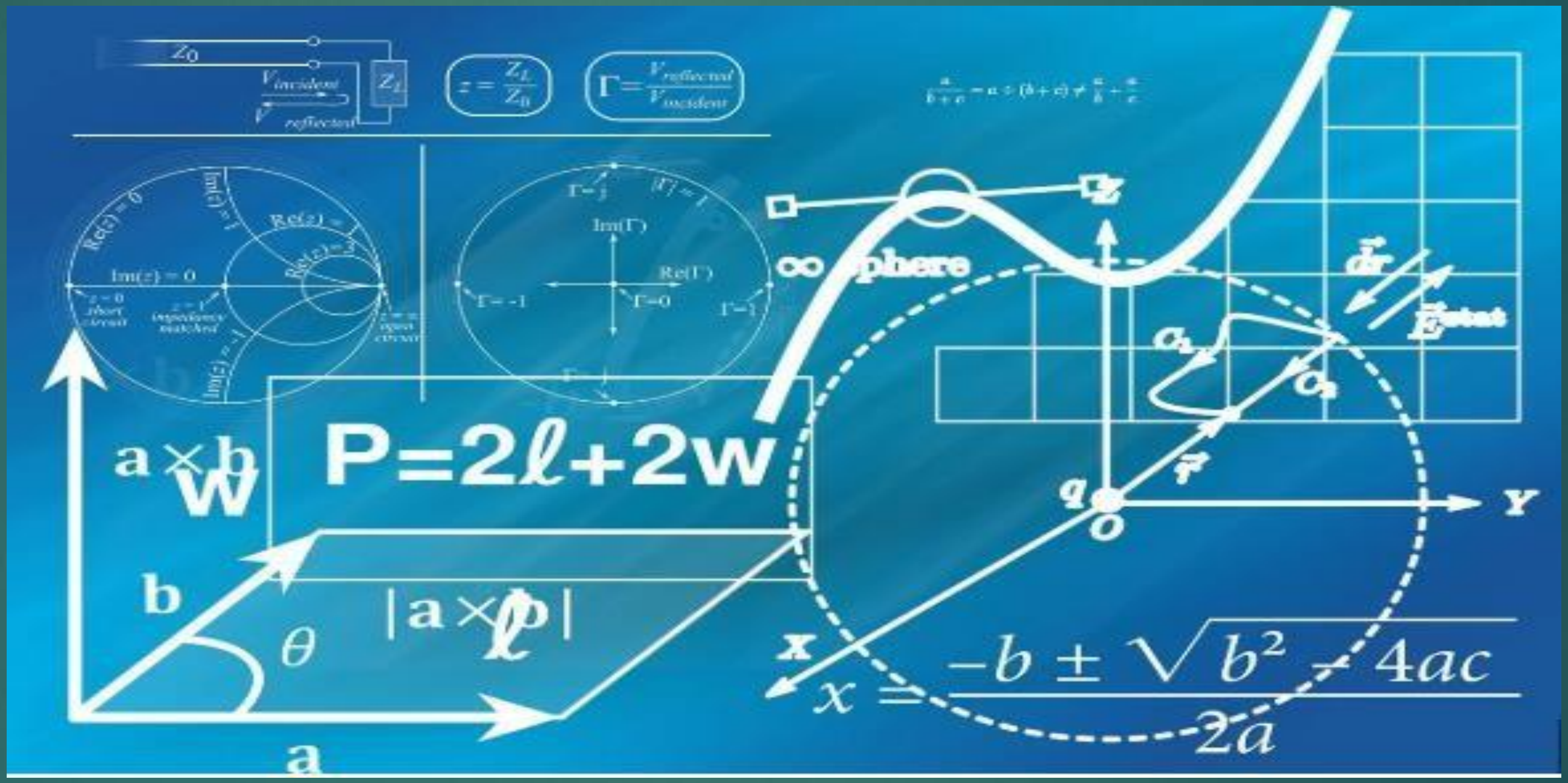
PRESENTACIÓN MATEMÁTICAS EMPRESARIALES

María M. Sánchez Martín

Grado en Administración y Dirección de Empresas.

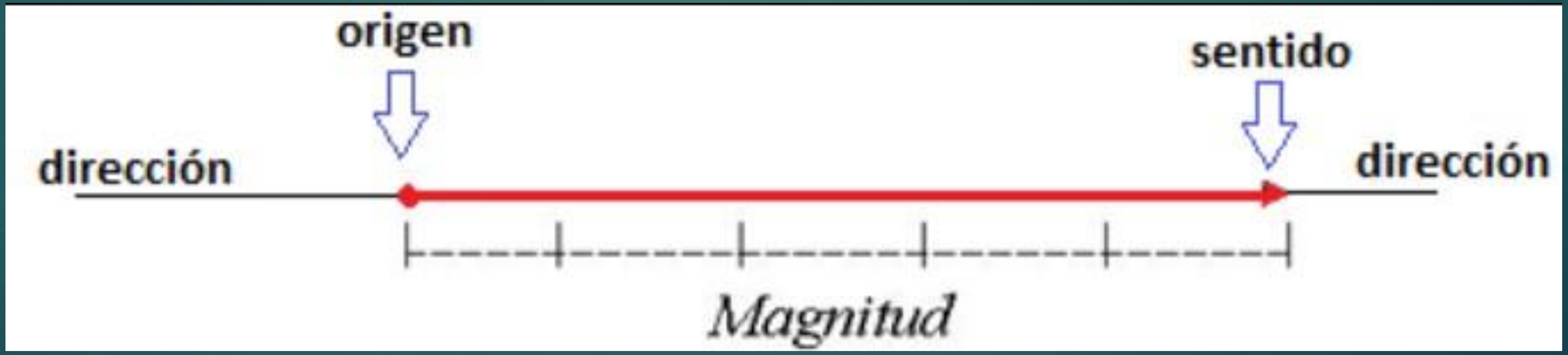
Curso 2024/2025

T. 1 ESPACIOS VECTORIALES



Un **vector** es todo segmento de recta dirigido en el espacio. Sus características son:

- Punto de aplicación: Punto exacto sobre el que actúa el vector.
- Módulo: Tamaño o longitud del vector. Para calcularlo es necesario conocer el origen y extremos del vector.
- Dirección: Orientación en el espacio de la recta que lo contiene.
- Sentidos: Indicado mediante una punta de flecha del extremo del vector que indica hacia qué lado se dirige.



DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL

Un espacio vectorial es una terna (*V*, +, .), *donde V es un conjunto no vacío y* +, . *son dos operaciones del tipo* + : *V x V* →*V y* . : ℝ x *V*→*V* a las que llamaremos *"suma de vectores"* y *"producto por escalares"* respectivamente y conlas siguientes propiedades:

1. *u* + (*v* + *w*) = (*u* + *v*)+ *w*, A*u*, *v*, *w* ∈ *V (Asociativa).*
2. *u* + *v* = *v* + *u*, A*u*, *v* ∈ *V (Conmutativa).*
3. *Existe e* ∈ *V tal que e* + *v* = *v* + *e* = *v*, A*v* ∈ *V (Elemento Neutro).*
4. *Para cada v* ∈ *V existe w tal que v* + *w* = *w* + *v* = *e (Elemento Opuesto).*
5. *λ*(*μv*) = (*λμ*)*v*, A*v* ∈ *V*, A*λ*, *μ* ∈ ℝ
6. *λ*(*u* + *v*) = *λu* + *λv y* (*λ* + *μ*)*v* = *λv* + *μv*, A *u*, *v* ∈ *V y* A *λ*, *μ* ∈ ℝ *(Distributiva).*
7. 1*v* = *v*,A*v* ∈ *V (Elemento Unidad).*

