Universidad Rey Juan Carlos

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Asignatura: Optimización II
Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos

Ejercicios de la asignatura

(Fecha del material: Enero 2025)

Curso académico 2024-2025

Material docente en abierto de la Universidad Rey Juan Carlos

Autores: Antonio Alonso Ayuso, Carmen Lancho Martín

Copyright (c) 2025 Antonio Alonso Ayuso, Carmen Lancho Martín.
Esta obra está bajo la licencia CC BY-SA 4.0, Creative Commons Atribución-Compartir Igual 4.0 Internacional.

Índice de los ejercicios

1. **Ejercicios de optimización lineal continua**
    - Diversos ejercicios referentes a los temas 2 y 3 del temario.
2. **Ejercicios de optimización lineal discreta**
    - Múltiples ejercicios de los temas 4 y 5 del temario.

Además del presente documento, se ponen a disposición del lector distintos códigos de Python con ejercicios de la asignatura. Dichos códigos se encuentran en el siguiente repositorio:

https://github.com/URJCDSLab/OptimizacionII_GCID

EJERCICIOS DE OPTIMIZACIÓN LINEAL CONTINUA

EJERCICIO 1

Resolver gráficamente el siguiente problema de optimización lineal continua:

$Max z = 3x1 + 11x2$
s.a.: $-8x1 + 3x2 \leq 21$
$12x1 + 5x2 \leq 111$
$3x1 - 4x2 \leq 12$
$x1, x2 \geq 0$

1. El tipo de solución del problema es:

    - Solución óptima única
    - Problema infactible
    - Múltiples soluciones óptimas en región acotada
    - Múltiples soluciones óptimas en región no acotada
    - Solución óptima no acotada

2. En caso de que el problema tenga solución óptima finita, indicar el valor de la función objetivo y el valor de las variables
3. En caso de que el problema tenga múltiples soluciones óptimas acotadas entre puntos extremos, indicar las coordenadas de los puntos extremos, indicando en primer lugar el punto con menor valor en la abscisa
4. En caso de obtener múltiples soluciones óptimas en un rayo de soluciones óptimas, indicar el punto extremo que define el origen del rayo.

EJERCICIO 2

Resolver gráficamente el siguiente problema de optimización lineal continua:

$Min z = 45x1 - 9x2$
s.a.: $-15x1 + 3x2 \leq 12$
$13x1 + 7x2 \leq 172$
$6x1 - 4x2 \leq 36$
$x1, x2 \geq 0$

1. El tipo de solución del problema es:

    - Solución óptima única
    - Problema infactible
    - Múltiples soluciones óptimas en región acotada
    - Múltiples soluciones óptimas en región no acotada
    - Solución óptima no acotada

2. En caso de que el problema tenga solución óptima finita, indicar el valor de la función objetivo y el valor de las variables
3. En caso de que el problema tenga múltiples soluciones óptimas acotadas entre puntos extremos, indicar las coordenadas de los puntos extremos, indicando en primer lugar el punto con menor valor en la abscisa
4. En caso de obtener múltiples soluciones óptimas en un rayo de soluciones óptimas, indicar el punto extremo que define el origen del rayo.

EJERCICIO 3

Resolver gráficamente el siguiente problema de optimización lineal continua:

$Maxz=2x1-4x2$
s.a.: $-2x1+x2\leq 6$
$x1-2x2\leq 3$
$x1,x2\geq 0$

1. El tipo de solución del problema es:

    - Solución óptima única
    - Problema infactible
    - Múltiples soluciones óptimas en región acotada
    - Múltiples soluciones óptimas en región no acotada
    - Solución óptima no acotada

2. En caso de que el problema tenga solución óptima finita, indicar el valor de la función objetivo y el valor de las variables
3. En caso de que el problema tenga múltiples soluciones óptimas acotadas entre puntos extremos, indicar las coordenadas de los puntos extremos, indicando en primer lugar el punto con menor valor en la abscisa
4. En caso de obtener múltiples soluciones óptimas en un rayo de soluciones óptimas, indicar el punto extremo que define el origen del rayo.

EJERCICIO 4

Una refinería produce tres tipos de gasolina, que denominamos $G1$, $G2$ y $G3$, y las vende al mercado con un beneficio unitarios de 7, 5 y 9 €, respectivamente. Estas gasolinas se obtienen mezclando cuatro productos obtenidos en la refinería, que denominamos $P1$, $P2$, $P3$ y $P4$. La disponibilidad y el coste de producción de los productos $P1$, $P2$, $P3$ y $P4$ son:

- Disponibilidad: 5000, 6000, 3000 y 4000 respectivamente.
- Coste unitario: 10, 5, 2 y 7 respectivamente.

