

A´lgebra

**Ejercicios y problemas**

Ingenier´ıa Biom´edica

Guillermo Vera de Salas Curso 2024-2025

1

2

©2024 Guillermo Vera de Salas

Material docente en abierto de la Universidad Rey Juan Carlos. Algunos derechos reservados.

Este trabajo se distribuye bajo la licencia:

Atribucio´n-CompartirIgual 4.0 Internacional de Creative Commons. Disponible en <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

A´lgebra

# Hoja 1: Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones.

1. Resolver los siguientes sistemas lineales por el m´etodo de Gauss:

2*x −* 5*y* + 4*z* + *u − v* = 3



*x −* 2*y* + *z − u* + *v* = 5

 *x −* 4*y* + 6*z* + 2*u − v* = 10







4*x −* 3*y* + 2*z* + *u* = 3 *x −* 2*y* + *z* + 2*u* = *−*2 4*x − y* + *z − u − v* = 5 2*x* + 3*y − z −* 4*v* = 9

3*x*1 + 4*x*2 + *x*3 + 2*x*4 = 2



2*x*1 + 2*x*2 *−* 6*x*3 + 2*x*4 = *−*4

 4*x*1 + 5*x*2 *− x*3 + 3*x*4 = *−*3

7*x*2 + *x*3 = 1

3*x*1 + 4*x*2 + *x*3 = 7

 *−*9*x*1 *−* 5*x*2 *−* 2*x*3 = 2

1. Utiliza el m´etodo de Gauss para discutir las distintas soluciones de los siguientes sistemas segu´n los distintos valores de los par´ametros *a, b ∈* R.

2*x* + 6*y* + *az* = 12

3*x* + (*a* + 5)*y* + 6*z* = *b − a*

*ax* + *bz* = 2

*ax* + *ay* + 4*z* = 4



 *ax* + 2*z* = *b*





*ax* + *y* + *z* = 1 *x* + *ay* + *z* = *a x* + *y* + *az* = *a*2

2*x* + *by* = 1

*−*2*x* + 2*y* + *az* = 1

 (*a* + 1)*y* + *z* = *a* + 1



 2*x −* 2*y* + *bz* = *a* + *b −* 1



*x − z* = 2 2*x* + *ay −* 3*z* = 4

*−x* + *a*2*z* = *a −* 3

(2 + *a*)*x* + *ay* + 2*z* = 2*a −* 2 2*x* + (2 *− a*)*y* = 0

 3*x* + *ay −* 4*z* = 6

 (*a* + 1)*x* + (*a* + 1)*z* = *a −* 1





2*x* + *ay* + *z* = 0 2*x −* 2*y* + *z* = 0 *bx* + 2*y −* 4*z* = 0 4*x* + 2*b* + 7*z* = 0

*x* + *ay* + *bz* = 1



*ax* + *by* + *z* = *b*

 *x* + *aby* + *z* = *a*

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

 1 2 1 0   

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 7 |
| 1 | *−*1 | 1 |
| 4 | 2 | 14 |
| 1 | 0 | 3 |

*A* = 2 4 *−*2 8



3 6 *−*5 16

 *, B* = 

 *.*

1. Calcula, usando el m´etodo de Gauss, los valores de *a* y *b* que hacen que la siguiente matriz tenga rango 2:

 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 3 | *−*3 |
| 1 | *−*1 | 5 |
| 0 | *b* | *a* |
| *a* | *−*1 | *−*4 |

*A* =  

1. Suponer que tras usar el m´etodo de Gauss sobre la matriz ampliada de un sistema se obtiene la siguiente matriz escalonada

 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 0 | 1 | 3 | *|* 6 |
| 0 | 0 | *−*1 | 0 | *|* 1 |
| 0 | 0 | 0 | 2 | *|* 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | *|* 0 |

(*A|b*) =  

¿Cu´al es la soluci´on del sistema?

1. Si suponemos que los dos sistemas de ecuaciones lineales de *m* ecua- ciones y *n* inc´ognitas y coeficientes reales

*AX* = *b*1 y *AX* = *b*2

son ambos sistemas compatibles,

* 1. ¿el sistema *AX* = *b*1 + *b*2 es compatible?
  2. Dado un nu´mero *α ∈* R, ¿qu´e se puede afirmar sobre la compati- bilidad del sistema *AX* = *α b*1?

1. Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices usando el m´etodo

de Gauss:

*A* = 1 2

(

3 4

*, B* =  2 3 4  *,*

0 0 4

0 3 0





|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  1 2 3   3 4 6  1 *−*1   *, E* =  0 *−*1 | 0  0  0  0 |   *C* =   0 0  0 0  0 1  1 0 | | 0  0  0  1  0  1  0  0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
|  0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  | 0 | 0 | 1 | *a*1 |
| a matriz *A* = 0 0 1 0 *a*2 | | | | |
|  | 1 | 0 | 0 | *a*3 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | *a*4 |

2 0 0 *,*



0 0 0



1 0



0 *−*1 *−*3 4

*D* = 1 0 *−*1 2

*−*3 0

1

0

 0 *.*

 



0

0

0 

 



1. Calcula la inversa de l

 0

*,* dejando la



soluci´on en funci´on de *a*1*, a*2*, a*3 y *a*4.

1. Si *A ∈ Mn×n*(R) es una matriz tal que *Am* = *In* para algu´n *m ∈* N, probar que entonces *A* es inversible y expresar *A−*1 en t´erminos de

*A*. Da un ejemplo de una matriz 2 *×* 2 distinta de la identidad que verifique que *A*2 = *I*2.

1. Si *A ∈ Mn×n*(R) es una matriz tal que *Am* = 0 para algu´n *m ∈* N, probar que entonces *A* es no puede ser inversible. Da un ejemplo de una matriz 2 *×* 2 distinta de la matriz nula, que verifique que *A*2 = 0.
2. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

0 1 1

 

1 0 1 *,*

 

0 0 *−*1

2 1 4

3 2 5 *,*

 

 

0 *−*1 1

1 1 *−*1

2 0 3 *,*

 

 

*−*3 1 *−*7

 

*−*1 2 1

2 *−*3 5 *,*

 

 

1 0 12

0 0 0 4

0 0 3 0

0 2 0 0 *,*

 

1 0 0 0

1 0 1 *−*1

0 *−*1 *−*3 4

 

1 0 *−*1 2 *.*

*−*3 0 0 *−*1

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

 *x −* 2 *−*2 0 0   

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *−*4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | *−*4 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | *−*4 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | *−*4 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | *−*4 |

*−*2 *x −* 2 0 0



0 0 *x −* 1 *−*1

0 0 *−*1 *x −* 1

 *,*



 *.*

# Hoja 2: Espacios Vectoriales. Parte I

Combinacio´n lineal. Dependencia lineal.

