PROBLEMAS TEMA 2: Sistemas en el dominio del tiempo

Problema 1 (*)

Considere un sistema de tiempo continuo, con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, relacionadas mediante $y(t) = x\,(sen(t))$.

a) ¿Es el sistema causal?

b) ¿Es el sistema lineal?

[Sol: (a) No. (b) Si.]

Problema 2 (*)

Determine (argumentando la respuesta) qué propiedades (memoria, invarianza temporal, linealidad, causalidad, estable) cumplen los siguientes sistemas de tiempo continuo:

a) $y(t) = x(t-2) + x(t+2)$.

b) $y(t) = x(t) \cdot cos(3t)$.

c) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$.

d) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \end{cases}$

e) $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$

f) $y(t) = x(t/3)$.

g) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

[Sol: (1) Lineal, estable. (2) Sin memoria, lineal, causal, estable. (3) Lineal. (4) Lineal, causal, estable.
(5) invariant, causal, estable. (6) Lineal, estable. (7) Invariante, lineal.]

Problema 3 (*)

Calcular y dibujar la convolución de las siguientes señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

Problema 4 (*)

Sean $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$ y $h(t) = e^{-3t}u(t)$.

a) Calcular $y(t) = x(t) * h(t)$.

b) Calcular $g(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right) * h(t)$.

c) ¿Qué relación hay entre $g(t)$ y $y(t)$?.

Problema 5 (*)

Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. En caso afirmativo, construya el sistema inverso. En caso negativo, encuentre un contraejemplo, dado por dos señales de entrada al sistema que den la misma salida.

a) $y(t) = x(t-4)$.

b) $y(t) = cos\,(x(t))$.

c) $y(t) = tx(t)$.

d) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

e) $y(t) = x(t)x(t-1)$.

f) $y(t) = x(1-t)$.

g) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$.

h) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

i) $y(t) = x(2t)$.

j) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} sin(\tau)x(\tau)d\tau$.

[Sol: (1) Invertible, $y(t) = x(t+4)$. (2) No invertible, $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = x(t) + 2\pi$. (3) No invertible, $x_1(t) = \delta(t)$ y $x_2(t) = 2\delta(t)$. (4) Invertible, $y(t) = dx(t)/dt$. (5) No invertible, $x_1(t) = \delta(t)$ y $x_2(t) = \delta(t-2)$. (6) Invertible. (7) Invertible, $y(t) = x(t) + dx(t)/dt$. (8) No invertible. (9) Invertible, $y(t) = x(t/2)$. (10) No invertible.]

Problema 6

Considere un SLIT cuya salida está relacionada con la entrada mediante:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

a) ¿Cuál es la respuesta al impulso $h(t)$ de este sistema?

b) ¿Cuál es la salida del sistema cuando la entrada es $x(t) = u(t+1) - u(t-2)$?

[Sol: (1) $h(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$s. (2) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1 - e^{-(t-1)}, & 1 \le t \le 4 \\ e^{-(t-4)} - e^{-(t-1)}, & t > 4 \end{cases}$]

Problema 7

Conteste razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) Considere un sistema invariante en el tiempo, con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Demuestre que si $x(t)$ es periódica con periodo T, entonces, la salida $y(t)$ es también periódica con periodo T.

b) Dé un ejemplo de un sistema invariante en el tiempo, y una señal de entrada $x(t)$ no periódica tal que la correspondiente salida $y(t)$ sea periódica.

[Sol: (2) $x(t) = t, y(t) = sen(x(t))$]

Problema 8 (*)

Conteste razonadamente las siguientes cuestiones:

a) Demuestre que la causalidad para un sistema lineal continuo es equivalente a la siguiente información: *Para cualquier instante temporal* t_0*, y cualquier entrada* $x(t)$*, tales que* $x(t) = 0$ *para* $t < t_0$*, la salida correspondiente* $y(t)$ *es también cero para* $t < t_0$.

b) Encuentre un sistema no lineal que satisfaga la condición anterior, pero que no sea causal.

c) Encuentre un sistema no lineal que sea causal, pero que no satisfaga la condición.

[Sol: (2)Por ej. $y(t) = x(t)x(t+1)$. (3)Por ej. $y(t) = x(t) + 1$.]

Problema 10

Suponga que $x(t) = u(t) - u(t-1)$, y que $h(t) = x(t/\alpha)$, donde $0 < \alpha \leq 1$.

a) Determine y dibuje $y(t) = x(t) * h(t)$.

b) Si $dy(t)/dt$ contiene sólo tres discontinuidades, ¿cuál es el valor de α?

[Sol: (1) $y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \alpha \\ \alpha, & \alpha \leq t < 1 \\ 1 + \alpha - t, & 1 \leq t < (1+\alpha) \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$. (2) $\alpha = 1$.]