Cada una de las gasolinas debe mantener una proporción determinada de estos productos. A continuación se indica cuál es el porcentaje mínimo y/o máximo que cada tipo de gasolina puede tener de cada uno de los cuatro productos (si no se indica nada, no hay límite):

- Gasolina $G1$: de $P1$ menos del 30%, de $P2$ más del 10% y de $P3$ menos del 20%.
- Gasolina $G2$: de $P2$ menos del 10% y de $P3$ más del 20%.
- Gasolina $G3$: de $P1$ más del 20%.

Además, en el proceso de mezclado se produce una merma del 2% (es decir, por cada unidad de producto introducido en la mezcla se obtiene 0.98 unidades de gasolina).

La producción mínima de cada tipo de gasolina es de 2200, 2200 y 2200, para las gasolinas $G1$, $G2$ y $G3$, respectivamente.
Plantear un modelo de Optimización Matemática Lineal para determinar qué cantidad debe producir de cada tipo de gasolina para maximizar el beneficio neto obtenido.

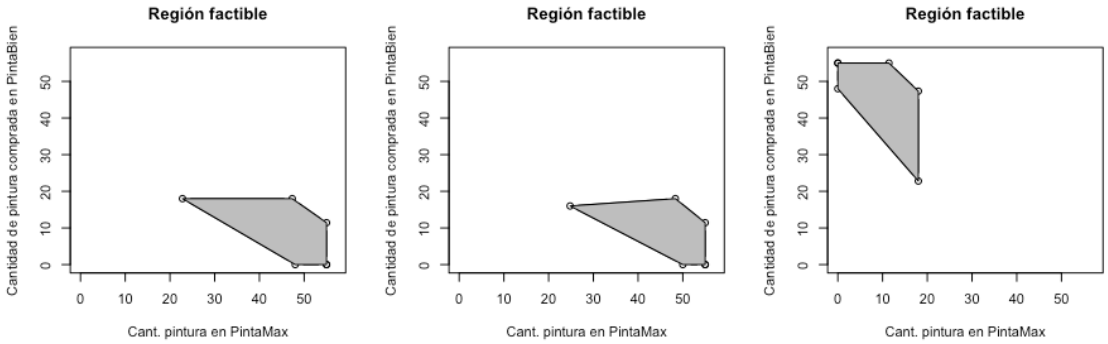
EJERCICIO 5

El profesor de matemáticas tiene que pintar su casa. Ha calculado que en total, la superficie a pintar es de al menos 480 metros cuadrados y tiene un presupuesto de 82 euros. Ha consultado en dos tiendas, PintaMax y PintaBien. La primera, PintaMax, le ofrece pintura

con un rendimiento de 10 m2 por kg y un precio de 1.2 euros por kg. La pintura de PintaBien tiene un precio de 1.4 euros por kg y un rendimiento de 14 m2 por kg. PintaMax tiene 55 kg de pintura en stock y PintaBien tiene 18 kg. Calcúlese la cantidad de pintura que el profesor tiene que comprar en cada tienda para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

Nota: las respuestas numéricas deben proporcionarse con al menos dos cifras decimales.

- ¿Qué gráfico corresponde a la región factible de este problema?



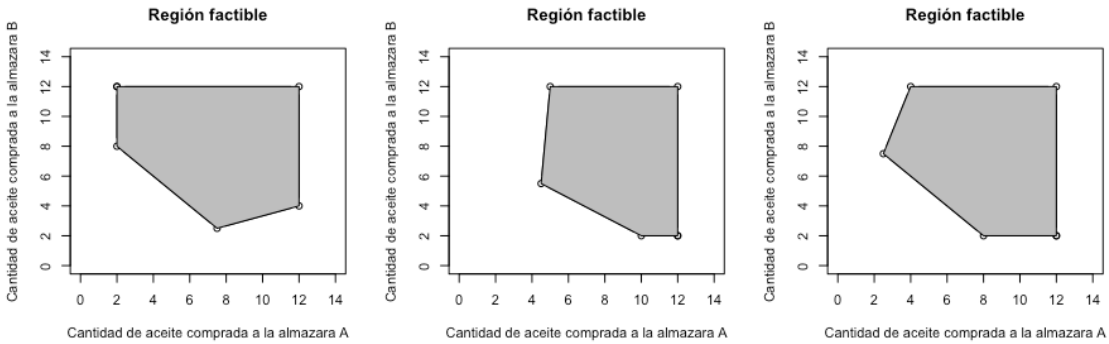
- El sentido de la función objetivo del problema es de maximizar o de minimizar?
- Cuál es la solución óptima y el valor de la función objetivo para esa solución

