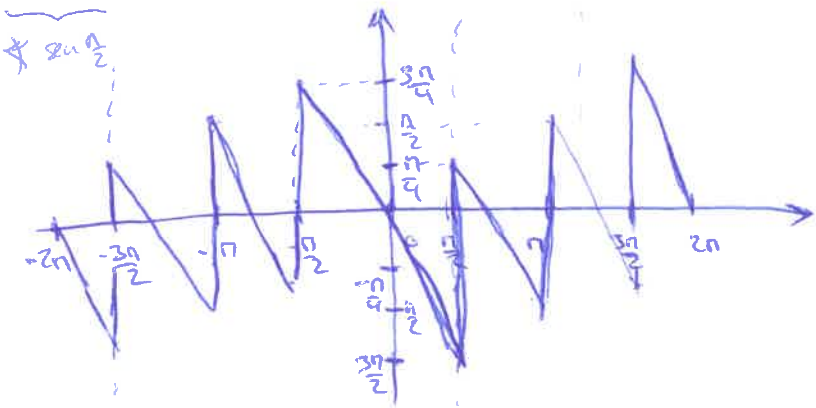
ceros: $2\Omega = k\pi \quad k \neq 0$

$\Omega = k\frac{\pi}{2}$

- $k=0$ máx.
- $k=1 \quad \Omega = \frac{\pi}{2}$
- $k=2 \quad \Omega = \pi$
- $k=3 \quad \Omega = \frac{3\pi}{2}$



$\measuredangle X(e^{j\Omega}) = \underbrace{-\frac{3\Omega}{2}}_{\measuredangle e^{j\frac{3\Omega}{2}}} + \underbrace{\text{saltos de } \pi \text{ en ciertos } \Omega}_{\measuredangle \mathrm{sen}\frac{\Omega}{2}} \rightarrow$ por el cambio de signo

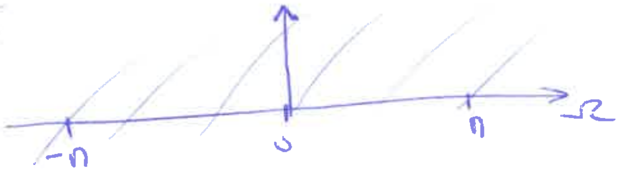


Opt. 2

$$x[n] = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-5-k6] \longrightarrow \text{TF}\{1\} \qquad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} 1\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \delta[k]$$

$$X(e^{j\Omega}) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-2\pi m)}_{\text{TF}\{1\}} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{6}\,\delta(\Omega-\frac{\pi}{3}k)}_{\text{TF tren impulsos periódicos}}\underbrace{e^{-j5\Omega}}_{\text{desplazamiento}} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-2\pi m) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{6}\,\delta(\Omega-\frac{\pi}{3}k)\, e^{-j\frac{5}{3}k\pi}$$



Ejercicio 2

a) $X(e^{j\Omega}) = 1 + 3e^{-j\Omega} + 2e^{-j\Omega 2} - 4e^{-j\Omega 3} + e^{-j10\Omega}$

$$1 \xleftrightarrow{\text{TF}^{-1}} \delta[n] \; ; \qquad e^{-j\Omega n_0} \xleftrightarrow{\text{TF}^{-1}} \delta[n-n_0]$$

$$x[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 4\delta[n-3] + \delta[n-10]$$

b) $X(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \quad -\pi \le \Omega \le \pi$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\frac{\Omega}{2}} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{+j(n-\frac{1}{2})\Omega}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(n-\frac{1}{2})}\Big[e^{j(n-\frac{1}{2})\Omega}\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

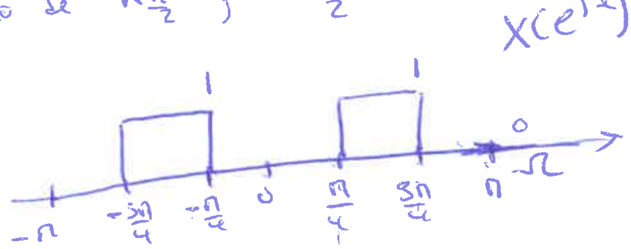
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(n-\frac{1}{2})}\Big(e^{j\pi(n-\frac{1}{2})} - e^{-j\pi(n-\frac{1}{2})}\Big) = \frac{1\cdot \cancel{2j}}{\cancel{2}\pi\, \cancel{j}(n-\frac{1}{2})}\,\text{sen}\big(\pi(n-\tfrac{1}{2})\big) = \frac{\text{sen}(\pi(n-\frac{1}{2}))}{\pi(n-\frac{1}{2})}$$

valores + para n ~~pares~~ impares

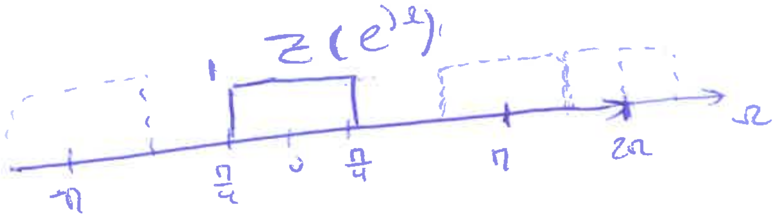
$$= \frac{-(-1)^n}{\pi(n-\frac{1}{2})} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi(n-\frac{1}{2})}$$

solo habrá valores para el seno de $k\frac{\pi}{2}$ y $-k\frac{\pi}{2}$

c) $X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{4} \le |\Omega| \le \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$



$$X(e^{j\Omega}) = 1 - Z(e^{j\Omega}) - Z(e^{j(\Omega-\pi)})$$



$\updownarrow$ TF^{-1}

$$x[n] = \text{TF}\{1\}^{-1} - z[n] - z[n]\,\underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n}$$

$$z[n] = \text{TF}^{-1}\{Z(e^{j\Omega})\} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}$$

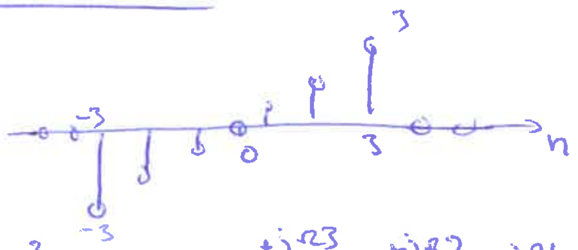
TF^{-1} de un pulso cuadrado

$$x[n] = \delta[n] - (1+(-1)^n)\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\hat{X}(\Omega) * X_1(\Omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-\tfrac{\pi}{4}) - \delta(\Omega+\tfrac{\pi}{4})\right]\right] * \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}} =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j(\Omega-\frac{\pi}{4})}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j(\Omega+\frac{\pi}{4})}}\right]$$

d) $x[n] = \begin{cases} n, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$



→ señal real impar

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-3}^{3} n\, e^{-j\Omega n} = -3e^{+j\Omega 3} - 2e^{+j\Omega 2} - 1e^{j\Omega 1} + 0 + 1e^{-j\Omega 1} + 2e^{-j\Omega 2} + 3e^{-j\Omega 3} = (*)$$

$$-(3e^{j\Omega 3} - 3e^{-j\Omega 3}) = -2j\sin(3\Omega)$$

$$(*) = -6j\sin(3\Omega) - 4j\sin(2\Omega) - 2j\sin(\Omega) =$$

Otra forma:

$$x[n] = \sum_{\ell=-3}^{\ell=3} \ell\,\delta[n-\ell] \quad ; \quad \delta[n] \overset{TF}{\longleftrightarrow} 1, \qquad \delta[n-\ell] \overset{TF}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega\ell}$$

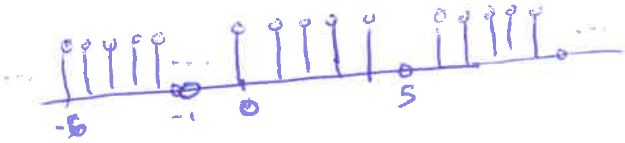
$y[n] = \delta[n]$

$$Y(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, e^{-j\Omega n} = 1$$

e) $x[n] = x[n-6]$

$x[n] = u[n] - u[n-5] \quad 0 \leq n \leq 5$

→ Periódica con $N=6$ → TF son 6 deltas en $[-\pi, \pi]$



Opt. 1

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{4}\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^n = \begin{cases} \frac{1}{6}\,\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k5}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \; (*) & k \neq 0, \pm 6, \dots \\ \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$(*) = \frac{1}{6}\,\frac{1-e^{-\frac{2\pi}{N}k5j}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1}{6}\,\frac{e^{-j\frac{\pi}{N}k5}\left(e^{j\frac{\pi}{N}k5} - e^{-j\frac{\pi}{N}k5}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left(e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right)} = \frac{e^{-\frac{\pi}{N}k4}}{6} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k5}{6}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{6}\right)}$$

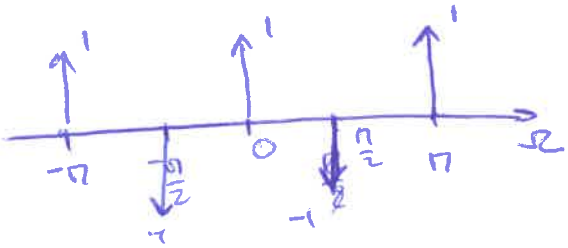
$$a_k = \begin{cases} \frac{6}{6} & k = 0, \pm 6, \pm 12 \\ \frac{1}{6}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k5}{6}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{6}\right)} & k \neq 0, \pm 6, \pm 12 \end{cases}$$

Opc. 2. $x[n] = 1 - \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta[n-5-6\ell]$ (detrás)

$$X(\Omega) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\Omega - 2\pi m)}_{TF\{1\}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{6}\,\delta(\Omega -$$

$a_k\{\delta[n]\} = \frac{1}{N}$

d) $X(e^{j\Omega}) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} (-1)^K \delta(\Omega - \frac{\pi}{2}K) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{j\pi K} \delta(\Omega - \frac{\pi}{2}K) \rightsquigarrow \boxed{N=4}$



$x[n] = \sum_{K=\langle N \rangle} a_K e^{j\frac{2\pi}{N}Kn} \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}K)$

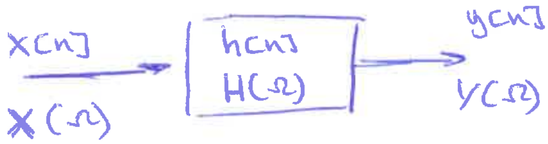
- $2\pi a_K = (-1)^K$; $a_K = \frac{(-1)^K}{2\pi}$;

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{K=0}^{3} (-1)^K e^{jK\frac{2\pi}{4}n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{K=0}^{3} (-1)^K e^{jK\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\pi n} - e^{-j\frac{3\pi}{2}K}\right)$$

$-e^{+j\frac{\pi}{2}} = e^{-j\frac{3\pi}{2}}$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + (-1)^n\right]$$

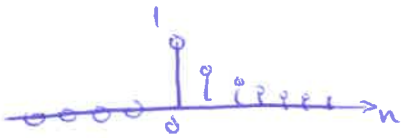
Ejercicio 3



$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$y[n] = x[n] * h[n]$

$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$



$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

a) $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}$$

TF^{-1} es complicada más fácil descomponer en frac. simples.

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) = \frac{1 \cdot 1}{(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} \overset{(*)}{=} \underbrace{\frac{-2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})}}_{-2H(e^{j\Omega})} + \underbrace{\frac{3}{(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega})}}_{3X(e^{j\Omega})}$$

$$\boxed{y[n] = \underbrace{-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}_{①} + \underbrace{3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]}_{②}}$$

① $x[n] \xleftrightarrow{TF} X(\Omega) \Rightarrow 3x[n] \xleftrightarrow{TF} 3X(\Omega)$; ② $h[n] \xleftrightarrow{TF} H(\Omega) \Rightarrow -2h[n] \xleftrightarrow{TF} -2H(\Omega)$

(*) Desc. en frac. simples:

$$\frac{1}{(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{A(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}) + B(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega})}{(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} \Rightarrow$$

Dando valores:

$\Omega = 0 \rightarrow 1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B$

$\Omega = \pi \rightarrow 1 = \frac{3}{2}A + \frac{7}{4}B$

$\Rightarrow \boxed{B = -2,\ A = 3}$

b) $x[n] = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$\underline{\text{Opt 1}}$: $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}$ $\leftarrow$ serie aritmeticogeométrica

$\underline{\text{Opt 2}}$:

$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] = x_1[n] + x_2[n]. \longrightarrow X(\Omega) = X_1(\Omega) + X_2(\Omega)$

$X_1(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$

Por propiedades: $x_1[n] \overset{TF}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)$

$x_2[n] = n x_1[n] \longleftrightarrow X_2(\Omega) = j\frac{dX_1(\Omega)}{d\Omega}.$

$\frac{dX_1(\Omega)}{d\Omega} = \frac{-j\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2} \Longrightarrow X_2(\Omega) = j\frac{dX_1(\Omega)}{d\Omega} = \frac{\cancel{j}\cdot -\cancel{j}\,\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}$

$X(\Omega) = X_1(\Omega) + X_2(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2} = \frac{1-\cancel{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}+\cancel{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}$

$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2} \overset{\text{fracc. simples}}{=} \underbrace{\frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}}_{-2X_1(\Omega)} + \underbrace{\frac{-1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2}}_{-1X(\Omega)} + \underbrace{\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}}_{4H(\Omega)}$

$y[n] = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \cancel{n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]} - (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Ejercicio 6

$x[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$; $x_1[n] = n a^n u[n]$; ¿a? ¿$x_2[n]$? ¿$X_2(e^{j\Omega})$?