Problema 11 (*)

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique la respuesta.

a) Si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un SLIT, y $h(t)$ es periódica y diferente de cero, el sistema es inestable.

b) El inverso de un SLIT causal es siempre causal.

c) Si $|h(t)| \leq K$ para todo t, donde K es una constante real, entonces el SLIT cuya respuesta al impulso sea $h(t)$ será estable.

d) Si un SLIT tiene una respuesta al impulso $h(t)$ de duración finita, el sistema es estable.

e) Si un SLIT es causal, es estable.

f) La conexión en serie de un SLIT no causal con uno causal es necesariamente no causal.

g) Un SLIT es estable si, y sólo si, su respuesta al escalón $s(t)$ es absolutamente integrable, esto es, $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|dt < \infty$

h) Un SLIT es causal si, y solo si, su respuesta al escalón $s(t)$ es cero para $t < 0$.

[Sol: (1) V. (2) F. (3) F. (4) V. (5) F. (6) F. (7) F. (8) V.]

Problema 12

Sea un SLIT con respuesta impulsiva $h(t) = \delta(t - T_1) - \delta(t + T_1)$, al que se introduce la entrada:

$$x(t) = \begin{cases} T_0 + t, & -2T_0 \leq t < -T_0 \\ |t|, & -T_0 \leq t < T_0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

donde $T_0 > 0$. Dibujar las señales $x(t)$ y $h(t)$, y calcular gráficamente la salida del sistema. Considerar los casos $T_1 = 2T_0$ y $T_1 = T_0/2$.

Problema 13

Sean las señales reales $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{t}u(-t)$, y $z(t) = e^{-3t}u(t)$, calcular las siguientes convoluciones:

a) $r(t) = x(t) * x(t)$.

b) $v(t) = y(t) * z(t)$.

Problema 14

Para cada uno de los siguientes pares de señales, calcular la convolución para encontrar la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ de un SLIT cuya respuesta al impulso es $h(t)$.

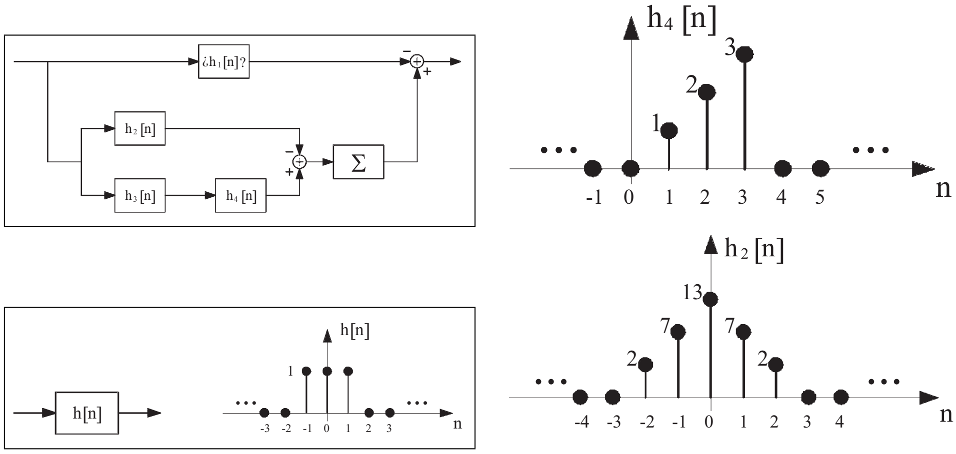
a) $x(t) = e^{-3t}u(t)$, con $h(t) = u(t - 1)$.

b) $x(t) = u(t) - 2u(t - 2) + u(t + 5)$, con $h(t) = e^{2t}u(1 - t)$.

c) $h(t) = u(t) - u(t - 1)$, con $\begin{cases} e^{t}, & t < 0 \\ e^{5t} - 2e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$

Problema 15 (*)

Considere la siguiente interconexión de Sistemas LTI, donde se sabe que $h_3[n] = h_4[-n]$. Determinar el valor de $h_1[n]$ para que la interconexión anterior pueda sustituirse por un único sistema $h[n]$ como se muestra en la figura.



Problema 16

Dada la respuesta al impulso, $h[n]$, de un sistema LTI, determine si el sistema es, además, sin memoria, causal, estable e invertible, en los siguientes casos:

a) $h[n] = 3 \cdot \delta[n]$.

b) $h[n] = u[n]$.

Problema 17

Considere las respuestas al impulso de los siguientes sistemas LTI discretos. Determine si cada sistema es causal y/o estable.

a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

b) $h[n] = (0'8)^n \cdot u[n+2]$

c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

Problema 18 (*)

Considere los sistemas $(S_1) y[n] = x[n+2]$ y $(S_2) y[n] = x[-n]$.

- Obtenga la respuesta de cada uno de ellos cuando la entrada es $x[n] = 3 \cdot \delta[n+1] - \delta[n] + 2 \cdot \delta[n-1]$.
- Como S_1 es un sistema LTI, obtenga la salida por dos caminos diferentes: a partir de la propia definición del sistema, y utilizando la convolución.
- Compruebe que en el caso del sistema S_2 (que *no* es LTI) el segundo camino no es correcto.