COMBINACIÓN LINEAL:

Dado un conjunto de vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, decimos que otro vector u $\in \mathbb{R}^n$
es **combinación lineal (C.L)** de los vectores del conjunto si existen *m* números reales
$\alpha 1, \dots, \alpha m \in \mathbb{R}$ tales que:

$$u = a_1 . v_1 + a_2 . v_2 + a_3 . v_3 + \cdots + a_m . v_m$$

Diremos, además que los números reales, $\alpha 1, \dots, \alpha m$ son las **coordenadas del vector** u

respecto a los vectores $v1, \dots, vm$

EJEMPLO:

Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$ v_1=(2,1,-1) y v_2 =(3, 2,0) Podemos formar combinaciones lineales de estos vectores:

α(2,1, -1)+β(3, 2,0) = $(2$ a $+3\beta, \alpha + 2\beta, -\alpha)$

Por ejemplo: 4(2,1, −1) − 2(3,2,0) = (2,0, −4)

Podemos asegurar que el vector (2,0, −4) es **"combinación lineal (C.L.)"** de los vectores v_1 y v_2

Además, sus coordenadas respecto a esos vectores serían 4 y -2.

<u>INDEPENDENCIA LINEAL</u>

Los vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$ son linealmente independientes si la única
manera de obtener como combinación lineal de ellos el vector $\vec{0}$ es que todos los escalares valgan 0.

Es decir, $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$ son **linealmente independientes** $\leftrightarrow$

$$a_1 . v_1 + a_2 . v_2 + a_3 . v_3 + \cdots + a_m . v_m = \vec{0} \rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

EJEMPLO:

Si consideremos los vectores siguientes $\{(1,2,-1),(1,1,2),(0,-1,3)\}$ obtenemos el vector nulo como combinación lineal de ellos de la siguiente forma

$$(0,0,0) = 2(1,2,-1) - 2(1,1,2) + 2(0,-1,3)$$

Hemos obtenido el vector nulo como C.L. de los vectores siendo las coordenadas distintas de cero, esto implica, según la propiedad anterior, que los vectores {(1,2,-1), (1,1,2), (0,-1,3)} son linealmente dependientes.

SISTEMA DE GENERADORES:

Sea V un espacio vectorial. Diremos que $v_1, v_2, v_3, \dots,$ v_m son un **sistema generador** del espacio vectorial si todos los vectores del espacio son combinación lineal de dichos vectores.

Es decir, $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$ son **sistema generador de V** $\leftrightarrow \forall u \in V$

$$\rightarrow u = a_1 . v_1 + a_2 . v_2 + a_3 . v_3 + \cdots + a_m . v_m$$

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL:

Diremos que n vectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ son **base** del espacio vectorial si son linealmente independientes y sistema generador del espacio.
Se considera el mínimo número de vectores capaces de generar cualquier vector del espacio.
Denominaremos **dimensión del espacio vectorial** al número de vectores que forman
cualquier base de un espacio vectorial y se escribe Dim(V)
(En este caso Dim(V)=n).

SUBESPACIOS VECTORIALES

*Sea U un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces U es un **subespacio vectorial** si y solo si:*

1. *Si $u, v \in U$, entonces $u + v \in U$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in U$, entonces $\lambda u \in U$*

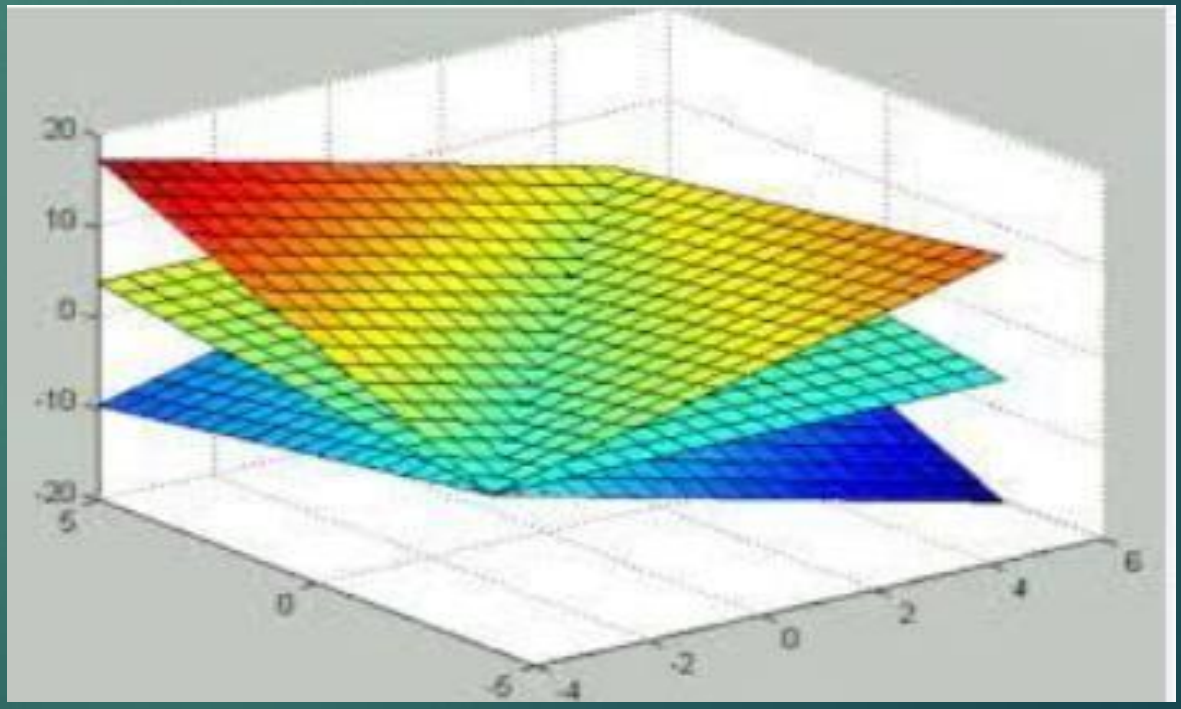
Equivalentemente si se verifica que $\lambda u+\beta v \in U$ *para* $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{U}$

Un subespacio vectorial U puede ser definido de dos maneras:

1. Dando un conjunto de vectores generadores:
   U= L$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ Siendo dimU=Rango$(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$
2. Dado un sistema homogéneo de ecuaciones cartesianas que han de cumplir los vectores que pertenecen al subespacio:
   U=$\{v \in V / A\vec{v}=\vec{0}\}$siendo A una matriz de orden mxn con m<n y

   dimU=dimV-Rango(A)

T. 2 TRANSFORMACIONES LINEALES. PROCESOS SECUENCIALES LINEALES.



TRANSFORMACIÓN/APLICACIÓN LINEAL

Dados dos espacios vectoriales V y V', decimos que f:V$\rightarrow V'$ es una aplicación lineal si:

1. $\forall u, v \in V \rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$

2. $\forall u \in V\ y\ \forall k \in \mathbb{R} \rightarrow f(ku) = kf(u)$

(Es equivalente a que $\forall u, v \in V$ y $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \rightarrow f(k_1 u + k_2 v) = k_1 f(u) + k_2 f(v)$) NOTA:

Para toda aplicación lineal se cumple que $f(\vec{0}) = \vec{0}$

$\ddots \quad \vdots$

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

En toda aplicación lineal $f: V \to V'$ podemos definir su núcleo y su imagen.

Llamamos **núcleo** de la aplicación lineal (Ker(f)) al conjunto de vectores de V que se transforman en el vector nulo de V'.

$$Ker(f) = \{u \in V / f(u) = 0_{V'}\}$$

Llamamos **imagen** de la aplicación lineal f (Im f) al subespacio generado por las columnas de la matriz de la aplicación.

$$Im(f) = \{v \in V' / \exists\, u \in V : f(u) = v\}$$

Y se verifica que dim($Im(f)$) $= rango(A)$.