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\frac{1}{3}e^{-j(\Omega-\frac{\pi}{4})})^2} + \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j(\Omega+\frac{\pi}{4})})^2}\right] e^{-j(\Omega-\frac{\pi}{4})}$$

• $x[n] = x_1[n]\, x_2[n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\Omega}) = X_1(e^{j\Omega}) \otimes X_2(e^{j\Omega})$

$$x_1[n] = n a^n u[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{a e^{-j\Omega}}{(1-a e^{-j\Omega})^2} = X_1(e^{j\Omega})$$

Como $X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j(\Omega-\frac{\pi}{4})}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j(\Omega-\frac{\pi}{4})})^2} + \frac{e^{-j(\Omega+\frac{\pi}{4})}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j(\Omega+\frac{\pi}{4})})}\right]$

Para $\boxed{a = \frac{1}{3}}$

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{3}{2}\left[\cancel{X_1(e^{j\Omega})}\; X_1(e^{j(\Omega-\frac{\pi}{4})}) + X_1(e^{j(\Omega+\frac{\pi}{4})})\right]$$

Como $X(e^{j\Omega})$ es una convolucion y contien versiones desplazadas de $X_1(e^{j\Omega})$
$\rightarrow X_2(e^{j\Omega})$ son deltas!

$$X_2(e^{j\Omega}) = \frac{3}{2}\cdot \cancel{2\pi}\left[\delta(\Omega-\tfrac{\pi}{4}) + \delta(\Omega+\tfrac{\pi}{4})\right] \rightarrow \text{periódica en } 2\pi.$$

→ ~~el factor 2π compensa la normalización en $X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \cdot X_2(e^{j(\Omega-\theta)})\, d\theta$.~~

$\downarrow TF^{-1}$

$$x_2[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

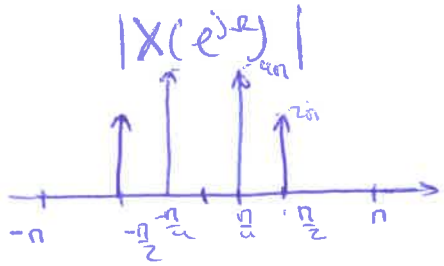
Desarrollo:

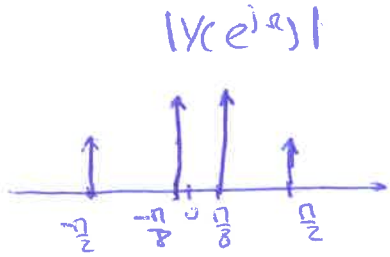
$$x_2[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{2}\left[\delta(\Omega-\tfrac{\pi}{4}) + \delta(\Omega+\tfrac{\pi}{4})\right] e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{3}{2 \cdot 2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\frac{\pi}{4}n} + e^{j\frac{\pi}{4}n}\, d\Omega = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)(\pi+\pi)$$

Ejercicio 7

$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)$

¿Es A un sistema LTI? $\longrightarrow$ Frecuencias a la salida que no estaban a la entrada!





Si es LTI: $|Y(e^{j\Omega})| = |H(e^{j\Omega})||X(e^{j\Omega})|$

Evaluando en $\frac{\pi}{8}$: $A = ? \cdot \emptyset$ $\longrightarrow$ ningún nº real al multiplicarlo por 0 da como resultado distinto de 0

$\hookrightarrow |Y(e^{j\Omega})|$ muestra que $A \neq 0$

$\Downarrow$

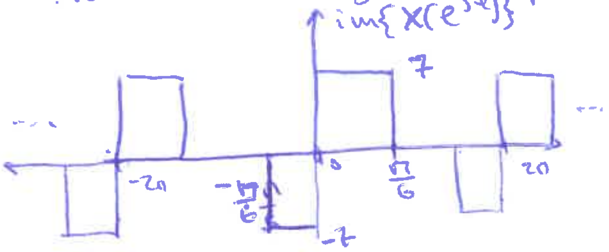
El sistema __no__ es LTI

$\downarrow$

sistemas LTI no pueden tener frecuencias a la salida que no estaban presentes en la entrada

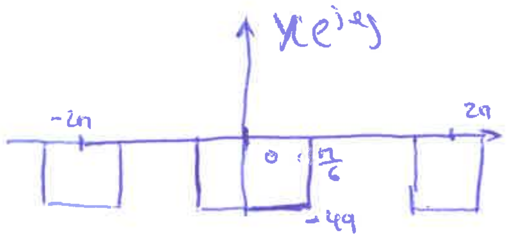
Ejercicio 9

$X(e^{j\Omega})$ es imaginaria pura



a) $TF\{y[n] = x[n] * x[n]\}$

$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})^2 = [j\,\mathrm{Imag}\{X(e^{j\Omega})\}]^2 = \cancel{\ldots} - [\mathrm{Imag}\{X(e^{j\Omega})\}]^2$

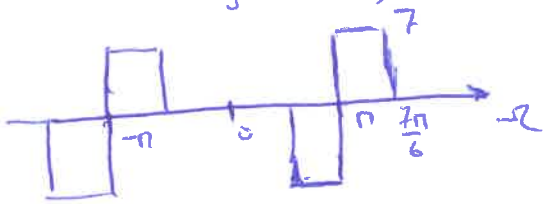


$\mathrm{Imag}\{X(e^{j\Omega})\} = \emptyset$

b) $s[n] = (-1)^n$; $\quad w[n] = x[n] \cdot s[n]$

$w[n] = x[n] \cdot (-1)^n = x[n] \cdot e^{j\pi n} \xleftrightarrow{TF} W(e^{j\Omega}) = X(e^{j(\Omega - \pi)})$

$Imag\{W(e^{j\Omega})\}$



$Re\{W(e^{j\Omega})\} = \emptyset$

c) $TF\{r[n] = x[n] \cdot x[n]\}$

$R(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \otimes X(e^{j\Omega})$

Universidad Rey Juan Carlos

Señales y Sistemas

EJERCICIOS TEMA 5: Muestreo

Ejercicio 1

Sea $x(t)$ una señal continua con transformada de Fourier $X(j\omega)$ que se muestrea con un tren de impulsos para generar:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

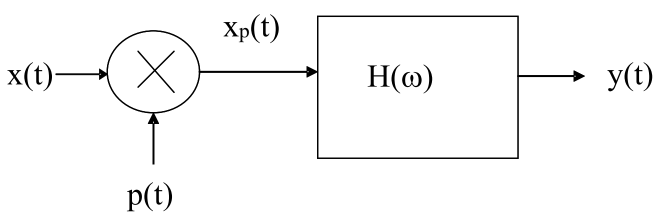
donde $T = 10^{-4}$. Indicar si para cada una de las siguientes restricciones sobre x(t) y/o $X(j\omega)$, el teorema de muestreo garantiza que $x(t)$ se puede recuperar de forma exacta a partir de $x_p(t)$.

(a) $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 5000\pi$
(b) $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 15000\pi$
(c) $x(t)$ real y $X(j\omega)=0$ para $\omega > 5000\pi$
(d) $x(t)$ real y $X(j\omega) = 0$ para $\omega < -15000\pi$
(e) $X(j\omega) * X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 15000\pi$

Ejercicio 2

En la Figura 1 se muestra un sistema en el que la señal muestreadora es un tren de impulsos con signo alterno. La transformada de Fourier de la entrada al sistema es la que se muestra como $X(j\omega)$. ideal

(a) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, represente las transformadas de Fourier de $x_p(t)$e $y(t)$
(b) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, determine un sistema que recupere $x(t)$ a partir de $x_p(t)$
(c) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, determine un sistema que recupere $x(t)$ a partir de $y(t)$
(d) ¿Cuál es el máximo valor de Δ en función de ω_M para poder recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ e $y(t)$?.



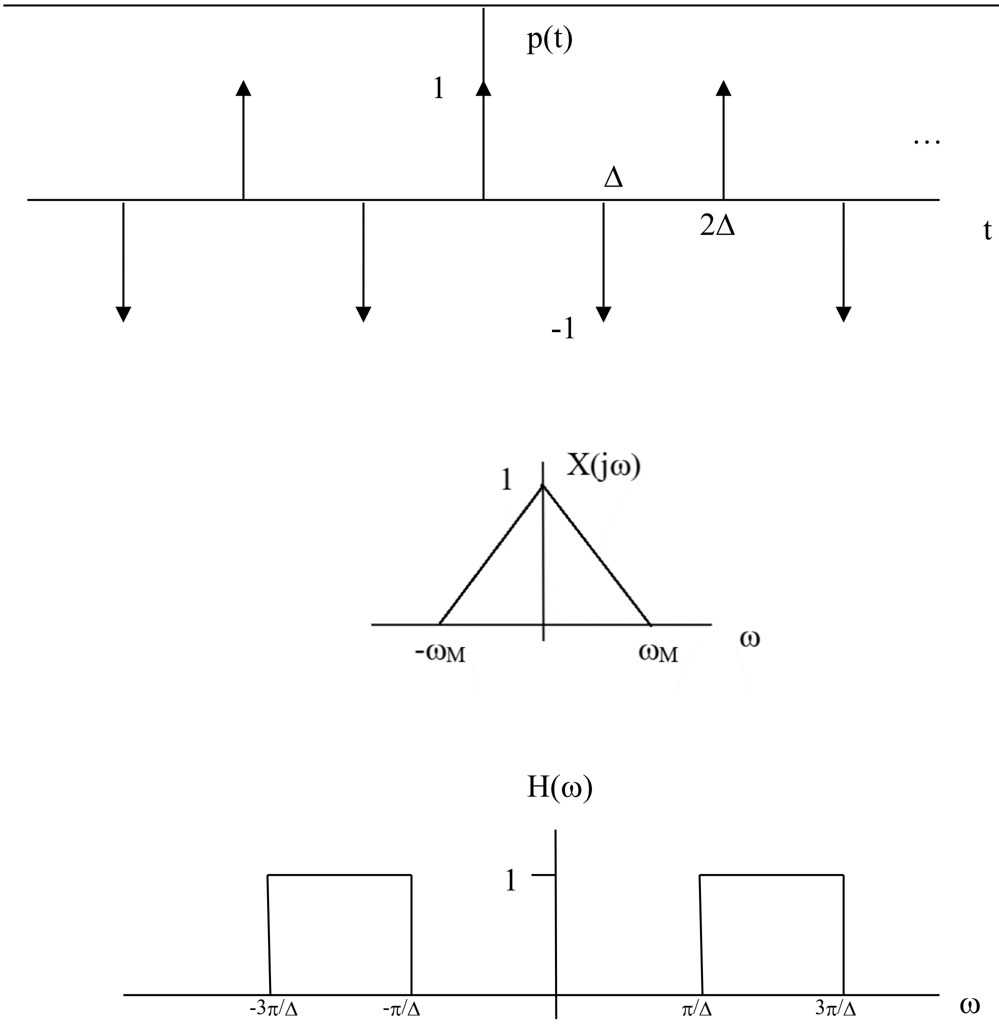
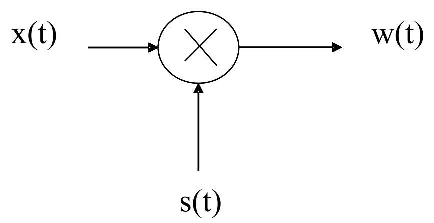


Figura 1

Ejercicio 3

En la Figura 2 se muestra un sistema en el que la señal de entrada se multiplica por una onda cuadrada periódica. El periodo de s(t) es T. La señal de entrada está limitada en banda con $|X(j\omega)| = 0$ para $|\omega| \geq \omega_M$

(a) Para $\Delta = T/3$, determine, en términos de ω_M, el máximo valor de T para que no se produzca solapamiento entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$.
(b) Para $\Delta = T/4$, determine, en términos de ω_M, el máximo valor de T para que no se produzca solapamiento entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$.



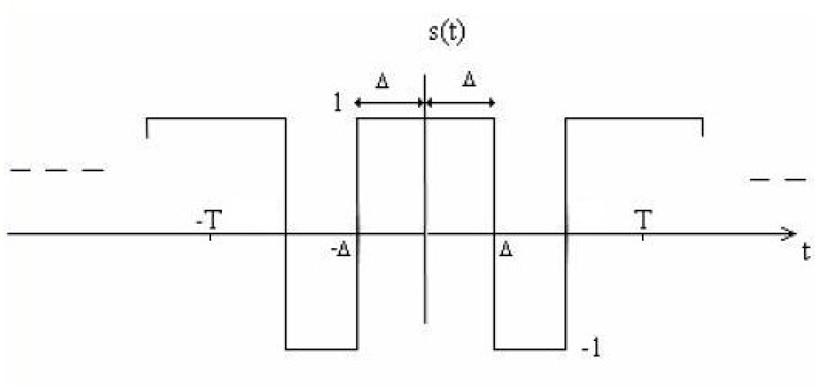


Figura 2

Ejercicio 4

En la Figura 4 se muestra un sistema que procesa señales continuas usando un filtro discreto $h[n]$ lineal y causal, descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$$

Para señales de entrada limitadas en banda tales que $X_c(j\omega)=0$ para $|\omega| > \pi/T$, el sistema mostrado es equivalente a un sistema LTI continuo.

Determine la respuesta en frecuencia $H_c(j\omega)$ de dicho sistema continuo.

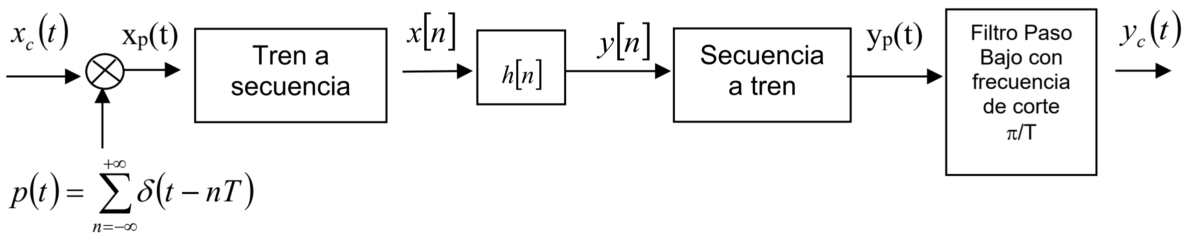


Figura 4

Ejercicio 5

En la Figura 5, $x[n] = x_c(nT)$ e $y[n] = x[2n]$

(a) Asumiendo que $x_c(t)$ tiene una transformada de Fourier tal que $X_c(j\omega)=0$ para $|\omega| > 2\pi(100)$, ¿qué valor de T se necesita para que $X(e^{j\Omega})=0$ para $\pi/2 < |\Omega| \leq \pi$?

