Álgebra

Ejercicios y problemas

Ingeniería Biomédica

Guillermo Vera de Salas

Curso 2024-2025

Hoja 1: Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones.

1. Resolver los siguientes sistemas lineales por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rr} 2x-5y+4z+u-v= & 3\\ x-2y+z-u+v= & 5\\ x-4y+6z+2u-v= & 10\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{rr} 4x-3y+2z+u= & 3\\ x-2y+z+2u= & -2\\ 4x-y+z-u-v= & 5\\ 2x+3y-z-4v= & 9\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rr} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4= & 2\\ 2x_1+2x_2-6x_3+2x_4= & -4\\ 4x_1+5x_2-x_3+3x_4= & -3\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{rl} 7x_2+x_3= & 1\\ 3x_1+4x_2+x_3= & 7\\ -9x_1-5x_2-2x_3= & 2\end{array}\right.$$

2. Utiliza el método de Gauss para discutir las distintas soluciones de los siguientes sistemas según los distintos valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rr} 2x+6y+az= & 12\\ 3x+(a+5)y+6z= & b-a\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{rl} ax+bz= & 2\\ ax+ay+4z= & 4\\ ax+2z= & b\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+y+z= & 1\\ x+ay+z= & a\\ x+y+az= & a^2\\ (a+1)y+z= & a+1\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{rl} 2x+by= & 1\\ -2x+2y+az= & 1\\ 2x-2y+bz= & a+b-1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x-z= & 2\\ 2x+ay-3z= & 4\\ -x+a^2z= & a-3\\ 3x+ay-4z= & 6\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{rr} (2+a)x+ay+2z= & 2a-2\\ 2x+(2-a)y= & 0\\ (a+1)x+(a+1)z= & a-1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+ay+z= & 0\\ 2x-2y+z= & 0\\ bx+2y-4z= & 0\\ 4x+2b+7z= & 0\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{rl} x+ay+bz= & 1\\ ax+by+z= & b\\ x+aby+z= & a\end{array}\right.$$

3. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & 6 & -5 & 16 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 14 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Calcula, usando el método de Gauss, los valores de a y b que hacen que la siguiente matriz tenga rango 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & b & a \\ a & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Suponer que tras usar el método de Gauss sobre la matriz ampliada de un sistema se obtiene la siguiente matriz escalonada

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & | \, 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | \, 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | \, 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | \, 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la solución del sistema?

6. Si suponemos que los dos sistemas de ecuaciones lineales de m ecuaciones y n incógnitas y coeficientes reales

$$AX = b_1 \quad \text{y} \quad AX = b_2$$

son ambos sistemas compatibles,

   a) ¿el sistema $AX = b_1 + b_2$ es compatible?

   b) Dado un número $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿qué se puede afirmar sobre la compatibilidad del sistema $AX = \alpha\, b_1$?

7. Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices usando el método

de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Calcula la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$, dejando la solución en función de a_1, a_2, a_3 y a_4.

9. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz tal que $A^m = I_n$ para algún $m \in \mathbb{N}$, probar que entonces A es inversible y expresar A^{-1} en términos de A. Da un ejemplo de una matriz 2×2 distinta de la identidad que verifique que $A^2 = I_2$.

10. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz tal que $A^m = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$, probar que entonces A es no puede ser inversible. Da un ejemplo de una matriz 2×2 distinta de la matriz nula, que verifique que $A^2 = 0$.

11. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} x-2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hoja 2: Espacios Vectoriales. Parte I

Combinación lineal. Dependencia lineal.

1. Estudia si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Determina en cada apartado si el vector $\overrightarrow{v}$ está generado por $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, donde

a) $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, b) $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, d) $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, ¿para qué valores de a es $\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 5 \end{bmatrix}$ combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$?

4. Determina en cada apartado para qué valores de h es $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ linealmente independiente

(i) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}$

(ii) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ h \end{bmatrix}$

5. Demostrar que los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son siempre linealmente independientes para cualquier valor de a, b y c.