EJERCICIO 6

Un supermercado tiene a la venta dos tipos de aceite, cada una de los cuales se compra a una almazara diferente, A y B. El pedido que hace a cada almazara debe ser de al menos 2 toneladas de aceite, con un máximo de 12. La directora de ventas del supermercado ha calculado que necesita comprar un mínimo de 10 toneladas de aceite. Pero para garantizarse suficiente diversidad, a la almazara B no le puede comprar más del triple de aceite que a la almazara A. El aceite tiene un precios de 3000 y 4000 euros por tonelada en la almazara A y B, respectivamente. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el supermercado a cada una de las almazaras para comprar con el mínimo coste? Obtener dicho gasto mínimo.

Nota: las respuestas numéricas deben proporcionarse con al menos dos cifras decimales.

- ¿Qué gráfico corresponde a la región factible de este problema?

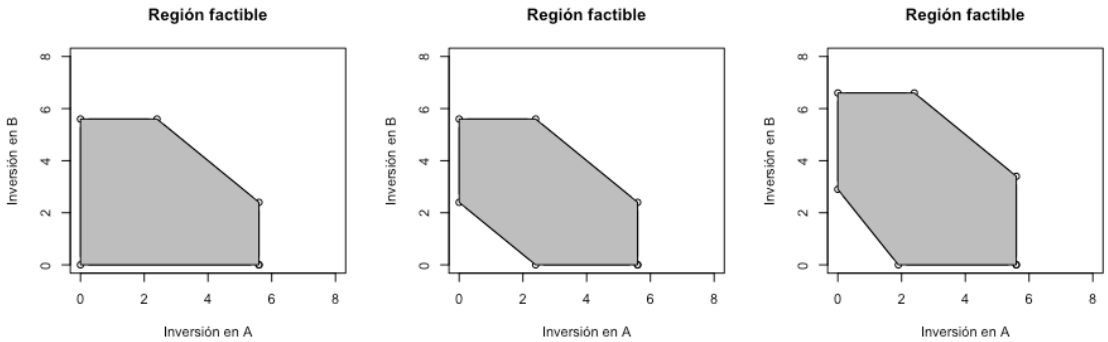


- El sentido de la función objetivo del problema es de maximizar o de minimizar?
- Cuál es la solución óptima y el valor de la función objetivo para esa solución

EJERCICIO 7

Una reconocida inversora tiene 8 millones de euros para invertir. Puede invertir en dos productos financieros distintos, A y B. El producto A le garantiza una rentabilidad del 13% y el activo B del 15%. Por cuestiones de diversificación de la inversión, no puede invertir más de 5.6 millones de euros en cada uno de los activos. La inversión total mínima es de 2.4 millones de euros. Calcúlese la cantidad que debe invertir en cada uno de los dos productos financieros para obtener un beneficio máximo. Calcúlese dicho beneficio.
Nota: las respuestas numéricas deben proporcionarse con al menos dos cifras decimales.

- ¿Qué gráfico corresponde a la región factible de este problema?



- El sentido de la función objetivo del problema es de maximizar o de minimizar?
- Cuál es la solución óptima y el valor de la función objetivo para esa solución

EJERCICIO 8

Una empresa tiene tres fábricas, F1, F2 y F3, cuyos residuos emiten dos tipos de contaminantes, C1 y C2, que deben ser controlados. Para reducir la emisión de contaminantes, es posible aplicar un proceso a los residuos generados en cada una de las tres fábricas. La siguiente table muestra los costes de procesar una tonelada de residuos y la reducción de emisión de contaminantes obtenida para cada una de las tres fábricas:

Planta	Coste	Reducción (ton)	
	(euros)	C1	C2
F1	17	0.19	0.24
F2	14	0.23	0.57
F3	12	0.59	0.23

Por ejemplo, procesar una tonelada de residuos en la fábrica F1 cuesta 17 euros, pero reduce en 0.19 y 0.24 toneladas la emisión de los contaminantes C1 y C2, respectivamente. La Unión Europea impone una reducción de al menos 35 y 56 toneladas de las emisiones de C1 y de C2, respectivamente.

Nota: la tolerancia admitida en las respuestas es 2.

- Formular y resolver un modelo que ayude a determinar la política de procesamiento de menor coste, indicando la cantidas procesada en cada fábrica y el coste anual en la solución óptima
- Las autoridades están estudiando la posibilidad de variar la cantidad mínima de emisiones de C1 y C2 que hay que reducir.
    - ¿Qué coste tendría para la empresa incrementar la cantidad mínima de emisiones de C1 en una unidad?