Además, se cumple que: $\mathbf{dim(V)=dim(}\boldsymbol{Ker(f)}\mathbf{)} + \mathbf{dim}(\boldsymbol{Im(f)})$

CLASIFICACIÓN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Dada una aplicación lineal $f: V \rightarrow V$ decimos que es:

- **Inyectiva**: Si $f(u) = f(v) \rightarrow u = v$. La forma de comprobarlo será ver que dim$(Ker(f)) = 0$. La aplicación será un monomorfismo.
- **Sobreyectiva**: $Si\ \forall v \in V', \exists u \in V \ / \ f\ (u) = v$. La forma de comprobarlo será ver que dim$(Im(f)) = dim(V')$. La aplicación será un epimorfismo.
- **Biyectiva:** Si la aplicación es inyectiva y sobreyectiva. La aplicación será un isomorfismo.

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Dada una aplicación lineal $f: V \to V$, decimos que un vector v es un **autovector** de la aplicación si se cumple
$f(v) = \alpha v$. O lo que es lo mismo Av= αv siendo A la matriz de la aplicación. Al escalar α se le denomina el
autovalor asociado al autovector.

Llamamos S_α al subespacio vectorial formados por todos los autovectores asociados al autovalor α

$$S_\alpha = \{v \in V / \ f(v) = \alpha v\}$$

Todos los autovectores asociados a un mismo autovalor son independientes entre sí.

Cálculo de los autovalores

Dada una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por una matriz A, definimos el **polinomio característico**
como:

$$p(\alpha) = |A - \alpha Id|$$

Las raíces de este polinomio característico son los autovalores de nuestra aplicación. Es decir, tenemos que plantear $p(\alpha) = |A - \alpha Id| = 0$.

Cálculo de los autovectores

Dada una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por una matriz A, y sea α un autovalor de la aplicación, el subespacio de autovectores asociado se calcula como:

$$\mathrm{Ker}(A - \alpha Id)$$

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

Dos matrices A y B son **semejantes**, si existe una matriz P, invertible tal que A.P=P.B, o lo que es lo mismo:

$$A = P.B.P^{-1}$$

Sea $f: V \to V$ con matriz asociada A, decimos que es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal semejante a ella. Es decir, si existe D diagonal y P invertible tal que:

$$A = P.D.P^{-1}$$

En el caso de que la matriz sea diagonalizable, la **matriz diagonal D**, estaría formada por los autovalores (repetidos según su multiplicidad) en la diagonal y el resto 0.

La **matriz P** estará formada por los autovectores asociados a cada autovalor.

¿Cuándo podemos decir que una matriz es diagonalizable?

1. Cuando todos los autovalores son reales y distintos (multiplicidad de cada uno de ellos igual a 1). Cada autovalor aparecerá una vez en la matriz diagonal y la matriz P se formará con los vectores asociados a cada autovalor.

2. Cuando la dimensión de cada subespacio de autovalores coincide con la multiplicidad de dicho autovalor. Es decir, si por ejemplo un autovalor se repite dos veces, el subespacio asociado a dicho autovalor tendrá que tener dos vectores. En la matriz diagonal aparecerá repetido el autovalor y en P se pondrán todos los vectores encontrados.

3. Si la matriz asociada A es simétrica, es diagonalizable.

Calculo de potencias de una matriz diagonalizable:

Sabemos que $A^2 = A.A$ y que $A^3 = A.A.A$, también entonces $A^n = A.A.A.\,..A$ (n veces),

por tanto si queremos calcular A^{300} por el método habitual se convierte en algo muy complicado.

Cuando una matriz es diagonal, el proceso se simplifica mucho ya que, por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

Si A es diagonalizable, sabemos que es semejante a una matriz diagonal y que, por tanto:

$$A = P.D.P^{-1} \rightarrow A^n = P.D^n.P^{-1}$$

:

ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

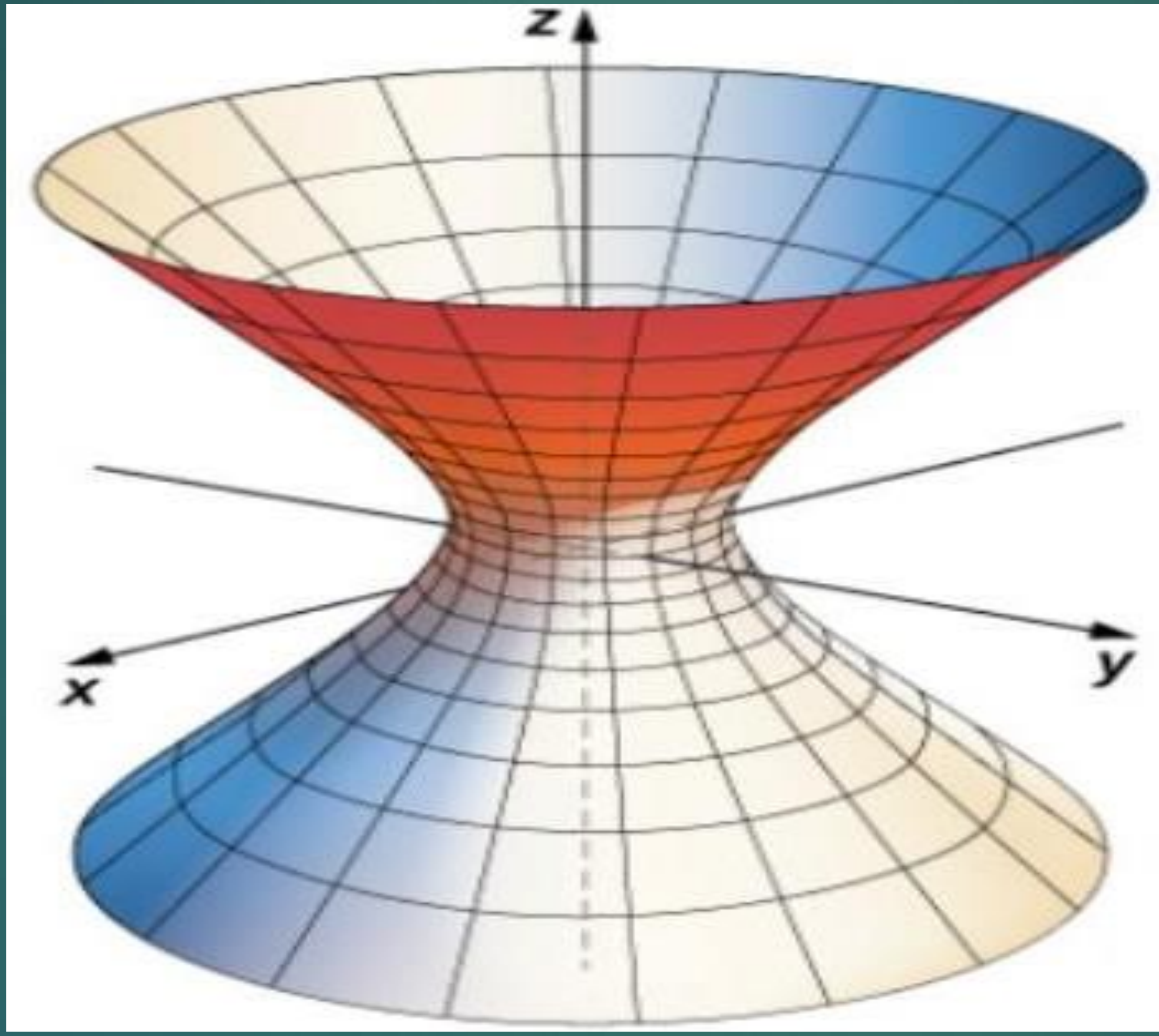
Para generalizar esos conceptos geométricos, observamos el comportamiento de los vectores del plano. En $\mathbb{R}^2$ tenemos definido el producto escalar usual:

$$(u_1,u_2)\cdot(v_1,v_2) = u_1\, v_1 + u_2\, v_2$$

Es una operación entre dos vectores, cuyo resultado es un escalar.