1. Estudia si los siguientes vectores de R4 son linealmente independientes:

 0   0   2   6 

0 0 1 3

 1   1   0 

  *,*   *,*   *,*  

0

1

1

*→−*

 1 

6

 0   1   1 

1. Determina en cada apartado si el vector *v* est´a generado por  *−*1  *,*  *−*2  *, −*  0  ,

 

donde

*→−*

 1 

*→−*  1 

1 1 *−*1

* 1. *v* =  *−*3 , b) *v* =  *−*1 .

3

1

*→−*  1  *→−*  *−*1 

c) *v* =  1 , d) *v* =  *−*1 .

0

2



*→−*  1 *→−*  2 

1. Dados los vectores *u* =  *−*3 , *v* =  *−*1  de R3, ¿para qu´e

 1 

2

1

*→− →−*

valores de *a* es  *a*  combinaci´on lineal de *u* y *v* ?

5

1. Determina en cada apartado para qu´e valores de *h* es *{→−v* 1*, →−v* 2*, →−v* 3*}*

linealmente independiente

*→−*  1  *→−*  *−*3  *→−*  5 





(i)

*v* 1 =  *−*3  *,*

2

*v* 2 = 9 *,*

*−*6

*v* 3 =  *−*7 

*h*

*→−*  1  *→−*  2  *→−*  2 

 

(ii)

*v* 1 = *−*5 *,*

*−*3

*v* 2 =  10  *,*

6

*v* 3 =  *−*9 

*h*

1. Demostrar que los vectores

 1   0   0 

 *a*  *,*  1  *,*  0 

*b*

*c*

1

son siempre linealmente independientes para cualquier valor de *a, b* y

*c*.

1. ¿Para qu´e valores de *a* y *b* son linealmente dependientes los vectores

 1   3   *−*3 

  *,*   *,*  ?

*−*1

1

5













0 *b a*

*a −*1 *−*4

1. Consideramos el espacio vectorial *V* = R6, y cinco vectores *→−v* 1*, →−v* 2*, →−v* 3*, →−v* 4,

*→−v* 5 *∈ V* . ¿Pueden ser los cinco vectores linealmente independientes en

*V* ? ¿Pueden formar los cinco vectores un sistema generador de *V* ? En caso afirmativo, pon un ejemplo, y, en caso negativo, explica por qu´e.

 *−*1 

1. ¿Existe algu´n valor del par´ametro *a* para el que el vector  *a*  es

2

0

 1   *−*5 

combinaci´on lineal de los vectores   y  ?

1

4

 3   *−*3 

1

*a*

1. Estudiar si siguientes conjuntos de vectores de P3 son linealmente inde- pendientes. En el caso de que sean dependientes, eliminar los necesarios para obtener un subconjunto independiente.
   1. *{x*3 + *x −* 1*, x*3 *−* 2*, x* + 1*, x*3 + 2*x}*,
   2. *{−x*2 + *x, x −* 3*, x*3 + *x, x*2 *− x* + 1*}*,
   3. *{x*2 + *x* + 2*, −*3*x*3 + 2*x*2 + 1*, x*3 + *x*2 *−* 3*x* + 2*}*.

( 1

1. Estudiar para que valores de *a* y *b* la matriz 1 *a* 1

(

*b* 0 *a* + *b*

( 1

1 es

combinaci´on lineal de

( 1

*→−w* = *−*1 0 1 .

2 0 0

*→−u* = 1 1 *−*1 ,

1 0 2

*→−v* = 0 *−*1 1 y

0 0 1

1. Sean *→−v* 1*, →−v* 2 y *→−v* 3 tres vectores linealmente independientes de un es- pacio vectorial *V* . Probar usando la definici´on que los vectores *→−v* 1 =

*→−v* 1, *→−v* 2 = *→−v* 1 + *→−v* 2, *→−v* 3 = *→−v* 1 + *→−v* 2 + *→−v* 3 son linealmente indepen-

dientes.

1. Sabiendo que los vectores

*→−v* 1*, →−v* 2 y

*→−v* 3 son linealmente indepen-

dientes, utiliza la definici´on para estudiar si los siguientes vectores son linealmente independientes: *→−u* 1 = *→−v* 1, *→−u* 2 = *→−v* 1 + 2*→−v* 2, *→−u* 3 =

*→−v* 1 + 2*→−v* 2 + 3*→−v* 3, y *→−u* 4 = *→−v* 1 *−* 2*→−v* 2 + 3*→−v* 3. Si no son linealmente

independientes, elimina uno para que s´ı lo sean.

1

# Hoja 3: Espacios Vectoriales. Parte II

Bases. Coordenadas.

1. Estudia y justifica si los siguientes conjuntos de vectores son bases del espacio vectorial R4:

 2   3   1   0   4   1   *−*1 

*−*1 1 2

1

*−*1

1

1

a)   *,*   *,*   , b)   *,*   *,*   *,*  



1

0



 2 

 0 

 1 

 *−*1 



1

*−*1





3

0



1

0

0

1

 1   *−*3   0   5   1   1   0   0 

c)   *,*   *,*   *,*   , d)   *,*   *,*   *,*  

*−*3 *−*1

*−*1 *−*1 1

 *−*1 



13

11





3

2



 *−*3 



1

*−*1





1

1





1

0



 1 

4

7

1

2

1

1

1. Estudia y justifica si los siguientes conjuntos de vectores son base del espacio vectorial P3:
   1. *{x*3 + *x −* 1*, −x*3 + 2*,* 3*x*3 + *x*2 + *x −* 3*, x*3 + 3*x*2 + 3*x* + 1*}*,
   2. *{x*3 + *x*2 + *x* + 1*,* 3*x*2 + 2*x* + 1*,* 6*x* + 2*,* 6*}*
   3. *{x*2 + 4*x −* 1*,* 3*x*2 + *x,* 2*x* + 1*}*
   4. *{x*3 + 1*, x*2 + 1*, x* + 1*,* 1*}*
2. Determina todas las bases de R4 que puedes realizar con los vectores

 1   5   1   2   1   1 

  *,*   *,*   *,*   *,*   *,*   *.*

*−*1 *−*6

 



0

*−*2



*−*1

*−*5

 *−*1 

 *−*3 



1

*−*1



 *−*1 

0

7

0

2

2

5

1

1. Prueba que

*→−u* 1 =

 1 

 2  y

1

*→−u* 2 =

0

1 generan los mismos vec-









*−*1

*→−*  1  *→−*

 2 

*→− →−*

tores que *v* 1 =  0  y *v* 2 =  6 , es decir, *Gen*(*{ u* 1*, u* 2*}*) =

3

0

*Gen*(*{→−v* 1*, →−v* 2*}*)*.*

 *−*1   2   1 

1. Halla una base de R4 que contenga a los siguientes vectores 

0 *−*1



1

1



 1 



2

1



0

 *,*   *,*  .