(b) ¿Cuál debe ser el valor de T' para que $y_c(t)= x_c(t)$?

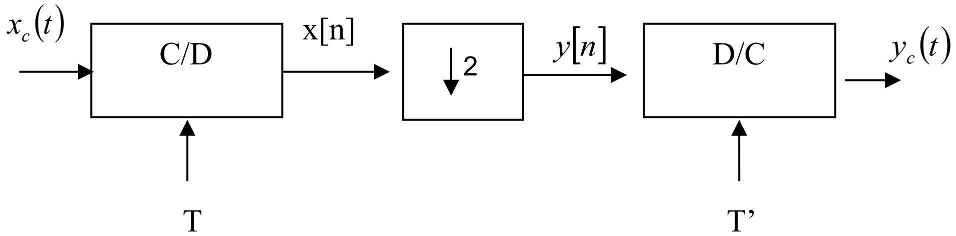
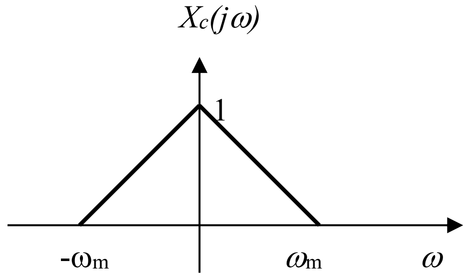


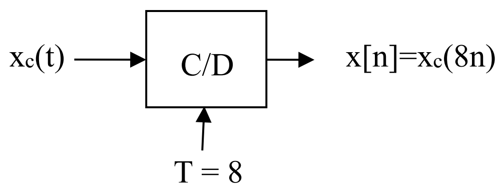
Figura 5

Ejercicio 6

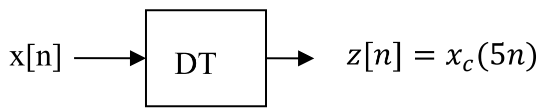
Sea $x_c(t)$ una señal continua limitada en banda cuya transformada de Fourier $X_c(j\omega)$ viene dada por:



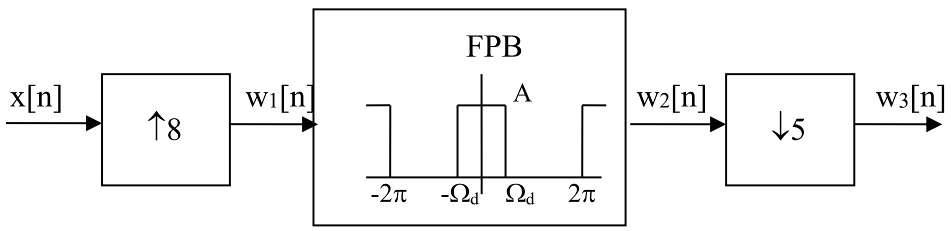
muestreando $x_c(t)$ con periodo de muestreo de 8 segundos se obtiene una señal discreta $x[n]$:



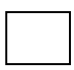
Queremos diseñar un sistema en tiempo discreto (DT) que tenga esa $x[n]$ como entrada y genere otra señal discreta $z[n]$ tal que $z[n] = x_c(5n)$.



Suponga que implementamos las transformaciones de la siguiente manera:



donde



- $\uparrow 8$, indica interpolar x[n] por un factor 8, es decir, $w_1[n]$ representa el resultado de insertar 7 ceros entre dos muestras sucesivas de x[n], es decir,

$$w_1[n] = \begin{cases} x[n/8], & n = múltiplo\ de\ 8 \\ 0, & resto \end{cases}$$

- $w_2[n]$ representa el resultado de pasar $w_1[n]$ por un filtro paso-bajo con frecuencia de corte Ω_d y ganancia A.

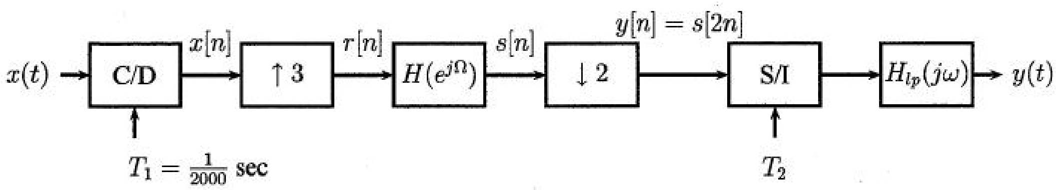
– $\boxed{\downarrow 5}$, indica diezmar $w_2[n]$ por un factor 5, es decir, $w_3[n]$ representa la secuencia formada por una de cada 5 muestras de $w_2[n]$, es decir, $w_3[n] = w_2[5n]$

Se pide:

a) Dibujar $W_1(e^{j\Omega})$, $W_2(e^{j\Omega})$ y $W_3(e^{j\Omega})$, es decir, las transformadas de Fourier de $w_1[n]$, $w_2[n]$ y $w_3[n]$, respectivamente, considerando $\omega_m=\pi/9$, $\Omega_d=\pi/8$ y A=1. Etiquete los ejes.

b) Puesto que el objetivo de todo ese procesamiento en tiempo discreto es conseguir que $w_3[n] = z[n]$ ¿cuál es el máximo valor de ω_m para que $w_3[n] = z[n]$? Calcule para ese caso el valor correspondiente de la frecuencia de corte Ω_d y de la amplitud del filtro A.

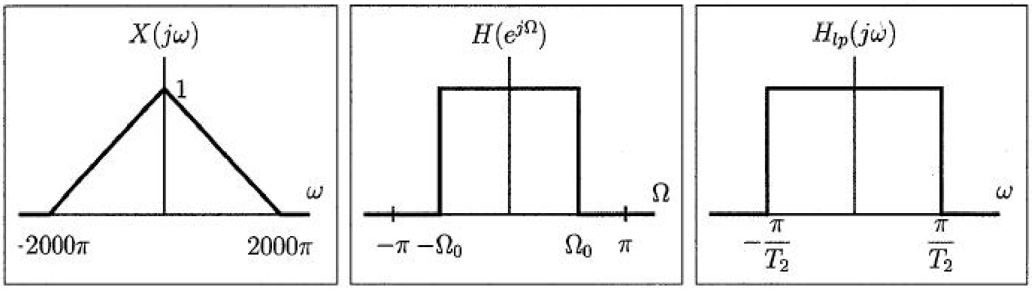
Ejercicio 7
Considere el siguiente sistema:



donde

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow 3} \longrightarrow r[n] = \begin{cases} x[n/3], & n = 0, \pm 3, \pm 6, \cdots \\ 0, & resto \end{cases}$$

A continuación, se muestran los espectros correspondientes a la entrada x(t), es decir, $X(j\omega)$, y a los filtros $H(e^{j\Omega})$ y $H_{lp}(j\omega)$.



Se pide:

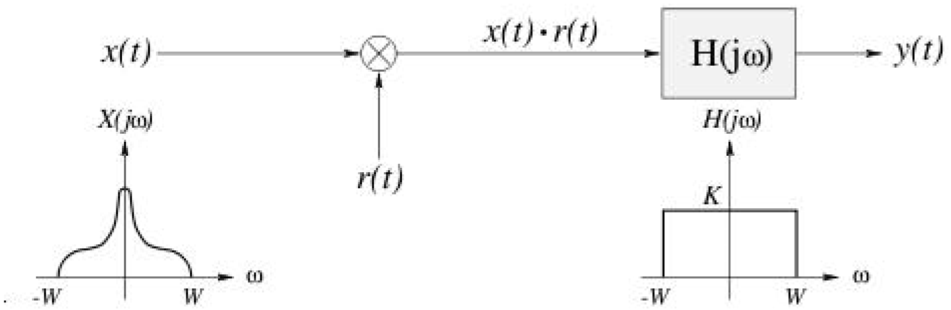
(a) Representar el espectro de x[n], es decir, $X(e^{j\Omega})$ y el espectro de r[n], es decir, $R(e^{j\Omega})$. Etiquetar claramente los ejes.
(b) Determinar un valor de Ω_0, la frecuencia de corte del filtro en tiempo discreto $H(e^{j\Omega})$, tal que:

$$s[n] = a\, x(nT_0)$$

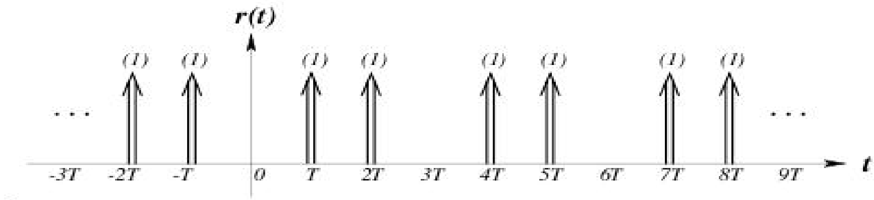
donde a es una constante no nula y T_0 un número positivo. ¿Cuánto vale T_0?

(c) Para $\Omega_0=\pi/3$, determinar el valor de T_2 para que $y(t) = \beta x(t)$ con β, una constante no nula.

Ejercicio 8
Considere el siguiente esquema:



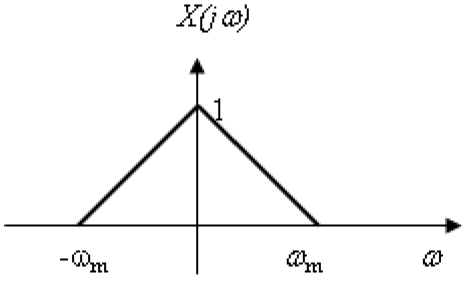
donde $r(t)$ viene dada por el siguiente tren de impulsos:



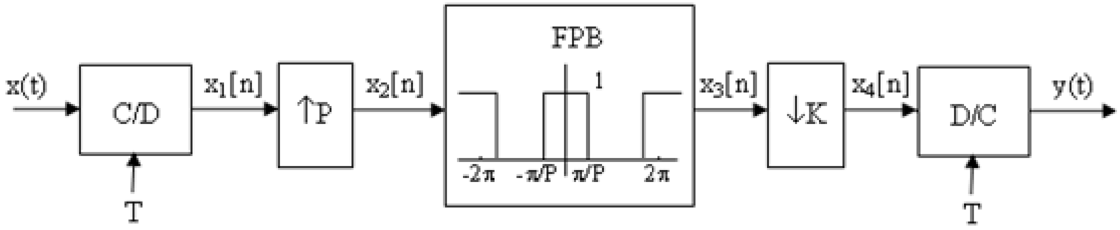
(a) Calcule y represente $R(j\omega)$, la TF de $r(t)$.

(b) Para un valor fijo de T, encuentre el máximo valor de W y el valor de K tales que $y(t) = x(t)$.

Ejercicio 9
Sea $x(t)$ una señal continua limitada en banda cuya transformada de Fourier $X(j\omega)$ viene dada por:



Dicha señal se procesa mediante el siguiente esquema:



Donde:

- C/D es un conversor continuo a discreto (muestreador más paso de tren a secuencia) a una tasa de muestreo de T segundos.

- D/C es un conversor discreto a continuo (paso de tren a secuencia más filtro paso bajo) a una tasa de interpolación de T segundos.

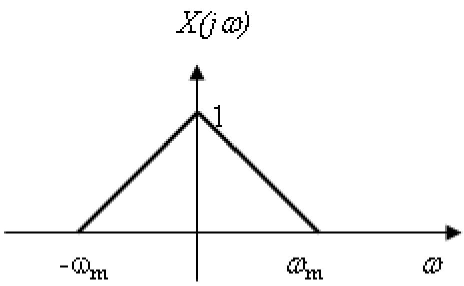
- $\boxed{\uparrow P}$, indica interpolar $x_1[n]$ por un factor P, es decir, $x_2[n]$ representa el resultado de insertar P-1 ceros entre dos muestras sucesivas de x[n].

– $\boxed{\downarrow K}$, indica diezmar $x_3[n]$ por un factor K.

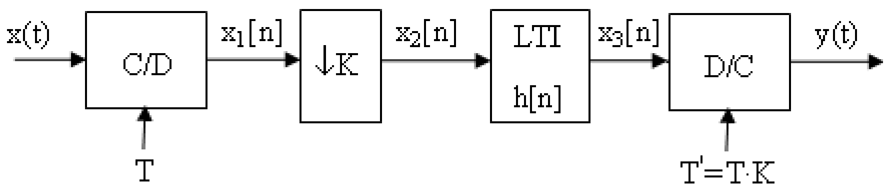
a) Dibuje las transformadas de Fourier de $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$, $x_4[n]$, $y(t)$. Indique claramente la variable representada en el eje de abcisas, amplitudes, periodos y ancho de banda de la primera réplica.
b) Indique cuántos segundos estarán separadas a la salida del sistema de dos muestras que estaban separadas t_0 segundos a la entrada del sistema.

Ejercicio 10

Sea $x(t)$ una señal continua limitada en banda cuya transformada de Fourier $X(j\omega)$ viene dada por:



Dicha señal se procesa mediante el siguiente esquema:



Donde:

- El bloque C/D es un conversor continuo a discreto (muestreador más paso de tren a secuencia) a una tasa de muestreo de T segundos.

–El bloque $\boxed{\downarrow K}$ indica diezmar $x_1[n]$ por un factor K.

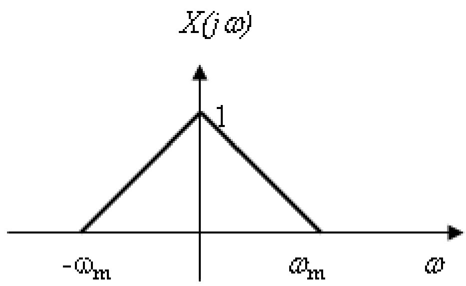
- El tercer bloque es un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]+ c\cdot\delta[n-1]$.

