PROBLEMAS TEMA 3: Señales y sistemas continuos en el dominio de la frecuencia

Problema 1 (*)

Una señal periódica de tiempo continuo $x(t)$ es real y tiene un periodo fundamental $T = 8$ s. Los coeficientes de la Serie de Fourier para $x(t)$ que son diferentes de cero son $a_1 = a_{-1} = 2$, $a_3 = a_{-3}^* = 4j$. Exprese $x(t)$ de la forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\omega_k t + \phi_k\right).$$

Problema 2 (*)

Calcule los coeficientes a_k del desarrollo en series de Fourier de la siguiente señal periódica de tiempo continuo con $\omega_0 = 2\pi$.

$$x(t) = \begin{cases} 0{,}5, & 0 \leq t < 0{,}5 \\ -0{,}5, & 0{,}5 \leq t < 1. \end{cases}$$

Problema 3

Considere las siguientes tres señales de tiempo continuo: $x(t) = \cos(4\pi t)$; $y(t) = \sin(4\pi t)$; $z(t) = x(t)y(t)$.

a) Determinar los coeficientes del DSF de $x(t)$.

b) Determinar los coeficientes del DSF de $y(t)$.

c) Determinar los coeficientes del DSF de $z(t)$ mediante la expresión directa del producto de las dos señales (sin utilizar propiedades).

Problema 4 (*)

Determinar el DSF de las siguientes señales de la figura 1:

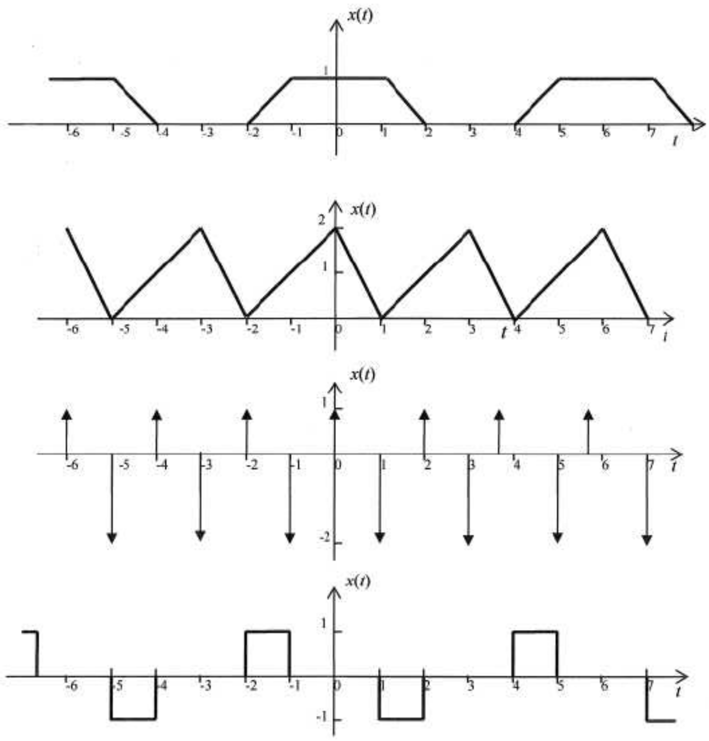


Figura 1: Señales Problema 4.

Problema 5 (*)

Conocemos la transformada de Fourier $X(j\omega)$ para la señal $x(t)$. Utilizar las propiedades para obtener las siguientes transformadas:

a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$.

b) $x_2(t) = x(3t-6)$.

c) $x_3(t) = \frac{d^2 x(t-1)}{dt^2}$.

Problema 6

Considere la siguiente señal:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1 \\ (t+1)/2, & |t| \leq 1. \end{cases}$$

a) Determine la expresión de $X(j\omega)$.

b) Tomando la parte real de $X(j\omega)$, probar que es la TF de la parte par de $x(t)$.

c) ¿Cuál es la TF de la parte impar de $x(t)$?

Problema 7 (*)

Conocemos una señal y su TF, que son:

$$e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$$

a) Utilizar las propiedades de la TF para calcular la transformada de $te^{-|t|}$.

b) Aplicar ahora la propiedad de dualidad para determinar la TF de $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$.

