Universidad Rey Juan Carlos

Escuela Técnica Superior
de Ingeniería Informática

Grado en Matemáticas

Curso 2023-2024

Trabajo Fin de Grado

INTEGRALES DE RIEMANN Y LEBESGUE

Autor: Víctor David Sánchez González
Tutor: Alejandro José García del Amo Jiménez

Índice de contenidos

1
Introducción

El objetivo de este trabajo será presentar la teoría de la integral de Lebesgue así como algunos resultados importantes sobre ella, con el fin de solventar las limitaciones y deficiencias que presenta la más conocida y estudiada integral de Riemann.

Para ello, comenzaremos con un capítulo donde revisitaremos la integral de Riemann y exploraremos de forma superficial su teoría y algunos resultados importantes sobre esta. Tras ello, dedicaremos el capítulo 3 a exponer las limitaciones y deficiencias de esta integral. Veremos aquellos problemas que presenta la integral de Riemann o que no consigue resolver y que más tarde provocarían los intentos por desarrollar una nueva teoría de integración.

Estas nuevas teorías de integración quedarían finalmente culminadas gracias a Henri Lebesgue y el desarrollo de su teoría de la medida. Es por ello que dedicaremos el capítulo 4 completo a desarrollar esta teoría, la cual será la base para la construcción de la integral de Lebesgue. En este capítulo también exploraremos el problema de la medida, el cual determina que es imposible desarrollar una medida sobre todos los conjuntos de $\mathbb{R}$ de forma que asocie a cualquier intervalo (a, b) su longitud $b - a$.

Una vez expuesta la teoría de la medida, con sus principales resultados y problemas, nos adentraremos en la construcción de la integral de Lebesgue. Definiremos la integral de Lebesgue para un grupo de funciones que serán las funciones simples, y a partir de ahí generalizaremos la definición a grupos de funciones más extensos fundamentándonos en la aproximación de funciones por sucesiones de funciones simples.

Por último, veremos algunos resultados que derivan del desarrollo de esta teoría de integración, enfocándonos sobre todo en cómo resuelve la integral de Lebesgue los problemas y limitaciones que presentaba la integral de Riemann.

2

Integral de Riemann

2.1. Definiciones previas

Primero desarrollaremos la teoría en la que se basa la integral de Riemann, con algunas de sus propiedades y veremos sus limitaciones. Plantearemos el desarrollo de la integral de Riemann sobre $\mathbb{R}^n$.

Para ello, presentemos unas definiciones previas.

- **Partición de un intervalo:** Sean $a, b \in \mathbb{R} \;/\; a < b$, P es una partición del intervalo $[a, b]$ si :

$$\boxed{P \subset [a, b] \quad a, b \in P \quad \text{y} \quad P \text{ es finito}}$$

- **Rectángulo n-dimensional:** $R \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\boxed{R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]} \quad \text{con } -\infty < a_i < b_i < +\infty, \; \forall i \in \{1, ..., n\}$$

- **Volúmen de un rectángulo:** $\boxed{V(R) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)}$

- **Diámetro de un rectángulo:** $\boxed{d(R) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

- **Partición de un rectángulo:** $\boxed{P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}}$ donde cada P_i es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$.

  Si S es un subrectángulo de R formado a partir de P lo notaremos como $S \in P$.

  Denotaremos como $\mathcal{P}(R)$ al conjunto de todas las posibles particiones del rectángulo R.

- **Partición más fina:** Sean P_1, $P_2 \in \mathcal{P}(R)$. Diremos que P_2 es **más fina** que P_1, $P_1 \prec P_2$, si cada subrectángulo de P_1 se encuentra en P_2.

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo n-dimensional, $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición de R. Para cada subrectángulo $S \in P$ definimos:

$$m_S(f) = \text{ínf}\{f(x) \ / \ x \in S\} \qquad M_S(f) = \sup\{f(x) \ / \ x \in S\}$$

Entonces definimos las siguientes sumas:

- **Suma Inferior** de f respecto a P: $\boxed{L(f, P) := \sum_{S \in P} V(R) \cdot m_S}$

- **Suma Superior** de f respecto a P: $\boxed{U(f, P) := \sum_{S \in P} V(R) \cdot M_S}$

Veamos algunas propiedades que derivan de las definiciones de estas sumas. Sean $R \subset \mathbb{R}$ un rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada, y $P, P', Q \in \mathcal{P}(R)$ particiones de R con $P \prec P'$. Entonces:

i. $\boxed{L(f, P) \leq U(f, P)}$

ii. $\boxed{L(f, P) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, P)}$

iii. $\boxed{L(f, P) \leq U(f, Q)}$

iv. $\boxed{m_R(f) \cdot V(R) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M_R(f) \cdot V(R)}$

2.2. Integrales de Darboux y de Riemann

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo n-dimensional y sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- **Integral Inferior de Darboux**: $\boxed{\underline{\int_R} f(x)\ dx := \sup\{L(f,P)/P \in \mathcal{P}(R)}$

- **Integral Superior de Darboux**: $\boxed{\overline{\int_R} f(x)\ dx := \text{ínf}\{U(f,P)/P \in \mathcal{P}(R)}$

Para cualquier función $f : R \to \mathbb{R}$ se cumple :

$$\boxed{\underline{\int_R} f(x)\ dx \leq \overline{\int_R} f(x)\ dx}$$

- **Función integrable Riemann**: Se dice que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada es integrable Riemann cuando se da la igualdad entre las integrales superior e inferior de Darboux:

$$\boxed{\underline{\int_R} f(x)\ dx = \overline{\int_R} f(x)\ dx}$$

- **Integral Riemann**: En el caso de que una función sea integrable Riemann se define la integral de Riemann de la función $f : R \to \mathbb{R}$ como:

$$\int_R f = \int_R f(x)\ dx = \underline{\int_R} f(x)\ dx = \overline{\int_R} f(x)\ dx$$

- $\mathcal{R}(R) := \{f : R \to \mathbb{R}/$ f función integrable Riemann$\}$

Veamos algunas propiedades de las funciones integrales Riemann:

- **Linealidad respecto al integrando**:

  $f, g \in \mathcal{R}(R)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(R)$ y $\boxed{\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g}$

- **Linealidad respecto al intervalo**: Si $R_1, R_2 \subset \mathbb{R}^n$ son dos rectángulos n-dimensionales disjuntos tales que $R_1 \cup R_2 = R$ es un rectángulo n-dimensional, y $f \in \mathcal{R}(R_1) \cap \mathcal{R}(R_2)$, entonces:

  $f \in \mathcal{R}(R)$ y $\boxed{\int_R f(x)\ dx = \int_{R_1} f(x)\ dx + \int_{R_2} f(x)\ dx}$

- **Monotonía**: Si $f, g \in \mathcal{R}(R)$, y $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in R$, entonces: $\boxed{\int_R f(x)\ dx \leq \int_R g(x)\ dx}$

- $\boxed{m_R(f) \cdot V(R) \leq \int_R f(x)\ dx \leq M_R(f) \cdot V(R)}$

2.3. Condiciones de Integrabilidad Riemann

Veamos ahora algunas condiciones que deben cumplir las funciones para ser integrables Riemann o que cumplen por el hecho de ser integrables Riemann.

- **Condición de Riemann**: Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo n-dimensional y sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es integrable Riemann si y solo si para cualquier número ε mayor que 0 se puede encontrar una partición de R tal que la diferencia entre la suma superior y la suma inferior sea menor que ε:

$$\boxed{f \in \mathcal{R}[a, b] \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathcal{P}(R)\ /\ U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon}$$

- **Condiciones Suficientes**:

  - Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ **monótona** $\Longrightarrow f \in \mathcal{R}(R)$
  - Sea $f : R \to \mathbb{R}$ **continua** $\Longrightarrow f \in \mathcal{R}(I)$

    Es decir: $\boxed{\mathcal{C}(R) \subset \mathcal{R}(R)}$

Por último, vamos a ver una condición necesaria y suficiente que expresó Lebesgue para la integrabilidad RIemann de las funciones acotadas. Para ello, primero veremos algunas definiciones previas y algunos resultados previos que nos ayudarán a demostrar el teorema de Lebesgue.