0

2

1. Discute en funci´on de *a* cuando el siguiente conjunto es una base del espacio vectorial *M*2(R):

1 *−*1 *,* *a* 1 *,* *−*1 *−*1 *,* 1 *a* + 1

*−*2 1

1 0

*a* 0

0 1

1. Sea *V* un espacio vectorial con base *B* = *{→−u* 1*, →−u* 2*, →−u* 3*, →−u* 4*}*. Estudia y justifica si *Bt* = *{→−v* 1*, →−v* 2*, →−v* 3*, →−v* 4*}* es base de *V* donde:

*→−v* 1 = 3*→−u* 1 + 3*→−u* 2 + *→−u* 3 *− →−u* 4, *→−v* 2 = 2*→−u* 1 + *→−u* 2 + 2*→−u* 4

*→−v* 3 = *−→−u* 1 + *→−u* 2 + 3*→−u* 3, *→−v* 4 = *→−u* 2 + 3*→−u* 3 *−* 2*→−u* 4

1. Sea *V* un espacio vectorial con *B* = *{→−u* 1*, →−u* 2*, →−u* 3*}* una base. Dado los vectores

*→−v* 1 = *→−u* 1 *−* 2*→−u* 2 + 3*→−u* 3*, →−v* 2 = 2*→−u* 1 *−* 3*→−u* 2 + *→−u* 3*, →−v* 3 = *−a→−u* 2 + *b→−u* 3*,*

Estudia la relaci´on que deben cumplir *a* y *b* para que *{→−v* 1*, →−v* 2*, →−v* 3*}* sea tambi´en una base de *V* .

 1 

*→− −*1

9. Halla las coordenadas de *u* =   en las bases:





1  

1



1  

*−*1 *−*1 1

0

1

0   0 

*a*) *B* =   *,*   *,*   *,*   ,

1



1

*−*1





1

1





1

0



 1 

 0   4   1   *−*1 

1

*−*1

1

1

*b*) *C* =   *,*   *,*   *,*  







 

 1 

0

1

0

*−*1 1

*−*1

3 

 4 

1. Halla el vector *u* que tenga como coordenadas  2  en la base *B* donde:

1

*→−* 3

 2   1   1   *−*1 

*a*) *B* =   *,*   *,*   *,*  

1

*−*1

0

0

 1 

 *−*1 



7

*−*1





3

0



1

2

 1   *−*1   1   *−*2 

3

*−*1

2

1

*b*) *B* =   *,*   *,*   *,*  

 1 

 *−*1 



1

*−*2





3

0



1

1

3

 0   *−*1   3   *−*1 

0

*−*4

1

0

*c*) *B* =   *,*   *,*   *,*  

 1 

 *−*1 



1

*−*1





3

1



0

1

1. Sabiendo que las coordenadas de los vectores de la base can´onica en R4

en la base *B* son

 1   1   0   0 

[ *e* 1]*B* =   *,* [ *e* 2]*B* =   *,* [ *e* 3]*B* =   *,* [ *e* 4]*B* =   *.*

*→−*

*→− −*1 *→− −*1 *→−* 1



1

*−*1





1

1





1

0



 1 

1

1

Halla la base *B*.

1. Halla una base *B* tal que las coordenadas de los vectores de la base can´oni- ca en R4 en la base *B* sean

 2   1   1 

[ *e* 1]*B* =   *,* [ *e* 2]*B* =   *,* [ *e* 3]*B* =   *.*

*→−*

*→− −*1 *→− −*1



2

*−*1





0

1





1

0



2

(La soluci´on no es u´nica.)

# Hoja 4: Espacios Vectoriales. Parte III

Cambios de bases. Subespacios vectoriales.

* 1. Se consideran las siguientes bases:

 *−*1   2   1 

* + 1. *B* =  *−*1  *,*  4  *,*  2  de R3,

�( 5 1 3 

*b*) *B* =

*−*1 5

1 7

3 *−*2

0 2

{ }

*−*1 4 ) *,* ( 2 1 ) *,* ( 1 2

) *,* ( 1 0 ) de *M*2(R),

*c*) *B* = *−x*3 + 4*x*2 *− x* + 5*,* 2*x*3 + *x*2 + *x* + 7*, x*3 + 2*x*2 + 3*x −* 2*, x*3 + 2

de P3.

Halla la matriz de cambio de base *PBc←B* con *Bc* las respectivas bases can´onicas de cada espacio vectorial.

* 1. Halla las matrices de cambio de base entre las bases de R3

 0   1   1   1   1   0 

*B* =  *−*1  *,*  *−*2  *,*  1  y *C* =  *−*1  *,*  0  *,*  *−*2  *.*

1

1

*−*1

2

1

1

* 1. Halla las matrices de cambio de base entre las bases de *M*2(R)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *B* = �( 2 | 0 | ) *,* ( 1 | 1 ) *,* ( | 2 | 3 | ) *,* ( 1 | *−*1 ) |
| 1 | 0 | 1 | *−*1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

*C* = �( 0 1 ) *,* ( 2 *−*1 ) *,* ( 1 1 ) *,* ( 1 0 ) *.*

*−*1 1

1 2

1 0

*−*1 2

* 1. Sean

 1   1   0 

*B* =  1  *,*  1  *,*  1  y *C* =  3  *,*  1  *,*  1 

 1   0   0 

1 0 1

dos bases de R3.

0 0 1

* + 1. Halla las matrices de cambio de base *PBc←B* y *QBc←C* ,
    2. Halla las matrices de cambio de base de *B* a *C* y de *C* a *B*,
    3. Compara las matrices del apartado *b)* con las matrices *Q−*1*P* y

*P −*1*Q*,

* + 1. Realiza Gauss-Jordan a las matrices (*P | Q*) y (*Q | P* ). Justifica los resultados.
  1. Sabiendo que la matriz de cambio de base de la base can´onica de R3

 

1 *−*1 0

a *B* es *PB←Bc* = 0 1 2 . Halla la base *B*.

 

1 0 1

* 1. Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de R4 con ecuacio- nes cartesianas:

1 �



*E* : *x −y* +3*z* = 0

2*y* +*z −*2*t* = 0

� *x* +*y* = 0

, *E*2 : { *y −z* +*t* = 0

 3*x −y −t* = 0

*E*3 :

*x −y* = 0 , *E*4 :

2*x* +*y* +*z* +*t* = 0

*z −t* = 0

* + 1. Determina las dimensiones de cada subespacio,
    2. Halla una base de cada subespacio,
    3. Halla una base, si es posible, de *E*1 *∩ E*2, *E*2 *∩ E*4 y *E*2 + *E*3 y

*E*2 + *E*4,

* + 1. Halla un subespacio complementario de cada subespacio.
  1. Se considera el subespacio vectorial *E* de R4 con bases

 1   0   1 

0

2

1

*B* =   *,*   *,*  

 *−*1   1   *−*1 

0

1

0

 1   *−*1   0 

2

1

1

*C* =   *,*   *,*   *.*



 0   1  1 

1

1

0

* + 1. Comprueba que efectivamente son bases del mismo subespacio,

 0 

* + 1. Halla las coordenadas de *→−u* =  4  en *B* y *C*.

