PRÁCTICA 1: Sistemas en el dominio del tiempo

Conocimientos teóricos necesarios para poder realizar la práctica

Los vistos en el Tema 2, sistemas en el dominio del tiempo y, en concreto:

- Concepto de convolución y sus propiedades básicas.
- Mecánica de la convolución.
- La respuesta al impulso de un sistema LTI y la convolución como forma de obtener la respuesta para un sistema LTI.

Se recomienda encarecidamente haber leído el enunciado antes de realizar la práctica y haber realizado los cálculos teóricos previos indicados.

Bibliografía

- Signals and Systems; Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, 2ª edición (Agosto 1996) Prentice Hall; Capítulo 1.
- Aprenda MatLab como si estuviera en primero; Javier García de Jalón; Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid; Capítulo 1.

Objetivos

- Consolidación del concepto de convolución como operación básica para el trabajo en un sistema lineal e invariante.
- Afianzamiento de la mecánica de la convolución.

DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA

1. Revisión de conceptos teóricos asociados a la operación de convolución

En este punto recordaremos una serie de conceptos fundamentales para el desarrollo de la práctica. La descripción que aquí realizaremos será muy somera, por lo que se recomienda repasar estos conceptos en los apuntes de la asignatura.

Definición de la operación de convolución.

Sean x(t) e y(t) dos señales, podemos entonces definir la operación convolución y la señal z(t), resultado de aplicar dicha operación sobre x(t) e y(t), como:

$$z(t) \equiv x(t) * y(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau$$

De esta definición, se derivan una serie de propiedades inmediatas, entre las que destacan:

Propiedad 1: la operación de convolución es conmutativa.

Propiedad 2: la operación de convolución es asociativa.

Propiedad 3: la operación de convolución es distributiva respecto de la operación suma.

La convolución como forma de calcular la salida de un sistema LTI.

Imaginemos que tenemos un sistema lineal e invariante como el que tenemos en la **Figura 1** y queremos calcular la salida y(t), para una entrada x(t).

Figura 1: forma general de un sistema LTI.

Para poder demostrar, y comprender, que la salida del sistema para una determinada entrada puede calcularse mediante la operación de convolución debemos dividir el proceso en tres pasos.

Paso 1: descomposición de la señal de entrada. Es evidente que la señal de entrada *x(t)* puede escribirse como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

Paso 2: definición de la respuesta al impulso. Por otro lado, si definimos la respuesta al impulso del sistema, *h(t)*, como la salida generada cuando la entrada al sistema es *δ(t)*:

$$\delta(t) \xrightarrow[\text{Sistema LTI}]{} h(t)$$

Paso 3: cálculo de la salida de un sistema LTI. Tenemos entonces que, si el sistema es lineal e invariante y conocemos la respuesta al impulso, la salida, *y(t)*, para una entrada cualquiera *x(t)*, puede calcularse como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Es decir, que para calcular la salida de un sistema LTI respecto a una entrada únicamente habrá que convolucionar dicha entrada con la respuesta al impulso del sistema.

NOTA: ¡para que la salida de un sistema pueda calcularse como la convolución de la entrada con la respuesta al impulso es necesario saber que el sistema sea lineal e invariante (LTI)!

2. Interfaz de la práctica

Para resolver las cuestiones que se nos plantean utilizaremos el programa MATLAB. Para esto, los pasos que deberéis seguir son:

1. Arrancar MATLAB.
2. Descargar en un directorio (carpeta) local de vuestro PC los archivos que se encuentran en el Campus Virtual de la URJC[1].
3. Una vez arrancado MATLAB, en la parte superior central de la ventana principal, seleccionar como carpeta de trabajo aquélla donde hayáis descargado los archivos de la práctica.
4. Escribir junto al `promt (>>)` el nombre del fichero que ejecuta la práctica (en este caso Practica2) y pulsar "*enter*".
5. Introducir los datos relativos a la identificación del puesto de trabajo y pulsar “Comenzar práctica” (podéis introducir el valor “001” en todos los campos).

[1] En caso de aparecer problemas de visualización del programa, puede emplear MATLAB online, subiendo todos los ficheros de la carpeta “código” al directorio remoto.

Si los datos que introducís son correctos, os aparecerá automáticamente una interfaz similar a la que aparece en la Figura 2. Esta será la interfaz con la que trabajaremos en la práctica. A continuación, realizaremos una breve descripción de los elementos principales de la misma.