- ¿Qué coste tendría para la empresa reducir la cantidad mínima de emisiones de C2 en una unidad?

Ángela dispone de un cierto capital para invertir en el mercado de la mejor manera posible. Está interesado en invertir en CaixaBank, Mahou, Nvidia, Uber y Oracle. Para decidir su inversión sólo dispone de la información de la rentabilidad esperada y el riesgo (fluctuación o varianza de la cotización en el último año) recogidos en la siguiente tabla:

	Rentabilidad	Riesgo
CaixaBank	0.05	0.02
Mahou	0.23	0.07
Nvidia	0.23	0.08
Uber	0.23	0.05
Oracle	0.13	0.05

Determinar qué proporción debe invertir en cada uno de los activos de manera que se minimize el riesgo y sabiendo que desea una rentabilidad media mínima de 0.08. Indicar también el riesgo medio de su inversión y rentabilidad media que obtendría. Indicar el resgo medio y la rentabilidad media de la inversión.

NOTA: Calcular el riesgo medio de una inversión como la suma de los riesgos de los activos multiplicado por la proporción invertida en cada activo.
NOTA: Calcular la rentabilidad de una inversión como la suma de las rentabilidades de los activos multiplicado por la proporción invertida en cada activo.

EJERCICIOS DE OPTIMIZACIÓN LINEAL DISCRETA

EJERCICIO 1

Una compañía de transportes ha recibido el encargo de transportar varias unidades de diferentes objetos, pero no le caben todos en el camión disponible. Por tanto, debe seleccionar qué cantidad (unidades) de cada objeto mete en el camión. Conoce peso y el beneficio que obtiene por transportar cada uno de estos objetos, según se refleja en la siguiente tabla:

Objeto	Beneficio	Peso
O1	205	11
O2	148	7
O3	113	6
O4	242	8
O5	163	4

El camión puede llevar un máximo de 320 kilogramos de peso, no pudiendo, además, portar más de 130, 125 y 100 kilos de los objetos de tipo O1, O2 y O3, respectivamente. Por razones de seguridad, el camión no puede transportar más unidades del tipo O1 que del tipo O5. El camión debe tener un mínimo de 0 unidades entre los objetos de los tipos O1, O3 y O4.

Formular el problema mediante un modelo de optimización matemática lineal con variables enteras con el objetivo de encontrar la cantidad de cada tipo de objeto que debe transportar el camión maximizar el beneficio obtenido.

EJERCICIO 2

El personal de enfermería de un hospital llega cada 4 horas y trabajan en turnos de 8 horas consecutivas. La administración ha decidido establecer 6 cambios de turno al día para minimizar las distracciones y los problemas de comunicación que ocurren en los cambios de turno.

El hospital ha realizado un análisis del trabajo requerido durante cada uno de los seis períodos del día. La siguiente tabla indica el número de enfermeras necesarias en cada jornada y el salario que reciben las enfermeras que entran en ese turno.

Periodo	Intervalo horario	Personal Mínimo	Salario día
P1	2 – 6	40	33
P2	6 – 10	50	34
P3	10 – 14	50	25
P4	14 – 18	40	54
P5	18 – 22	50	50
P6	22 – 2	40	43

¿Cuántas enfermeras deben empezar a trabajar en cada turno para minimizar los costes por salarios?

EJERCICIO 3

Una cadena de alimentación pretende abrir varios supermercados en una gran ciudad. Tras un estudio de locales en los 8 distritos en los que está dividida la ciudad, se considera que son 10 los emplazamientos donde se podrían situar supermercados. La tabla que sigue muestra los distritos que se cubren por cada emplazamiento (un 1 en la fila i y columna j indica que el distrito i está cubierto por el emplazamiento j):

	Plaza 1	**Plaza 2**	**Plaza 3**	**Plaza 4**	**Plaza 5**	**Plaza 6**	**Plaza 7**	**Plaza 8**	**Plaza 9**	**Plaza 10**
Distrito 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Distrito 2	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
Distrito 3	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
Distrito 4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0

	Plaza 1	Plaza 2	Plaza 3	Plaza 4	Plaza 5	Plaza 6	Plaza 7	Plaza 8	Plaza 9	Plaza 10
Distrito 5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
Distrito 6	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
Distrito 7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Distrito 8	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0

La siguiente tabla muestra los beneficios anuales esperados para cada uno de los supermercados según su emplazamiento, siempre y cuando cada distrito se cubra a lo sumo por un único supermercado de la cadena:

	Plaza 1	Plaza 2	Plaza 3	Plaza 4	Plaza 5	Plaza 6	Plaza 7	Plaza 8	Plaza 9	Plaza 10
Beneficio	43	32	46	30	42	37	33	41	50	48

Determinar el plan de emplazamientos **de mayor beneficio**, indicando qué emplazamientos se abren y qué distritos quedan cubiertos.