6. ¿Para qué valores de a y b son linealmente dependientes los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ b \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ a \\ -4 \end{bmatrix}?$$

7. Consideramos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^6$, y cinco vectores $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$, $\overrightarrow{v}_4$, $\overrightarrow{v}_5 \in V$. ¿Pueden ser los cinco vectores linealmente independientes en V? ¿Pueden formar los cinco vectores un sistema generador de V? En caso afirmativo, pon un ejemplo, y, en caso negativo, explica por qué.

8. ¿Existe algún valor del parámetro a para el que el vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \\ a \end{bmatrix}$?

9. Estudiar si siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{P}_3$ son linealmente independientes. En el caso de que sean dependientes, eliminar los necesarios para obtener un subconjunto independiente.

   a) $\{x^3 + x - 1, x^3 - 2, x + 1, x^3 + 2x\}$,
   b) $\{-x^2 + x, x - 3, x^3 + x, x^2 - x + 1\}$,
   c) $\{x^2 + x + 2, -3x^3 + 2x^2 + 1, x^3 + x^2 - 3x + 2\}$.

10. Estudiar para que valores de a y b la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Probar usando la definición que los vectores $\vec{v}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ son linealmente independientes.

12. Sabiendo que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes, utiliza la definición para estudiar si los siguientes vectores son linealmente independientes: $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, $\vec{u}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$, y $\vec{u}_4 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$. Si no son linealmente independientes, elimina uno para que sí lo sean.

Hoja 3: Espacios Vectoriales. Parte II

Bases. Coordenadas.

1. Estudia y justifica si los siguientes conjuntos de vectores son bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$\text{a)} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \text{b)} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{c)} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \text{d)} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Estudia y justifica si los siguientes conjuntos de vectores son base del espacio vectorial $\mathbb{P}_3$:

   a) $\{x^3 + x - 1, -x^3 + 2, 3x^3 + x^2 + x - 3, x^3 + 3x^2 + 3x + 1\}$,

   b) $\{x^3 + x^2 + x + 1, 3x^2 + 2x + 1, 6x + 2, 6\}$

   c) $\{x^2 + 4x - 1, 3x^2 + x, 2x + 1\}$

   d) $\{x^3 + 1, x^2 + 1, x + 1, 1\}$

3. Determina todas las bases de $\mathbb{R}^4$ que puedes realizar con los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Prueba que $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ generan los mismos vectores que $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, es decir, $Gen(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}) = Gen(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$.

5. Halla una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los siguientes vectores $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. Discute en función de a cuando el siguiente conjunto es una base del espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Sea V un espacio vectorial con base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$. Estudia y justifica si $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ es base de V donde:

$$\vec{v}_1 = 3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3 - \vec{u}_4, \quad \vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 2\vec{u}_4$$
$$\vec{v}_3 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3, \quad \vec{v}_4 = \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 - 2\vec{u}_4$$

8. Sea V un espacio vectorial con $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base. Dado los vectores

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3, \quad \vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3, \quad \vec{v}_3 = -a\vec{u}_2 + b\vec{u}_3,$$

Estudia la relación que deben cumplir a y b para que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sea también una base de V.

9. Halla las coordenadas de $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en las bases:

a) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,

b) $C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

10. Halla el vector $\vec{u}$ que tenga como coordenadas $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la base B donde:

a) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

b) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

11. Sabiendo que las coordenadas de los vectores de la base canónica en $\mathbb{R}^4$ en la base B son

$$[\overrightarrow{e}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{e}_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{e}_3]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{e}_4]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Halla la base B.

12. Halla una base B tal que las coordenadas de los vectores de la base canónica en $\mathbb{R}^4$ en la base B sean

$$[\overrightarrow{e}_1]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{e}_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{e}_3]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(La solución no es única.)

Hoja 4: Espacios Vectoriales. Parte III

Cambios de bases. Subespacios vectoriales.

1. Se consideran las siguientes bases:

   a) $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$,

   b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$,

   c) $B = \{-x^3 + 4x^2 - x + 5, 2x^3 + x^2 + x + 7, x^3 + 2x^2 + 3x - 2, x^3 + 2\}$ de $\mathbb{P}_3$.