- El bloque D/C es un conversor discreto a continuo (paso de tren a secuencia más filtro paso bajo) a una tasa de interpolación de T' segundos.

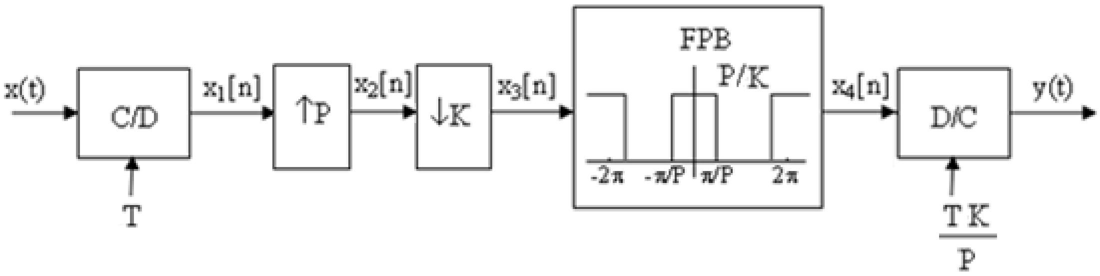
a) Suponga que $c=0$, de forma que $h[n]=\delta[n]$. Dibuje las transformadas de Fourier de $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$, $y(t)$. Indique claramente la variable representada en el eje de abcisas, amplitudes, periodos y ancho de banda de la primera réplica. ¿Cuál es el valor de ω_m para que no se produzca solapamiento?
b) Suponga ahora que c=1. Indique la respuesta en frecuencia del sistema continuo equivalente que permite obtener $y(t)$ a partir de $x(t)$.

Ejercicio 11

Sea $x(t)$ una señal continua limitada en banda cuya transformada de Fourier $X(j\omega)$ viene dada por:



Dicha señal se procesa mediante el siguiente esquema:



Donde:

- C/D es un conversor continuo a discreto (muestreador más paso de tren a secuencia) a una tasa de muestreo de T segundos.

- D/C es un conversor discreto a continuo (paso de tren a secuencia más filtro paso bajo) a una tasa de interpolación de T segundos.

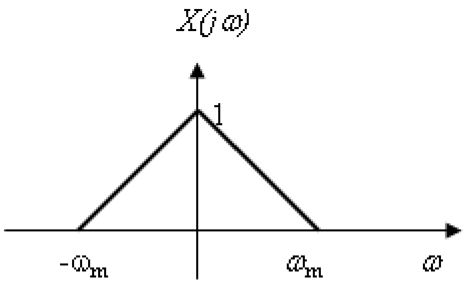
- $\boxed{\uparrow P}$, indica interpolar con ceros $x_2[n]$ por un factor P, es decir, $x_3[n]$ representa el resultado de insertar P-1 ceros entre dos muestras sucesivas de $x_2[n]$.

– $\boxed{\downarrow K}$, indica diezmar $x_1[n]$ por un factor K.

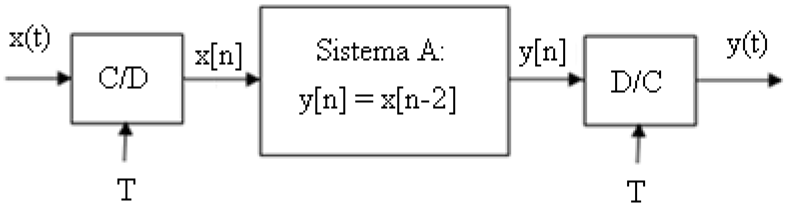
Suponga además que $\omega_m=\pi/(2T)$, que K=2 y que P=4.

a) Dibuje las transformadas de Fourier de $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$, $x_4[n]$, $y(t)$. Indique claramente la variable representada en el eje de abcisas, amplitudes, periodos y ancho de banda de la primera réplica.
b) Como bien sabe, las amplitudes de $x_1[n]$ y $x(t)$ pueden relacionarse mediante la expresión $x_1[n]=x(nT)$. Escriba una expresión similar que relacione las amplitudes de $x_3[n]$ a partir de $x_2[n]$.

Ejercicio 12.- Considere el siguiente esquema de procesamiento, donde x(t) es una señal continua limitada en banda cuya transformada de Fourier $X(j\omega)$ viene dada por:



Dicha señal se procesa mediante el siguiente esquema:



En dicho esquema:

- C/D es un conversor continuo a discreto (muestreador más paso de tren a secuencia) a una tasa de muestreo de T segundos.

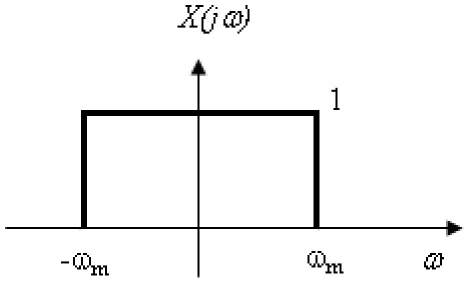
- D/C es un conversor discreto a continuo (paso de tren a secuencia más filtro paso bajo) a una tasa de interpolación de T segundos.

-El sistema A es un sistema discreto cuya salida consiste en retardar la señal a la entrada dos instantes, de manera que su respuesta al impulso es $h[n]=\delta[n-2]$.

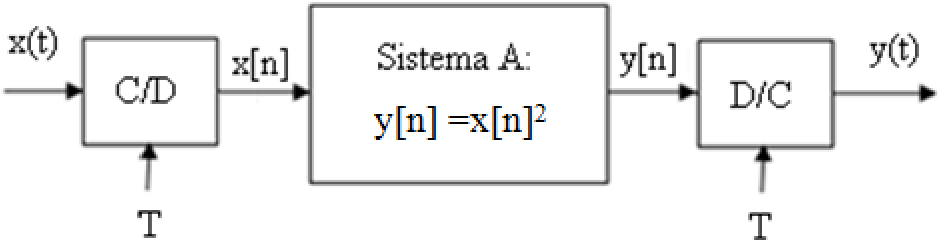
<u>Suponiendo que</u> $T=\pi/(2\omega_m)$:

a) Dibuje las transformadas de Fourier de $x[n]$, $y[n]$ e $y(t)$. Indique claramente la variable representada en el eje de abcisas, amplitudes, periodos y ancho de banda de la primera réplica.
b) Indique si es cierto que para la señal de entrada dada, la salida puede expresarse como $y(t)=x(t-2T)$.
c) Indique si es cierto la respuesta al impulso del sistema continuo equivalente para cualquier señal de entrada es $h(t)=\delta(t-2T)$.

Ejercicio 13.- Considere el siguiente esquema de procesamiento, donde x(t) es una señal continua limitada en banda cuya transformada de Fourier $X(j\omega)$ viene dada por:



Dicha señal se procesa mediante el siguiente esquema:



En dicho esquema:

- C/D es un conversor continuo a discreto (muestreador más paso de tren a secuencia) a una tasa de muestreo de T segundos.

- D/C es un conversor discreto a continuo (paso de tren a secuencia más filtro paso bajo) a una tasa de interpolación de T segundos.

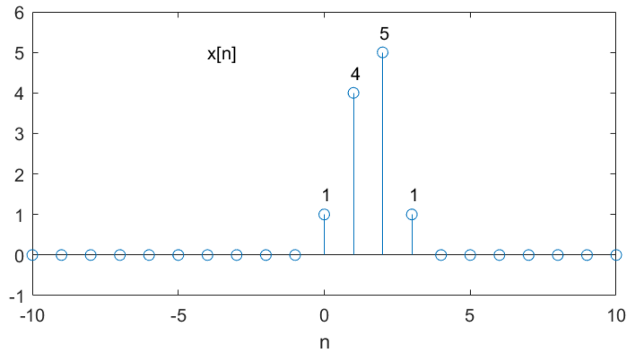
-El sistema A es un sistema discreto cuya salida tiene una amplitud que es el cuadrado de la amplitud de la señal a la entrada.

<u>Suponiendo que</u> $T=\pi/(2\omega_m)$:

a) Dibuje las transformadas de Fourier de x[n], y[n] e y(t). Indique claramente la variable representada en el eje de abcisas, amplitudes, periodos y ancho de banda de la primera réplica.
b) Indique si es cierto que para la señal de entrada dada, la salida puede expresarse como $y(t)=x(t)^2$.
c) Dibuje las trasformadas de y[n] e y(t) si $T=\pi/\omega_m$.

Ejercicio 14.- Considere una señal discreta x[n] que sea ha obtenido muestreando una señal continua x(t) con un periodo de muestreo T_s=1ms de forma que x[n]=x(nT_s).

Suponga que para una señal x(t) determinada se sabe que su ancho de banda es menor que 500Hz y que al muestrearla con T_s=1ms ha dado lugar a la siguiente señal discreta:



La señal x[n] representada se quiere ahora interpolar para recuperar (de forma perfecta o aproximada) la señal x(t) de la que proviene. Para ello, se consideran tres posibles interpoladores:

- Un interpolador de orden cero de vecinos más próximos de tasa T_s que utiliza las muestras de x[n] para generar la señal $x_{i,0}(t)$.
- Un interpolador de orden uno (es decir, un interpolador lineal) de tasa T_s que utiliza las muestras de x[n] para generar la señal $x_{i,1}(t)$.
- Un interpolador filtro paso bajo basado en sincs sinc(t/T_s) que utiliza las muestras de x[n] para generar la señal $x_{i,s}(t)$.

Se le pide que:

a) Indique cuánto vale la señal $x_{i,0}(t)$ en t=1,4ms.
b) Indique cuánto vale la señal $x_{i,1}(t)$ en t=1,4ms.
c) Indique cuánto vale la señal $x_{i,s}(t)$ en t=1,4ms.
d) Indique, además, si se puede saber cuánto vale la señal x(t) en t=1,4ms. Si su respuesta es negativa, justifique la causa. Si su respuesta es afirmativa, indique cuál es el valor.

Algunas soluciones:

Ejercicio 1. (a) No hay solapamiento; (b) Solapamiento; (c) No hay solapamiento; (d) Solapamiento; (e) No hay solapamiento.

Ejercicio 3. (a) $T \leq \frac{\omega_M}{\pi}$; (b) $T \leq \frac{2\pi}{\omega_M}$

Ejercicio 4. $H(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega T}} & |\omega| \leq \pi/T \\ 0 & |\omega| > \pi/T \end{cases}$

Ejercicio 6. (b) $\omega_M \leq \frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{9} \leq \Omega_d \leq \frac{5\pi}{36}$

Ejercicio 8. (b) $W_{max} = \frac{\pi}{3T}; K = \frac{3}{2}T$

Ejercicio 10. (b) $H_c(j\omega) = \begin{cases} 1 + e^{-j\omega KT} & |\omega| \leq \pi/KT \\ 0 & resto \end{cases}$

Ejercicio 12. (b) SI; (c) NO.

Ejercicio 14. (a) $x_{i,0}(t = 1.4T) = 4$; (b) $x_{i,1}(t = 1.4T) = 4{,}4$; (c) $x_{i,s}(t = 1.4T) = 5.15$; (d) Si empleamos un interpolador ideal si: $x_{i,s}(t = 1.4T) = 5.15$.

Universidad Rey Juan Carlos

Señales y Sistemas

EJERCICIOS TEMA 6: DFT

Ejercicio 1

Considere la siguiente secuencia compleja:

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\Omega_0 n}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

(a) Calcule la transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ de la señal.
(b) Calcule la DFT de N puntos de la $X_N[k]$ de la secuencia finita $x[n]$.
(c) Determine la DFT de $x[n]$ para el caso de que $\Omega_0 = 2\pi k_0/N$, donde k_0 es un número entero.

Ejercicio 2

Considere una secuencia $x[n]$ de longitud 20, es decir, que $x[n] = 0 \; si \; n < 0, n > 19$. Sea $X(e^{j\Omega})$ la transformada de Fourier de $x[n]$.

(a) Si se desea evaluar la $X(e^{j\Omega})$ a $\Omega = 4\pi/5$ mediante una DFT de M puntos, desarrolle un método para obtener $X(e^{j4\pi/5})$ empleando el número mínimo de puntos de M.
(b) Si se desea evaluar la $X(e^{j\Omega})$ a $\Omega = 10\pi/27$ mediante una DFT de L puntos, desarrolle un método para obtener $X(e^{j10\pi/27})$ empleando el número mínimo de puntos de L.

Ejercicio 3

Considere la secuencia de longitud finita $x[n]$ que se muestra en la Figura 1. Sea $X(e^{j\Omega})$ la transformada de Fourier de dicha secuencia.

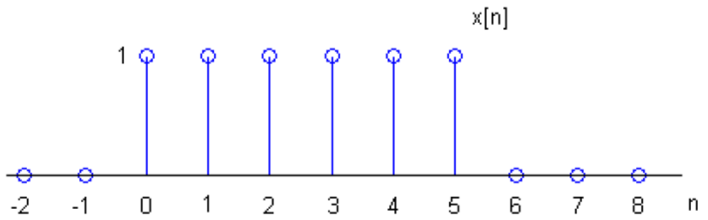


Figura 1

Suponga que muestreamos la TF indicada en el periodo $[0,2\pi]$, en concreto, en los puntos $\Omega = \frac{2\pi k}{4}$ generando la señal:

$$X_1[k] = X(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\frac{2\pi}{4}k} = X\left(e^{\frac{j2\pi}{4}k}\right), k = 0,1,2,3$$

(a) ¿Es $X_1[k]$ la DFT de la secuencia $x[n]$?
(b) Dibuje la secuencia $x_1[k]$ resultante de aplicar la DFT inversa a $X_1[k]$
(c) Explique en términos de muestreo a qué se debe el efecto que se observa en (b).