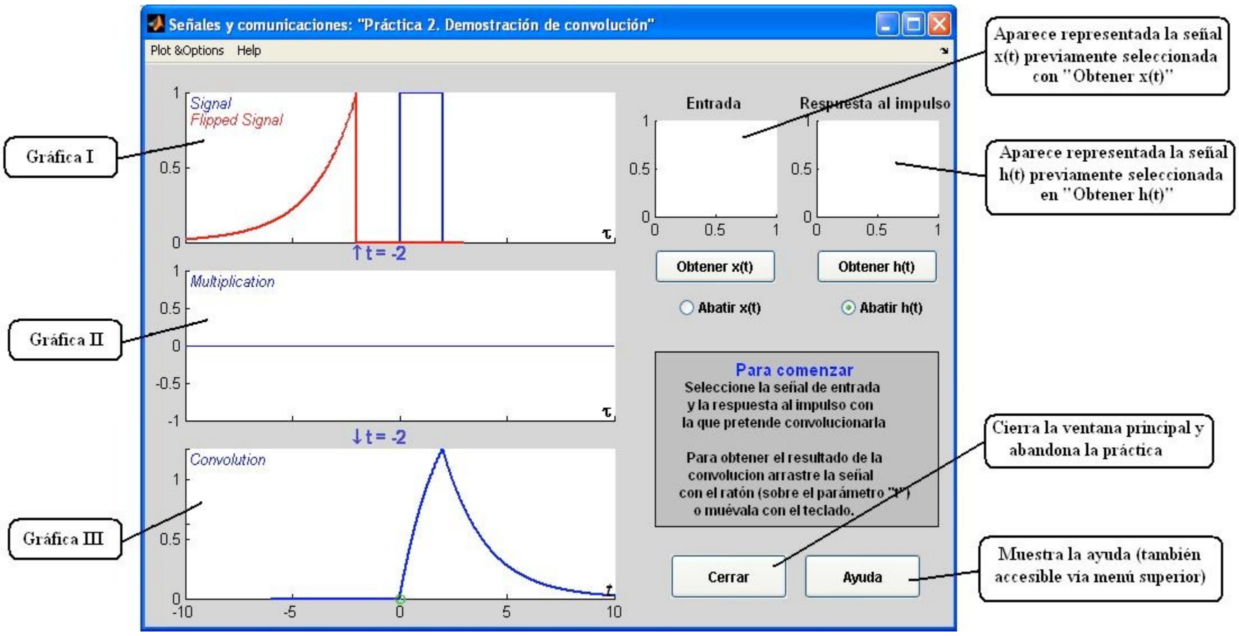

Figura 2: descripción básica de los componentes de la ventana de la aplicación de trabajo.

Además de los elementos que ya aparecen explicados en la propia **Figura 2**, los controles básicos de la interfaz más importantes son:

1. Obtener x(t) | h(t).
2. Abatir x(t) | h(t).
3. Índice de tiempo t.
4. Gráfica I: Signal / Flipped Signal.
5. Gráfica II: Multiplication.
6. Gráfica III: Convolution (Output).
7. Menú: Plot & Options.
8. Menú: Help.

Fijaos en que el valor del resultado de la convolución en el instante actual se señala en esta tercera gráfica. El valor numérico concreto para ese instante, se obtiene, según la definición de la ecuación de convolución, calculando, vía integración, el área que aparece en la Gráfica II.

Obtener x(t) | h(t)

Al pulsar estos botones os aparecerá una nueva ventana que os permitirá seleccionar x(t) o h(t) –ver **Figura** 3–. Al igual que en la práctica anterior, el grupo de señales con las que podréis trabajar es limitado, si bien en esta ocasión podréis cambiar ciertos parámetros básicos (longitud, amplitud, etc.), estos cambios se reflejan de forma inmediata en la gráfica auxiliar que aparece en la propia ventana (al cambiar los valores de la señal puede que su gráfica sobrepase el área de reproducción inicial, para reajustar los ejes basta con hacer "click" sobre la gráfica). Debéis ser cautos a la hora de trabajar con el parámetro "Retardo" puesto que, como veréis en las expresiones analíticas que os proporciona la propia interfaz, realiza un desplazamiento temporal de signo negativo, es decir que implementa la operación $x(t-t_0)$ y no $x(t+t_0)$. Finalmente, cuando hayáis finalizado la caracterización de vuestra señal, para retornar al programa principal deberéis pulsar el botón OK, y la señal que hayáis seleccionado aparecerá ya reflejada en la ventana madre. ***Por cuestiones de memoria, la aplicación sólo puede trabajar con señales de longitud limitada. Seréis vosotros, a la hora de responder a las preguntas que se os plantean, los que deberéis decidir cuál es la longitud suficiente que tiene que tener vuestra señal para que la respuesta que proporcionéis sea la correcta o, en caso de no poder alcanzar la solución exacta, que sea bastante aproximada.***