 2 

2

* + 1. Halla la matriz de cambio de base de *B* a *C*. Utiliza la matriz para comprobar el apartado anterior.
  1. Se consideran los subespacios vectoriales de P3:

*E* = *{p*(*x*) *∈* P3 *| p*(*x*) = *p*(*−x*)*},*

*F* = *{p*(*x*) *∈* P3 *| pt*(2) = 0*}.*

* + 1. Determina la dimensi´on de cada subespacio y una base.
    2. Halla una base de *E ∩ F* y *E* + *F* .
    3. Halla un subespacio complementario para cada subespacio.
  1. Sea

( )

*A* = 1 *−*1

0 1

Se consideran los subespacios vectoriales de *M*2(R):

*E* = {*B ∈ M*2(R) *| B* = *A−*1*BA*}

*F* = {*C ∈ M*2(R) *| Ct* = *ACA*}

* + 1. Determina la dimensi´on de cada subespacio y una base.
    2. Halla una base de *E ∩ F* y *E* + *F* .
    3. Halla un subespacio complementario para cada subespacio.
  1. Halla una base del subespacio *E* de R4 con ecuaci´on cartesiana

*xt −* 2*zt* + 3*tt* = 0

respecto a la base

 1   2   0   *−*1 

*−*1 1

1

0

*B* =   *,*   *,*   *,*   *.*







 





0

1

1

0 1 1

*−*2

1 

* 1. Halla una base *B* de *M*2(R) tal que las ecuaciones cartesianas del subespacio *E* con ecuaciones cartesianas

�

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *a −*2*b* | +*c* | = | 0 |
| *b* | *−c* | = | 0 |

sea

*at* +*bt* = 0

�

*ct* +*dt* = 0 *.*

* 1. Sea *E* un subespacio de R4 con base

 *−*1  

0

0   3 

*BE* =





  *,* 

 *,*   *.*



1 1

1 *−*2

0

2





*−*1

1 

Considera el subespacio *F* de R4 con ecuaciones cartesianas, respecto a la base can´onica de R4,

*x −*2*y* +*z* = 0

�

*y −z* +*t* = 0 *.*

* + 1. Justifica que *F* es un subespacio vectorial de *E*,
    2. Halla la ecuaci´on cartesiana de *F* respecto *BE*.

# Hoja 5: Transformaciones Lineales. Parte I

Definicio´n. Matriz asociada a una transformacio´n.

1. Comprueba si las siguientes transformaciones son lineales:
   1. *T* : R2 *→* R2 definida como *T* U *x* L = U *xy* L *.*

*y*

*x*

* 1. *T* : R2 *→* R2 definida como *T* U *x* L = U *y* L *.*

*y*

*x* + *y* + 1

* 1. *T* : R2 *→* R2 definida como *T* U *x* L = U 4*x* + *y* L *.*

*y x −* 7*y*

1. Sea *T* : R3 *→* R2 tal que:

 1 

*a*)

*T*  0  =

0

*b*)

U 1 L

0

 0 

y *T*  1  =

0

U 0 L *.*

 1 

1

U 1 L

 *−*1 

U 0 L

 1 

U 2 L

*T*  1  = 0

1

2

, *T* 1 = 1

0

, *T*  3  = 1 *.*





 1 

U 1 L

 *−*1 

U 0 L

 1 

U 2 L



*T*  1  =

1

0 , *T* 1 = 1

0

 0 

, *T* 1 = 1 *.*

*−*2

Halla, si es posible, *T*  0 . Justifica razonadamente cuando no sea

1







posible.

1. Sea *T* : R3 *→* R3 tal que:

 *−*1 

 1 

 *−*1 

 0 

 1 

 2 

*T*  1  =  0  , *T*  2  =  1  , *T*  1  =  1  *.*

0 2

 *x* 

0 0 1 *−*1

Halla *T y . z*





1. Sea *T* : *M*2(R) *→* P3 una transformaci´on lineal tal que:

*T* { *a b* ) = *ax*3*−bx*2+(*a*+*b*)*x, T* { *c c* ) = (*c*+*d*)*x*3+*dx*2*−cx*+(*c−d*)

*a b*

{

)

Halla *T a b* .

*c d*

*d −d*

*→− →− →−*

1. Sea *T* : *V → V* una transformaci´on lineal y *B* = *{ b* 1*, b* 2*, b* 3*}* base

de *V* tal que:

*→− →− →−*

*→− →− →−*

*→− →−*

*→− →−*

*T* ( *b* 1) = *b* 1 *−*2 *b* 2*, T* ( *b* 2) = *b* 3 *−*3 *b* 2*, T* ( *b* 3) = *b* 1 + *b* 2 *− b* 3

*→− →−*

 *x*1 

Halla [*T* ( *u* )]*B* para cualquier *u ∈ V* tal que [*\_u*]*B* = *x*2 .





*x*3 *B*

1. Halla la matriz *M* (*T* )*Bc←Bc* de las siguientes transformaciones lineales en sus respectivas bases can´onincas:

 *x*   *y − z* 

* 1. *T* : R3 *→* R3 definida como *T y*





*z*

 = 

4*x* + 2*y* ,

*x − y −* 3*z*

 *x*  U 2*x − y − z* L





* 1. *T* : R3 *→* R2 definida como *T y* =

*z*

*x − y −* 3*z* ,

U *x* L  *x* + 2*y* 



* 1. *T* : R2 *→* R3 definida como *T*

*y*

= 0

*x −* 4*y*

,

 *a* + *b − c* + *d* 

* 1. *T* : P3 *→* R3 definida como *T* (*ax*3+*bx*2+*cx*+*d*) = 



*a − d* .

2*b* + 3*d*

 *x* 

 1 *−*1 0 2 

1. Halla *T*   sabiendo que *M* (*T* )*B ←B* = 





*y*







2 1 1 0

*.*

*z c c*

*t*

0 0 1 1

*−*1 *−*2 1 0

1. Sea *T* : P3 *→* P2 la transformaci´on lineal definida como

*T* (*p*(*x*)) = 2*pt*(*x* + 1) *− pt*(*x −* 1) + *p*(1)*x*2*.*

Halla *M* (*T* )*Bc←Bc* .

1. Sea *T* : R4 *→* R3 la transformaci´on lineal tal que:

 1   1   *−*1   1   1   0   *−*1   1 

*−*1

2

0

1

*T*   =  1  *, T*   =  2  *, T*   =  1  *, T*   =  1 

0

*−*1

1

1



0

1





1

0





0

*−*1





0

0



 1   *−*1   1   *−*1 

* 1. Halla *M* (*T* )*B ←B* donde *B* =   *,*   *,*   *,*   ,

*−*1

2

0

1















*c*



0 1 0

1 0 *−*1

0

0 

 1   0   1 

*b*) Halla *M* (*T* )*C←B* donde *C* =  1  *,*  1  *,*  1 ,

0 1 1

1. Halla *M* (*T* )*Bc←Bc* .
2. Halla *P* y *Q* tales que *PM* (*T* )*C←BQ* = *M* (*T* )*Bc←Bc* .

3 3 *→− →− →−*

1. Sea *T* : R *→* R una transformaci´on lineal y sea *B* = *{ b* 1*, b* 2*, b* 3*}*.

*→− →− →−*

Determina *T* ( *b* 1)*, T* ( *b* 2)*, T* ( *b* 3) para que se verifique que

 