Ejercicio 4

La Figura 2 muestra una secuencia de longitud finita $x[n]$. Dibuje la secuencia para los siguientes casos:

$$x_1[n] = x\left[((n-2))_4\right]\ 0 \leq n \leq 3; x_2[n] = x\left[((-n))_4\right] 0 \leq n \leq 3$$

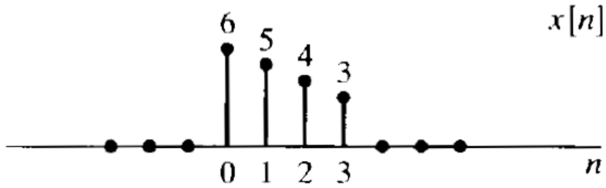


Figura 2

Ejercicio 5

Dos secuencias de 9 puntos $x_1[n]$ y $x_2[n]$ mostradas en la Figura 3 tienen DFTs $X_{1,N}[k]$ y $X_{2,N}[k]$ respectivamente. Determine la relación entre ambas DFTs.

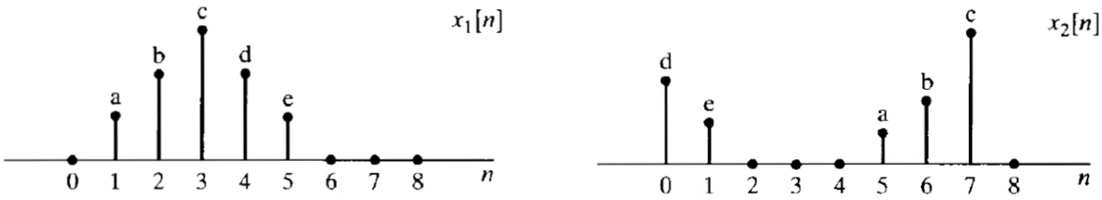


Figura 3

Ejercicio 6

Dos secuencias finitas $x[n]$ y $x_1[n]$ (mostradas en la Figura 4) tienen por DFTs, $X_N[k]$ y $X_{1,N}[k]$ respectivamente, y están relacionadas a partir de la ecuación:

$$X_1[k] = X[k]e^{-j(2\pi km/6)},$$

donde m es una incógnita. ¿Es posible determinar un m consistente con la Figura 4? ¿Es este valor único? Si es así, justifique la respuesta. En caso contrario, encuentre otro valor de m que sea también consistente con dicha información.

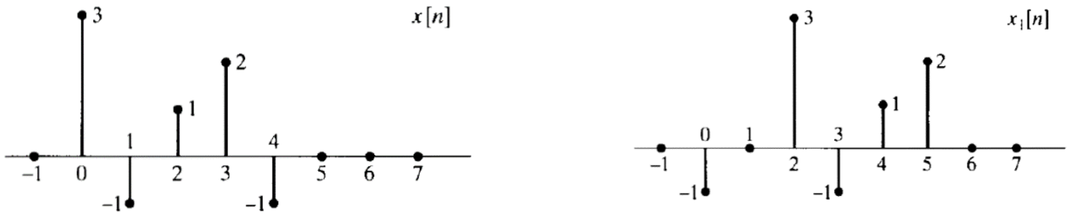


Figura 4

Ejercicio 7

La Figura 5 muestra dos secuencias finitas $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Represente gráficamente su convolución circular de 6 puntos.

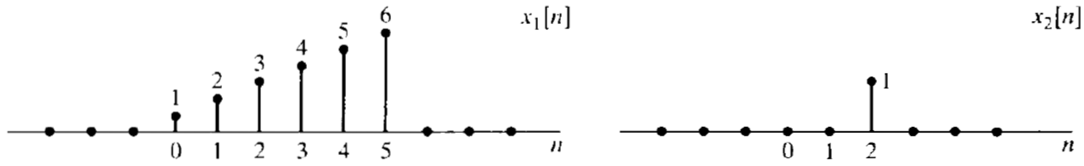


Figura 5

Ejercicio 8

Dos señales de longitud finita $x_1[n]$ y $x_2[n]$ se muestran en la Figura 6. Asuma que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son cero fuera de la región mostrada en la Figura 2. Sea $x_3[n]$ la convolución circular de 8 puntos entre $x_1[n]$ y $x_2[n]$, es decir:

$$x_3[n] = x_1[n] \circledS x_2[n]$$

Calcule $x_3[2]$.

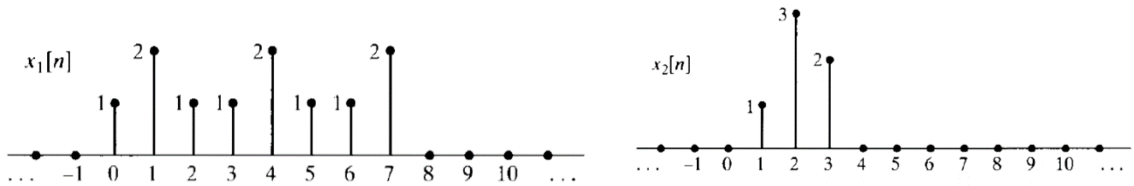


Figura 6

Ejercicio 9

La Figura 7 muestra dos secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$. El valor de $x_2[3]$ es un valor desconocido a. Esta misma Figura muestra además la secuencia $y[n]$ resultante de la convolución circular de 4 puntos entre $x_1[n]$ y $x_2[n]$. En base a la información de la Figura, ¿es posible especificar unívocamente a? Y en ese caso, ¿qué valor toma? En caso contrario, indique dos posibles valores para los que se obtiene la secuencia $y[n]$ indicada.

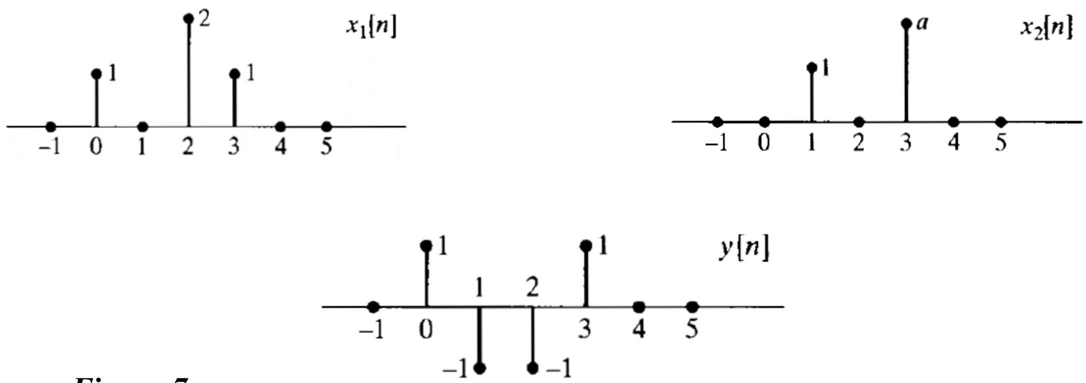


Figura 7

Ejercicio 10

Sea $x_1[n]$ una secuencia finita descrita en la Figura 8 y $x_2[n]$ otra secuencia finita de longitud 4 que se puede definir como:

$$x_2[n] = \delta[n-3]$$

(a) Determine la longitud mínima N de la secuencia $x_3[n]$ resultante de convolucionar ambas señales, de forma que se cumpla:

$$x_3[n] = x_1[n] \, \text{Ⓝ} \, x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

(b) Calcule gráficamente la convolución circular, aplicando el método de extensión periódica con período N. Demuestre que coincide con la convolución lineal de ambas señales.

(c) Calcule de nuevo la convolución circular gráficamente, para $N = 4$.

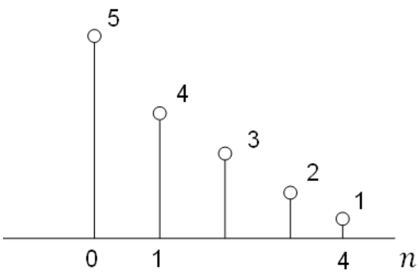


Figura 8

Ejercicio 11

Suponga dos secuencias de 4 puntos $x[n]$ y $h[n]$ de la forma:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$h[n] = 2^n \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

(a) Calcule la DFT de 4 puntos $X_4[k]$.

(b) Calcule la DFT de 4 puntos $H_4[k]$.

(c) Calcule la siguiente convolución circular, aplicando el método de extensión periódica.

$$y[n] = x[n] \, \text{④} \, h[n]$$

(d) Calcule $y[n]$ de la parte (c) a través de las DFTs de $x\,[n]$ y $h\,[n]$.

Ejercicio 12

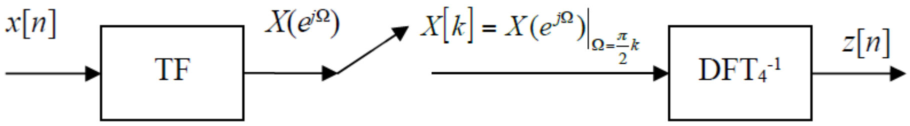
Una señal sinusoidal con una frecuencia fundamental de 5 kHz se muestrea a 40 kHz. Se obtienen 128 muestras de dicha señal que se utilizan para calcular la DFT de 128 puntos.

(a) ¿Cuál es la duración en segundos de las muestras recogidas?

(b) ¿En qué índices (valores de k) de la DFT se deberían ver picos en el espectro?

Ejercicio 13

Considere el siguiente esquema de procesamiento:



Si $x[n]$ es una señal discreta tal que $x[n] = 0, n \in [0, L]$.

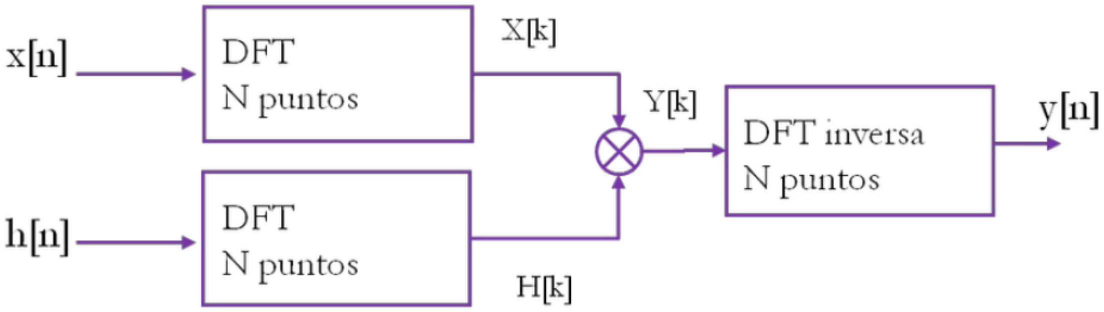
(a) Considere que $L = 3$. Escriba una fórmula que exprese la señal $z[n]$ a partir de $x[n]$. Exprese la fórmula de la manera más sencilla posible.
(b) Considere que $L = 11$. Escriba una fórmula que exprese la señal $z[n]$ a partir de $x[n]$. Exprese la fórmula de la manera más sencilla posible.

A partir de ese punto, la entrada $x[n]$ se obtiene como la convolución circular de longitud N de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, donde $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son señales discretas de longitud finita tales que $x_1[n] = 0$ si $n \notin [0, P_1]$ y $x_2[n] = 0$ si $n \notin [0, P_2]$.

(c) Considere que $N = 2, P_1 = 1, P_2 = 1$. ¿Es $z[n]$ la convolución circular de longitud 2 de $x_1[n]$ y $x_2[n]$?
(d) Considere que $N = 4, P_1 = 1, P_2 = 1$. ¿Es $z[n]$ la convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$?
(e) Considere que $N = 4, P_1 = 3, P_2 = 3$. ¿Es $z[n]$ la convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$?

Ejercicio 14

Considere el siguiente esquema de procesamiento:



Suponga que $N = 5, x[n] = u[n] - u[n-3]$ y $h[n] = \delta[n-1] + \delta[n-4]$

(a) Dibuje la señal $y[n]$.
(b) ¿Es la señal $y[n]$ la convolución circular de longitud N de $x[n]$ y $h[n]$?

Algunas soluciones:

Ejercicio 2. (a) $X\left(e^{j\Omega}\right)\big|_{\Omega=\frac{4\pi}{5}} = X_{20}[8]$; (b) $X\left(e^{j\Omega}\right)\big|_{\Omega=\frac{10\pi}{27}} = X_{27}[5]$;

Ejercicio 6. $m = 2$; también: $m = -4$

Ejercicio 10. (a) $N_{min} = 8$ (b) $x_3[n] = x_1[n-3]$; (c) $x_3[n] = 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 6\delta[n-3]$

Ejercicio 13. (a) $z[n] = x[n], n = 0,1,2,3$;(b) $z[n] = \sum_{m=0}^{2} x[n+4m]$; (c) $z[n]$ convolución de 2 puntos de $x_1[n]$ y $x_2[n]$;(d) $z[n]$ convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$; (e) $z[n] \neq x_1[n] * x_2[n]$

Ejercicio 14. (b) SI.

Universidad Rey Juan Carlos

Señales y Sistemas

Examen Parcial 1

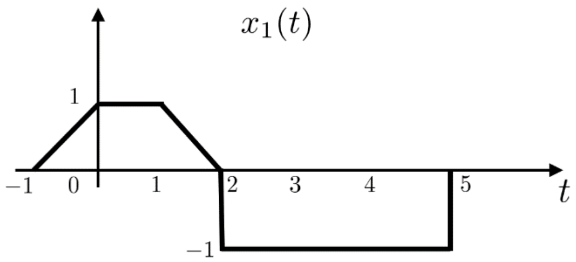
Apellidos……..

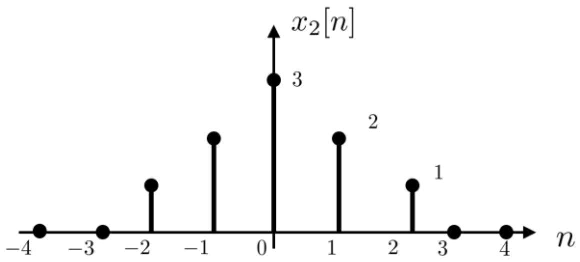
Nombre…………………………………………………. Número de hojas adicionales: ...……

Instrucciones

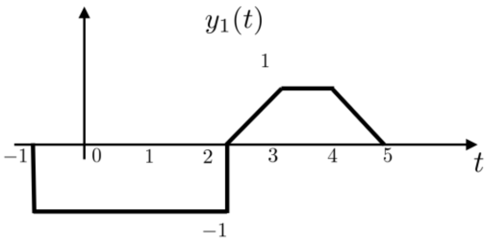
El tiempo para la realización del examen es de 1 hora 40 minutos. Se permite utilizar una hoja de fórmulas (un folio por las dos caras), que deberá ser entregado junto con el examen. La hoja de fórmulas no puede contener ejercicios, únicamente ecuaciones. El examen consta de 4 páginas (2 hojas impresas a 2 caras). Conteste al examen en la hoja del enunciado justificando de la manera más concisa posible sus respuestas. Si necesita entregar una solución más detallada, podrá adjuntar al examen hojas adicionales, indicándolo en la parte superior de este enunciado.