El producto escalar permite reconocer a los vectores ortogonales ya que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero.

T. 3 FORMAS CUADRÁTICAS REALES.



DEFINICIÓN DE FORMA CUADRÁTICA

Llamamos **forma cuadrática** real de n variables a una aplicación Q:$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada vector $\mathbf{x} = (x_{1,} x_2, \ldots, x_n)$ un número real dado por Q($\mathbf{x}$) $= \mathbf{x}^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ siendo A una matriz cuadrada de orden n y simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La forma Q($\mathbf{x}$) $= \mathbf{x}^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ es la **expresión matricial** de la forma cuadrática.

Si desarrollamos la expresión anterior Q($\mathbf{x}$) $= (x_1, x_2, \ldots, x_n) . \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots$

A esta forma se la denomina **expresión polinómica** de la forma cuadrática.

Para pasar de una expresión a otra es de manera automática teniendo en cuenta dos cosas.

1) Cada elemento a_{kk} (diagonal) de la matriz coincide con los coeficientes de ${x_k}^2$.
2) Cada elemento a_{ij} y a_{ji} con $i \neq j$ de la matriz A es la mitad del coeficiente de x_{ij} de la expresión polinómica.

CLASIFICACIÓN DE LAS FORMAS CUADRÁTICAS

Sea $Q(\boldsymbol{x})$ una forma cuadrática podemos decir que es:

- **Definida positiva** si $Q(\boldsymbol{x}) > 0 \ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
- **Definida negativa** si $Q(\boldsymbol{x}) < 0 \ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
- **Semidefinida positiva** si $Q(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ \forall \boldsymbol{x} \ y \ \exists \boldsymbol{x_0} \neq 0 \ tal \ que \ Q(\boldsymbol{x_0}) = 0$
- **Semidefinida negativa** si si $Q(\boldsymbol{x}) \leq 0 \ \forall \boldsymbol{x} \ y \ \exists \boldsymbol{x_0} \neq 0 \ tal \ que \ Q(\boldsymbol{x_0}) = 0$
- **Indefinida** si asigna a algunos vectores a los que asigna valor positivo y otros negativo.

EXPRESIONES DIAGONALES.

Si la matriz asociada a $Q(\boldsymbol{x})$ es diagonal A=$\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$ entonces la expresión polinómica de $Q(\boldsymbol{x})$ es una expresión diagonal que sólo tiene términos cuadráticos:

Q($\mathbf{x}$) $= (x_{1,}x_2, \ldots, x_n).\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$

Para toda forma cuadrática Q:$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A matriz asociada y a$_1$, a$_2$, ... , a$_n$ autovalores de A, existe la expresión diagonal dada por:

Q($\mathbf{x}$) $= =$ a $_1 x_1^2$ +a $_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$

Hay más métodos para conseguir la expresión diagonal y ésta no tiene que ser única, pero nos centraremos en el método de los autovalores.

ESTUDIO DEL SIGNO DE UNA FORMA CUADRÁTICA

1. **Método de los autovalores:**

Si conocemos los autovalores de la matriz asociada a la forma cuadráticas, el estudio es inmediato:

- Definida Positiva: Todos los autovalores son positivos.
- Definida Negativa: Todos los autovalores son negativos.
- Semidefinida Positiva: Si todos los autovalores son positivos y hay algun nulo.
- Semidefinida Negativa: Si todos los autovalores son negativos y hay alguno nulo.
- Indefinida: Si hay autovalores positivos y negativos.

ESTUDIO DEL SIGNO DE UNA FORMA CUADRÁTICA

2. **Método de los menores principales**:

Si A es la matriz asociada a una forma cuadrática, denominamos por $|A_i|$, i=1, 2,…,n a los menores principales de A. Procedemos a realizar la clasificación según el signo de esos menores principales:

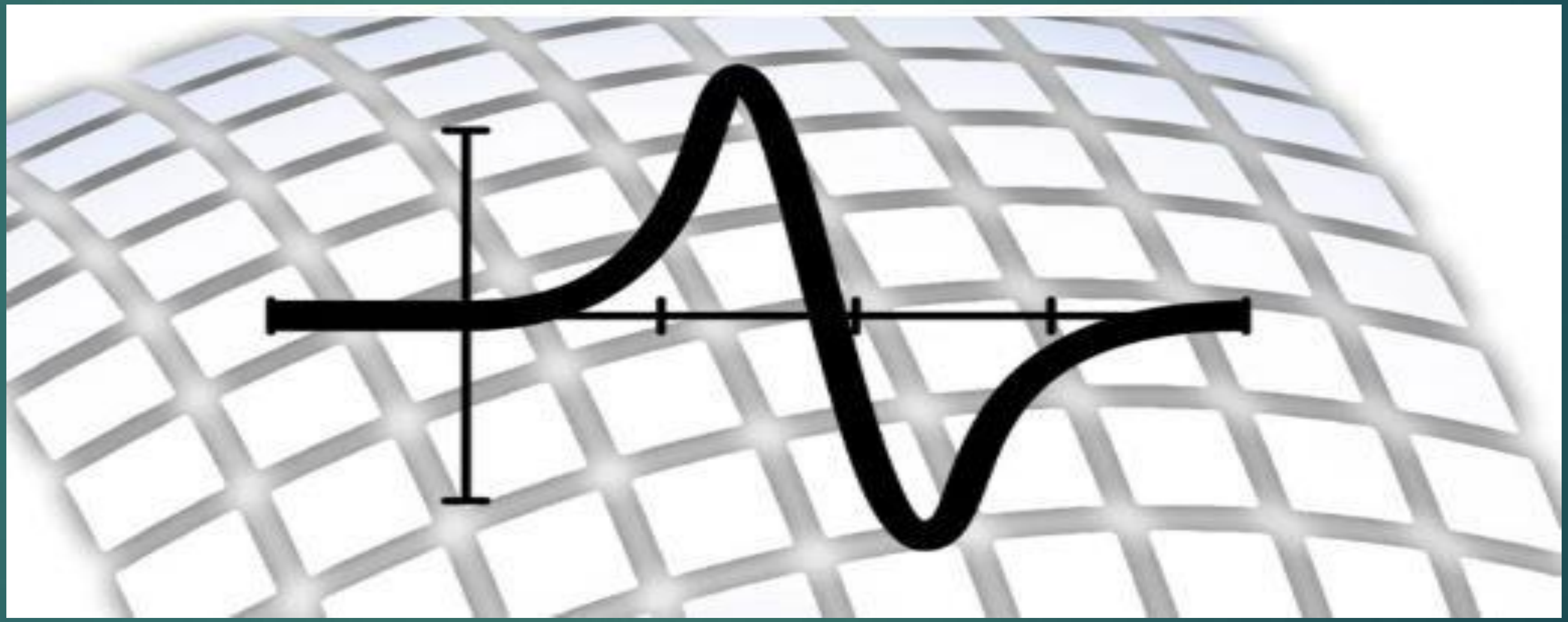
- Definida Positiva: Si todos los menores principales de la matriz son mayores que 0.
- Definida Negativa: Si los menores principales de la matriz van alternando el signo comenzando por menos. Ningún menor puede ser 0.
- Semidefinida Positiva: Si todos los menores principales de la matriz son mayores que 0 salvo el determinante de A que es 0.
- Semidefinida Negativa: Si los menores principales de la matriz van alternando el signo comenzando por menos y el determinante de A es 0.
- Indefinida: En cualquier otro supuesto.