   Halla la matriz de cambio de base $P_{B_c \leftarrow B}$ con B_c las respectivas bases canónicas de cada espacio vectorial.

2. Halla las matrices de cambio de base entre las bases de $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Halla las matrices de cambio de base entre las bases de $M_2(\mathbb{R})$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Sean

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   dos bases de $\mathbb{R}^3$.

   a) Halla las matrices de cambio de base $P_{B_c \leftarrow B}$ y $Q_{B_c \leftarrow C}$,

   b) Halla las matrices de cambio de base de B a C y de C a B, *c*) Compara las matrices del apartado *b)* con las matrices $Q^{-1}P$ y $P^{-1}Q$,

d) Realiza Gauss-Jordan a las matrices $(P \mid Q)$ y $(Q \mid P)$. Justifica los resultados.

5. Sabiendo que la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a B es $P_{B\leftarrow B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halla la base B.

6. Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ con ecuaciones cartesianas:

$$E_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +3z & & = 0 \\ & 2y & +z & -2t & = 0 \end{array} \right. , \quad E_2 : \left\{ \begin{array}{cccc} y & -z & +t & = 0 \end{array} \right.$$

$$E_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} x & +y & = 0 \\ x & -y & = 0 \end{array} \right. , \quad E_4 : \left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & -y & & -t & = 0 \\ 2x & +y & +z & +t & = 0 \\ & & z & -t & = 0 \end{array} \right.$$

a) Determina las dimensiones de cada subespacio,

b) Halla una base de cada subespacio,

c) Halla una base, si es posible, de $E_1 \cap E_2$, $E_2 \cap E_4$ y $E_2 + E_3$ y $E_2 + E_4$,

d) Halla un subespacio complementario de cada subespacio.

7. Se considera el subespacio vectorial E de $\mathbb{R}^4$ con bases

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) Comprueba que efectivamente son bases del mismo subespacio,

b) Halla las coordenadas de $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ en B y C.

c) Halla la matriz de cambio de base de B a C. Utiliza la matriz para comprobar el apartado anterior.

8. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{P}_3$:

$$E = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p(x) = p(-x)\},$$

$$F = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p'(2) = 0\}.$$

a) Determina la dimensión de cada subespacio y una base.

b) Halla una base de $E \cap F$ y $E + F$.

c) Halla un subespacio complementario para cada subespacio.

9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se consideran los subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$:

$$E = \left\{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid B = A^{-1}BA\right\}$$

$$F = \left\{C \in M_2(\mathbb{R}) \mid C^t = ACA\right\}$$

a) Determina la dimensión de cada subespacio y una base.

b) Halla una base de $E \cap F$ y $E + F$.

c) Halla un subespacio complementario para cada subespacio.

10. Halla una base del subespacio E de $\mathbb{R}^4$ con ecuación cartesiana

$$x' - 2z' + 3t' = 0$$

respecto a la base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

11. Halla una base B de $M_2(\mathbb{R})$ tal que las ecuaciones cartesianas del subespacio E con ecuaciones cartesianas

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a & -2b & +c & = & 0 \\ & b & -c & = & 0 \end{array} \right.$$

sea

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a' & +b' & & & = & 0 \\ & & c' & +d' & = & 0 \end{array} \right. .$$

12. Sea E un subespacio de $\mathbb{R}^4$ con base

$$B_E = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Considera el subespacio F de $\mathbb{R}^4$ con ecuaciones cartesianas, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$,

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & -2y & +z & & = 0 \\ & y & -z & +t & = 0 \end{array} \right. .$$

a) Justifica que F es un subespacio vectorial de E,

b) Halla la ecuación cartesiana de F respecto B_E.

Hoja 5: Transformaciones Lineales. Parte I

Definición. Matriz asociada a una transformación.

1. Comprueba si las siguientes transformaciones son lineales:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ x \end{bmatrix}$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x+y+1 \end{bmatrix}$.