2 0 0

*M* (*T* )*B←B* = 0 *−*5 0 *.*

 

0 0 7

*t →−*

*→− →− →−*

1. Sean *V* y *V* dos espacios vectoriales con bases respectivas *B* = *{ b* 1*, b* 2*, b* 3*, b* 4*}*

y *C* = *{→−c* 1*, →−c* 2*, →−c* 3*}*. Sea *T* : *V → V t* la transformaci´on lineal que

cumple

*→− →− →− →− →− →− →− →−*

*T* ( *b* 1) = 2 *c* 1 + *c* 2 *− c* 3*, T* ( *b* 2) = *c* 1 *− c* 2 *−* 2 *c* 3*,*

*→− →− →− →− →− →− →−*

*T* ( *b* 3) = 2 *c* 1 *−* 2 *c* 2 + 4 *c* 3*, T* ( *b* 4) = *c* 1 *− c* 3*.*

*t →− →− →−*

Comprueba que los vectores *C*

bi´en una base de *W* .

* 1. Halla *M* (*T* )*C←B*,
  2. Halla *M* (*T* )*Ct←B* ,

= *{T* ( *b* 1)*, T* ( *b* 2)*, T* ( *b* 3)*}* son tam-

* 1. Halla la matriz de cambio de base *PC←Ct*
  2. ¿Qu´e relaci´on cumplen entre s´ı las tres matrices de los apartados anteriores?

1. Sea *T* : *V → V t* una transformaci´on lineal con matrices asociadas:

 1 *−*1 0   0 2 *−*1 

*M* (*T* )*C←B* =  0 2 1  *, M* (*T* )*Ct←B* =  1 1 0  *.*

1 0 1

Halla la matriz de cambio de base de *C* a *Ct*.

1 *−*1 0

# Hoja 6: Transformaciones Lineales. Parte II

Subespacios Ker e Im. Inyectividad, sobreyectividad y biyec- tividad.

1. Hallar una base del nu´cleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

 *x* 

 *x − y* + *z* + 2*t* 

* 1. *T* : R4 *→* R3 tal que *T* 

*y*

*z*

*t*

 = 

0

2*x − y − t*



* 1. *T* : R3 *→* R3 tal que *M* (*T* )*B ←B*

*c*

*c*

1 *−*1 0

= 0 1 1

 

 

1 1 2

* 1. *T* : P3 *→ M*2(R) tal que *T* (*p*(*x*)) = ( *p*(0) *p*(1) )

*p!*(1) *p!!*(1)

 1 *−*1 0 

* 1. *T* : R3 *→* R3 tal que *M* (*T* )*C←B* = 0 1 1 donde

 

1 1 2

 1   1   1   0   0   1 

*B* =  *−*1  *,*  1  *,*  0  *, C* =  *−*1  *,*  1  *,*  0 

0

0

1

1

1

1

1. Estudia para que valores de *a ∈* R es biyectiva la transformaci´on lineal

 

 *x* 

*T* : R4 *→* R4 definida como *T* 

  

*y*





*x −* 2*y − z*

= 2*ax − y − t* .

 

*z* 2*x − y − at*

*t y* + 2*z* + *at*

1. Halla la matriz asociada de *T* : *V → V* respecto de la base *B* =

*→− →− →− →−*

*{ b* 1*, b* 2*, b* 3*, b* 4*}* sabiendo que

*→− →−*

*→− →−*

*→− →−*

*→− →−*

*→− →−*

*b* 1*, b* 2 *∈* ker *T, T* ( *b* 3+ *b* 4) =

*b* 1+ *b* 2*, T* ( *b* 3*− b* 4) =

*b* 1+ *b* 2*.*

1. Sea *T* : R4 *→* R4 la transformaci´on lineal con matriz asociada en las

 

1 *−*1 0 0

2 0 1 1

 

bases cann´icas *A* = 1 0 0 1 .

0 1 1 0

* 1. Halla una base del nu´cleo e imagen de *T* .

( )

* 1. Considera la matriz  *A* y realiza Gauss por columnas ob-

*I*4

teniendo una matriz equivalente por columnas, que llamaremos

(

*Im* 0

0 *K*

). (Si encuentras dificultades en realizarlo por colum-

nas, puedes considerar la traspuesta y trabajar por filas, es decir, hacer Gauss a la matriz: (*At|I*4)).

* 1. Comprueba que las columnas de la matriz *Im* generan el subes- pacio imagen de *T* y las columnas de la matriz *K* general el subespacio nu´cleo de *T* .
  2. Justificar por qu´e este ”m´etodo/atajo” funciona.

1. Se considera la transformaci´on *T* : *M*2(R) *→* P3 definida como

(

*T a − b* + *d b* + *c*

*a* + *c − d a* + *b* + *d*

) = *ax*3 + *bx*2 + *cx* + *d,*

* 1. Halla *M* (*T* )*Bc←Bc* donde *Bc* son las respectivas bases can´onicas.
  2. Halla una base del nu´cleo e imagen de *T* y comprueba que *T* es biyectiva.
  3. Halla la expresi´on de *T −*1(*ax*3 + *bx*2 + *cx* + *d*) y *M* (*T −*1)*B ←B* .

*c c*

1. Sea *E* el subespacio de R3 con ecuaci´on cartesiana *{x − y* + 2*z* = 0 . Se define la transformaci´on lineal *T* : R2 *→ E* tal que

l 1  1  l 0  *−*2 





*T* 0 =  1  *, T*

0

1 = 0 *.*

1

* 1. Comprueba que *T* es biyectiva,
  2. Halla *T −*1.

1. ¿Se puede definir una transformaci´on lineal inyectiva *T* : R3 *→ E* don- de *E* es un subespacio de R4 con ecuaci´on cartesiana *{x* + *y* + *z* = 0 ? Justifica la respuesta, y en caso afirmativo, define dicha transformaci´on lineal.
2. Define una transformaci´on lineal *T* : R3 *→* R3 tal que la dimensi´on del nu´cleo de *T* sea 1 y su imagen coincida con el subespacio *E* con ecuaci´on cartesiana *{y − z* = 0 .
3. Se consideran los subespacios *E* y *F* de R4 con ecuaciones cartesianas

*{x* + *y − t* = 0 y *{y −* 2*z* + *t* = 0 , respectivamente.

* 1. Halla *BE* y *BF* bases de *E* y *F* , respectivamente.
  2. Construye una transformaci´on lineal biyectiva *T* : *E → F* . Halla

*M* (*T* )*BF ←BE* .

* 1. Amplia las bases *BE* y *BF* a una base de R4 y denota las nuevas bases *BE* y *BF* .
  2. Construye una transformaci´on lineal biyectiva *T* : R4 *→* R4 tal que *T* (*E*) = *T* (*E*). Halla *M* (*T* )*BF ←BE* .
  3. Halla *M* (*T* )*Bc←Bc* .