Problema 8

Sea una señal cuya TF es $X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$ y sea $h(t) = u(t) - u(t-2)$.

a) ¿Es $x(t)$ periódica?

b) ¿Es $x(t) * h(t)$ periódica?

c) ¿Puede ser periódica la convolución de dos señales no periódicas?

Problema 9 (*)

Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de un SLIT causal con respuesta en frecuencia:

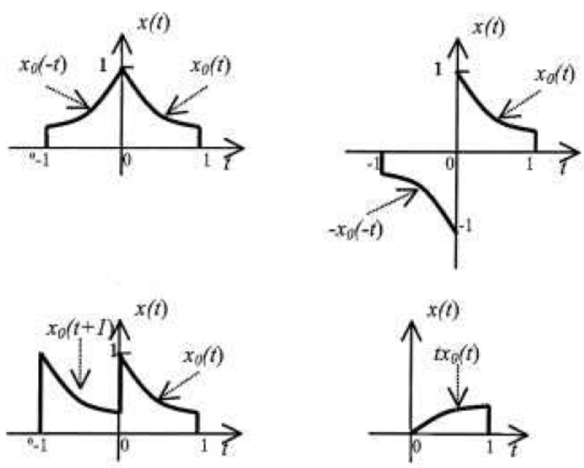
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

Para una entrada dada $x(t)$, este sistema produce la salida $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$. Determine $x(t)$.

Problema 10

Tenemos la siguiente señal: $x_0(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & resto. \end{cases}$

Determine la TF de las siguientes señales. (Nota: comience por determinar la TF de $x_0(t)$ y use propiedades de transformadas).



Problema 11 (*)

Calcular la convolución de las señales $x(t)$ y $h(t)$, obteniendo primero sus TF, y aplicando posteriormente las propiedades de la TF de una convolución (producto de transformadas) y transformada inversa:

a) $x(t) = te^{-2t}u(t)$ con $h(t) = e^{-4t}u(t)$.

b) $x(t) = te^{-2t}u(t)$ con $h(t) = te^{-4t}u(t)$.

c) $x(t) = e^{-t}u(t)$ con $h(t) = e^{t}u(-t)$.

Problema 12

Sean $x(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ y $h(t) = u(t+1) - u(t-3)$. Verificar que la TF de la convolución de estas dos señales es igual al producto de sus transformadas.

Problema 13

Sea $H(j\omega)$ la respuesta en frecuencia de un SLIT, calcular $h(t)$ en los siguientes casos:

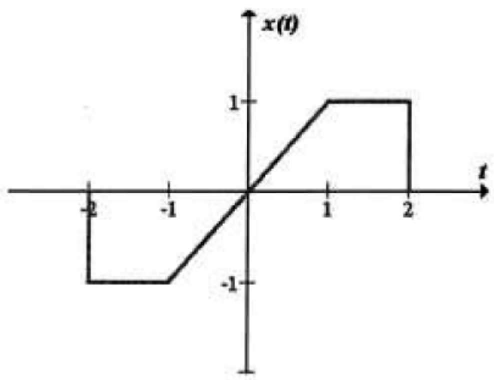
a) $H(j\omega) = 2\left(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\right) + 3\left(\delta(\omega-2\pi) - \delta(\omega+2\pi)\right)$.

b) $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$, con $|H(j\omega)| = 2\left(u(\omega+3) - u(\omega-3)\right)$ y $\angle H(j\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi$.

c) $H(j\omega) = \frac{\sin^2(3\omega)\cos(\omega)}{\omega^2}$.

Problema 14 (*)

Calcular la TF de la siguiente señal:



Problema 15 (*)

Considere un SLIT cuya función de transferencia se representa en la figura (a). Por otra parte, se considera la señal periódica mostrada en la figura (b).

a) Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

b) Calcule la TF de $x(t)$.

c) Calcule los coeficientes del DSF de $x(t)$.

d) ¿Cuánto vale la potencia de la señal $x(t)$? ¿Qué porcentaje de esta potencia se encuentra a la salida del sistema?

e) Calcule la expresión en el dominio del tiempo de la señal a la salida del sistema.