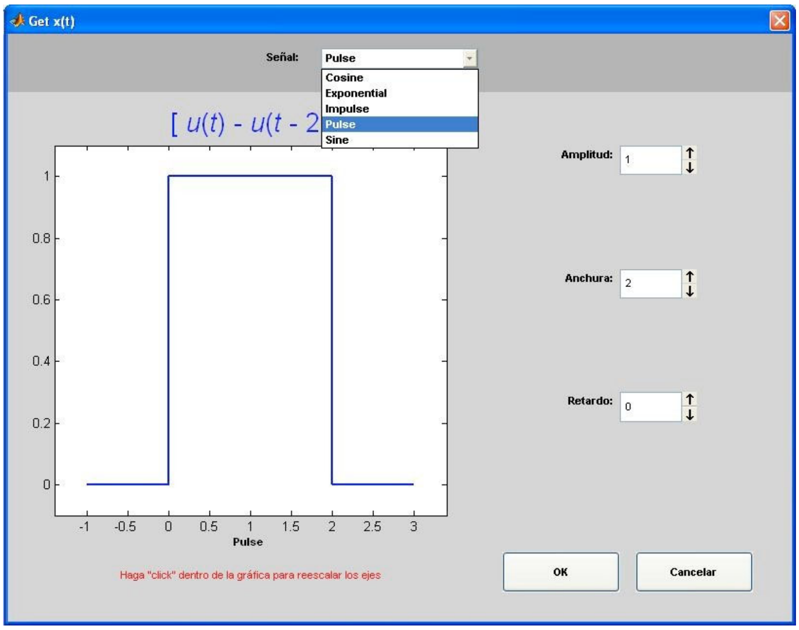

Figura 3: ventana de obtención de x(t) y h(t).

Abatir x(t) | h(t)

Estos botones sirven para seleccionar qué señal desea abatir (girar respecto al eje de las ordenadas). Como bien sabréis, en el proceso de calcular la convolución, una de las dos señales debe abatirse, con este botón seleccionaréis cuál de las dos señales se abatirá.

Nota: el valor instantáneo de la variable t indica la posición deslizante de la señal abatida (parámetro característico de la convolución), el valor inicial de esta variable será t=-2.

Índice de tiempo: t

En lo que respecta al instante de tiempo actual (es decir, a la variable *t* a la que hacíamos referencia en el párrafo anterior), el interfaz proporciona dos maneras diferentes de modificarlo. La más intuitiva consiste en pinchar sobre el rótulo **t** que aparece debajo de las gráficas y arrastrarlo con el ratón, aunque podréis también conseguirlo utilizando las flechas ← y →.

Gráfica I: Signal / Flipped Signal

En esta gráfica se representan dos señales. La primera de ellas (que aparece con el rótulo **Signal**) es la señal $x(\tau)$ o $h(\tau)$ que hemos decidido no abatir, mientras que la otra señal, la abatida $x(t-\tau)$ o $h(t-\tau)$, será la segunda de las señales representadas (en este caso aparecerá con el rótulo **Flipped Signal**). Nota: cuando modificamos el valor del tiempo actual, cambiará también la localización de la señal abatida.

Gráfica II: Multiplication

En esta segunda gráfica, se dibuja el resultado de multiplicar las dos señales [$x(\tau)\cdot h(t-\tau)$] representadas en la Gráfica I, cambiando la gráfica en función del solapamiento (superposición) de ambas señales.

Gráfica III: Convolution (Output)

Finalmente, la tercera gráfica muestra el resultado de la convolución lineal entre $x(t)$ y $h(t)$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

Fijaos en que el valor del resultado de la convolución en el instante actual se señala en esta tercera gráfica. El valor numérico concreto para ese instante se obtiene, según la definición de la ecuación de convolución, calculando vía integración el área que aparece en la Gráfica II.

Menú: Plot&Options

El menú *Plot&Options* os proporciona diversas posibilidades de la representación de la información en la ventana de la interfaz. Disponéis de posibilidades de ajuste de ejes, de posibilidad de cuadrícula, etc. y un modo especial (*"Tutorial Mode"*) en el que la salida aparecerá oculta y que os servirá, al ocultar el resultado final, para ayudaros a comprender mejor el proceso de convolución.

CUESTIONES SOBRE LA PRÁCTICA

Ejercicio 1: Operación de convolución

Dedique los primeros minutos de la sesión de laboratorio a "jugar" con la interfaz que se le suministra: seleccione distintas señales, vea qué opciones tiene para manipularlas, compruebe si efectivamente se representan en la ventana principal, realice manualmente la convolución arrastrando la señal abatida, etc.

En los casos en los que se le pregunta por un determinado resultado que ofrece la interfaz y deba dibujarlo, represente la forma de la señal e indique el valor de sus parámetros (cotas) más relevantes.