Ejercicio 1. Dadas las siguientes señales:



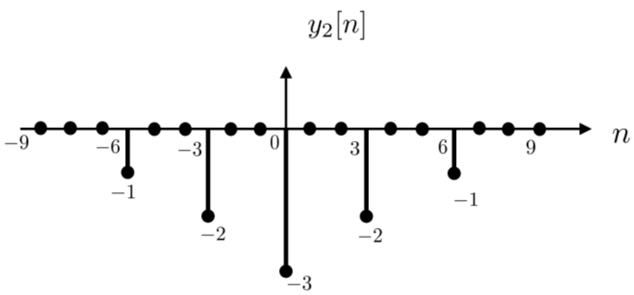


a) **[1 punto]** Indicar las transformaciones necesarias para obtener $y_1(t)$ a partir de la señal $x_1(t)$.



$y_1(t) =$

b) **[1 punto]** Indicar las transformaciones necesarias para obtener $y_2[n]$ a partir de la señal $x_2[n]$.



$y_2[n] =$

Ejercicio 2. Dadas las siguientes señales:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}; \qquad z(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(t - 2m).$$

a) **[1.5 punto]** Representar la señal $y_1(t) = x(2t) \cdot j[\delta(t - 0.25) + \delta(t - 0.75)]$. ¿Es periódica? Si lo es, indique el periodo. Calcule la potencia media y la energía total de $y_1(t)$, e indique si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

Periódica: $Si, T_0 =$ */ No*

$P =$ $E =$

b) **[1.5 punto]** Representar la señal $y_2(t) = x(t) * z(t)$. ¿Es periódica? Si lo es, indique el periodo fundamental. Calcule la potencia media y la energía total de $y_2(t)$, e indique si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

Periódica: $Si, T_0 =$ */ No*

$P =$ $E =$

Ejercicio 3. Se sabe que la salida de un sistema discreto cuando la entrada es una señal cualquiera $x[n]$ está dada por:

$$y[n] = e^{j\pi n}(x[n] - x[n-3]).$$

a) **[0.5 puntos]** Estudie la causalidad del sistema.

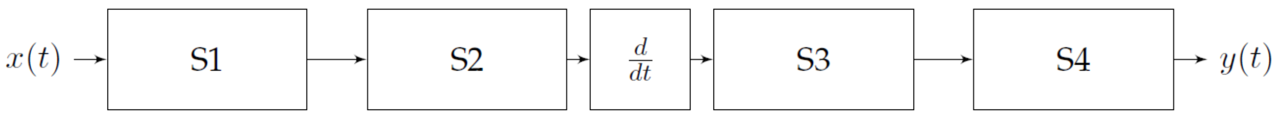
Causal / No causal / Anticausal / No puede saberse

b) **[1 punto]** Indique de manera justificada si es posible obtener la salida de este sistema para cualquier señal $x[n]$ como $y[n] = x[n] * h[n]$ (asumiendo que $h[n]$ fuese conocido).

Si / No / No puede saberse

Ejercicio 4. Se tiene ahora el siguiente **SLIT**, de cuyos subsistemas conocemos los siguientes datos:

- **S1)** La entrada $x(t) = \frac{1}{3}\delta(t-3)$ genera una salida $y(t) = \frac{1}{3}u(t-4)$.
- **S2)** La respuesta al impulso del sistema es $h_2(t) = e^{-5(t-2)}u(t-2)$.
- **S3)** La <u>*respuesta al escalón*</u> del sistema es $s_3(t) = u(t-3)$.
- **S4)** La respuesta al impulso del sistema es $h_4(t) = u(t+2) - u(t-2)$.



a) **[0.5 punto]** Obtener la respuesta al impulso del sistema S1.

$h_1(t) =$

b) **[1 punto]** Calcular $v(t)$, obtenido como la respuesta al impulso equivalente de la asociación de los subsistemas S1, S2 y el bloque derivador.

$v(t) =$

c) **[1 punto]** Calcular $w(t)$, obtenido como la respuesta al impulso equivalente de la asociación de los subsistemas S3 y S4.

$w(t) =$

Independientemente de la solución obtenida en los apartados anteriores, de ahora en adelante asuma que $v(t) = e^{-5(t-1)}u(t-1)$ y $w(t) = u(t) - u(t-3)$.

d) **[1 punto]** Utilice $v(t)$ y $w(t)$ para obtener la expresión analítica de la respuesta al impulso equivalente $h_{eq}(t)$ de la asociación de todos los subsistemas del diagrama.

$h_{eq}(t) =$

Universidad Rey Juan Carlos

Señales y Sistemas

Examen Parcial 2

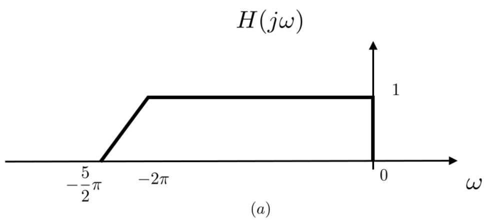
Apellidos………..

Nombre…………………………………………………. Número de hojas adicionales: ...……

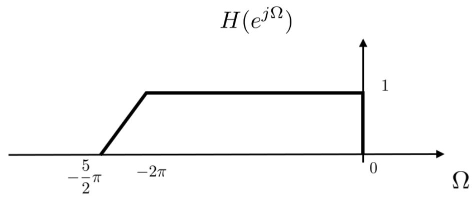
Instrucciones

El tiempo para la realización del examen es de 1 hora 40 minutos. No se permite utilizar hoja de fórmulas, simplemente las hojas de propiedades y transformadas inmediatas entregadas junto al enunciado. El examen consta de 4 páginas (2 hojas impresas a 2 caras). Conteste al examen en la hoja del enunciado justificando de la manera más concisa posible sus respuestas. Si necesita entregar una solución más detallada, podrá adjuntar al examen hojas adicionales, indicándolo en la parte superior de este enunciado.
Nota: NO INDICAR ADECUADAMENTE LA PERIODICIDAD DE LAS SEÑALES SE PENALIZARÁ.

Ejercicio 1. **[3 punto]** Las figuras (a) y (b) muestran respectivamente la posible respuesta en frecuencia de un SLIT en tiempo continuo y un SLIT en tiempo discreto.



(a)



(b)

a) **[0.5 punto]** Indique si la respuesta en frecuencia mostrada en la **figura (b)** es una Transformada de Fourier de una señal discreta válida. Justifique brevemente su respuesta.

Para el resto de preguntas, responda fijándose en la respuesta en frecuencia mostrada en la **figura (a).**

b) **[0.5 punto]** Sin calcular la TF inversa, justifique brevemente si la respuesta al impulso $h(t)$ es una señal periódica.

A continuación, se tiene la señal $x(t) = \frac{2sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}\,\mathrm{sen}(\pi t)$ a la entrada del sistema descrito en la figura (a).

a) **[1 punto]** Calcule la Transformada de Fourier, $X(j\omega)$, y represente su módulo.

$X(j\omega) \;=$

b) **[1 puntos]** Calcule la energía y la potencia de la señal $y(t)$, que representa la salida del sistema cuando la entrada viene dada por $x(t)$.

$E_y \;=\qquad , \; P_y =$

Ejercicio 2. **[1.5 puntos]** Sea $x(t)$ una señal de la que se sabe la siguiente información:

- $x(t)$ es una señal real y par, con periodo fundamental $T_0 = 5$ segundos.
- Se sabe que sus coeficientes a_{-3}, a_{-1}, a_1, a_3 son sus únicos coeficientes no nulos.
- Se sabe que $a_1 = \; -a_3$ y que a_1 es un número real y positivo.
- Su potencia media es igual a 16 W.

Con esta información, se pide expresar $x(t)$ como la suma de señales sinusoidales reales.

$x(t) \;=$

Ejercicio 3. [**2.5 puntos**] Sea $x[n]$ una señal con periodo N=5, se conocen los siguientes coeficientes de su DSF:

$$a_{20} = 0, \qquad a_{21} = 2j, \qquad a_{22} = j, \qquad a_{23} = -j, \qquad a_{24} = -2j.$$

a) **[0.5 punto]** Represente el módulo y la fase de los coeficientes a_k para $k = -2, -1, 0, 1, 2$.

b) [**0.5 puntos**] Indique si la señal x[n] es real. Justifique brevemente su respuesta.

c) [**0.5 puntos**] Indique si la señal x[n] es real y par. Justifique brevemente su respuesta.

d) [**0.5 puntos**] Indique razonadamente cual es la energía y la potencia de la señal x[n].

$E_x =$ $P_x =$

e) [**0.5 puntos**] Calcule el valor medio de x[n]. Justifique brevemente su respuesta.

$< x[n] > =$

Ejercicio 4. [**3 puntos**] Se tiene un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n] = \frac{\pi}{3} sinc\left(\frac{n+2}{3}\right)$.

a) [**1 puntos**] Calcule la respuesta en frecuencia $H(e^{j\Omega})$ del sistema y **dibuje su módulo**.

$H(e^{j\Omega}) \;=$

Con independencia del resultado obtenido en el apartado anterior, asuma a continuación que el sistema LTI tiene una respuesta al impulso $h[n]$ cuya respuesta en frecuencia para un periodo en el intervalo $[-\pi, \pi]$ está dada por:

$$\mathrm{H}\left(e^{j\,\Omega}\right) = \begin{cases} 2\pi, & 0 \leq |\Omega| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\Omega| \leq pi. \end{cases}$$

b) **[1 punto]** Dada la señal $x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - j3sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$, determine la potencia de la señal $y_1[n] = x_1[n] * h[n]$.

$P_{y_1} =$

c) **[1 punto]** Dada la señal $x_2[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n} e^{j\pi n}$, determine la energía de la señal $y_2[n] = x_2[n] * h[n]$.

$E_{y_2} =$

Universidad Rey Juan Carlos

Señales y Sistemas

Examen Parcial 3

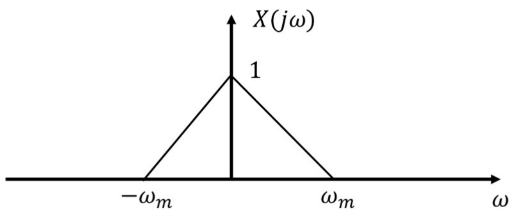
Apellidos……………………………………………………………………………………………………….

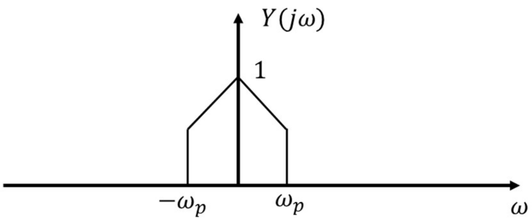
Nombre…………………………………………………. Número de hojas adicionales: ...……

Instrucciones

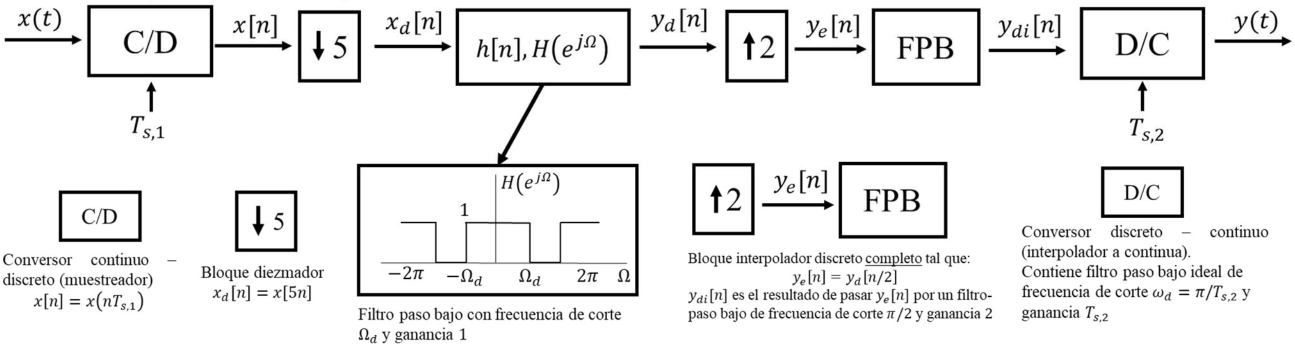
El tiempo para la realización del examen es de ***2h****. No se permiten libros ni hojas de fórmulas. El examen consta de* ***5 páginas (3 hojas impresas a 2 caras)****. Como anexo, se facilitan tablas de transformada que pueden resultar de utilidad. Conteste al examen en la hoja del enunciado justificando de la manera más concisa posible sus respuestas. Si cree necesario entregar una solución más detallada podrá adjuntarla al examen y deberá indicarlo en la parte superior de este enunciado. Escribir su nombre con faltas de ortografía conllevará la pérdida de toda la calificación del parcial.*

Ejercicio 1 *[4 puntos].* Se busca procesar discretamente una señal continua $x(t)$, cuya transformada de Fourier, $X(j\omega)$, tiene la forma mostrada en la figura inferior izquierda, siendo $\omega_m = 30\pi \cdot 10^3\ rad/s$:



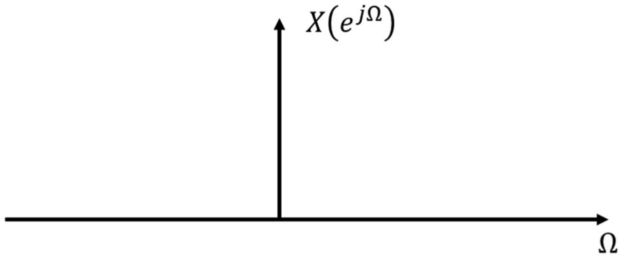


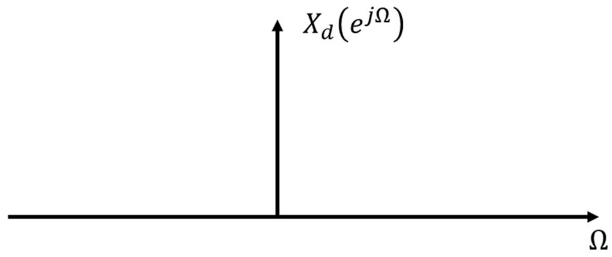
El objetivo es filtrar aquellas frecuencias por encima de $\omega_p = 20\pi \cdot 10^3\ rad/s$, de forma que se obtenga la señal $Y(j\omega) = X(j\omega)$ si $|\omega| \le \omega_p$ y 0 en el resto (véase la figura superior derecha). Se plantea entonces el siguiente esquema de procesamiento para realizar tal operación.