   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+y \\ x-7y \end{bmatrix}$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

   a)
   $$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   b)
   $$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   c)
   $$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Halla, si es posible, $T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Justifica razonadamente cuando no sea posible.

3. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que:

$$T\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\quad,\quad T\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad,\quad T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

Halla $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

4. Sea $T:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{P}_3$ una transformación lineal tal que:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix}=ax^3-bx^2+(a+b)x,\quad T\begin{pmatrix}c&c\\d&-d\end{pmatrix}=(c+d)x^3+dx^2-cx+(c-d)$$

Halla $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

5. Sea $T:V\to V$ una transformación lineal y $B=\{\overrightarrow{b}_1,\overrightarrow{b}_2,\overrightarrow{b}_3\}$ base de V tal que:

$$T(\overrightarrow{b}_1)=\overrightarrow{b}_1-2\overrightarrow{b}_2,\quad T(\overrightarrow{b}_2)=\overrightarrow{b}_3-3\overrightarrow{b}_2,\quad T(\overrightarrow{b}_3)=\overrightarrow{b}_1+\overrightarrow{b}_2-\overrightarrow{b}_3$$

Halla $[T(\overrightarrow{u})]_B$ para cualquier $\overrightarrow{u}\in V$ tal que $[\vec{u}]_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}_B$.

6. Halla la matriz $M(T)_{B_c\leftarrow B_c}$ de las siguientes transformaciones lineales en sus respectivas bases canónincas:

   a) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida como $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y-z\\4x+2y\\x-y-3z\end{bmatrix}$,

   b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida como $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y-z\\x-y-3z\end{bmatrix}$,

   c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida como $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y\\0\\x-4y\end{bmatrix}$,

   d) $T:\mathbb{P}_3\to\mathbb{R}^3$ definida como $T(ax^3+bx^2+cx+d)=\begin{bmatrix}a+b-c+d\\a-d\\2b+3d\end{bmatrix}$.

7. Halla $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ sabiendo que $M(T)_{B_c \leftarrow B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Sea $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal definida como

$$T(p(x)) = 2p'(x+1) - p'(x-1) + p(1)x^2.$$

Halla $M(T)_{B_c \leftarrow B_c}$.

9. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Halla $M(T)_{B_c \leftarrow B}$ donde $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$,

b) Halla $M(T)_{C \leftarrow B}$ donde $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,

c) Halla $M(T)_{B_c \leftarrow B_c}$.

d) Halla P y Q tales que $PM(T)_{C \leftarrow B}Q = M(T)_{B_c \leftarrow B_c}$.

10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y sea $B = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3\}$. Determina $T(\overrightarrow{b}_1),\ T(\overrightarrow{b}_2),\ T(\overrightarrow{b}_3)$ para que se verifique que

$$M(T)_{B \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

11. Sean V y V' dos espacios vectoriales con bases respectivas $B = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3, \overrightarrow{b}_4\}$ y $C = \{\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \overrightarrow{c}_3\}$. Sea $T : V \to V'$ la transformación lineal que cumple

$$T(\overrightarrow{b}_1) = 2\overrightarrow{c}_1 + \overrightarrow{c}_2 - \overrightarrow{c}_3, \qquad T(\overrightarrow{b}_2) = \overrightarrow{c}_1 - \overrightarrow{c}_2 - 2\overrightarrow{c}_3,$$
$$T(\overrightarrow{b}_3) = 2\overrightarrow{c}_1 - 2\overrightarrow{c}_2 + 4\overrightarrow{c}_3, \qquad T(\overrightarrow{b}_4) = \overrightarrow{c}_1 - \overrightarrow{c}_3.$$

Comprueba que los vectores $C' = \{T(\overrightarrow{b}_1), T(\overrightarrow{b}_2), T(\overrightarrow{b}_3)\}$ son también una base de W.

a) Halla $M(T)_{C\leftarrow B}$,

b) Halla $M(T)_{C'\leftarrow B}$,

c) Halla la matriz de cambio de base $P_{C\leftarrow C'}$

d) ¿Qué relación cumplen entre sí las tres matrices de los apartados anteriores?