- **Medida Nula**: Se dice un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene **medida nula** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{R_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ un recubrimiento de A por rectángulos de forma que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(R_n) \leq \varepsilon$$

Este concepto está fuertemente relacionado con la teoría de la medida que desarrollaremos posteriormente en los capítulos de la integral de Lebesgue.

- **Oscilación**: Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y $B \subset A$, se llama **oscilación** de f en B a:

$$\boxed{O(f, B) = M_B(f) - m_B(f)}$$

siendo $M_B(f) = \sup\{f(x)\ /\ x \in B\}$ y $m_B(f) = \inf\{f(x)\ /\ x \in B\}$.

Y se llama oscilación de f en $x \in A$ a:

$$\boxed{O(f,x) = \inf_{\varepsilon>0} O(f, B(x,\varepsilon)\cap A) = \inf_{\varepsilon>0} O(f,x,\varepsilon)}$$

siendo $B(x,\varepsilon)$ la bola abierta de centro x y radio ε.

El concepto de oscilación nos ayuda a comprender lo "bien" o "mal" que se comporta una función en relación a su continuidad. Es fácil observar que $\forall x \in A$, $O(f,x) \geq 0$, y que f continua en x si y solo si $O(f,x) = 0$.

Por último, veamos un lema que nos ayudará en la demostración del teorema de Lebesgue.

- Lema : Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo n-dimensional y sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si $\exists\, q > 0 \;/\; \forall x \in R,\; O(f,x) < q$, entonces $\exists P \in \mathcal{P}(R)$ partición de R tal que:

$$\boxed{U(f,P) - L(f,P) \leq q \cdot V(R)}$$

$*$ **Demostración**:

Por la hipótesis, tenemos que $\forall x \in R$, $\exists\, \varepsilon > 0 \;/\; O(f,x,\varepsilon) < q$. Sea Q_x un rectángulo abierto tal que $x \in Q_x \subseteq \overline{Q_x} \subseteq B(x,\varepsilon)$. Entonces, es fácil observar que $R \subseteq \bigcup_{x\in R} Q_x$, así que $\{Q_x\}_{x\in R}$ es un recubrimiento por rectángulos abiertos de R, un compacto. Por lo que existe un subrecubrimiento finito $\{Q_{x_1}, ..., Q_{x_k}\} \subseteq \{Q_x\}_{x\in R}$ tal que $R \subseteq \bigcup_{i=1}^k Q_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{Q_{x_i}}$.

Si tomamos $P \in \mathcal{P}(R)$ la partición de R determinada por los vértices de los rectángulos abiertos Q_{x_i} y sea Q' un rectángulo contenido en $\overline{Q_{x_i}} \cap R$, tenemos:

$$O(f,Q') \leq O(f, \overline{Q_{x_i}} \cap R) \leq O(f, B(x_i,\varepsilon)\cap R) = O(f,x_i,\varepsilon) \leq q$$

Entonces:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{Q'\in P} (M_{Q'}(f) - m_{Q'}(f))V(Q') =$$

$$= \sum_{Q'\in P} O(f,Q')V(Q') \leq q \sum_{Q'\in P} V(Q') = qV(R)$$

□

Veamos por último el **Teorema de Lebesgue**, el cual será una forma de caracterizar a las funciones acotadas que son integrables Riemann, pues es una condición necesaria y suficiente de integrabilidad Riemann.

- **Teorema de Lebesgue**: Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo n-dimensional y $f : R \to \mathbb{R}$ acotada. Sea $D := \{x \in R \ / \ f \text{ discontinua en } x\}$, entonces:

$$\boxed{D \text{ tiene medida nula} \quad \Longleftrightarrow f \in \mathcal{R}(R)}$$

$*$ **Demostración:**

Supongamos que D tiene medida nula. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, como f es continua en x si y solo si $O(f,x) = 0$, tenemos:

$$D_\varepsilon := \{x \in R \ / \ O(f,x) \geq \varepsilon\} \subset D \quad \text{ y se puede ver que } \quad D = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon \ .$$

Veamos que $\forall \varepsilon > 0$, D_ε es un conjunto compacto. Dado $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon \subset R$, por lo que, obviamente, D_ε es un conjunto acotado. Ahora, $\forall x \notin D_\varepsilon$, tenemos que $O(f,x) < \varepsilon$, de lo que se deduce que $\exists \ \delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \cap R \subset (R \setminus D_\varepsilon) \cap R$. Es decir, D_ε es cerrado. Como D_ε es cerrado y acotado, entonces es compacto.

Por tanto, tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, D_ε es un conjunto compacto de medida nula, así que existe un recubrimiento finito $\{Q_1, ..., Q_{k_\varepsilon}\}$ de rectángulos abiertos tal que:

$$D_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} Q_i \quad \text{ con } \quad R_i = \overline{Q_i} \quad \text{ y } \quad \sum_{i=1}^{k_\varepsilon} V(R_i) < \varepsilon \ .$$

Sea $P \in \mathcal{P}(R)$ la partición de R definida por los vértices de los rectángulos R_i. Entonces, para cualquier subrectángulo $S \in P$ se tiene que o está contenido en algún R_i o es disjunto a los interiores de los R_i con $i \in \{1, ..., k_\varepsilon\}$. Entonces podemos dividir los subrectángulos de P en dos subgrupos:

$$\mathfrak{R}_1 := \{S \in P \ / \ \exists \, i \in \{1, ..., k_\varepsilon\}, S \subset R_i\}$$

$$\mathfrak{R}_2 := \{S \in P \ / \ S \cap Q_i = \emptyset, \ \forall i \in \{1, ..., k_\varepsilon\}\}$$

Si $S_2 \in \mathfrak{R}_2$ tenemos que $S_2 \cap D_\varepsilon = \emptyset$, es decir, $\forall x \in S_2, \ O(f,x) < \varepsilon$. Por el lema anterior, tenemos que existe $P_{S_2} \in \mathcal{P}(S_2)$ una partición de S_2 tal que:

$$U(f, P_{S_2}) - L(f, P_{S_2}) \leq \varepsilon \cdot V(S_2)$$

Sea $P' \in \mathcal{P}(R)$ la partición de R formada por los vértices de todas las particiones P_{S_2} con $S_2 \in \mathfrak{R}_2$ junto con la partición inicial P. Entonces P' es más fina que P y para cada $S_2 \in \mathfrak{R}_2$ define una partición $P'_{S_2} \in \mathcal{P}(S_2)$ más fina que P_{S_2}. Por lo que:

$$\sum_{S' \in S_2} (M_{S'}(f) - m_{S'}(f)) \cdot V(S') = U(f, P_{S'}) - L(f, P_{S'}) \leq$$
$$\leq U(f, P_{S_2}) - L(f, P_{S_2}) \leq \varepsilon \cdot V(S_2)$$

Para los subrectángulos $S_1 \in \mathfrak{R}_1$, y como f es acotada, $\exists M \geq 0 \ / \ |f| \leq M$. Entonces:

$$\sum_{S' \in S_1} (M_{S'}(f) - m_{S'}(f)) \cdot V(S') \leq 2M \sum_{S' \in S_1} V(S') = 2M \cdot V(S_1)$$

Entonces obtenemos:

$$U(f, P') - L(f, P') = \sum_{S_1 \in \mathfrak{R}_1} \sum_{S' \in S_1} (M_{S'}(f) - m_{S'}(f)) V(S') +$$
$$+ \sum_{S_2 \in \mathfrak{R}_2} \sum_{S' \in S_2} (M_{S'}(f) - m_{S'}(f)) V(S') \leq 2M \sum_{S_1 \in \mathfrak{R}_1} V(S_1) + \varepsilon \sum_{S_2 \in \mathfrak{R}_2} V(S_2) \leq$$
$$\leq 2M \sum_{i=1}^{k_\varepsilon} V(R_i) + \varepsilon V(R) \leq 2M\varepsilon + V(R)\varepsilon = (2M + V(R))\varepsilon$$

Por lo que se cumple la condición de Riemann, es decir, que $f \in \mathcal{R}(R)$ es integrable Riemann.

