PROBLEMAS TEMA 1: Señales en el dominio del tiempo

Problema 1

Expresar las siguientes señales en forma de exponenciales complejas

a) $x(t) = 2\cos\left(2\pi 60t + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $x(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + 4\,\mathrm{sen}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$.

[Sol: (a) $x(t) = e^{j2\pi 60t}e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j2\pi 60t}e^{-j\frac{\pi}{4}}$. (b) $x(t) = -e^{j\left(t+\frac{\pi}{6}\right)} - e^{-j\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}$].

Problema 2

Determinar el módulo y la fase (en función de t), así como la potencia y la energía, para las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}$.

b) $x(t) = \cos(t)$.

c) $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

[Sol: (a) $P_\infty = 1, E_\infty = \infty$. (b) $P_\infty = 1/2, E_\infty = \infty$. (c) $P_\infty = 0, E_\infty = 1/4$.]

Problema 3 (*)

Sea $x(t)$ una señal con $x(t) = 0$ para $t < 3$. Para cada una de las señales que se muestra a continuación, determinar los valores de t para los que se cumple que $x(t) = 0$.

a) $x(1-t)$.

b) $x(t/3)$.

c) $x(3t)$.

d) $x(1-t) + x(2-t)$.

e) $x(1-t) \cdot x(2-t)$.

[Sol: (a) $t > -2$. (b) $t < 9$. (c) $t < 1$. (d) $t > -1$. (e) $t > -2$.]

Problema 4

Encontrar la parte real de las siguientes señales y expresarla en la forma $Ae^{-\alpha t}\cos\omega t+\phi$, siendo A,α,ω,ϕ números reales, con $A>0$ y $-\pi\leq\phi\leq\pi$.

a) $x(t)=-2$.

b) $x(t)=\sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t+2\pi)$.

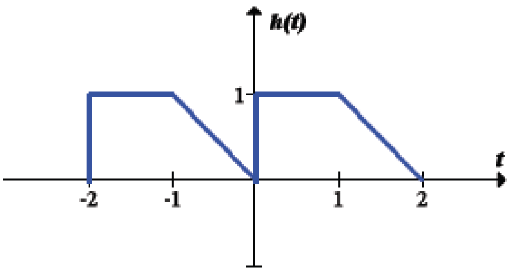
c) $x(t)=e^{-t}\sin(3t+\pi)$.

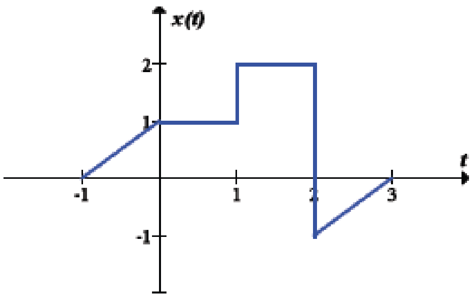
d) $x(t)=je^{(-2+j100)t}$.

[Sol: (a) $A=2,\alpha=0,\omega=0,\phi=\pi$. (b) $A=1,\alpha=0,\omega=3,\phi=0$.
(c) $A=1,\alpha=1,\omega=3,\phi=\pi/2$. (d) $A=1,\alpha=2,\omega=100,\phi=\pi/2$.]

Problema 5 (*)

Dadas las señales $x(t)$ y $h(t)$, dibujar cada una de las siguientes señales.





a) $h(t+3)$.

b) $h\left(\frac{t}{2}-2\right)$.

c) $h(1-2t)$.

d) $4h\left(\frac{t}{4}\right)$.

e) $h\left(\frac{t}{2}\right)\delta(t+1)$.

f) $h(t)[u(t+1)-u(t-1)]$.

g) $x(t)h(t+1)$.

h) $x(t)h(-t)$.

Problema 6

Determinar si estas señales son periódicas. Si lo son, encontrar el periodo.

a) $x(t)=2\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$.

b) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$.

c) $x(t)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{6}\right)$.

[Sol: (a) $T = 2\pi/3$s. (b) $T = 2$s. (c) $T = 16$s.]

Problema 7 (*)

Calcular la derivada de las siguientes señales:

a) $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ -1, & 2 \leq t < 4 \\ 1, & t \geq 4 \end{cases}$.

b) $x(t) = u(t+2) - u(t-2)$.

c) $x(t) = e^{j\pi t}u(t)$.

Problema 8 (*)

Integrar las siguientes señales calculando $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$:

a) $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$.

b) $x(t) = u(t+2) - u(t-2)$.

c) $x(t) = e^{j\pi t}u(t)$.