Se pide:

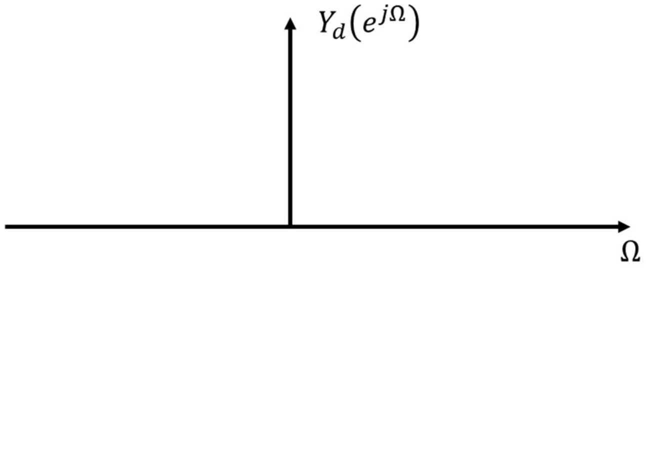
(a) Dibuje $X(e^{j\Omega}), X_d(e^{j\Omega})$, las transformadas de Fourier de $x[n], x_d[n]$ respectivamente. Etiquete los ejes, indique las amplitudes y, si la TF es periódica, indique su periodo. ¿Qué condición debe cumplir $T_{s,1}$ para evitar el efecto de solapamiento?

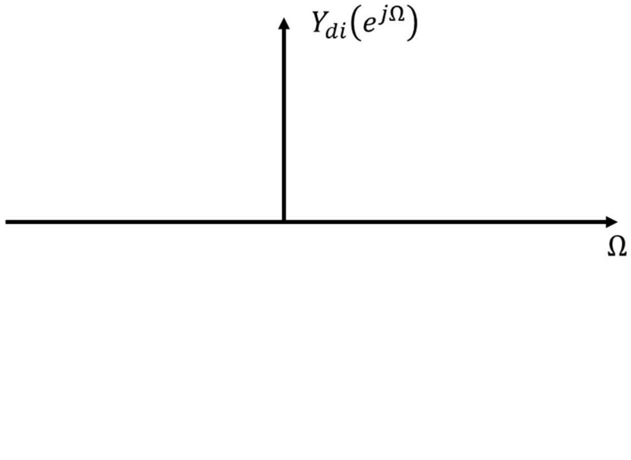




Condición $T_{s,1}$	

(b) Dibuje $Y_d(e^{j\Omega}), Y_{di}(e^{j\Omega})$, las transformadas de Fourier de $y_d[n], y_{di}[n]$ respectivamente. Etiquete los ejes, indique las amplitudes y, si la TF es periódica, indique su periodo. **NOTA:** <u>asuma que Ω_d es menor al límite de la transformada $X_d(e^{j\Omega})$, calculado en el apartado anterior.</u>

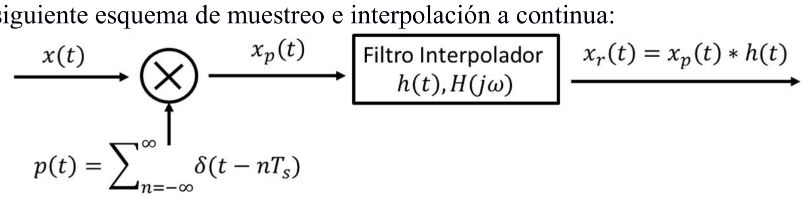




(c) Si se tiene una frecuencia de muestreo $f_{s,1} = 1/T_{s,1} = 160\ k$Hz ¿Qué valor debe tener Ω_d y $T_{s,2}$, para que la salida del sistema coincida con la señal $Y(j\omega)$ anteriormente indicada.

Ω_d	
$T_{s,2}$	

Ejercicio 2 *[2 puntos].* Sea una señal discreta $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 4\delta[n-3]$. Dicha señal, se ha obtenido al muestrear una señal continua $x(t)$ con un periodo de muestreo $T_s = 10$ ms. Se busca implementar un interpolador que permita recuperar de forma perfecta o aproximada la señal $x(t)$ a partir de la señal discreta $x[n]$. Para ello puede apoyarse en el siguiente esquema de muestreo e interpolación a continua:



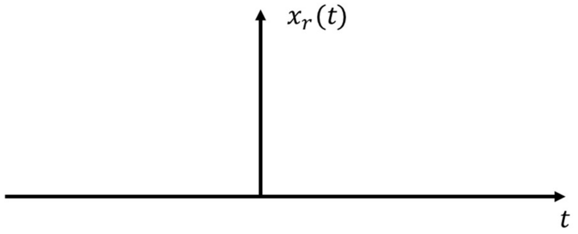
Para implementar el filtro interpolador indicado, se valoran dos opciones:

- Interpolador de vecino más próximo, con una tasa de muestreo T_s.
- Interpolador lineal con una tasa de muestreo T_s.

(a) ¿Cuál de los dos interpoladores utilizaría si se desea que su respuesta en frecuencia introduzca la mínima distorsión sobre la réplica principal de $X_p(j\omega)$ (la transformada de Fourier de $x_p(t)$), a costa de realizar un peor filtrado de las réplicas superiores? Justifique su respuesta.

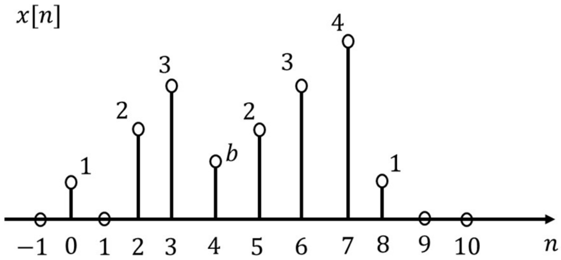
Respuesta	

(b) Dibuje de forma perfecta o aproximada $x_r(t)$, la señal interpolada de $x[n]$, empleando el interpolador escogido en el apartado (a). Etiquete los ejes e indique las amplitudes. Indique cual es el valor de $x_r(t)$ para $t = 12$ ms $y\ t = 27$ ms.

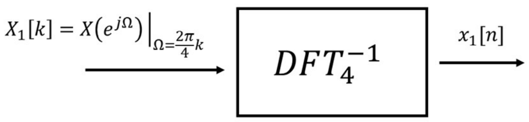


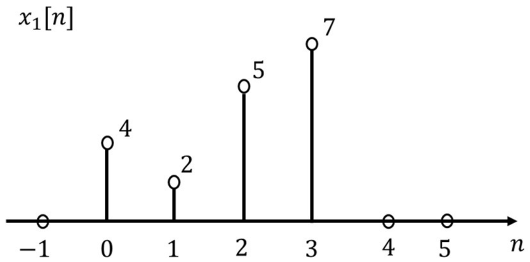
$x_r(t = 12\ ms)$	
$x_r(t = 27\ ms)$	

Ejercicio 3 *[2 puntos].* La figura inferior muestra la secuencia discreta $x[n]$ de longitud 9. Fuera del intervalo dibujado, $x[n] = 0$. El valor de esta secuencia en $n = 4$ es desconocido y se representa mediante la variable b.



Aparte, se define la secuencia $X_1[k]$ como una versión muestreada de $X(e^{j\Omega})$ con un período de muestreo de $\pi/2$. Finalmente, la secuencia $x_1[n]$ se define como la DFT inversa de longitud 4 de la secuencia $X_1[k], k = 0,1,2,3$ y se representa en la figura inferior. El siguiente esquema resume ambas operaciones. La salida $x_1[n]$ se representa en la parte inferior derecha.





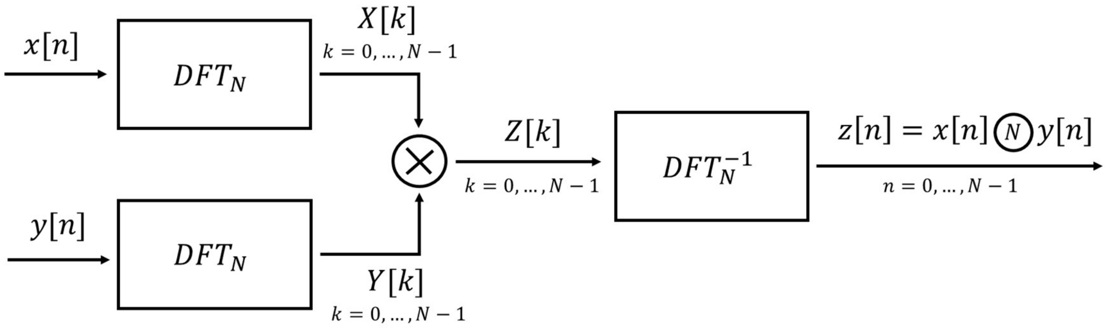
En base a estos datos, calcule el valor de b.

b	

Ejercicio 4 *[2 puntos].* Se desea implementar un algoritmo que permita calcular de forma exacta la convolución lineal entre dos secuencias discretas $x[n]$ e $y[n]$ definidas como:

$$\begin{cases} x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) & n = -1,0,1,2 \\ y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n & n = 0,1,2 \end{cases}$$

Para ello, se propone calcular la convolución circular de $N = 4$ puntos estas dos señales, a través de las DFTs de $x[n]$ e $y[n]$, de acuerdo con el siguiente esquema:



Se pide:

(a) Calcule y dibuje la señal z[n] de salida. Etiquete los ejes e indique las amplitudes. **NOTA:** puede emplear cualquiera de los dos métodos vistos en la asignatura, para calcular la convolución circular.

(b) ¿Es la señal $z[n]$ la convolución lineal entre $x[n]$ e $y[n]$? Justifique su respuesta. En caso negativo, proponga una modificación al sistema planteado para que se cumpla dicha condición, indicando el número de puntos necesarios en las DFTs y los limites en los que esta definida cada señal.

Tablas: propiedades y pares básicos de transformadas.

Transformada de Fourier en Tiempo Continuo (TF)

Definición	Ecuación análisis	Ecuación Síntesis
$x(t), t \in \mathbb{R}$	$X(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	$x(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Propiedades	Señal en tiempo	Transformada
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t - t_0)$	$e^{j\omega t_0}X(j\omega)$
Desplazamiento frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión temporal	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Expansión en tiempo	$x(t/K)$	$X(jK\omega)$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$
Modulación	$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$

Pares básicos

Señal	Transformada	Señal	Transformada
$\delta(t)$	1	Tren de deltas: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_0)$	$\frac{2\pi}{t_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{t_0}k\right)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{j\omega t_0}$	Onda cuadrada: $x(t) = \begin{cases} 1 & \lvert n\rvert \le T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$	$\frac{sin[\omega T]}{\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$		

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (TF)

Expresión

	Ecuación análisis	Ecuación Síntesis
$x[n], n \in \mathbb{Z}$	$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$	$x[n] = \int_{\Omega=0}^{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{-j\Omega n}d\Omega$

Propiedades	Señal en tiempo	Transformada
Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega})$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0]$	$e^{j\Omega n_0}X(e^{j\Omega})$
Desplazamiento frecuencia	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Expansión en tiempo	$x[n/K]$	$X(K\Omega)$
Convolución	$x[n] * y[n]$	$X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$
Modulación	$x[n] \cdot y[n]$	$(1/2\pi)X(\Omega) * Y(\Omega)$

Pares básicos

Señal	Transformada	Señal	Transformada
$\delta[n]$	1	Tren de deltas: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$	$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right]$
$\delta[n-n_0]$	$e^{j\Omega n_0}$	Onda cuadrada $x[n] = \begin{cases} 1 & \lvert n\rvert \leq N_1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$	$\frac{\sin\left[\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\Omega/2)}$
1	$2\pi\delta(\Omega)$	$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta(\Omega)$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$		

Transformada Discreta de Fourier (DTF)

Expresión

	Ecuación análisis	Ecuación Síntesis
$x[n]\ long. N$	$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $k=0,1,..,N-1$	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k]\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ $n=0,1,..,N-1$

Propiedades	Señal en tiempo	Transformada
Linealidad	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$X_{3,N}[k] = aX_{1,N}[k]+bX_{2,N}[k]$
Desplazamiento temporal	$x[((n-n_0))_N]$	$X_N[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$
Desplazamiento frecuencia	$e^{j\mathrm{k}_0 n}x[n]$	$X[((k-k_0))_N]$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*\left[((-k))_N\right]$
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Convolución circular	$x_1[n]\ Ⓝ\ x_2[n]$	$X_{1,N}[k]\cdot X_{2,N}[k]$
Modulación	$x[n]\cdot y[n]$	$\frac{1}{N}X_{1,N}[k]\ Ⓝ\ X_{2,N}[k]$

Universidad Rey Juan Carlos

Señales y Sistemas

Examen Recuperación - Parte I

Apellidos……..