12. Sea $T : V \to V'$ una transformación lineal con matrices asociadas:

$$M(T)_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(T)_{C'\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Halla la matriz de cambio de base de C a C'.

Hoja 6: Transformaciones Lineales. Parte II

Subespacios Ker e Im. Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

1. Hallar una base del núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + z + 2t \\ 0 \\ 2x - y - t \end{bmatrix}$

   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(T)_{B_c \leftarrow B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   c) $T : \mathbb{P}_3 \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(1) & p''(1) \end{pmatrix}$

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(T)_{C \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donde

   $$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Estudia para que valores de $a \in \mathbb{R}$ es biyectiva la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida como $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y - z \\ 2ax - y - t \\ 2x - y - at \\ y + 2z + at \end{bmatrix}$.

3. Halla la matriz asociada de $T : V \to V$ respecto de la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ sabiendo que

   $$\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in \ker T, \quad T(\vec{b}_3 + \vec{b}_4) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2, \quad T(\vec{b}_3 - \vec{b}_4) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2.$$

4. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal con matriz asociada en las bases canñicas $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Halla una base del núcleo e imagen de T.

   b) Considera la matriz $\left(\frac{A}{I_4}\right)$ y realiza Gauss por columnas obteniendo una matriz equivalente por columnas, que llamaremos $\left(\begin{array}{c|c} Im & 0 \\ \hline 0 & K \end{array}\right)$. (Si encuentras dificultades en realizarlo por columnas, puedes considerar la traspuesta y trabajar por filas, es decir, hacer Gauss a la matriz: $(A^t|I_4)$).

   c) Comprueba que las columnas de la matriz Im generan el subespacio imagen de T y las columnas de la matriz K general el subespacio núcleo de T.

   d) Justificar por qué este "método/atajo" funciona.

5. Se considera la transformación $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3$ definida como

$$T\begin{pmatrix} a-b+d & b+c \\ a+c-d & a+b+d \end{pmatrix} = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

   a) Halla $M(T)_{B_c \leftarrow B_c}$ donde B_c son las respectivas bases canónicas.

   b) Halla una base del núcleo e imagen de T y comprueba que T es biyectiva.

   c) Halla la expresión de $T^{-1}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ y $M(T^{-1})_{B_c \leftarrow B_c}$.

6. Sea E el subespacio de $\mathbb{R}^3$ con ecuación cartesiana $\{x - y + 2z = 0$. Se define la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to E$ tal que

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Comprueba que T es biyectiva,

   b) Halla T^{-1}.

7. ¿Se puede definir una transformación lineal inyectiva $T : \mathbb{R}^3 \to E$ donde E es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ con ecuación cartesiana $\{x + y + z = 0$? Justifica la respuesta, y en caso afirmativo, define dicha transformación lineal.

8. Define una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que la dimensión del núcleo de T sea 1 y su imagen coincida con el subespacio E con ecuación cartesiana $\{y - z = 0$.

9. Se consideran los subespacios E y F de $\mathbb{R}^4$ con ecuaciones cartesianas $\{x + y - t = 0$ y $\{y - 2z + t = 0$, respectivamente.

   a) Halla B_E y B_F bases de E y F, respectivamente.

   b) Construye una transformación lineal biyectiva $T : E \to F$. Halla $M(T)_{B_F \leftarrow B_E}$.

   c) Amplia las bases B_E y B_F a una base de $\mathbb{R}^4$ y denota las nuevas bases $\overline{B_E}$ y $\overline{B_F}$.

   d) Construye una transformación lineal biyectiva $\overline{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\overline{T}(E) = T(E)$. Halla $M(\overline{T})_{\overline{B_F} \leftarrow \overline{B_E}}$.

   e) Halla $M(\overline{T})_{B_c \leftarrow B_c}$.