1.1. Sin ayuda de la interfaz gráfica calcule de forma teórica la convolución entre las señales $x(t) = Ae^{-\frac{1}{\tau}}u(t)$ y $h(t) = B\delta(t - t_0)$.

1.2. Calcule ahora, con la ayuda de la interfaz gráfica, para los valores de $A = 2, \sigma = \frac{1}{\tau} = 0.5, B = 1, t_0 = 3$, esa misma convolución y dibuje su resultado. (Seleccionar Abatir x(t) a no ser que se indique lo contrario).

1.3. ¿Coincide el resultado del apartado 1.2 con el que previamente había calculado en el apartado 1.1? ¿Qué se puede afirmar en lo que se refiere a convolucionar una señal x(t) con una delta desplazada?

1.4. Sin ayuda de la interfaz gráfica calcule de forma teórica la convolución entre las señales:

$$x(t) = 2e^{-t}u(t)$$

$$h(t) = u(t) - u(t-3) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 3 \\ 0, & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

1.5. Calcule ahora la convolución con la ayuda de la interfaz gráfica y compruebe que el resultado coincide con lo calculado en el apartado anterior.

1.6. Sean dos señales de longitud finita (distintas de cero en un intervalo de tiempo finito y continuo) x1(t) y x2(t) y sea la señal y(t) la convolución de ambas, i.e. y(t)=x1(t)*x2(t). ¿Cuál es el instante de tiempo en que la señal y(t) comienza a dejar de valer cero? ¿Cuál es el instante en el que la señal y(t) retorna al valor cero?

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & P1 \le t \le F1 \\ 0, & resto \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1, & P2 \le t \le F2 \\ 0, & resto \end{cases}$$

1.7. ¿Cuál es la longitud de la señal x1(t)? ¿Y la de x2(t)? ¿Cuál es la longitud de la señal y(t)?

1.8. Escoja en la interfaz de trabajo como señal x(t)=2·(u(t+2)-u(t+1)) y como h(t)= u(t+1)-u(t-5). Dibuje el resultado de la convolución de ambas señales.

1.9.¿Son los resultados obtenidos compatibles con los que obtiene de forma teórica? Si no es así revise sus cálculos o avise al profesor de laboratorio.

1.10. Configure su interfaz para que sea la señal h(t) la que se abata y se desplace. Seleccione como señal x(t) un seno de periodo y amplitud unidad y que tome valores en el intervalo de tiempo (-50,50). Convolucione esta señal con un pulso que comience en t=0 y que posea las siguientes características:

a) Amplitud=1 y Duración=2seg.

b) Amplitud=2 y Duración=2seg.

Dibuje el resultado de la convolución en ambos casos. ¿Por qué cree que vale prácticamente cero2? ¿Podría dar alguna explicación basada en la relación entre la duración del pulso y el periodo de la señal sinusoidal?

1.11. Repita la configuración de la cuestión 1.10 teniendo en cuenta ahora que la amplitud y duración del pulso es:

a) Amplitud=1 y Duración=2.5seg.

b) Amplitud=2 y Duración=2.5seg.

Dibuje los resultados. ¿Por qué ahora el resultado no es nulo?

1.12. Explique de forma teórica (ayudándose de la expresión matemática de la convolución), por qué sucede este fenómeno.

Ejercicio 2: Aplicación de la convolución al cálculo de la salida de sistemas.

2.1. Sea un sistema cuya salida, cuando a la entrada se introduce la señal $\delta(t)$ (delta o impulso) es h(t)=$e^{-t/5}\cdot u(t)$, siendo $u(t)$ la señal escalón. ¿Puede calcularse la salida de ese sistema, para una señal de entrada consistente en un pulso de amplitud 1, anchura 1 y que comience en el instante 0, con la interfaz suministrada? En caso afirmativo dibújela y en caso negativo indique por qué.
Si en la pregunta anterior respondió afirmativamente revise la NOTA que aparece en la página 3 de esta memoria y razone si actuó bien o no.

2.2. Sea el sistema definido por la siguiente ecuación:

$$x(t) \xrightarrow[\text{SISTEMA}]{} y(t): \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} x(\tau-5)d\tau$$

¿Es este sistema integrador, un sistema LTI? Demuéstrelo teóricamente. En caso de que la respuesta sea afirmativa, calcule de forma teórica su respuesta al impulso, h(t).

2.3. Determine, con ayuda de la interfaz gráfica, cuál es la salida de este sistema integrador cuando la entrada consiste en una señal de la forma: $x(t) = sen(\pi t)[u(t+2) - u(t-3)]$, siendo u(t) la señal escalón.