Signo de la una forma cuadrática restringida.

Sea $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ una forma cuadrática restringida a la ecuación BX=0.

1. En primer lugar, se analizará la forma cuadrática con matriz asociada A. Si es definida (positiva o negativa) entonces la forma cuadrática restringida también lo será.
2. En otro caso, del sistema de ecuaciones BX=0, se puede despejar una variable en función de las demás y sustituirla en la expresión polinómica de la forma cuadrática original. Después, con las variables explícitas que quedan, se construye de nuevo la matriz asociada y se analiza el signo como al principio.

T. 4 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE FUNCIONES.



DOMINIO E IMAGEN

El **dominio** de f se define como los puntos de $\mathbb{R}^n$ donde la función está definida, es decir:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists f(x)\}$$

La **imagen** de f son los valores que toma en $\mathbb{R}$:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : x \in D \; con \; f(x) = y\}$$

Cuando n=2 la función solemos representarla como f(x,y). Cuando n=3 la representamos por f(x,y,z).

Ejemplo:

Calcula el dominio de la función

$f(x, y) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y}$

Para que tenga sentido, lo de dentro de las raíces debe ser mayor o igual a 0.

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$y \geq 0 \rightarrow y \geq 0$$

Entonces podemos decir que

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 0\}$$

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ decimos $x \to x_0$ que **el límite de $\boldsymbol{f(x)}$** cuando x tiende a x_0 es L$\in \mathbb{R}$ y se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ tal\ que\ si, 0 < d(x, x_0) < \partial\ entonces\ |f(x) - L| < \varepsilon$

Lo que indica que la función, por muy pequeño que escojamos el ε siempre va a existir un valor a partir del cual la función se acerca a L en un valor más pequeño que ese ε.

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ decimos que $\boldsymbol{f(x)}$ **es continua en $\boldsymbol{x_0}$** si:

$$\lim f(x) = f(x_0)$$

Teorema de unicidad del límite: El límite de una función de varias variables en un punto, si existe, es único.

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$$

Cálculo de límites. Límites reiterados y direccionales:

Definimos los **límites reiterados** o sucesivos como:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

Si ambos límites no coinciden o alguno no existe, no existe el límite doble de la función f(x,y) en
(x_0, y_0).

Si coinciden calculamos algún límite direccional.

Cálculo de límites. Límites reiterados y direccionales:

Siendo $y = y_0 + m.(x - x_0)$ la ecuación general de la recta que pasa por le punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ y que tiene pendiente m. Definimos los **límites direccionales o radiales** como:

$$f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_{0,}y_{0})} f(x, y_0 + m.(x - x_0))$$

Si los valores de los límites direccionales no coinciden con el de los reiterados entonces tampoco existe el límite doble de la función. Si coincide, en caso de existir el límite, tomaría ese valor.

Continuidad:

Una función $f(x, y)$ es continua en el punto $(x_{0,}y_0)$ si existe $f(x_{0,}y_0)$ y es igual al límite de $f(x, y)$
cuando $(x, y) \rightarrow (x_{0,}y_0)$, es decir:

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_{0,}y_0)} f(x, y) = f(x_{0,}y_0)$$

Diremos que $\boldsymbol{f(x)}$ **es continua** en su dominio si es continua en todos sus valores.

Derivadas Parciales

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

La derivada parcial de f con respecto a x en (x_0, y_0) se define como:

$$\frac{df}{dx}(x\ ,y\ ) = \lim_{\Delta x \to 0}\ f(x\ + \Delta x, y\ )$$

La derivada parcial de f con respecto a y en (x_0, y_0) se define como:

$$\frac{df}{dy}\ (x\ ,y\ ) = \lim_{\Delta y \to 0} f(x\ ,y\ + \Delta y)$$

En la práctica, la derivada parcial de f con respecto a y es la derivada de f(x,y) con respecto a y cuando x se mantiene constante.

GRADIENTE DE FUNCIONES REALES

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si existen todas las derivadas parciales de f en x_0, **el vector gradiente** de f en x_0 es:

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx_1}(x_0) \\ \cdots \\ \frac{df}{dx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR. MATRIZ HESSIANA.

Las derivadas parciales $\frac{df}{dx}(x, y)$ y $\frac{df}{dy}(x, y)$ se denominan de primer orden ya que se ha derivado sólo una vez respecto a una de las dos variables. Pero a su vez, estas funciones constituyen funciones que pueden volver a derivarse, cada una de ellas, respecto de x y respecto de y.

Si $\frac{df}{dx}(x, y)$ lo volvemos a derivar respecto de x tendremos $\frac{d^2f}{dx^2}(x, y)$

Si $\frac{df}{dx}(x, y)$ lo volvemos a derivar respecto de y tendremos $\frac{d^2f}{dydx}(x, y)$

Si $\frac{df}{dy}(x, y)$ lo volvemos a derivar respecto de x tendremos $\frac{d^2f}{dxdy}(x, y)$

Si $\frac{df}{dy}(x, y)$ lo volvemos a derivar respecto de y tendremos $\frac{d^2f}{dy^2}(x, y)$

Estas serían las derivadas parciales de segundo orden.

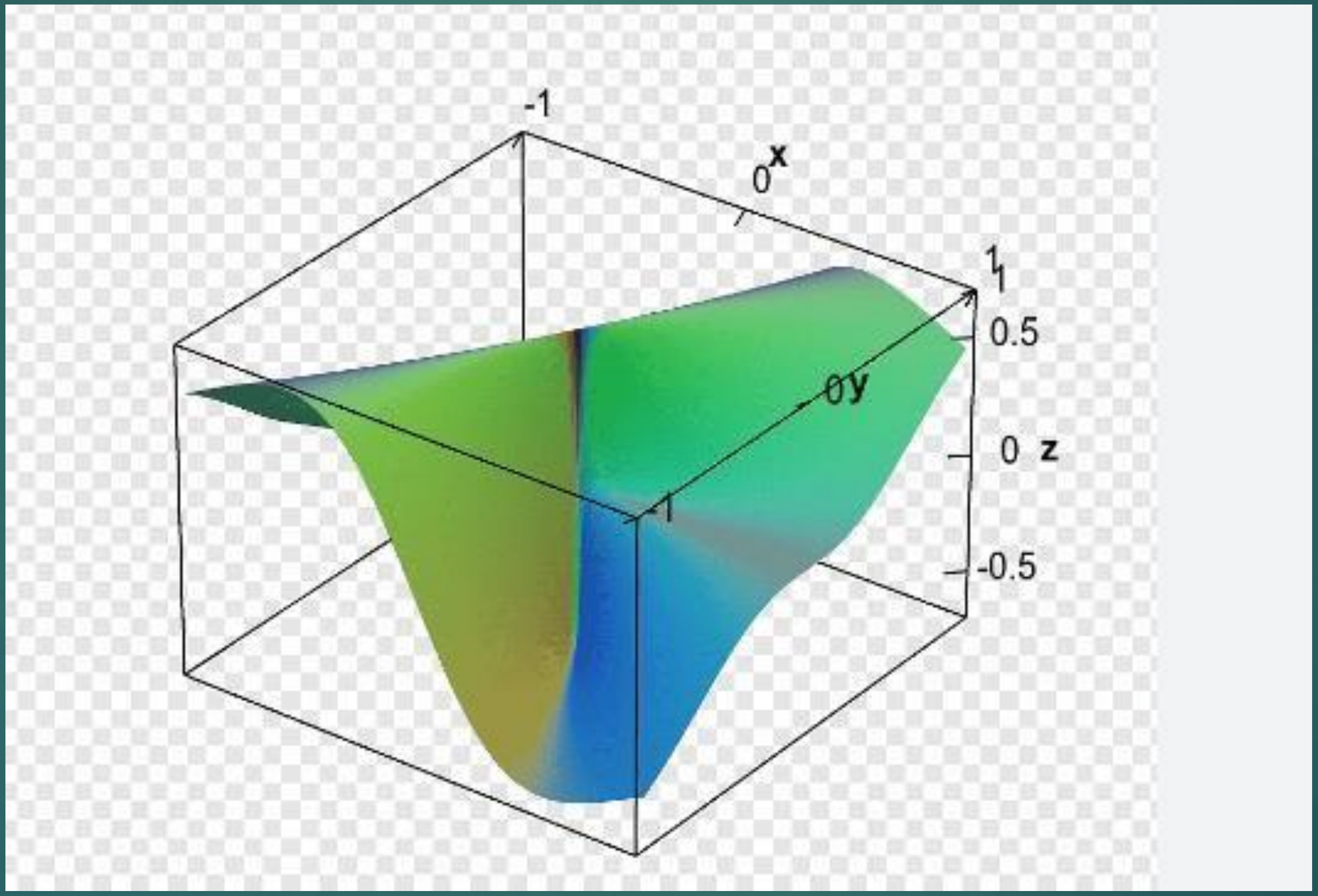
Matriz Hessiana:

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que admite todas las derivadas parciales de segundo orden en x_0.

Definimos la matriz Hessiana de f en x_0 como:

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{d{x_1}^2}(x_0) & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2}(x_0) \dots & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^2 f}{dx_n dx_1}(x_0) & \frac{d^2 f}{dx_n dx_2}(x_0) \cdots & \frac{d^2 f}{d{x_n}^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

T. 5 DIFERENCIABILIDAD.



DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ a \in \mathbb{R}^n$ decimos que f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ si y sólo sí existe una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ a \in \mathbb{R}^n$ decimos que f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ si y sólo sí:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \nabla \mathrm{f(a)}.(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Teorema I:

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ a \in \mathbb{R}^n$ decimos que si f es diferenciable $a \in \mathbb{R}^n \to f\ es\ continua\ en\ a \in \mathbb{R}^n$.

Como consecuencia de este teorema también es cierto que si f $no\ es\ continua\ en\ a \in \mathbb{R}^n \to f\ no\ es\ diferenciable\ en\ a \in \mathbb{R}^n$.

Teorema II:

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ y\ a \in \mathbb{R}^n$ decimos que si f es diferenciable $a \in \mathbb{R}^n \to$ f es derivable en $a \in \mathbb{R}^n$ según cualquier vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\bar{v} \neq 0$.

Además, se verifica: $f'_v(a) = \nabla f(a).\bar{}$

La existencia de todas las derivadas de una función en un punto según cualquier vector no nulo implica la diferenciabilidad de la función en dicho punto.

Teorema III:

Podemos decir que la función se comporta:

- **Creciente** en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$ si $f'_v(a) > 0.$
- **Decreciente** en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$ si $f'_v(a) < 0$

Teorema IV (Condición suficiente de diferenciabilidad):

Dada una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$ decimos que sif es continua en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$, y existen todas las derivadas parciales en ese entorno y las derivadas parciales son continuas en

$a \in \mathbb{R}^n \to f$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$.

Teorema V

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla f(a) \neq 0$ decimos que si f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n \to$ La derivada direccional de f en el punto $a \in \mathbb{R}^n$ es máxima, en valor absoluto, en la dirección del vector gradiente. Su valor es
$\|\nabla f(a)\|$.

TEOREMA DE SCHWARZ

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$, si se cumple que:

a) $\exists \frac{df}{dx_i}, \exists \frac{df}{dx_j}, \exists \frac{d^2f}{dx_i dx_j}$ en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$.

b) $\frac{d^2f}{dx_i dx_j}$ es continua en el punto $a \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $\exists \frac{d^2f(a)}{dx_j dx_i}$ y $\frac{d^2f(a)}{dx_j dx_i} = \frac{d^2f(a)}{dx_i dx_j}$ y la matriz Hessiana es simétrica.

EXTREMOS RELATIVOS EN VARIAS VARIABLES:

Dada una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable la condición necesaria para que $a \in \mathbb{R}^n$ sea un extremo local es:

$$\nabla f(a) = 0$$

Es decir, tendríamos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{df(a)}{dx_1} = 0 \\ \dfrac{df(a)}{dx_2} = 0 \\ \quad\cdots \\ \dfrac{df(a)}{dx_n} = 0 \end{cases}$$

Una vez que tenemos nuestros posibles $a \in \mathbb{R}^n$, puntos críticos, tenemos que clasificarlos.

Sea a un punto crítico y $H_{f(a)}$ la matriz Hessiana de la función en ese punto, estudiamos el signo de $H_{f(a)}$ a través de sus menores principales como se estudiaba la matriz de una forma cuadrática.

- Si $H_{f(a)}$ es definida positiva, la función alcanzará un mínimo en el punto a.
- Si $H_{f(a)}$ es definida negativa, la función alcanzará un máximo en el punto a.
- Si $H_{f(a)}$ es indefinida, será un punto de silla.

Extremos Condicionados:

Dada una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, puede que la función esté condicionada a una restricción $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$. Para calcular los extremos relativos de esta función condicionada, construimos la función Langragiana:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta(g(x_1, x_2, \dots, x_n) - b)$$

Para optimizar esta función resolvemos:

$$\nabla L(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta) = 0$$

Es decir, tendríamos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dL(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta)}{dx_1} = 0 \\ \dfrac{df(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta)}{dx_2} = 0 \\ \dots \\ \dfrac{df(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta)}{dx_n} = 0 \\ \dfrac{df(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta)}{d\beta} = 0 \end{cases}$$

Una vez que tenemos nuestros posibles $a \in \mathbb{R}^n$, puntos críticos, tenemos que clasificarlos.

Sea a un punto crítico y $H_{L(a)}$ la matriz Hessiana de la función en ese punto (Hessiana Orlada), estudiamos el signo del determinante de $H_{L(a)}$.

- Si es positivo, habrá un máximo condicionado en el punto.
- Si es negativo, habrá un mínimo condicionado en el punto.

T. 6 INTEGRAL INDEFINIDA

Dada una función f(x), sabemos calcular su derivada f’(x). Cuando queremos realizar justo el proceso contrario, es decir a partir de f’(x) obtener f(x) es lo que llamamos **integración**.

Al resultado de la integración se la denomina **primitiva** de la función. Una vez obtenida la primitiva, para comprobar que se ha calculado correctamente, basta con derivarla y ver que se obtiene la función de la que hemos partido.

$$F(x)\ es\ una\ primitiva\ de\ f(x) \leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Ejemplo:

Si $\mathrm{F(x)} = x^2 - 1 \to F'(x) = 2x$. Entonces, podemos decir que una primitiva de $f(x) = 2x$

$será \quad F(x) = x^2 - 1$. Pero por ejemplo F(x)= $x^2 - 3$ también sería una primitiva, porque si la derivamos también nos queda F'(x)= $2x$. De hecho, todas las funciones de la forma $F(x) = x^2 + c$ son primitivas de

$f(x) = 2x$.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES:

1. $\int \mathrm{k.\,f(x)} = \mathrm{k}\int f(x)dx$

2. $\int \;(\mathrm{f(x)} \pm \mathrm{g(x)})\mathrm{dx} = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1. Descomposición en funciones elementales: Se hallan apoyándonos en la tabla de integrales inmediatas. Se transforma de alguna manera el integrando para poder aplicar la formula. En ocasiones hay que multiplicar o dividir por alguna constante o sumar o restar algún número.