   f) Utilizando el argumento anterior, halla P tal que $PA = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Se define el conjunto de endomorfismos de un espacio vectorial V como el conjunto de todas sus transformaciones lineales:

$$\mathrm{End}(V) = \{T : V \to V \mid T \text{ es lineal}\}$$

Resulta que este conjunto posee estructura de espacio vectorial con la suma $(T + S)(\overrightarrow{u}) = T(\overrightarrow{u}) + S(\overrightarrow{u})$ y producto por escalar $(\lambda T)(\overrightarrow{u}) = \lambda T(\overrightarrow{u})$.

   a) Comprueba que

$$B_c = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

   tales que

$$E_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, E_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, E_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

   es una base de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$.

b) Halla las coordenadas en B_c de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 4x + y \end{bmatrix}$.

c) Comprueba si $H : \text{End}(\mathbb{R}^2) \to \text{End}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$H\left(T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

es inyectiva y/o sobreyectiva.

Hoja 7: Diagonalización

1. Diagonaliza, si es posible, las siguientes matrices, es decir, hallar P inversible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$:

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$,

   g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   h) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   i) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   j) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   k) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   l) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $B = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\}$ una base de V. Se sabe que $\overrightarrow{b}_1 - 2\overrightarrow{b}_2$ es un autovector asociado al autovalor -1 y $T(\overrightarrow{b}_1 + \overrightarrow{b}_2) = \overrightarrow{0}$. Determina si T es diagonalizable y, en caso afirmativo, halla una base C de autovectores y $M(T)_{C \leftarrow C}$.

3. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ es A diagonalizable? En los casos en los que A sea diagonalizable calcular P y D.

4. Sea $B = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3\}$ una base de V y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que:

   - $T(\overrightarrow{b}_1) = 2\overrightarrow{b}_1 + \overrightarrow{b}_2 + \overrightarrow{b}_3$,
   - $\overrightarrow{b}_2 \in \text{Ker } T$,
   - $T(\overrightarrow{b}_3) = a(\overrightarrow{b}_1 + \overrightarrow{b}_2) + 2\overrightarrow{b}_3$.

   Estudia para que valores de $a \in \mathbb{R}$ existe una base de autovectores de T.

5. Sea $\mu \in \mathbb{R}$ y $T_\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $T_\mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $T_\mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}$.

   a) Estudia para qué valores de μ la transformación T_μ es diagonalizable.

   b) Demuestra que $T_\mu \circ T_\mu = T_\mu$. Esto se puede interpretar como que T_μ es una proyección sobre un subespacio. Halla el subespacio de proyección.

6. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

   a) Halla los autovalores de la matriz $A^{1035784} - 4A^6 + 2A^3 - I$.

   b) Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n$. Halla los autovalores de la matriz $p(A)$.

7. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Halla $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tal que $A^5 = aA^4 + bA^3 + cA^2 + dA + eI$, con $a, e \neq 0$. (Pista: Usar el teorema de Cayley-Hamilton)

8. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & 5 \\ -5 & 4 & -5 & 5 \\ -5 & -5 & 4 & 5 \\ -15 & -5 & -10 & 19 \end{pmatrix}$.

a) Halla una matriz B tal que $B^2 = A$. Se podría decir que $\sqrt{A} = B$.

b) Halla una matriz $C \neq B$ tal que $C^2 = A$. Se podría decir que $\sqrt{A} = C$.

Entonces, ¿$\sqrt{A} = B$ o $\sqrt{A} = C$? Concluimos que la raíz cuadrada de una matriz no es una operación bien definida.