*f* ) Utilizando el argumento anterior, halla *P* tal que *PA* = *B* donde

   1 0 0 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *−*1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

*A* = 

  



 



0 2 *−*1

*, B* = *.*

0 1 0

0 0 1

1. Se define el conjunto de endomorfismos de un espacio vectorial *V* como el conjunto de todas sus transformaciones lineales:

End(*V* ) = *{T* : *V → V | T* es lineal*}*

Resulta que este conjunto posee estructura de espacio vectorial con la suma (*T* + *S*)(*→−u* ) = *T* (*→−u* ) + *S*(*→−u* ) y producto por escalar (*λT* )(*→−u* ) = *λT* (*→−u* ).

* 1. Comprueba que

tales que

*Bc* = *{E*1*, E*2*, E*3*, E*4*}*

*E*1 l *x* = l *x* *, E*2 l *x* = l *y*

*y*

0

*y*

0

*, E*3 l *x* = l 0

*, E*4 l *x* = l 0

es una base de End(R2).

*y*

*x*

*y*

*y*

* 1. Halla las coordenadas en *Bc* de la transformaci´on lineal *T* : R2 *→*

R2 tal que *T* l *x* = l *x −* 2*y* .

*y*

4*x* + *y*

* 1. Comprueba si *H* : End(R2) *→* End(R2) tal que

*H* (*T* l *x* ) = *T* l 2*x − y*

*y*

*x* + 2*y*

es inyectiva y/o sobreyectiva.

# Hoja 7: Diagonalizacio´n

1. Diagonaliza, si es posible, las siguientes matrices, es decir, hallar *P*

inversible y *D* diagonal tal que *A* = *PDP −*1:

* 1. *A* = ( 3 4 1





 3 2 3 0 

*−*1 *−*1





1. *A* =  *−*1 0 0 0 

1 2 0

* 1. *A* =  *−*1 3 1 

0 0 *−*1 0

*−*1 *−*1 *−*1 2

0 1 1

 5 0 *−*4 

 *−*1 0 0 1 

1. *A* =  *−*2 1 0 2 





* 1. *A* =  0 3 0 

2 0 *−*1

 

0 0 *−*1 1

0 0 1 *−*1



*−*1 4 *−*2

* 1. *A* =  *−*3 4 0 

*−*3 1 3

1 *−*1 *−*1





* 1. *A* = 1 *−*1 0





1 0 *−*1



*j* ) *A* = 





1 *−*3 0 0

*−*3 1 *−*3 0





0 0 1 3

0 0 3 1

1 *−*3 0 0 



 3 1 *−*1 

*k* ) *A* =  *−*3 1 0 0 

*f* ) *A* = 3 5 *−*3 *,*

 

5 5 *−*3

0 0 1 3

0 0 3 1

 0 0 0 1 

0 0 1 0

*g* ) *A* = 0 1 0 0

 

1 0 0 0

 1 2 0 0 

*l* ) *A* =  

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 |  | 1 | 0 | 0 |  |
| 0 |  | 0 | 3 | 1 |  |
| 0 |  | 0 | 0 | *−* | 1 |

1. Sea *T* : *V → V* una transformaci´on lineal y *B* = *{→−b* 1*, →−b* 2*}* una base de *V* . Se sabe que *→−b* 1 *−* 2*→−b* 2 es un autovector asociado al autovalor

*−*1 y *T* (*→−b* 1 + *→−b* 2) = *→−*0 . Determina si *T* es diagonalizable y, en caso

afirmativo, halla una base *C* de autovectores y *M* (*T* )*C←C*.

1. Se considera la matriz

 

5 0 0

*A* = 0 *−*1 *a .*

 

3 0 *b*

¿Para qu´e valores de *a, b ∈* R es *A* diagonalizable? En los casos en los que *A* sea diagonalizable calcular *P* y *D*.

1. Sea *B* = *{→−b* 1*, →−b* 2*, →−b* 3*}* una base de *V* y sea *T* : *V → V* una transfor- maci´on lineal tal que:

 *T* (*→−b* 1) = 2*→−b* 1 + *→−b* 2 + *→−b* 3,

 *→−b* 2 *∈* Ker *T* ,

 *T* (*→−b* 3) = *a*(*→−b* 1 + *→−b* 2) + 2*→−b* 3.

Estudia para que valores de *a ∈* R existe una base de autovectores de

*T* .

1. Sea *µ ∈* R y *Tµ* : R2 *→* R2 la transformaci´on lineal tal que *Tµ* 1 1 l =

1

1 1 l y *Tµ* 1 0 l = 1 *µ* l.

1

1

*µ*

1. Estudia para qu´e valores de *µ* la transformaci´on *Tµ* es diagonali- zable.
2. Demuestra que *Tµ ◦ Tµ* = *Tµ*. Esto se puede interpretar como que *Tµ* es una proyecci´on sobre un subespacio. Halla el subespacio de proyecci´on.

4 2 *−*6

 

1. Se considera la matriz *A* = 2 4 *−*6 .

 

2 2 *−*4

* 1. Halla los autovalores de la matriz *A*1035784 *−* 4*A*6 + 2*A*3 *− I*.
  2. Sea *p*(*x*) = *anxn* + *an−*1*xn−*1 + *...* + *a*1*x* + *a*0 *∈* P*n*. Halla los autovalores de la matriz *p*(*A*).

1. Se considera la matriz *A* = 



1 *−*1 0

2 1 1 . Halla *a, b, c, d, e ∈* R tal





*−*1 0 0

que *A*5 = *aA*4 + *bA*3 + *cA*2 + *dA* + *eI*, con *a, e /*= 0. (Pista: Usar el teorema de Cayley-Hamilton)



1. Se considera la matriz *A* = 

*−*1 0 *−*5 5

*−*5 4 *−*5 5

*−*5 *−*5 4 5

*−*15 *−*5 *−*10 19



 *.*

* 1. Halla una matriz *B* tal que *B*2 = *A*. Se podr´ıa decir que *√A* = *B*.
  2. Halla una matriz *C /*= *B* tal que *C*2 = *A*. Se podr´ıa decir que

*√*

*A* = *C*.

Entonces, ¿*√A* = *B* o *√A* = *C*? Concluimos que la ra´ız cuadrada de una matriz no es una operaci´on bien definida.

1. **[Forma can´onica de Jordan]** Se ha estudiado que para una trans- formaci´on lineal puede no existir una base de autovectores, por lo que la transformaci´on no admite una matriz asociada con forma diagonal. Sin embargo, siempre podremos encontrar una base donde la matriz tenga una expresi´on diagonal por bloques. Estos bloques se son sub- matrices llamadas *bloques de Jordan* y son de la forma, para *λ* un autovalor de *T* :

 *λ* 1 0 *· · ·* 0 

0 *λ* 1 *· · ·* 0

 

*Jλ* = .

.







. . .

. . . *.*



0 0 *· · · λ* 1

0 0 *· · ·* 0 *λ*

Para toda transformaci´on *T* : *V → V* existe una base *B* tal que



0

*M* (*T* ) = 

.