Veamos ahora la otra implicación. Supongamos que $f \in \mathcal{R}(R)$. Queremos demostrar que $D = \{x \in R \ / \ f \text{ es discontinua en } x\}$ tiene medida nula. Definimos los siguientes conjuntos $D_{1/n} := \{x \in R \ / \ O(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$ para $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{1/n}$. La unión numerable de conjuntos de medida nula es también un conjunto de medida nula, por lo que bastará con demostrar que los conjuntos $D_{1/n}$ tienen medida nula.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Como f es una función integrable Riemann, por el criterio de Riemann tenemos que $\exists \ P \in \mathcal{P}(R) \ / \ U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{n}$.

Para cualquier punto de $D_{\frac{1}{n}}$ tenemos dos posibles casos: o bien se encuentra en el interior de alguno de los rectángulos que define la partición P, o bien se encuentra en su frontera.

$$D^1_{1/n} = D_{1/n} \cap (\bigcup_{S \in P} Int(S)) \qquad D^2_{1/n} = D_{1/n} \cap (\bigcup_{S \in P} Fr(S))$$

Veamos que cada uno de estos conjuntos tiene medida nula. Como para cualquier rectángulo su frontera es unión numerable de conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^n$, entonces $D^2_{1/n}$ tiene medida nula. Por otro lado, sean $S_1, ..., S_k \in P$ los rectángulos definidos por P que tienen algún punto $x_i \in D_{1/n}$ en su interior. En ese punto la oscilación es $O(f, x_i) \geq \frac{1}{n}$. Tomando $\delta > 0$ / $B(x_i, \delta) \subset S_i$, entonces:

$$O(f, S_i) \geq O(f, B(x_i, \delta)) = O(f, x_i, \delta) \geq O(f, x_i) \geq \frac{1}{n}$$

De lo que se deduce:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} V(S_i) \leq \sum_{i=1}^{k} O(f, S_i) V(S_i) \leq U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{k} V(S_i) < \varepsilon$$

Por lo que se obtiene que $\forall n \in \mathbb{N},\ D_{1/n}$ tiene medida nula. En consecuencia, D tiene medida nula.

$\square$

2.4. Integral de Riemann en $\mathbb{R}$

Por último, cabe destacar algunos teoremas importantes sobre integración Riemann definidos para funciones definidas en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, es decir, en una dimensión.

- **Primitiva**: Sean $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una **primitiva** de f si :

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad \forall x \in [a, b]$$

- **Integral Indefinida** de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ localmente centrada en $a \in R$:

$$\begin{aligned} \int f : R &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f \end{aligned}$$

donde f es una función integrable Riemann en $[a, b]$.

- Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ entonces es fácil demostrar que su integral indefinida es continua en [a, b].

- **Primer Teorema Fundamental del Cálculo**: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y F su función integral indefinida. Entonces:

$$f \text{ continua en } x_0 \in [a,b] \longrightarrow F \text{ derivable en } x_0 \text{ y } \boxed{F'(x_0) = f(x_0)}$$

- **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**: Sean $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función primitiva de f en $[a,b]$. Entonces:

$$\boxed{\int_a^b f = g(b) - g(a)}$$

Algunos resultados útiles que se derivan de la defición de integral de Riemann son los siguientes:

- **Integración por partes**: Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables y $F, G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en [a, b] y derivables en (a, b) con F' = f y G' = g, entonces:

$$\boxed{\int Fg = FG - \int fG}$$

- **Cambio de Variable**: Sean $g \in C^1([a,b])$ y $f : g([a,b]) \to \mathbb{R}$ continua entonces:

$$\boxed{\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g)g'}$$

3

Limitaciones de la Integral de Riemann

A pesar de la gran utilidad de la integral de Riemann, esta resulta ineficiente en algunos aspectos de las matemáticas. Veamos algunas de las limitaciones que tiene la integral de Riemann:

1. Únicamente las funciones acotadas definidas sobre rectángulos compactos son susceptibles de ser integrables Riemann. Esto deja fuera a una enorme parte de las funciones.

2. Sea una sucesión de funciones integrables Riemann $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(R)$ que convergen puntualmente a una función $\lim_n f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in R$. Esta función puede no ser integrable Riemann $f \notin \mathcal{R}(R)$, o, incluso en el caso de que sí lo sea, el valor de su integral no tiene por qué coincidir con el valor del límite de las integrales de f_n.

   Por ejemplo, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas en el intervalo [0,1] como:

   $$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \{q_1, q_2, ..., q_n\} \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus \{q_1, q_2, ..., q_n\} \end{cases}$$

   donde $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una enumeración del conjunto de números racionales. Entonces, es una sucesión de funciones integrables Riemann. Sin embargo, el límite de la sucesión es:

   $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esta fución, conocida como la función de Dirichlet, no es una función integrable Riemann, pues es discontinua en todos los puntos del dominio [0,1].

Otro ejemplo, para el segundo caso, es la sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{R}([0,1])$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus (0, \frac{1}{n}) \end{cases}$$

Esta sucesión tiende puntualmente a $f \equiv 0$, que también es integrable Riemann. Sin embargo:

$$1 = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx \neq \int_0^1 f(x)\ dx = 0$$

3. Pueden existir funciones $f, g : R \longrightarrow \mathbb{R}$ iguales salvo en un conjunto de medida nula de R, pero de forma que una sea integrable Riemann y la otra no.

   Por ejemplo, si f es la función de Dirichlet que hemos visto en el ejemplo anterior, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ f = 0$, es decir, que la función es igual a 0 excepto en un conjunto de medida nula. Tenemos que $0 \in \mathcal{R}([0,1])$, pero $f \notin \mathcal{R}([0,1])$.

4. Existen funciones diferenciables $F : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in R,\ F'(x) = f(x)$, con f acotada, pero que sin embargo f no es integrable Riemann, $f \notin \mathcal{R}(R)$.

4

Medida de Lebesgue

Debido a estas limitaciones, la integral de Riemann se empezó a sentir insuficiente. Es por ello que los matemáticos de finales del siglo XIX y principios del XX dedicaron sus esfuerzos a desarrollar una nueva teoría de integración que resolviera estas limitaciones. Fue el matemático Henri Lebesgue el que consiguió ofrecer el desarrollo más completo de una nueva integral.

Para ver cómo se desarrolló la integral de Lebesgue debemos adentrarnos primero en la teoría de la medida, base para la construcción de la integral de Lebesgue. Veamos algunas definiciones previas.

Si $X \neq \emptyset$ un conjunto no vacío, se define:

- **σ-álgebra** sobre X: $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple:
  i. $\boxed{X \in \mathcal{M}}$
  ii. $\boxed{A \in \mathcal{M} \Longrightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}}$
  iii. $\boxed{\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}}$
- **Espacio Medible**: Dupla $(X, \mathcal{M})$ tal que:
  - $X \neq \emptyset$ es un conjunto no vacío
  - $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre X

Los conjuntos de una σ-álgebra, $A \in \mathcal{M}$, se denominan **conjuntos medibles**.

- Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra. Entonces, se comprueba fácilmente que $\mathcal{M}$ contiene los siguientes elementos:

  i. El **conjunto vacío**: $\boxed{\emptyset \in \mathcal{M}}$

  ii. La **unión finita** de elementos de $\mathcal{M}$: $\boxed{\{A_n\}_{n=1}^m \subset \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^m A_n \in \mathcal{M}}$

  iii. Las **intersecciones finitas** e **infinitas numerables** de elementos de $\mathcal{M}$:

$$\boxed{\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^m A_n \in \mathcal{M}, \quad \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}}$$

  iv. La **diferencia** de elementos de $\mathcal{M}$: $\boxed{A, B \in \mathcal{M} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}}$

- **Medida positiva**: Aplicación $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ que cumple:

  i. $\boxed{\mu(\emptyset) = 0}$

  ii. $\boxed{\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)}$ $\qquad \forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M} \ / \ A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$

  Tipos especiales de medidas:

  - **Medida finita**: Si $\mu(X) < +\infty$
  - **Medida de probabilidad**: Si $\mu(X) = 1$
  - **Medida σ-finita**: Si $\exists \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \mu(A_n) < +\infty$ y $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = X$
  - **Medida completa**: Si $\forall A \in M \ / \ \mu(A) = 0$ se tiene que $B \subset A \Rightarrow B \in M$

- **Espacio de medida**: Terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ tal que:

  - $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible
  - μ es una medida positiva definida sobre $\mathcal{M}$

Algunas propiedades que cumplen los espacios de medida son las siguientes:

- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, entonces:

  i. μ **finitamente aditiva**: $\forall \{A_n\}_{n=1}^{m} \subset \mathcal{M} \ / \ A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$

$$\boxed{\mu(\bigcup_{n=1}^{m} A_n) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)}$$

  ii. μ **monótona**: $A, B \in \mathcal{M}$: $\boxed{A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)}$

  iii. $A, B \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) < +\infty$: $\boxed{\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)}$

  iv. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, entonces: $\boxed{\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)}$

  v. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} \ A_n \subset A_{n+1}$, entonces:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)}$$

  vi. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} \ A_{n+1} \subset A_n$ y $\mu(A_1) < +\infty$, entonces:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)}$$

Sin embargo, de la definición de medida positiva surge un problema, el problema de la medida. Y es que (asumiendo el axioma de elección) se puede demostrar que resulta imposible definir una aplicación sobre los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de forma que la medida de un intervalo $[a, b]$, $a > b \in \mathbb{R}$ sea siempre $b - a$, que sea constante por traslaciones (es decir, que $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mu(A + a) = \mu(A)$) y que además cumpla las propiedades de una medida. Es por ello que denominamos a los conjuntos de la σ-álgebra como conjuntos medibles, pues son aquellos sobre los que se define la medida. Es por ello también que veremos una definición menos restrictiva de las medidas, las medidas exteriores:

- **Medida exterior**: $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ que cumple:

  i. $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii. $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X) \Longrightarrow \mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Recordemos qué es la longitud de un itervalo.

- **Longitud de un itervalo**: Sea I un intervalo, se define su longitud como:

$$\text{long}(I) = |I| = \begin{cases} b-a & si \quad I \text{ es acotado (a,b), [a,b), (a,b] ó [a,b]} \\ +\infty & si \quad I \text{ no es acotado} \end{cases}$$

Queremos crear una medida m sobre $\mathbb{R}$ de forma que mantenga la medida para los intervalos, es decir, que si I es un intervalo, $m(I) = \text{long}(I)$.

- **Medida exterior de Lebesgue**:

$$m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$$
$$A \longmapsto m^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \ / \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \ \text{ y } \ \forall k \in \mathbb{N},\, I_k \subset \mathbb{R} \text{ intervalo}\right\}$$

- Esta función m^* es una **medida exterior**.

$*$ **Demostración**:

Veamos que m^* es monótona. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $A \subset B$. Entonces, para cualquier recubrimiento de B por intervalos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, obviamente se tiene que también es un recubrimiento de A por intervalos: $A \subset B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$. Por lo que es fácil ver que $m^*(A) \leq m^*(B)$.

Veamos que la medida de un punto $\{x\} \subset \mathbb{R}$ cualquiera es 0. Sea $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, tomando la familia de intervalos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $I_k := [x-\varepsilon 2^{-k-1}, x+\varepsilon 2^{-k-1}]$, es un recubrimiento de $\{x\}$, y:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} (x + \varepsilon 2^{-k-1} - x + \varepsilon 2^{-k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon$$

Por lo que $\forall \varepsilon > 0$, $m^*(\{x\}) \leq \varepsilon \Rightarrow m^*(\{x\}) = 0$. Ahora, por monotonía, como $\emptyset \subset \{x\} \Rightarrow m^*(\emptyset) \leq m^*(\{x\}) = 0 \Rightarrow m^*(\emptyset) = 0$.

Falta por demostrar la subaditividad numerable. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ m^*(A_{n_0}) = +\infty$, entonces obviamente: $m^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq +\infty = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

Supongamos entonces que $\forall n \in \mathbb{N},\ m^*(A_n) < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \{I_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento por intervalos de A_n tal que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| < m^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}$. Entonces $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ por intervalos de manera que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$$

Luego:

$$\forall \varepsilon > 0,\ m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon \Rightarrow\ m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

Por lo que m^* es una medida exterior.

□

- Además, esta medida exterior cumple las siguientes propiedades:

i. $\forall A \subset \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}$ $\boxed{m^*(a + A) = m^*(A)}$

ii. $\forall A \subset \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\boxed{m^*(\lambda A) = |\lambda| m^*(A)}$

iii. $\forall E \subset \mathbb{R}$ numerable $\boxed{m^*(E) = 0}$

iv. $\forall I \subset \mathbb{R}$ intervalo $\boxed{m^*(I) = |I|}$

*** Demostración**

Las dos primeras propiedades son facilmente demostrables teniendo en cuenta que si $I = (a, b)$ es un intervalo, entonces $c + I = (a + c, b + c)$ y $\lambda I = (\lambda a, \lambda b)$ si $\lambda \geq 0$ y $\lambda I = (\lambda b, \lambda a)$ si $\lambda < 0$.

La propiedad iii. se tiene porque al ser E numerable, $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que por subaditividad numerable:

$$m^*(E) = m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\{x_n\}) = 0$$

Por último, veamos que la medida de un intervalo I cualquiera coincide con su longitud.

Consideremos el siguiente recubrimiento de I, $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $I_1 = I$, y $I_k = [x - \varepsilon 2^{-k}, x + \varepsilon 2^{-k}]$, $\forall k \in \{2, 3, ...\}$ con un $x \in \mathbb{R}$ cualquiera. Entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = |I| + \varepsilon \Longrightarrow m^*(I) \leq |I| + \varepsilon \Longrightarrow m^*(I) \leq |I|$$

Sea ahora $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento por intervalos cualquiera de I. Sustituyendo I_k por $I \cap I_k$ sigue siendo un recubrimiento por intervalos de I. Tomemos ahora $J_1 = I_1, J_2 = I_2 \setminus I_1, ..., J_k = I_k \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{k-1} I_m$. Por propiedades de los intervalos, tenemos que cada J_k es una unión finita de intervalos: $J_k = \bigcup\limits_{j=1}^{n_k} J_{k,j}$.

Entonces, tenemos que $\{J_{k,j}\}$ con $k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n_k$, es un recubrimiento por intervalos de I, pues $I = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{n_k} J_{k,j}$ y tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \geq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_k} |J_{k,j}| = |I| \Longrightarrow m^*(I) \geq |I|$$

Por lo que se tiene $m^*(I) = |I|$.

$\square$

Veamos ahora el teorema de Carathéodory, el cual permite construir una σ-álgebra a partir de una medida exterior. Una vez obtenida la σ-álgebra, si restringimos la medida exterior a ese conjunto obtendremos una medida, que además será una medida completa.