[Sol: (a) $y(t) = u(t+2) - u(t-2)$. (b) $y(t) = (t+2)u(t+2) + (2-t)u(t-2)$. (c) $y(t) = -\frac{j}{\pi}\left(e^{j\pi t} - 1\right)u(t)$.]

Problema 9

Considere la señal $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$. Calcule la energía total de

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau.$$

[Sol: $E_\infty = 4$ J.]

Problema 10 (*)

Considere la señal periódica de periodo $T = 2$, dada por:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -2, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

La derivada de esta señal está relacionada con el tren de impulsos periódico de periodo 2 segundos, dado por:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k).$$

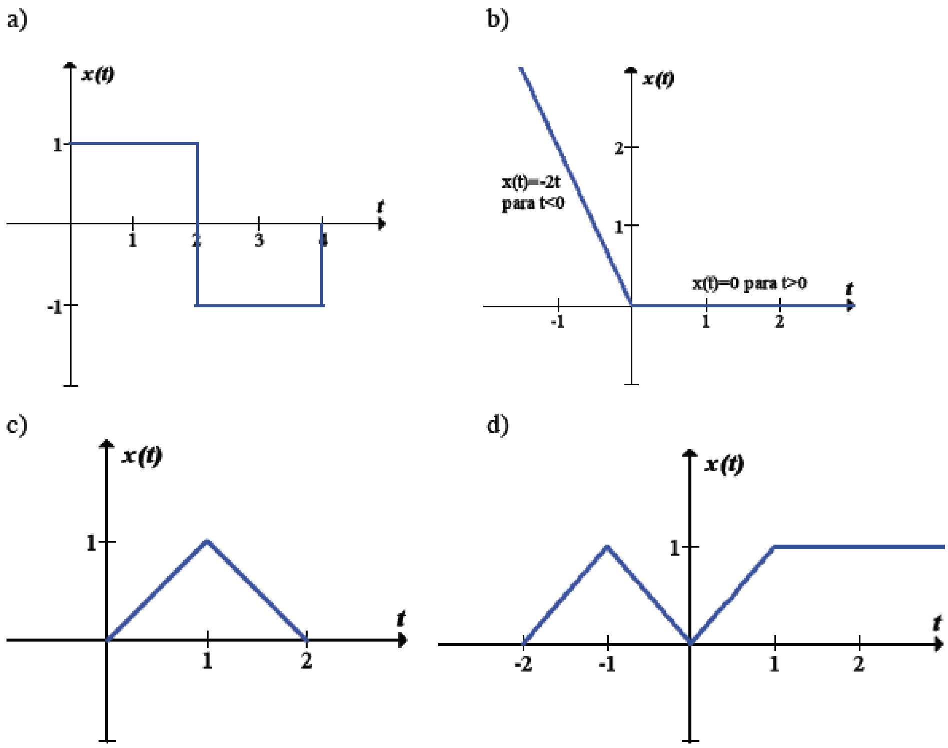
Determinar los valores de A_1, t_1, A_2, y t_2, para que

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2).$$

[Sol: $A_1 = 3, t_1 = 0, A_2 = -3, t_2 = 1$.]

Problema 11

Dibujar la parte par e impar de las siguientes señales:



Problema 12

Demostrar que $\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$.

Problema 13

Definimos la función $\Phi_{xy}(t)$ de dos señales $x(t)$ e $y(t)$ como:

$$\Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

- ¿Cuál es la relación entre $\Phi_{xy}(t)$ y $\Phi_{yx}(t)$?
- Supongamos que $x(t)$ es periódica. ¿Es también $\Phi_{xx}(t)$ periódica? ¿Con qué periodo?
- Calcular la parte impar de $\Phi_{xx}(t)$.

Problema 14

Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_{par}^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_{impar}^2(t)dt.$$

Problema 15 (*)

Determinar el módulo y la fase, así como la potencia y la energía, de las secuencias:

a) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{8}\right)}$

b) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

Problema 16 (*)

Dada $x[n] = \sum_{k=-1}^{3} \delta[n-k] + \frac{1}{2}\delta[n-4]$, dibuje $y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$.

Problema 17

Estudie la periodicidad de las siguientes señales:

a) $x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{7}+2\right)$

b) $x[n] = e^{j7\pi n}$

c) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi}{8}-\pi\right)}$

d) $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} + e^{j\frac{2\pi}{5}n}$

e) $x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

f) $x[n] = 3e^{j\frac{3\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{5}}$

Problema 18 (*)

Calcule y represente la parte par y la parte impar de

$$x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n] + \delta[n-7].$$