0 *· · ·* 0

*· · ·* 0

*Jλ*2

*Jλ*1



 (Forma can´onica de Jordan de T)*.*

*Jλr*

*B←B* .

.

.

 . . . . . 

0 0 *· · ·*

Estos bloques de Jordan cobrar´an inter´es para aquellos autovalores *λ*

tal que su multiplicidad geom´etrica y algebraica no coincidan.

 *x*   *x −* 2*y* + *z* 

Sea *T* : R3 *→* R3 definida como *T y*





*z*

 = 

*−y* .

*−x* + *y* + 3*z*

* 1. Comprueba que 1 y 2 son autovalores de *T* y que *T* no es diago- nalizable. Sea *→−u* un autovector asociado a *−*1 y *→−v* un autovector

*−*

asociado a 2.

* 1. Halla un vector *→−w* tal que *T* (*→−w* ) = *→−v* + 2*→−w* .
  2. Considera la base *B* = *{→−u , →−v , →−w }*. Comprueba que

   

*−*1

0

0

0 0

2 1

0 2

*J−*1

0

0

0 0

*J*2

*M* (*T* )*B←B* = 

 =  

1. Sea *T* : R3 *→* R3 una transformaci´on lineal definida como

 *x*  



*T y*  = 



*z*

2*x* + *z*

*x* + *y .*



*−x* + *y* + 3*z*

Halla una base *B* de R3 tal que *M* (*T* )*B←B* sea la forma can´onica de Jordan de *T* .

# Hoja 8: Espacio vectorial eucl´ıdeo. Parte I

Matriz de Gram. A´ngulos y norma. Bases ortogonales y Me´to- do de Gram-Schmidt.

1. Halla la matriz de Gram respecto de la base can´onica de los siguientes productos escalares:

 *x*1   *y*1 

* 1. *� x*2



 

*x*3

*, y*2

*y*3

*)* = 2*x*1*y*1 + 3*x*2*y*2 + 4*x*3*y*3

 *x*1   *y*1 

* 1. *� x*2 *x*3



 

*, y*2

*y*3

*)* = 3*x*1*y*1 *−x*2*y*1 *−x*1*y*2 +4*x*2*y*2 +2*x*1*y*3 +2*x*3*y*1 +2*x*3*y*3

 *x*1   *y*1 

* 1. *� x*2 *x*3



 

*, y*2

*y*3

*)* = 5*x*1*y*1 *−* 2*x*2*y*1 *−* 2*x*1*y*2 +*x*2*y*2 +*x*2*y*3 +*x*3*y*2 +6*x*3*y*3

Z 1

* 1. En P2, *�p*(*x*)*, q*(*x*)*)* =
  2. En P2, *�p*(*x*)*, q*(*x*)*)* =

*p*(*x*)*q*(*x*)*dx*

*−*1

Z

1

*p*(*x*)*q*(*x*)*dx*

0

1. Halla la matriz de Gram respecto de la base

 1   1  

1 

*B* =  *−*1  *,*  0  *,* 

0

1

*−*1

1 

de R3 de los siguientes productos escalares:

 *x*1   *y*1 



 

* 1. *� x*2

*x*3

*, y*2

*y*3

*)* = 2*x*1*y*1 + 3*x*2*y*2 + 4*x*3*y*3

 *x*1   *y*1 

* 1. *� x*2 *x*3



 

*, y*2

*y*3

*)* = 3*x*1*y*1 *−x*2*y*1 *−x*1*y*2 +4*x*2*y*2 +2*x*1*y*3 +2*x*3*y*1 +2*x*3*y*3

 *x*1   *y*1 

* 1. *� x*2 *x*3



 

*, y*2

*y*3

*)* = 5*x*1*y*1 *−* 2*x*2*y*1 *−* 2*x*1*y*2 +*x*2*y*2 +*x*2*y*3 +*x*3*y*2 +6*x*3*y*3

*→−*  1  *→−*

 2 

1. Halla la norma de los siguientes vectores

y el ´angulo que forman respecto:

 1 0 0 

*u* =  1  y

1

*v* = *−*1

*−*1

 

* 1. *GBc* = 0 1 0 donde *Bc* es la base can´onica,

 

0 0 1

 1 1 1 

*b*) *GB* =  1 2 2  donde *B* =  0  *,*  1  *,*  1 ,

 1   1   1 

1 2 3

 2 2 1 

0 0 1

1. *GBc* = 2 4 1 donde *Bc* es la base can´onica,

 

1 1 2

 2 2 1 

 1 

 1 

 1 

1. *GB* =  2 4 1  donde *B* =  0  *,*  1  *,*  1 .

1 1 2

0

0

1

4. Halla todos los subespacios de dimensi´on 1 de R3 que formen un ´angulo

*π* respecto al subespacio

*E* : *−x* + *y* + *z* = 0 2*x − y* + 2*z* = 0

�

3

1. Aplica el m´etodo de Gram-Schmidt a la base de R3

 1   1   2 

 2  *,*  0  *,*  3 

0

0

*−*1

para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar usual de

R3.

1. Aplica el m´etodo de Gram-Schmidt a la base de R4

 1   1   2   0 

2 0

0

0

  *,*   *,*   *,*  

 1 

 1 

 *−*1 

 1 

0

0

1

1

para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar est´andar de R4.

1. Halla una base ortogonal, respecto al producto escalar usual, del subes- pacio *E* de R3 con ecuaci´on cartesiana *{x* + 2*y − z* = 0 .
2. Halla una base *B* del espacio vectorial eucl´ıdeo (R3*, �, )*) tal que

 1 0 0   1 1 1 

*GB* =  0 2 0  *,* donde *GBc* =  1 2 2  *.*

0 0 3

1 2 3

1. En R3, halla la matriz de Gram en las bases can´onicas de un producto

 1   1   1 

escalar tal que la base *B* =  0  *,*  1  *,*  1  sea ortonormal.

0

0

1

1. **[Teorema de Pit´agoras]** Sea (*V, �, )*) un espacio vectorial eucl´ıdeo. Demuestra que si *→−u , →−v ∈ V* son ortogonales entonces

*||→−u ||*2 + *||→−v ||*2 = *||→−u* + *→−v ||*2

1. En R2, considera las bases *B* = � 1 *,* 1 y *C* = (" 5 3 #)

0

1

*√*

*√*

*√*

*√*

#

*,*

"

1

2

5

1

5

5

y el producto escalar con matriz de Gram en la base can´onica *GBc* =

( )

1 *−*1

*−*1 2

* 1. Comprueba que *B* y *C* son dos bases ortonormales respecto de

*GBc* .

* 1. Halla la matriz de cambio de base *PC←B* y su inversa.

# Hoja 9: Espacio vectorial eucl´ıdeo. Parte II

Complemento ortogonal. Proyeccio´n ortogonal. M´ınimos cua- drados.