- **Teorema de Carathéodory**: Sea $\mu^* : X \longrightarrow [0, +\infty]$, una medida exterior sobre X. Definimos el siguiente conjunto:

$$\boxed{\mathcal{M} := \{M \subset X \ / \ \forall A \subset X, \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c)\}}$$

  Entonces se cumple que:

  i. $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre X
  ii. $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida sobre $\mathcal{M}$

iii. μ es completa y además: $\quad \mu^*(M) = 0 \Longrightarrow M \in \mathcal{M}$

Este conjunto se denomina la σ-álgebra de conjuntos medibles-Carathéodory relativa a la medida exterior μ^*.

$*$ **Demostración**:

Sea $A \subset X$ cualquiera. Como $\mu^*(\emptyset) = 0$, tenemos:

$$\mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap \emptyset^c) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap X) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A) = \mu^*(A)$$

Por lo que $\emptyset \in \mathcal{M}$

Como la definición del conjunto es simétrica para M y M^c se tiene que, si $M \in \mathcal{M}$, y dado $A \subset X$ cualquiera,

$$\mu^*(A) \overset{M\in\mathcal{M}}{=} \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c) = \mu^*(A \cap (M^c)^c) + \mu^*(A \cap M^c)$$

Por lo que, si $M \in \mathcal{M}$, entonces también $M^c \in \mathcal{M}$.

Nos falta demostrar que las uniones infinitas numerables de elementos de $\mathcal{M}$ pertenecen a $\mathcal{M}$. Para ello, antes veamos que la intersección de dos elementos de $\mathcal{M}$ también pertenece a $\mathcal{M}$.

Sean M, $N \in \mathcal{M}$ y sea $A \subset X$ cualquiera:

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\overset{M\in\mathcal{M}}{=} \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c) = \\
&\overset{N\in\mathcal{M}}{=} \mu^*(A \cap M \cap N) + \mu^*(A \cap M \cap N^c) + \mu^*(A \cap M^c \cap N^c) + \mu^*(A \cap M^c \cap N) = \\
&\overset{M\in\mathcal{M}}{=} \mu^*(A \cap M \cap N) + \mu^*(A \cap N^c) + \mu^*(A \cap M^c \cap N) = \\
&= \mu^*(A \cap M \cap N) + \mu^*(A \cap (M \cap N)^c \cap N) + \mu^*(A \cap (M \cap N)^c \cap N^c) = \\
&\overset{N\in\mathcal{M}}{=} \mu^*(A \cap (M \cap N)) + \mu^*(A \cap (M \cap N)^c)
\end{aligned}$$

Entonces si $M, N \in \mathcal{M}$ se tiene $M \cap N \in \mathcal{M}$. De esto se deduce también que $M \cup N = (M^c \cap N^c)^c \in \mathcal{M}$ y $M \setminus N = M \cap N^c \in \mathcal{M}$ y, por inducción, si $\{M_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{M}$ entonces $\bigcup_{i=1}^m M_i$, $\bigcap_{i=1}^m M_i \in \mathcal{M}$.

Por otro lado, si tenemos $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ tal que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, entonces $\forall A \subset X$:

$$\mu^*(A \cap (M_1 \cup M_2)) \overset{M_1\in\mathcal{M}}{=} \mu^*(M_1 \cap A \cap (M_1 \cup M_2)) + \mu^*(M_1^c \cap A \cap (M_1 \cup M_2)) =$$
$$= \mu^*(A \cap M_1) + \mu^*(A \cap M_2) = \sum_{j=1}^{2} \mu^*(A \cap M_j)$$

Por inducción, tenemos que $\forall \{M_j\}_{j=1}^m \subset X \ / \ M_i \cap M_j = \emptyset \ (i \neq j)$ y $\forall A \subset X$:

$$\boxed{\mu^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^m M_j)) = \sum_{j=1}^m (A \cap M_j)}$$

De ello se deduce que:

$$\boxed{\mu^*(A) = \sum_{j=1}^m \mu^*(A \cap M_j) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^m M_j)^c)} \quad \forall A \subset X$$

Sea ahora $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, veamos que $\bigcup_{i=1}^\infty M_i \in \mathcal{M}$.

Podemos suponer que $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos disjuntos dos a dos (si no es así sustituimos la sucesión por M_1, $M_2 \setminus M_1$, ..., $M_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} M_i$, ...).

Sea entonces $A \subset X$ un conjunto cualquiera:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \sum_{i=1}^m \mu^*(A \cap M_i) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^m M_i)^c) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^m \mu^*(A \cap M_i) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^\infty M_i)^c) \end{aligned}$$

Por último, tomando límites respecto a m y por subaditividad de la medida exterior:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A \cap M_i) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^\infty M_i)^c) \geq \\ &\geq \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^\infty M_i)) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^\infty M_i)^c) \geq \mu^*(A) \end{aligned}$$

Por lo que todas las desigualdades deben ser igualdades:

$$\boxed{\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^\infty M_i)) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^\infty M_i)^c)}$$

Por lo que $\bigcup_{i=1}^\infty M_i \in \mathcal{M}$, y queda demostrado que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra.

Veamos que la restricción $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida.

Obviamente, por propiedades de la medida exterior tenemos que:

$$\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$$

Sea $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $M_i \cap M_j = \emptyset$ si $i \neq j$, es decir, disjuntos dos a dos. Utilizando las últimas igualdades con A $= \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$:

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*((\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) \cap M_j) + \mu^*((\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j)^c) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(M_j) + \mu^*(\emptyset) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(M_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j)\end{aligned}$$

Por lo que se cumple la aditividad numerable y μ es una medida positiva.

Por último, veamos que es una medida completa, y que si $M \subset X$ y $\mu^*(M) = 0$ entonces $M \in \mathcal{M}$.

Si $A \subset X$ cualquiera, tenemos:

$$A \cap M \subset M \Longrightarrow \mu^*(A \cap M) \leq \mu^*(M) = 0 \Longrightarrow \mu^*(A \cap M) = 0$$

$$A \cap M^c \subset A \Longrightarrow \mu^*(A \cap M^c) \leq \mu^*(A)$$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c) = 0 + \mu^*(A \cap M^c) = \mu^*(A \cap M^c) \leq \mu^*(A)$$

Por lo que todas las desigualdades son igualdades:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c)$$

Y, como A es un conjunto genérico de X, tenemos que $M \in \mathcal{M}$.

Por último, si $M \in \mathcal{M}$ con $\mu(M) = 0$ y $N \subset M$, tenemos por monotonía que:

$$\mu^*(N) \leq \mu(M) = 0 \Longrightarrow \mu^*(N) = 0 \Longrightarrow N \in \mathcal{M}$$

Por lo que μ es una medida completa.

$\square$

Se define el **conjunto de medibles Lebesgue** como aquellos conjuntos de $\mathbb{R}$ que son medibles Carathéodory respecto a la medida exterior de Lebesgue. Es decir:

$$\boxed{\mathcal{L} := \{M \subset \mathbb{R} \;/\; \forall A \in \mathbb{R} \quad m^*(A) = m^*(A \cap M) + m^*(A \cap M^c)\}}$$

Por el teorema de Carathéodory, el conjunto $\mathcal{L}$ es una σ-álgebra, y la medida exterior de Lebesgue restringida a este conjunto $m := m^*|_{\mathcal{L}}$ es una medida positiva completa. A esta medida exterior de Lebesgue restringida al conjunto de medibles Lebesgue es a la que se conoce como **medida de Lebesgue**.

4.1. Conjuntos Medibles Lebesgue

Los siguientes conjuntos son medibles en esta σ-álgebra de Lebesgue:

1. Abiertos
2. Cerrados
3. $F \in F_\sigma := \{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \;/\; F_n \text{ cerrado}\}$ Uniones Numerables de Cerrados.
4. $G \in G_\delta := \{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \;/\; G_n \text{ abierto}\}$ Intersecciones Numerables de Abiertos.
5. Intervalos

$*$ **Demostración**:

Como los abiertos en $\mathbb{R}$ son uniones numerables de intervalos abiertos acotados si probamos que los intervalos son medibles lebesgue, entonces, por las propiedades de las σ-álgebras, los abiertos también lo serán. Si los abiertos son medibles, los cerrados (su complementario) son medibles, y entonces las uniones finitas de cerrados y las intersecciones finitas de abiertos también lo son.