2. Descomposición en fracciones simples: Cuando arriba no puede conseguirse la derivada del denominador, o no se puede dividir cada elemento del numerador entre el denominador como en los ejemplos anteriores, hay que expresar el numerador de la siguiente manera:

- Si tenemos $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ y el grado del numerador es mayor o igual que el denominador, se puede hacer la división y expresar $P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$ (Dividendo= divisor.cociente+resto). Entonces nos quedaría:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{C(x).Q(x) + R(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

- Si tenemos $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ y el grado del denominador es mayor o igual que el del denominador, hay que factorizar el denominador y descomponer la fracción en fracciones simples de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x - x_1}dx + \int \frac{B}{x - x_2}dx + \cdots + \int \frac{C}{x - x_n}dx$$

Cuando alguna raíz es múltiple, también su factor del denominador estará elevado al cuadrado.

3. Método de integración por partes:

Se suele utilizar cuando la relación entre las funciones que aparecen en el integrando no *existe. No tienen nada que ver.*

En este caso, se aplica la siguiente fórmula:

$$\int u.\,dv = u.\,v - \int v.\,du$$

Hay que establecer quién de las funciones que aparecen es u y quién es dv.

Como algo informal llamaremos "u" por prioridad a ALPES (A=arcos, L=logaritmos, P=polinomios, E=exponenciales, S=senos y cosenos).

4. Método de cambio de variable:

Una integral de la forma $\int f(x)dx$ puede escribirse de la forma $\int f(g(t)).g'(t)dt$

Siempre que definamos $x = g(t)\ y\ dx = g'(t)dt$

Esto se hace siempre que la segunda integral facilita el cálculo. Cuando se calcula la segunda integral, se debe deshacer el cambio de variable para obtener el resultado.

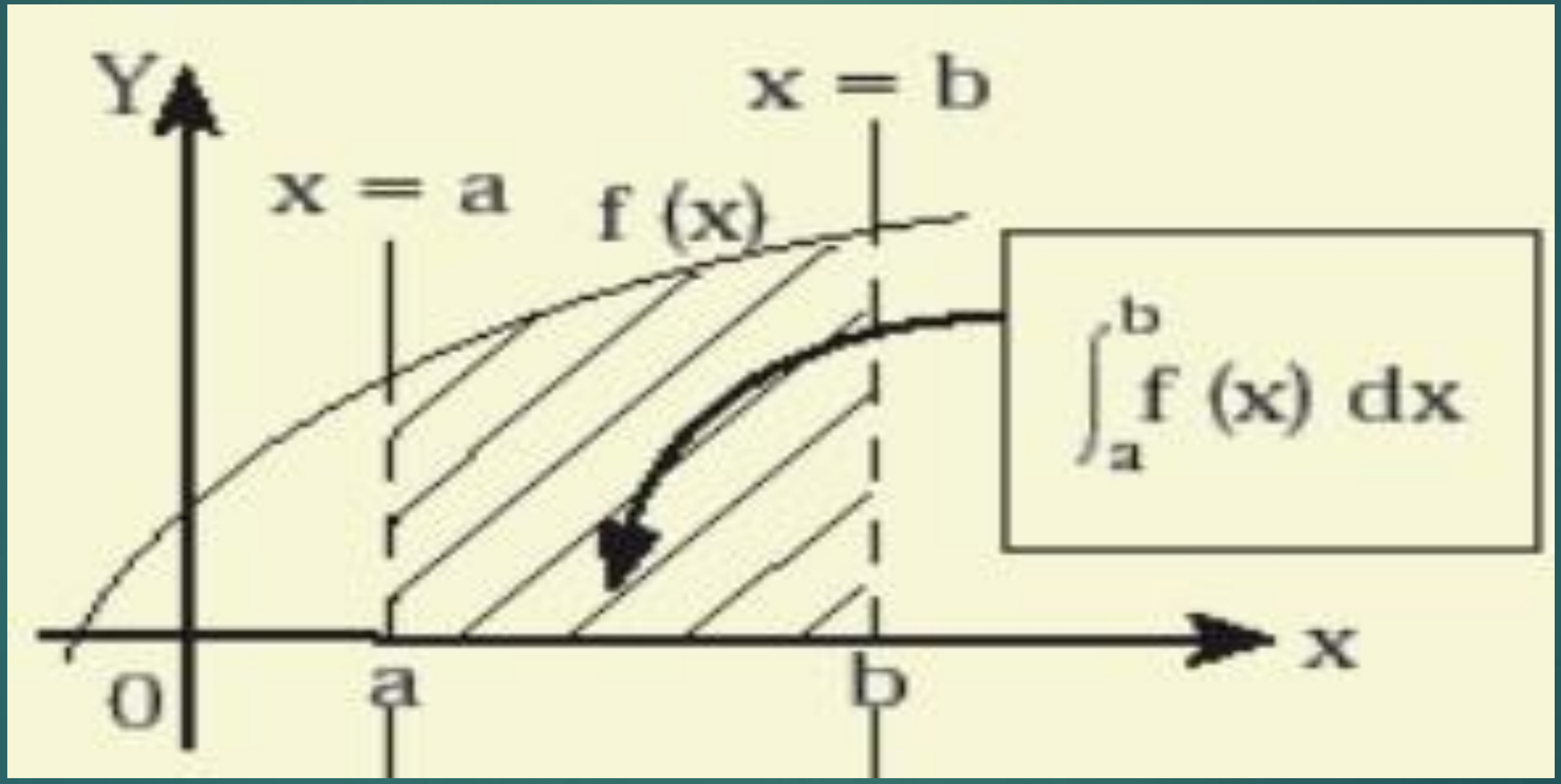
APLICACIONES ECONÓMICAS

1. Una de las principales aplicaciones de la integración es el cálculo de áreas, que en el ámbito de la economía posibilita el análisis dinámico de funciones de pérdidas y ganancias, balance de pago, balances presupuestarios…