EJERCICIO 4

Una persona tiene que enviar 8 paquetes diferentes Pi, i=1,⋯,8 y ha contactado con 4 empresas de transporte Tj, j=1,⋯,4. Cada una de estas empresas le ha ofrecido una tarifa para cada paquete y, además, un peso máximo para el conjunto de los paquetes que transporte.
La siguiente tabla muestra la tarifa que aplica cada transportista por llevar cada uno de los paquetes.

	TRASP1	TRASP2	TRASP3	TRASP4
P1	16	27	24	22
P2	18	18	14	17
P3	11	24	28	19
P4	13	13	19	14
P5	29	22	14	26
P6	14	21	29	20
P7	12	14	16	29
P8	16	13	25	19

A continuación se muestra el peso máximo que admite cada uno de los transportistas

	TRASP1	TRASP2	TRASP3	TRASP4
Costes	649	489	475	650

Además, cada transportista exige un tipo de empaquetamiento distinto, por lo que el peso final de cada paquete (incluido el envoltorio) depende del transportista que se le asigne. La siguiente tabla muestra esos pesos:

	TRASP1	TRASP2	TRASP3	TRASP4
P1	190	236	212	175
P2	113	173	177	194
P3	106	167	103	135
P4	106	148	88	61
P5	171	161	187	181
P6	220	234	253	244
P7	274	256	314	220
P8	140	207	215	178

Determinar qué paquete debe llevar cada transportista de forma que el coste total sea el menor posible.

EJERCICIO 5

Una empresa de juguetes está considerando la puesta en marcha de tres nuevos modelos de juguetes (1,2 y 3) para su posible inclusión en la próxima campaña de Navidad. La preparación de las instalaciones para la fabricación de estos modelos costaría 1900€, 3100€y 3200€, respectivamente, y el precio de venta unitario sería de 12€, 27€, 14€, respectivamente. La

empresa dispone de tres plantas de producción para la elaboración de estos modelos, pero para evitar gastos sólo se pueden producir juguetes en una de ellas, debiendo elegir aquella que permita maximizar los beneficios (ingresos por venta menos costes de fabricación). El número de horas que se precisa para producir cada juguete en cada planta es:

	Juguete 1	Juguete 2	Juguete 3
Planta 1	6	7	6
Planta 2	5	2	5
Planta 3	4	5	5

Las plantas disponen al día de 700, 900 y 1500 horas de producción respectivamente. La gerencia ha decidido desarrollar como mínimo dos juguetes, con una producción mínima de 50 de cada uno.

Plantear un modelo de Optimización Matemática Entera Mixta que resuelva el problema de cómo decidir qué tipos de juguetes se van a producir, cuántos juguetes se van a producir y en qué planta de manera que se maximicen los beneficios.

EJERCICIO 6

Una empresa está considerando 5 proyectos. Cada proyecto aprobado será ejectuado sobre un periodo de tres años. Los rendimientos esperados y los gastos totales para cada proyecto, junto con los fondos anuales disponibles en ‘miles de euros se recogen en la siguiente tabla:

	Gastos Año 1	Gastos Año 2	Gastos Año 3	Rendimiento
Proyecto 1	7	12	6	13
Proyecto 2	7	5	2	21
Proyecto 3	5	3	7	14
Proyecto 4	3	6	4	12
Proyecto 5	5	3	13	12
Fondos	10	9	18	

La empresa, teniendo en cuenta su capital disponible, debe elegir los proyectos con el objetivo de maximizar los rendimientos totales. Además, dispone de la siguiente información:

- El proyecto 1 no se hace si se hace el 2.
- Los proyectos 4 y 5 se hacen de forma conjunta solo si no se hacen ni el 2 ni el 3.
- Formula un modelo de optimización lineal con variables enteras que resuelva el problema e indica qué proyectos se llevan a cabo y cuál es el beneficio que sae obtiene
- Modifica el problema del apartado a) para incluir la siguiente restricción: la empresa debe reducir en uno de los tres años en 6000 euros y debe decidir en qué año hacerlo. Indicar cuál es la nueva selección de proyectos que se realizan.