Veamos entonces, que los intervalos abiertos y acotados $(a, b) \subset \mathbb{R}$ son conjuntos medibles Lebesgue.

Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces tenemos que $m^*(A) \leq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c)$ por subaditividad de la medida exterior. Para la otra desigualdad, si $m^*(A) = +\infty$, entonces es obvio $m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c) \leq +\infty = m^*(A)$. Supongamos que $m^*(A) < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que $\exists \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ recubrimiento de A por intervalos, tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(A) + \varepsilon$. De esta familia de intervalos sabemos que son acotados (pues si no lo fueran $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| = \infty < m^*(A)$ y habíamos supuesto $m^*(A) < \infty$), y podemos suponer que $I_n \cap I \neq \emptyset$ (si para algún n la intersección fuera vacío, podemos eliminar ese I_n de la familia y seguiría cumpliendo lo anterior). Entonces $I_n = (I_n \cap I) \cup (I_n \cap I^c)$, de donde $I_n \cap I^c$ puede ser vacío, o tener 1 o 2 componentes conexas. Supongamos que tiene dos componentes conexas (los casos en los que es vacío o solo tiene una componente conexa se razonan de forma similar) $I_n \cap I^c = J_n \cup K_n$ con $J_n \cap K_n = \emptyset$, entonces $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de $A \cap I^c$ por intervalos.Tenemos entonces que:

$$m^*(A\cap I) + m^*(A\cap I^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty}|I_n \cap I| + \sum_{n=1}^{\infty}|J_n| + \sum_{n=1}^{\infty}|K_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|I_n| < m^*(A) + \varepsilon$$

Como se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos que $m^*(A\cap I)+m^*(A\cap I^c) \leq m^*(A)$. Por lo que $I \in \mathcal{L}$. Además, a través de uniones o intersecciones numerables se pueden obtener que el resto de intervalos no abiertos ([a, b], [a, b), (a, b]) también son medibles Lebesgue.

□

Algunas propiedades de la medida de Lebesgue son las siguientes:

i. Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo: $\boxed{m(I) = |I|}$

ii. Sea $A \subset \mathbb{R}$: $\boxed{A \text{ compacto } \Longrightarrow m(A) < +\infty}$

iii. m es completa y σ-finita

∗ **Demostración**:

Anteriormente vimos que la medida exterior de un intervalo coincide con su longitud, por lo que, como todos los intervalos son medibles, la medida de un intervalo también coincide con su longitud.

Si $K \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto, es medible (pues es cerrado). Además, por ser compacto en $\mathbb{R}$, eso implica que $\exists I \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado tal que $K \subset I$, y por monotonía de m tenemos que $m(K) \leq m(I) < +\infty$, por ser I acotado.

Ver que m es σ-finita es fácil, pues $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n, n]$ con $m([-n, n]) = 2n < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Y que m es completa lo vimos por el teorema de Carathéodory.

- **Teorema de Caracterización de Conjuntos Medibles Lebesgue**:

  Si $A \subset \mathbb{R}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

i. $A \in \mathcal{L}$
ii. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists G \subset \mathbb{R}$ abierto $/ A \subset G$ y $m^*(G \setminus A) < \varepsilon$
iii. $\exists H \in G_\delta$, $\exists B \subset \mathbb{R}$ con $m^*(B) = 0 \ / \ A = H \setminus B$
iv. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists F \subset \mathbb{R}$ cerrado $/ F \subset A$ y $m^*(A \setminus F) < \varepsilon$
v. $\exists K \in F_\sigma$, $\exists C \subset \mathbb{R}$ con $m^*(C) = 0 \ / \ A = K \cup C$

$*$ **Demostración**:

i. $\rightarrow$ **ii.** Supongamos que $A \in \mathcal{L}$. Si $m(A) < +\infty$, por la definición de la medida de Lebesgue, $\exists \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento de A por intervalos de forma que $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Aumentando el tamaño de cada intervalo podemos obtener otro recubrimiento de A por intervalos abiertos $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \subset J_n$ y $|J_n| < |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Sea $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, entonces G es abierto y $G, A \setminus G \in \mathcal{L}$. Como $A \subset G$ y $m(A) < \infty$, entonces:

$$m^*(G \setminus A) = m(G \setminus A) = m(G) - m(A) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En el caso en que $m(A) = +\infty$, como m es σ-finita, tenemos que $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}$ una familia numerable de conjuntos tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\forall n \in \mathbb{N},\ m(A_n) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, aplicando el resultado anterior a cada conjunto A_n obtenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists G_n \subset \mathbb{R}$ conjunto abierto tal que $A_n \subset G_n$ y $m^*(G_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, por lo que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ es abierto con $A \subset G$ y :

$$m^*(G \setminus A) = m(G \setminus A) \leq m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus A_n) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n \setminus A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n) - m(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

ii. $\rightarrow$ **iii.** Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, $\exists G_n \in \mathbb{R}$ abierto tal que $A \subset G_n$ y $m^*(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. Si $H := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, entonces $H \in G_\delta$, $A \subset H$ y $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$m^*(H \setminus A) \leq m^*(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$$

Entonces, si $B := H \setminus A$, tenemos $m^*(B) = 0$ y $A = H \setminus B$.

i. $\rightarrow$ **iv.** Como $A^c \in \mathcal{L}$, entonces, por **i.** $\rightarrow$ **ii.**, sea $\varepsilon > 0$, $\exists G \subset \mathbb{R}$ abierto, tal que $A^c \subset G$ con $m^*(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Entonces, $F := G^c$ es cerrado, $F \subset A$ y se tiene:

$$m^*(A \setminus F) = m(A \setminus F) = m(G \setminus A^c) < \varepsilon$$

iv. $\rightarrow$ **v.** De forma análoga a **ii.** $\rightarrow$ **iii.**

iii. $\rightarrow$ **i.** Tenemos que $A = H \setminus B$ con $H \in G_\delta$, por lo que $H \in \mathcal{L}$, y como $m^*(B) = 0$ y m es una medida completa, $B \in \mathcal{L}$. Entonces: $A = H \setminus B \in \mathcal{L}$

v. $\rightarrow$ **i.** De igual manera, $A = K \cup C$ con $K \in F_\sigma \Rightarrow K \in \mathcal{L}$ y $m^*(C) = 0$, m completa $\Rightarrow C \in \mathcal{L}$. Entonces $A = K \cup C \in \mathcal{L}$

$\square$

Podríamos caer en el error de pensar que cualquier conjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue ($\mathcal{L} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Sin embargo, como hemos expresado al principio del capítulo, si asumimos el axioma de elección, el problema de la medida no tiene solución. El axioma de elección es un axioma que fue formulado por Ernst Zermelo, el cual postula que dada una familia de conjuntos no vacíos, siempre existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de los conjuntos. Esto es trivial para el caso de una familia de conjuntos finita; sin embargo, en el caso de una familia infinita arbitraria el axioma es indispensable. Asumiendo el axioma de elección, no es posible crear una medida sobre $\mathbb{R}$ de forma que se le asigne a cada conjunto un valor de $[0, +\infty]$ de manera que cumpla la definición de medida. La medida de Lebesgue no es ninguna excepción. Por tanto, existen conjuntos de $\mathbb{R}$ que no son medibles Lebesgue. A continuación vamos a ver uno de estos conjuntos no medibles.