Nombre…………………………………………………. Número de hojas adicionales: ...……

Instrucciones

El tiempo para la realización del examen es de 1 hora. El examen consta de 4 páginas (2 hojas impresas a 2 caras). Conteste al examen en la hoja del enunciado justificando de la manera más concisa posible sus respuestas. Si necesita entregar una solución más detallada, podrá adjuntar al examen hojas adicionales, indicándolo en la parte superior de este enunciado.

Ejercicio 1. **[4 puntos]** Dadas las siguientes señales:

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\Lambda\left(\frac{t}{2} - 3 - 7m\right) - \Lambda\left(\frac{t}{2} + 1 - 7m\right)\right),$$

$$y(t) = j\,[u(t + 3.5) - u(t - 3.5)]x(2t + 2).$$

Nota: recuerde que $\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{t}{T} + 1, & -T \le t < 0 \\ -\frac{t}{T} + 1, & 0 \le t < T \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$

a) **[1 punto]** Represente la señal $x(t)$.

b) **[0.5 puntos]** ¿Es $x(t)$ una señal simétrica? En caso afirmativo, indique que tipo de simetría presenta. ¿Es $x(t)$ una señal periódica? En caso afirmativo, indique su periodo.

Simétrica: Si, tipo: / No
Periódica: Si, $T_0 =$ */ No*

c) **[1 punto]** Represente el módulo y la fase de $y(t)$.

d) **[0.5 puntos]** ¿Es $y(t)$ una señal simétrica? En caso afirmativo, indique que tipo de simetría presenta. ¿Es $y(t)$ una señal periódica? En caso afirmativo, indique su periodo.

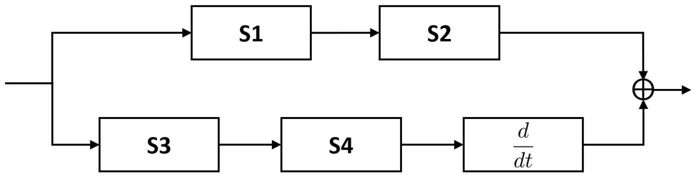
Simétrica: Si, tipo: / No
Periódica: Si, $T_0 =$ */ No*

e) **[1 punto]** Calcular la potencia y energía de la señal $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

$P_z =$
$E_z =$

Ejercicio 2. **[4 puntos]** Se tiene el siguiente SLIT, de cuyos subsistemas conocemos los siguientes datos:

- **S1)** La respuesta al impulso del sistema es $h_1(t) = \mathrm{u}(t+4) - 2\mathrm{u}(t+2) + \mathrm{u}(\mathrm{t})$.
- **S2)** La respuesta al impulso del sistema es $h_2(t) = \mathrm{u}(-t-1)$.
- **S3)** La respuesta al impulso del sistema es $h_3(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 3 \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$
- **S4)** La respuesta al impulso del sistema es $h_4(t) = 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$.



Utilizando la operación de convolución y las propiedades de los SLIT:

a) **[2 punto]** Calcular y representar $\mathrm{v}(\mathrm{t})$, obtenido como la respuesta al impulso equivalente de la asociación de los subsistemas S1 y S2.

$v(t) =$

b) **[1.5 puntos]** Calcular y representar $\mathrm{w}(\mathrm{t})$, obtenido como la respuesta al impulso equivalente de la asociación de los subsistemas S3, S4 y el sistema derivador.

$w(t) =$

Independientemente de los resultados obtenidos anteriormente, en el resto del examen asuma que:

$$\mathrm{v}(t) = -3\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right) \text{ y } \mathrm{w}(t) = 3\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right).$$

c) **[0.5 punto]** Utilice $\mathrm{v(t)}$ y $\mathrm{w(t)}$ para obtener la respuesta al impulso equivalente, $h_{eq}(t)$, de la asociación de todos los subsistemas del diagrama. Represente $h_{eq}(t)$.

$h_{eq}(t) =$

Ejercicio 3. **[2 puntos]** Considere un SLIT cuya relación entrada-salida viene determinada por la siguiente expresión:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} e^{-(n-k)}\, x[k-3].$$

a) **[1 punto]** Obtenga una expresión para la respuesta al impulso del sistema.

$h[n] =$

b) **[1 punto]** Estudie las propiedades de causalidad y estabilidad del sistema.

Causal: *Si / No*
Estable: *Si / No*

Universidad Rey Juan Carlos

Señales y Sistemas

Examen Recuperación - Parte II

Apellidos………..

Nombre…………………………………………………. Número de hojas adicionales: ...……

Instrucciones

El tiempo para la realización del examen es de 1 hora. El examen consta de 4 páginas (2 hojas impresas a 2 caras). Conteste al examen en la hoja del enunciado justificando de la manera más concisa posible sus respuestas. Si necesita entregar una solución más detallada, podrá adjuntar al examen hojas adicionales, indicándolo en la parte superior de este enunciado.

Ejercicio 1. *[4 punto]* Se tiene un SLIT cuya respuesta al impulso es $h(t) = \left(\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\right)^2 \cos(2\pi t)$.

a) *[2 puntos]* Obtenga la respuesta en frecuencia del sistema, $H(j\omega)$, y represente su módulo.

A la entrada del sistema se tiene una señal $x(t)$ con periodo $T = 2$ segundos y cuyos coeficientes de la serie de Fourier con valores distinto de 0 son:

$$a_{-2} = a_2 = 1, \qquad a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_0 = 3.$$

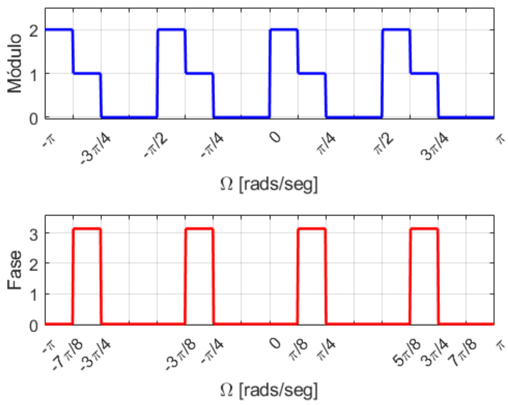
b) Calcule la potencia y energía de $x(t)$.

$P_x =$
$E_x =$

c) **[1 punto]** Sea $y(t)$ la señal obtenida a la salida del sistema cuando la entrada es $x(t)$, represente $Y(j\omega)$, la Transformada de Fourier de la señal de salida, y calcule $y(t)$.

$y(t) =$

Ejercicio 2 *[1.5 puntos].* El módulo y la fase de la TF de la señal $x[n]$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se muestra en la siguiente figura. A continuación, responda a las siguientes preguntas justificando brevemente su respuesta.



a) [0.5 puntos] Indique si $x[n]$ es una señal periódica. En caso de serlo, indique su periodo.

Periódica: *Si,* $N_0 =$ */ No*

b) [0.5 puntos] Indique si $x[n]$ es una señal real.

Real: *Si / No*

c) [0.5 puntos] Indique cual es el valor de $x[0]$.

$x[0] =$

Ejercicio 3 *[4.5 puntos]*

Considere las señales $x[n] = sinc\left(\frac{n}{4}\right)$, $y_1[n] = 3\delta[n-2]$, $y_2[n] = \frac{1}{4} sinc(\frac{n}{8})$. A partir de estas señales se definen las señales:

$$z_1[n] = y_1[n]x[n] \qquad\qquad z_2[n] = y_2[n] * x[n]$$

a) *[2 puntos]* Calcule la energía de $z_1[n]$

$E_{zz1} =$

b) *[2.5 puntos]* Calcule la energía de $z_2[n]$

$E_{zz2} =$

Universidad Rey Juan Carlos

Señales y Sistemas

Examen Recuperación – Parte III

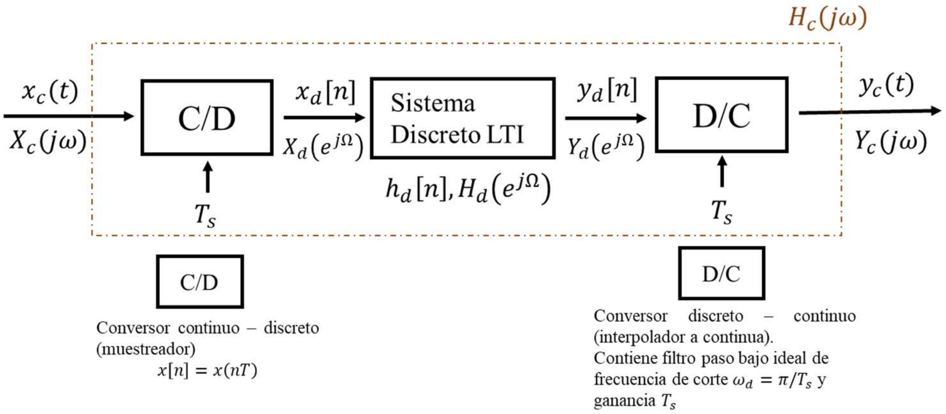
Apellidos…….

Nombre…………………………………………………. Número de hojas adicionales: ...……

Instrucciones

El tiempo para la realización del examen es de ***1h****. No se permiten libros ni hojas de fórmulas. El examen consta de* ***4 páginas (2 hojas impresas a 2 caras)****.* *Como anexo, se facilitan tablas de transformada que pueden resultar de utilidad. Conteste al examen en la hoja del enunciado justificando de la manera más concisa posible sus respuestas. Si cree necesario entregar una solución más detallada podrá adjuntarla al examen y deberá indicarlo en la parte superior de este enunciado. Escribir su nombre con faltas de ortografía conllevará la pérdida de toda la calificación del parcial.*

Ejercicio 1. *[3,5 puntos]* Se busca procesar discretamente una señal continua $x_c(t)$, con transformada de Fourier $X_c(j\omega)$ siguiendo el siguiente esquema:



El sistema discreto del modelo es un sistema LTI, descrito a través de la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_d[n] = x_d[n] - 8x_d[n-1] + 5y_d[n-2]$$

Asumiendo que la frecuencia de muestreo $f_s = 1/T_s$ se ajusta por encima del límite de Nyquist para la señal de entrada, determine la respuesta en frecuencia $H_c(j\omega)$ del sistema equivalente a todo el modelo de procesamiento.

$H_c(j\omega)$	

Ejercicio 2. *[2 puntos]* Calcule la tasa de Nyquist $T_{s,N} = 2\pi/\omega_{s,Nyquist}$, si existe, de las siguientes señales. <u>En caso de no existir, justifique debidamente su respuesta.</u>

(a) La señal $x(t) = \sin(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 t)$

$T_{s,N}$	

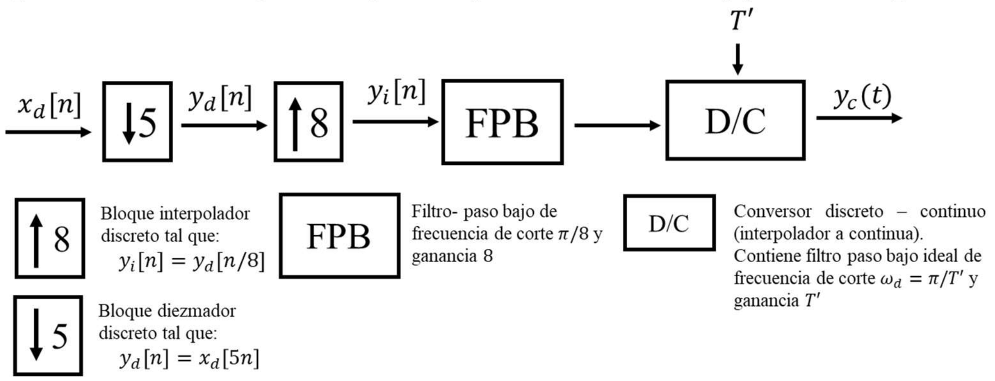
(b) La señal $x(t) = \cos^2(2\pi \cdot 15 \cdot 10^3 t)$

$T_{s,N}$	

(c) La señal $x(t) = \prod\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$

$T_{s,N}$	

Ejercicio 3. *[1 punto]* Considere el siguiente esquema de procesamiento discreto y posterior interpolación a continua:



Si $x_d[n]$ es el resultado de muestrear una señal $x_c(t)$ con un período $T = 10^{-3}s$, ¿cuánto debe ser T' para la correcta recuperación de la señal, es decir $y_c(t) = x_c(t)$?

T'	

Ejercicio 4. *[3,5 puntos]* Sea una secuencia $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \; n \in [0,20]$

Se pide:

(a) Si se desea evaluar de forma exacta la $X(e^{j\Omega})$, para $\Omega = \frac{\pi}{8}$ mediante una DFT de M puntos, desarrolle un método para obtener $X(e^{j\pi/8})$ empleando el número mínimo de puntos. Indique el número de puntos M de la DFT. *[1,5 puntos]*

M	

(b) Calcule el valor de $X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\pi/8}$ a partir de la DFT de M puntos planteada en el apartado anterior. *[2 puntos]*

$X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\pi/8}$	

Transformada de Fourier Discreta - Tablas

Señal	Ecuación análisis	Ecuación síntesis
$\boldsymbol{x[n]\ long. N}$	$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $k = 0,1,..,N-1$	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ $n = 0,1,..,N-1$

Propiedades	Señal en tiempo	Transformada
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$X_{3,N}[k] = aX_{1,N}[k] + bX_{2,N}[k]$
Desplazamiento temporal	$x[((n-n_0))_N]$	$X_N[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$
Desplazamiento frecuencia	$e^{j\mathrm{k}_0 n}x[n]$	$X[((k-k_0))_N]$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*\left[((-k))_N\right]$
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Convolución circular	$x_1[n] \textcircled{N} x_2[n]$	$X_{1,N}[k] \cdot X_{2,N}[k]$
Modulación	$x[n] \cdot y[n]$	$\frac{1}{N} X_{1,N}[k] \textcircled{N} X_{2,N}[k]$

Sumas de serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^N}{1-a} & si\ a \neq 1 \\ N & si\ a = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a^n = \frac{a^k}{1-a}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad |a| < 1$$