9. **[Forma canónica de Jordan]** Se ha estudiado que para una transformación lineal puede no existir una base de autovectores, por lo que la transformación no admite una matriz asociada con forma diagonal. Sin embargo, siempre podremos encontrar una base donde la matriz tenga una expresión diagonal por bloques. Estos bloques se son submatrices llamadas *bloques de Jordan* y son de la forma, para λ un autovalor de T:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Para toda transformación $T : V \to V$ existe una base B tal que

$$M(T)_{B\leftarrow B} = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{\lambda_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_{\lambda_r}} \end{pmatrix} \quad \text{(Forma canónica de Jordan de T).}$$

Estos bloques de Jordan cobrarán interés para aquellos autovalores λ tal que su multiplicidad geométrica y algebraica no coincidan.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y + z \\ -y \\ -x + y + 3z \end{bmatrix}$.

a) Comprueba que -1 y 2 son autovalores de T y que T no es diagonalizable. Sea $\overrightarrow{u}$ un autovector asociado a -1 y $\overrightarrow{v}$ un autovector asociado a 2.

b) Halla un vector $\overrightarrow{w}$ tal que $T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$.

c) Considera la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Comprueba que

$$M(T)_{B\leftarrow B} = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} J_{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & J_2 \end{array}\right)$$

10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida como

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + z \\ x + y \\ -x + y + 3z \end{bmatrix}.$$

Halla una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(T)_{B\leftarrow B}$ sea la forma canónica de Jordan de T.

Hoja 8: Espacio vectorial euclídeo. Parte I

Matriz de Gram. Ángulos y norma. Bases ortogonales y Método de Gram-Schmidt.

1. Halla la matriz de Gram respecto de la base canónica de los siguientes productos escalares:

   a) $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$

   b) $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right\rangle = 3x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_3$

   c) $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right\rangle = 5x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 6x_3y_3$

   d) En $\mathbb{P}_2$, $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$

   e) En $\mathbb{P}_2$, $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)dx$

2. Halla la matriz de Gram respecto de la base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

   de $\mathbb{R}^3$ de los siguientes productos escalares:

   a) $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$

   b) $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right\rangle = 3x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_3$

   c) $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right\rangle = 5x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 6x_3y_3$

3. Halla la norma de los siguientes vectores $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y el ángulo que forman respecto:

   a) $G_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde B_c es la base canónica,

   b) $G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ donde $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,

   c) $G_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donde B_c es la base canónica,

   d) $G_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donde $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Halla todos los subespacios de dimensión 1 de $\mathbb{R}^3$ que formen un ángulo $\frac{\pi}{3}$ respecto al subespacio

$$E : \begin{cases} -x + y + z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= 0 \end{cases}$$

5. Aplica el método de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

   para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

6. Aplica el método de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^4$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar estándar de $\mathbb{R}^4$.

7. Halla una base ortogonal, respecto al producto escalar usual, del subespacio E de $\mathbb{R}^3$ con ecuación cartesiana $\{x + 2y - z = 0$.

8. Halla una base B del espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ tal que

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ donde } G_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. En $\mathbb{R}^3$, halla la matriz de Gram en las bases canónicas de un producto escalar tal que la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ sea ortonormal.

10. **[Teorema de Pitágoras]** Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Demuestra que si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ son ortogonales entonces

$$||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2$$

11. En $\mathbb{R}^2$, considera las bases $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $C = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$ y el producto escalar con matriz de Gram en la base canónica $G_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

   a) Comprueba que B y C son dos bases ortonormales respecto de G_{B_c}.

   b) Halla la matriz de cambio de base $P_{C \leftarrow B}$ y su inversa.

Hoja 9: Espacio vectorial euclídeo. Parte II

Complemento ortogonal. Proyección ortogonal. Mínimos cuadrados.

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio $E : x + y + z = 0$ con ecuación en base canónica. Halla el subespacio ortogonal $E^\perp$ con respecto a:

   a) el producto escalar usual,

   b) el producto escalar con matriz de Gram $G_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

   c) el producto escalar con matriz de Gram $G_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   donde $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

2. En $\mathbb{P}_3$ y el subespacio $E : \left\{ \begin{array}{rcl} a - b + d & = & 0 \\ a + 2b - d & = & 0 \end{array} \right.$ con ecuaciones en base canónica. Halla el subespacio ortogonal $E^\perp$ respecto al producto escalar
$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

3. En $\mathbb{R}^n$, halla el complemento ortogonal respecto al producto escalar usual del subespacio $E : a_n x_n + a_{n-1}x_{n-1} + ... + a_1 x_1 = 0$ con ecuación cartesiana respecto a la base canónica.