4.2. El conjunto de Vitali

Para definir el conjunto de Vitali, primero debemos definir una relación binaria sobre el conjunto $[0, 1]$. Diremos que $x, y \in [0, 1]$ están relacionados si y solo si su resta es un número racional:

$$\boxed{x \sim y \longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}}$$

Esta es una relación de equivalencia pues:

1. Reflexiva: $\forall x \in [0, 1],\ x - x = 0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x \sim x$

2. Simétrica: Si $x \sim y \Longrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow -(x - y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow y \sim x$

3. Transitiva: Si $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x - y, y - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \sim z$

Por lo que es una relación de equivalencia, y se pueden crear entonces clases de equivalencia.

Definimos ahora el conjunto de Vitali V tomando exáctamente un único representante de cada una de las clases de equivalencia formadas por la relación anterior (notemos que aquí estamos utilizando el axioma de elcción). Ahora, sea $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración del conjunto numerable $[-1,1]\cap\mathbb{Q}$, de forma que $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$. Veamos que si $i \neq j$, entonces $(r_i + V) \cap (r_j + V) = \emptyset$.

Supongamos que $\exists p \in (r_i+V)\cap(r_j+V)$, entonces $\exists v_1, v_2 \in V \ / \ p = r_i+v_1 = r_2 + v_2$, entonces $0 = p - p = (r_i - r_j) - (v_2 - v_1) \implies r_i - r_j = v_2 - v_1$. Como $r_i - r_j \in \mathbb{Q}$, entonces $v_2 - v_1 \in \mathbb{Q} \implies v_1 \sim v_2$, y como solo hay un único representante de cada clase de equivalencia en V, eso significa que $v_1 = v_2$. Pero entonces $v_2 - v_1 = 0 = r_i - r_j \implies r_i = r_j$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. Por lo que $(r_i + V) \cap (r_j + V) = \emptyset$.

Definamos ahora el conjunto $M = \bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n+V)$. Este conjunto cumple $[0,1] \subset M \subset [-1,2]$.

Sea $x \in [0,1]$, veamos que $\exists n \in \mathbb{N} \ / \ x \in r_n + V$, es decir, que $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists v \in V \ / \ x = r_n + v$. Como $x \in [0,1]$, pertenece a alguna de las clases de equivalencia de la relación que definimos al inicio, por lo que $\exists v \in V \ / \ x - v \in \mathbb{Q}$. Como $0 \leq x, v \leq 1$, entonces $x - v \in [-1,1]$, por lo que $\exists n \in \mathbb{N} \ / \ r_n = x - v$. Ahora, $r_n + v = x - v + v = x \in r_n + V \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n + V)$. Es decir, $[0,1] \subset M$.

Sea $x \in M = \bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n + V)$, entonces $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists v \in V \ / \ x = r_n + v$. Como $-1 \leq r_n \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$, entonces $r_n + v \in [-1,2]$. $M \subset [-1,2]$. De esto se deduce que:

$$1 = m([0,1]) \leq m(M) \leq m([-1,2]) = 3$$

Por último, como M es la unión numerable de conjuntos disjuntos dos a dos, por la aditividad numerable de la medida tenemos:

$$m(M) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n + V)) = \sum_{n=1}^{\infty} m(r_n + V) = \sum_{n=1}^{\infty} m(V)$$

Sin embargo, esto lleva a contradicción, pues:

- Si $m(V) = 0$, entonces $m(M) = 0 < 1$, contradicción.
- Si $m(V) > 0$, entonces $m(M) = +\infty > 3$, contradicción.

Por lo que no se puede asignar un valor a la medida de V, es decir, que no es un conjunto medible de Lebesgue.

El problema de la medida nos decía que no existe ninguna aplicación de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ a $[0, +\infty]$ de forma que a cada intervalo $[a, b]$ le asigna su longitud $b - a$ y que sea numerablemente aditiva. Hemos encontrado un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no es medible Lebesgue, por lo que la medida de Lebesgue no es una medida positiva sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

5

Integral de Lebesgue

Vamos a comenzar a definir la integral de Lebesgue sobre un conjunto de funciones concretas muy reducido y a partir de ahí ampliaremos la definición para abarcar el mayor numero de funciones posibles. Comenzaremos el capítulo recordando qué es la función característica de un conjunto.

- **Función Característica**: Dados $X \neq \emptyset$ y $A \subset X$, definimos la función característica de A como:

$$\begin{aligned} \chi_A : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \in X \setminus A \end{cases} \end{aligned}$$

- Veamos algunas propiedades que se deducen de esta definición. Si $A, B \subset X$:

  i. $\chi_\emptyset \equiv 0$ y $\chi_X \equiv 1$
  ii. $\chi_A \cdot \chi_B \equiv \chi_{A \cap B}$
  iii. $\chi_{A^c} \equiv 1 - \chi_A$
  iv. $\{\chi_A = 1\} \equiv A$ y $\{\chi_A = 0\} \equiv X \setminus A$

Mientras que la integral Riemann se basa en la aproximación de sumas inferiores y superiores de la función, la integral Lebesgue se basa en la aproximación de la función mediante funciones simples. Veamos qué son las funciones simples.

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible:

- **Función Simple**: $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que toma un número finito de valores.
  Es decir, que $|\varphi(X)| < +\infty$
- **Función Simple Medible**: $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ función simple que toma los valores en conjuntos medibles.
  Es decir, si $\quad \varphi^{-1}(a) \in \mathcal{M},\ \forall a \in \mathbb{R}$

La definición de función simple (resp. simple medible) se puede expresar de la siguiente forma:

$\exists a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{R}, A_1, A_2, ..., A_m \subset X$ (resp. $A_1, A_2, ..., A_m \in \mathcal{M}$) disjuntos dos a dos tal que:

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}}$$

Evidentemente, podemos suponer $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$.

- Las funciones simples (resp. simples medibles) constituyen un espacio vectorial, ya que, por ejemplo, si $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i},\ \psi = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ son funciones simples (resp. simples medibles) y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_i + \beta b_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$

es una función simple (resp. simple medible).

Sea $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la recta real ampliada.

- **Función Medible**: $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que la imagen inversa de los conjuntos abiertos son conjuntos medibles.

$$\boxed{\forall G \subset \overline{\mathbb{R}} \text{ abierto },\ f^{-1}(G) \in \mathcal{M}}$$

- **Función Medible Lebesgue**: Función medible sobre un espacio medible $(M, \mathcal{L})$ con $M \in \mathcal{L}$

Es fácil ver que si f es una función simple, entonces f es una función medible si y solo si f cumple la definición de simple medible donde todos los conjuntos A_i en los que f toma valores distintos son conjuntos medibles.

- Si $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible y $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, entonces son equivalentes:

i. f es medible

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f(x) < a / x \in X\} \in \mathcal{M}$

iii. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f(x) \leq a / x \in X\} \in \mathcal{M}$

iv. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f(x) > a / x \in X\} \in \mathcal{M}$

v. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f(x) \geq a / x \in X\} \in \mathcal{M}$

$*$ **Demostración**:

Como $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra se tiene que para cualquier $A \subset X$, entonces $A \in \mathcal{M} \longleftrightarrow A^c \in \mathcal{M}$, por lo que **ii.** $\Longleftrightarrow$ **v.** y **iii.** $\Longleftrightarrow$ **iv.**

Sea ahora $a \in \mathbb{R}$.

ii. $\rightarrow$ **iii.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > a_{n+1}$ y $a_n \underset{n}{\longrightarrow} a$. Entonces tenemos que $\{f \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f < a_n\}$, por lo que, como $\forall n \in \mathbb{N},\ \{f < a_n\} \in \mathcal{M}$, entonces por ser intersección numerable $\{f \leq a\} \in \mathcal{M}$

iv. $\rightarrow$ **v.** De la misma manera, si $\{a_n\}_{n\mathbb{N}}$ sucesión tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}$ y $a_n \underset{n}{\longrightarrow} a$, entonces $\{f \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f > a_n\} \in \mathcal{M}$

Por lo que queda demostrado que los enunciados **ii.** al **v.** son equivalentes.

i. $\rightarrow$ **ii.-v.** Como f es medible, y $G = [-\infty, a) \subset \overline{\mathbb{R}}$ es un abierto, entonces: $f^{-1}(G) = f^{-1}([-\infty, a)) = \{f < a\} \in \mathcal{M}$

ii.-v. $\rightarrow$ **i.** Por **ii**. y por **iv.** se tiene que $\{f > a\}, \{f < a\} \in \mathcal{M}$, entonces $\{f > a\} \cap \{f < b\} = f^{-1}((a, b))$. Como cualquier abierto de $\mathbb{R}$ está formado por uniones numerables de intervalos abiertos y acotados (a_n, b_n), y las preimágenes de cada uno de estos intervalos es medible, entonces $\forall G \subset \mathbb{R}$ un abierto cualquiera:

$$\boxed{f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(a_n, b_n) \in \mathcal{M}}$$

Por último, falta ver que la preimagen de intervalos de los tipos $(a, +\infty]$, $[-\infty, a)$ también son medibles. Fácilmente, se observa que $f^{-1}((a, +\infty]) = \{f > a\} \in \mathcal{M}$ y $f^{-1}([-\infty, a)) = \{f < a\} \in \mathcal{M}$.