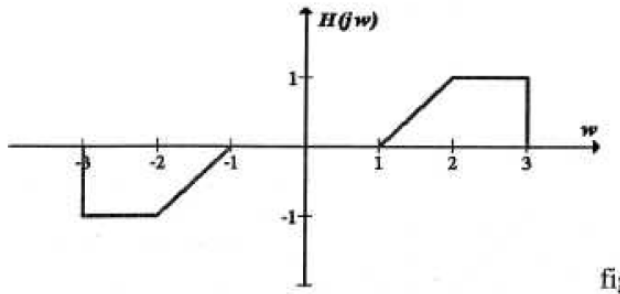


figura a)

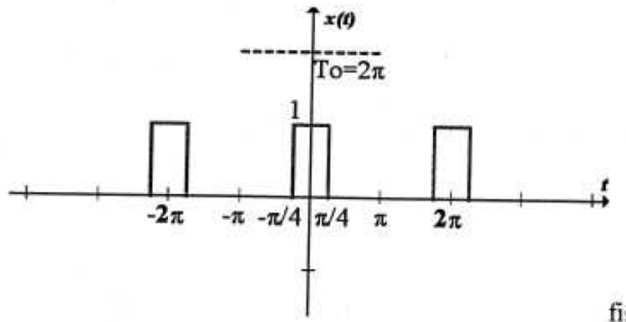


figura b)

Problema 16

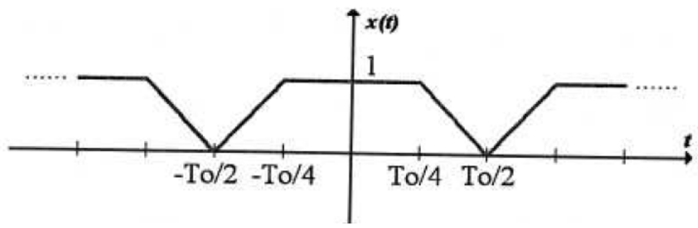
Considere la señal periódica de periodo T_0 representada en la figura .

a) Encuentre sus coeficientes del DSF.

b) Calcule su TF y represéntela gráficamente (espectro de la señal).

c) Dicha señal entra en un sistema cuya respuesta en frecuencia es $H(j\omega) = u(\omega+4\pi/T_0)-u(\omega-4\pi/T_0)$. ¿Qué porcentaje de la potencia de la señal de entrada se encuentra a la salida del sistema?

d) Calcular y representar gráficamente la expresión en el dominio del tiempo de la señal a la salida del sistema.



Problema 17 (*)

Sea $x(t)$ la entrada a un SLIT determinado por la siguiente respuesta al impulso:

$$h(t) = \frac{2W_1W_2}{\pi} sinc\left(\frac{W_1 t}{\pi}\right) sinc\left(\frac{W_2 t}{\pi}\right)$$

donde $W_1 > W_2$. Calcular la expresión de la salida del sistema $y(t)$, cuando

$$x(t) = \frac{(W_1 - W_2)^2}{2\pi} sinc^2\left(\frac{W_1 - W_2}{2\pi} t\right).$$

Problema 18 (*)

Sea $X(j\omega)$ la TF de $x(t)$, según se muestra en la figura.

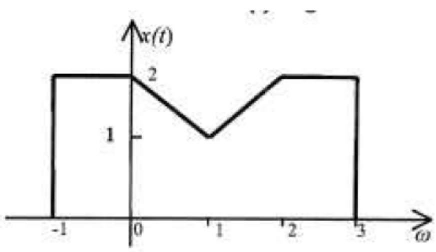
a) Encuentre $\angle X(j\omega)$.

b) Encuentre $X(j0)$.

c) Encuentre $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$.

d) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \|X(j\omega)\|^2 d\omega$

e) Dibuje la TF inversa de $Real\{X(j\omega)\}$.


x(t)
2
1
-1
0
1
2
3
ω