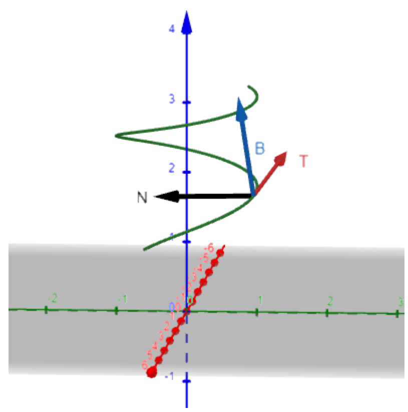
4. [**Producto vectorial en** $\mathbb{R}^3$] En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, el producto vectorial se puede definir como el vector ortogonal a dos vectores iniciales $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y se suele denotar por $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Es decir, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es un nuevo vector de $\mathbb{R}^3$ que verifica que
$$\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$$

La manera habitual de calcularlo es resolviendo el determinante formal:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$$

donde $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ son los vectores de la base canónica.

a) En función de $s \in \mathbb{R}$ se considera base $B_s = \left\{ T(s) = \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \\ \frac{1}{2\sqrt{s}} \end{bmatrix}, N(s) = \begin{bmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ -\frac{1}{4\sqrt{s^3}} \end{bmatrix} \right\}$, donde a $T(s)$ se le llama vector tangente en el punto s y a $N(s)$ el vector normal en s. Halla $B(s) = T(s) \times N(s)$ al que se denomina vector binormal en s. La base $\{T(s), N(s), B(s)\}$ es una base ortogonal y se le denomina Triedro de Frenet de la curva en el punto s.



Link de la animación:
`https://www.geogebra.org/3d/dsd77fua`.

5. Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y sea $E = \text{Gen}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}\right)$.

Halla la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sobre E.

6. En $\mathbb{R}^4$, halla la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ sobre el subespacio E con base $B_E = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, respecto:

   a) el producto escalar usual,

   b) el producto escalar con matriz de Gram $G_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

   c) el producto escalar con matriz de Gram $G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   donde

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

7. En $\mathbb{R}^3$, halla la matriz asociada respecto la base canónica de la transformación proyección ortogonal sobre el subespacio E con base $B_E = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, respecto:

   a) el producto escalar usual,

   b) el producto escalar con matriz de Gram $G_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8. En $\mathbb{R}^3$, halla el ángulo entre la recta r con vector director $\overrightarrow{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y el plano π con base $B_\pi = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, respecto:

a) el producto escalar usual,

b) el producto escalar con matriz de Gram $G_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

9. Calcula soluciones aproximadas por mínimos cuadrados de los siguientes sistemas lineales $AX = B$ y halla el error cometido al tomar la solución aproximada.

   a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

10. Un cierto experimento produce los datos empíricos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ siguientes: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2{,}7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3{,}4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4{,}38 \end{bmatrix}$. Si los resultados deben corresponder a una función de la forma $y = ax^2 + bx$, calcular por mínimos cuadrados la función de esa familia que mejor ajusta a los datos empíricos. Calcula el error que se comente al tomar esa solución aproximada.

11. Repite el ejercicio anterior ajustando los datos mediante una recta de la forma $y = mx + n$. Calcula el error y decide si es mejor usar una parábola como la del ejercicio anterior o una recta como en éste.

12. Respecto al producto escalar usual, el problema de hallar la solución de mínimos cuadrados de un sistema de ecuaciones $AX = B$ es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones $A^tAX = A^tB$. Ahora, en lugar del producto escalar usual, utilizamos un producto escalar con matriz de Gram G respecto a una base conveniente. Halla una forma equivalente a resolver el problema de mínimos cuadrados de un sistema de ecuaciones $AX = B$ mediante la resolución de otro sistema de ecuaciones. (Pista: Los vectores $B - P_{\mathrm{Col}(A)}(B)$ y $P_{\mathrm{Col}(A)}(B)$ siempre son ortogonales).