2. También permite la obtención de funciones total a partir de las funciones marginales.

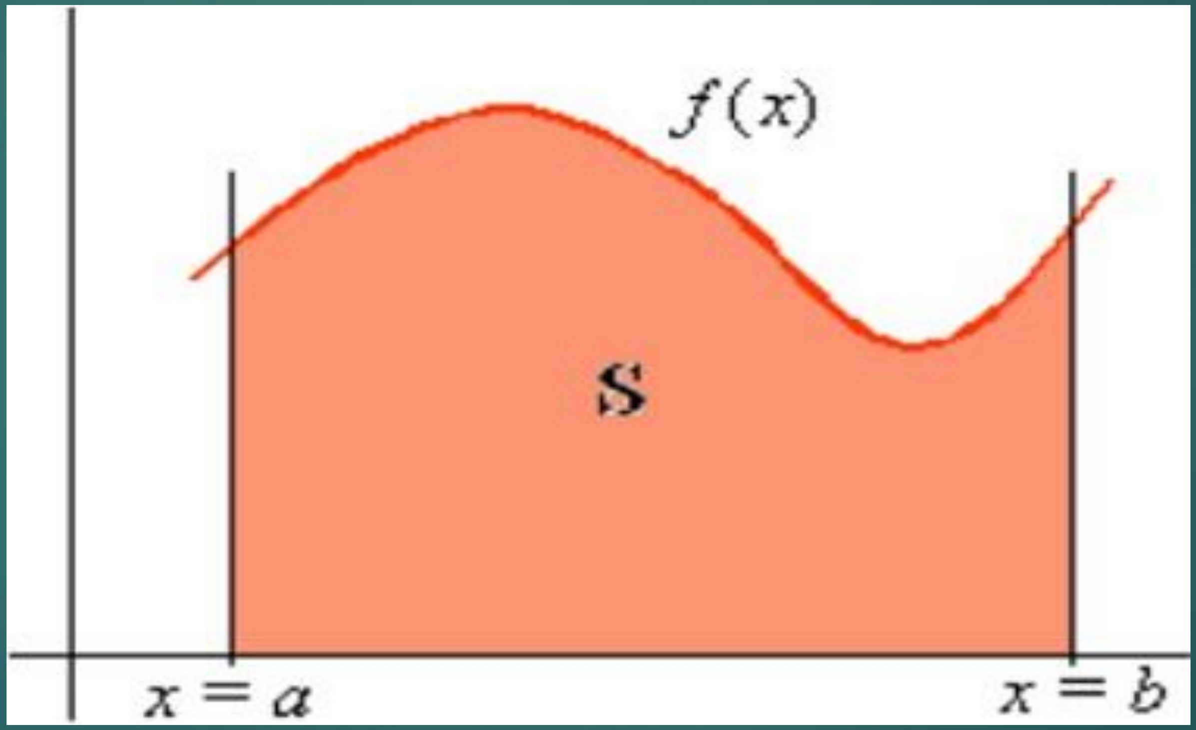
3. También la integración tiene aplicación directa en el estudio de distribuciones de probabilidad.

T. 7 INTEGRAL DEFINIDA

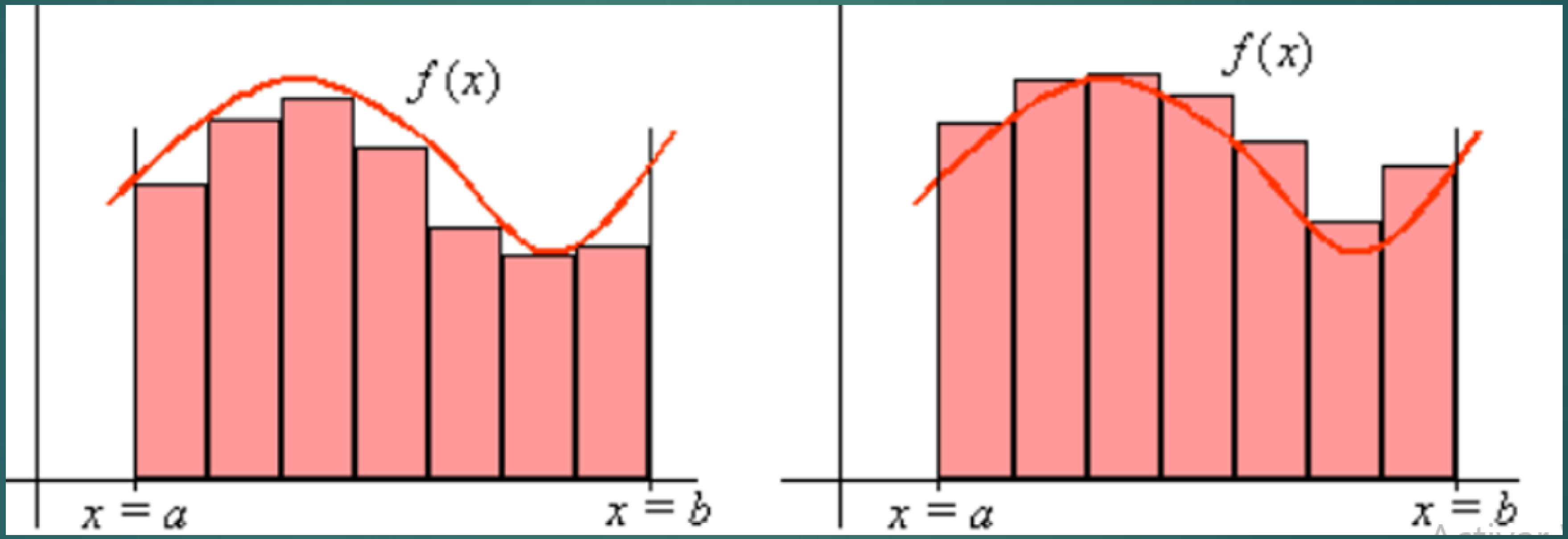


INTEGRAL DEFINIDA: RIEMANN

La integral definida surge como concepto para poder calcular el área de un recinto limitado por arriba por una función continua, f(x), en su parte inferior el eje de abscisas y en los laterales por dos rectas verticales x=a y x=b tal y como se ve en la imagen:



La forma de cálculo de esta área antes de conocer el concepto de integral es recubrir la zona con rectángulos de bases lo más pequeñas posibles, que serán los intervalos y dos tipos de altura, el máximo que tomaba la función en el intervalo y el mínimo que tomaba la función en el intervalo, tal y como se ve en las siguientes imágenes:



Si los intervalos cada vez se dividiesen en otro más pequeños cada vez estos dos tipos de rectángulos se parecerían más. Por tanto, hacemos la división tantas veces como sea posible pasando al límite y el valor final de este límite que coincide con el área que queríamos calcular, se le llama **integral definida de f(x)** entre a y b y se escribe así:

$$\int_a^b f(x)dx$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. $k.\int_a^b f(x)dx = \int_a^b k.f(x)dx$

2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5. Teorema Fundamental del Cálculo Integral: Si f(x) es una función continua en [a,b] y F(x) se define como

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt$$

Entonces F(x) es derivable en [a,b] y su derivada es F'(x)=f(x).

REGLA DE BARROW

Si F(x) es una primitiva de f(x), ($\int f(x)dx = F(x)$), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Otra forma de escribirlo sería:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(F(x)\right)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad siendo\ F'(x) = f(x)$$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL RIEMANN. CÁLCULO DE ÁREAS DE RECINTOS PLANOS.

Si tengo una función de la que tengo que calcular el área bajo la curva en un intervalo [a,b].

a. Si $f(x) \geq 0$ entonces el área S viene dada por $S = \int_a^b f(x)dx$.

b. Si $f(x) \leq 0$ entonces el área S viene dada por $S = -\int_a^b f(x)dx$

c. Si la función corta al eje OX en el intervalo. Obtenemos el punto c, de corte con el eje resolviendo la ecuación f(x)=0. En este caso calculamos:

$$S_1 = \left| \int_a^c f(x)dx \right|$$

$$S_2 = \left| \int_c^b f(x)dx \right|$$

El área pedida sería $S = S_1 + S_2$

d. Si el recinto viene limitado por dos curvas con $f(x)$ y $g(x)$, calculamos los puntos de corte entre ambas funciones haciendo $f(x) = g(x)$.

- Si tienen dos puntos de corte con $a \leq b \rightarrow S = |\int_a^b (f(x) - g(x))dx|$.
- Si tienen tres puntos de corte con $a \leq c \leq b \rightarrow S = S_1 + S_2$ con

$$S_1 = |\int_a^c (f(x) - g(x))dx| \qquad S_2 = |\int_c^b (f(x) - g(x))dx|$$

INTEGRAL GAMMA

La integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ existe para valores positivos de la p y da origen a la llamada función *gamma*, que representaremos así:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \qquad p > 0$$

Propiedades:

- $\Gamma(1) = 1$

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad p > 0$

- $Si\ p \in \mathbb{N},\ \Gamma(p) = (p-1)!$

- $Si\ k \in \mathbb{N},\ \Gamma(p+k) = p(p+1)\ldots(p+k-1)\ \Gamma(p)$

- $Si\ a > 0,\ \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$