1. En R3 se considera el subespacio *E* : *x* + *y* + *z* = 0 con ecuaci´on en base can´onica. Halla el subespacio ortogonal *E⊥* con respecto a:
   1. el producto escalar usual,

 1 *−*1 1 

* 1. el producto escalar con matriz de Gram *GBc* = *−*1 2 0 ,

 

1 0 3

 1 *−*1 1 

* 1. el producto escalar con matriz de Gram *GB* = *−*1 2 0

 

1 0 3

 0   1   1 

donde *B* =  *−*1  *,*  0  *,*  1  *.*

0

1

*−*1

1. En P y el subespacio *E* : *a − b* + *d* = 0

3

*a* + 2*b − d* = 0

con ecuaciones en

base can´onica. Halla el subespacio ortogonal *E⊥* respecto al producto escalar

Z

*(p*(*x*)*, q*(*x*)*)* =

1

*p*(*x*)*q*(*x*)*dx.*

0

1. En R*n*, halla el complemento ortogonal respecto al producto escalar usual del subespacio *E* : *anxn* + *an−*1*xn−*1 + *...* + *a*1*x*1 = 0 con ecuaci´on cartesiana respecto a la base can´onica.
2. **[Producto vectorial en** R3**]** En R3 con el producto escalar usual, el producto vectorial se puede definir como el vector ortogonal a dos

vectores iniciales *→−u , →−v* y se suele denotar por *→−u × →−v* . Es decir, *→−u × →−v*

es un nuevo vector de R3 que verifica que

*(→−u × →−v , →−u )* = *(→−u × →−v , →−v )* = 0

La manera habitual de calcularlo es resolviendo el determinante for- mal:





*→− →−*

*→− →− →−*

*i j k*



 *uyvz*

*− uzvy* 

*u × v* = det *ux uy uz*

*vx vy vz*

 = 

*uzvx − uxvz*

*uxvy − uyvx*



*→− →− →−*

donde

*i , j , k* son los vectores de la base can´onica.



 cos *s* 

 *−* sin *s* 

*a*) En funci´on de *s ∈* R se considera base *Bs* = *T* (*s*) =  sin *s*  *, N* (*s*) = 

*√*1

1

*s*3

2

*s*

cos *s*

*−*

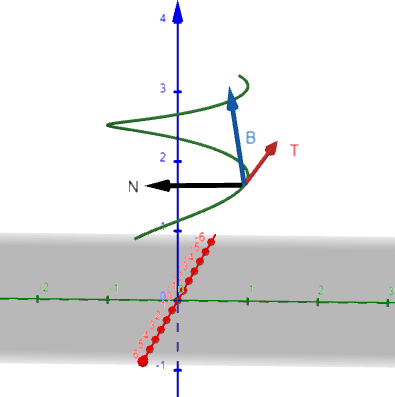
4

*√*

,

donde a *T* (*s*) se le llama vector tangente en el punto *s* y a *N* (*s*)

el vector normal en *s*. Halla *B*(*s*) = *T* (*s*) *× N* (*s*) al que se de- nomina vector binormal en *s*. La base *{T* (*s*)*, N* (*s*)*, B*(*s*)*}* es una base ortogonal y se le denomina Triedro de Frenet de la curva en el punto *s*.



Link de la animaci´on:

<https://www.geogebra.org/3d/dsd77fua>.

 1 

 1 

 1 

1. Sea R3 con el producto escalar usual y sea *E* = Gen 



 1  *,*  1  *,*  1  .

*→−* 

1 2 0

1 

Halla la proyecci´on ortogonal del vector



*u* =  0  sobre *E*.

0



1. En R , halla la proyecci´on ortogonal del vector *u* = 

4 *→−*

1 

 sobre el

3

 *−*1 

4

 2   0 

1 3

subespacio *E* con base *BE* =   *,*   , respecto:

 0   1 

1

1

* 1. el producto escalar usual,

 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | *−*1 |
| 1 | *−*1 | 3 |

* 1. el producto escalar con matriz de Gram *GBc* =  ,

 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

* 1. el producto escalar con matriz de Gram *GB* =  

donde

 1   1   1   1 

*B* =   *,*   *,*   *,*  

0 1 1 1

 0   0   1   1 

0

0

0

1

1. En R3, halla la matriz asociada respecto la base can´onica de la trans- formaci´on proyecci´on ortogonal sobre el subespacio *E* con base *BE* =

 2   0 

 1  *,*  3 , respecto:

0

1

* 1. el producto escalar usual,

 1 *−*1 1 

* 1. el producto escalar con matriz de Gram *GBc* = *−*1 2 0

 

1 0 3

*→−*  1 





1. En R3, halla el ´angulo entre la recta *r* con vector director *r* = 1

*−*1

 1   *−*1 

y el plano *π* con base *Bπ* =  0  *,*  1 , respecto:

1

2

* 1. el producto escalar usual,

 2 0 1 

* 1. el producto escalar con matriz de Gram *GBc* = 0 2 *−*1

 

1 *−*1 3

1. Calcula soluciones aproximadas por m´ınimos cuadrados de los siguien- tes sistemas lineales *AX* = *B* y halla el error cometido al tomar la soluci´on aproximada.

*−*1 2   4 

* 1. *A* =  2 *−*3 *, B* =  1  *.*

*−*1 3 2

 2 1  *−*5 

* 1. *A* = *−*2 0 *, B* =  8  *.*

2 3

1

 1 *−*2  3 

* 1. *A* =   *, B* =   *.*

*−*1 2

 

1 1 0 3

*d* ) *A* =   *, B* =   *.*

1

0 3

2 5

1 1 0

 *−*4 

2

 1 

1 0 1

 

1 0 1

1 1 0 

 8 

 2 

2

*e*) *A* = 1 0 *−*1 *, B* =  5  *.*

0 1 1

6

1. Un cierto experimento produce los datos emp´ıricos ] *x* l siguientes:

1

*y*

1*,*8

*,* 2

2*,*7

*,* 3

3*,*4

*,* 4

4*,*38

l. Si los resultados deben correspon-

der a una funci´on de la forma *y* = *ax*2 + *bx*, calcular por m´ınimos cua- drados la funci´on de esa familia que mejor ajusta a los datos emp´ıricos. Calcula el error que se comente al tomar esa soluci´on aproximada.

]

l ]

l ]

l ]

1. Repite el ejercicio anterior ajustando los datos mediante una recta de la forma *y* = *mx* + *n*. Calcula el error y decide si es mejor usar una par´abola como la del ejercicio anterior o una recta como en ´este.
2. Respecto al producto escalar usual, el problema de hallar la soluci´on de m´ınimos cuadrados de un sistema de ecuaciones *AX* = *B* es equi- valente a resolver el sistema de ecuaciones *AtAX* = *AtB*. Ahora, en lugar del producto escalar usual, utilizamos un producto escalar con matriz de Gram *G* respecto a una base conveniente. Halla una forma equivalente a resolver el problema de m´ınimos cuadrados de un siste- ma de ecuaciones *AX* = *B* mediante la resoluci´on de otro sistema de ecuaciones. (Pista: Los vectores *B − P*Col(*A*)(*B*) y *P*Col(*A*)(*B*) siempre son ortogonales).