$\square$

Veamos algunas propiedades de las funciones medibles de fácil demostración.

- Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible:

i. $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles, $\alpha \in \mathbb{R}$: αf, $f+g$, fg y $\frac{f}{g}$ son medibles (si $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$, en el caso de $\frac{f}{g}$).

ii. $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y $g : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua: $g \circ f$ es medible.

iii. $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles: $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ son medibles.

iv. $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible: f^+, f^- y $|f|$ son medibles.

v. $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de funciones medibles: $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_n f_n$ y $\liminf\limits_n f_n$ son funciones medibles.

vi. $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ función medible y $A \in \mathcal{M}$ conjunto medible: $f|_A$ es medible en el espacio medible inducido por A, $(A, \mathcal{M}|_A)$, siendo $\mathcal{M}|_A = \{M \cap A \ / \ A \in \mathcal{M}\}$

vii. $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles y $L = \{x \in X / \ \exists \lim\limits_n f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}\}$: la siguiente función es medible:

$$\begin{aligned} f : L &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto \lim_n f_n(x) \end{aligned}$$

en $(L, \mathcal{M}|_L)$.

El siguiente resultado que vamos a ver es muy importante, pues expresa que las funciones medibles pueden ser aproximadas por funciones simples medibles, lo cual va a ser clave para definir la integral de Lebesgue.

- Teorema de aproximación por funciones simples:

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible:

i. Si $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible, entonces existe una sucesión de funciones simples medibles $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$ de forma que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \ , \quad \forall x \in X}$$

ii. Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible, entonces $\exists\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples medibles tal que $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X$ de forma que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)\ , \quad \forall x \in X}$$

Además, si f es acotada, la convergencia puede conseguirse. uniforme.

$*$ **Demostración**:

Veamos que si se cumple para $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles no negativas, también se cumple para cualquier función medible $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, pues $f = f^+ + f^-$ con $f^+, f^- : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Entonces, $\exists\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_n \underset{n}{\longrightarrow} f^+$ y $\psi_n \underset{n}{\longrightarrow} f^-$. Por lo que $\{\varphi_n - \psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples medibles tal que $\varphi_n(x) - \psi_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f^+(x) - f^-(x) = f(x),\ \forall x \in X$.

Veamos entonces que el teorema se cumple para funciones medibles no negativas. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ medible. Entonces definimos los siguientes conjuntos:

$$E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})) \quad \text{con} \ \ i \in \{1, 2, ..., n2^n\}, n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = f^{-1}([n, +\infty]) \quad n \in \mathbb{N}$$

Observemos que $\bigcup_{i=1}^{n2^n} f^{-1}(E_{n,i}) \cup f^{-1}(F_n) = f^{-1}(X)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Definimos entonces la siguiente sucesión de funciones simples medibles no negativas:

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, tenemos dos opciones:

i. Caso $f(x) \geq n$: Entonces $\varphi_n(x) = n \leq f(x)$

ii. Caso $f(x) < n$: Entonces $\exists i \in \{1, 2, ..., n2^n\}$ tal que $\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}$. Por lo que: $\varphi_n(x) = \frac{i-1}{2^n} \leq f(x)$

En ambos casos tenemos que $\varphi_n(x) \leq f(x)$

Veamos que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente $\forall x \in X$.

Sea $x \in X$ cualquiera, y sea $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos:

i. Caso $f(x) \geq n+1$: Entonces $\varphi_n(x) = n \leq n+1 = \varphi_{n+1}(x)$

ii. Caso $n \leq f(x) < n+1$: Si $\frac{i-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{i}{2^{n+1}}$ para algún $n2^{n+1}+1 \leq i \leq (n+1)2^{n+1}$, entonces $\varphi_n(x) = n \leq \frac{i-1}{2^{n+1}} = \varphi_{n+1}(x)$.

iii. Caso $f(x) < n$: Entonces $f(x) < n+1$ y tenemos que $\exists i \in \{1, ..., n2^n\}$ y $\exists j \in \{1, ..., (n+1)2^{n+1}\}$ tales que $\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}$ y $\frac{j-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{j}{2^{n+1}}$. Luego $\varphi_n = \frac{i-1}{2^n}$ y $\varphi_{n+1} = \frac{j-1}{2^{n+1}}$. De la desigualdad anterior obtenemos que $\frac{i-1}{2^n} < \frac{j}{2^{n+1}}$, por lo que $2(i-1) < j$ y $2(i-1) \leq j-1$. Entonces: $\varphi_n(x) = \frac{i-1}{2^n} \leq \frac{j-1}{2^{n+1}} = \varphi_{n+1}(x)$.

En cualquier caso se tiene que $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$.

Por último, veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$.

i. Caso $f(x) = +\infty$: Se tiene que $\varphi_n(x) = n \quad \forall x \in X$ por lo que obviamente

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = +\infty = f(x)$$

ii. Caso $f(x) < +\infty$: Entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}/f(x) < n_0 \Rightarrow \forall n \geq n_0, \quad \varphi_n(x) = \frac{i_n-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i_n}{2^n}$ con $i_n \in \{1, ..., n2^n\}$. Por lo que:

$$|\varphi_n(x) - f(x)| = f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \varphi(x) = f(x)$$

Además, si f es una función acotada, tenemos que el n_0 elegido anteriormente no depende de x ($\exists M \in \mathbb{N}/f(x) < M \quad \forall x \in X$) y tendríamos:

$$\forall n \geq n_0 \ / \ \sup_{x\in X} |\varphi_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

de donde obtenemos la convergencia uniforme.

5.1. Integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas.

A partir de esta sección, siempre consideraremos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ donde es un espacio de medida completa.

Primero definiremos la integral de Lebesgue sobre el conjunto de funciones simples medibles no negativas. A partir de ahí iremos extendiendo la definición a un grupo más amplio de funciones hasta quedar definida para todo el conjunto de funciones medibles.

- **Integral de Lebesgue de funciones simples medibles no negativas**: Sea

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow [0, +\infty) \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i} \end{aligned}$$

una función simple medible no negativa, entonces definimos su integral Lebesgue sobre X respecto a la medida μ como:

$$\boxed{\int_X \varphi \; d\mu := \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)}$$

Si $A \in \mathcal{M}$, se define la integral de Lebesgue de φ sobre A como:

$$\boxed{\int_A \varphi \; d\mu := \int_X \varphi \cdot \chi_A \; d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap A)}$$

Veamos algunas propiedades elementales que surgen de estas definiciones.

- Si φ, $\psi : X \longrightarrow [0, +\infty]$ funciones simples medibles y $\alpha \geq 0$, entonces:

i. $\boxed{\int_x (\alpha\varphi) \; d\mu = \alpha \int_X \varphi \; d\mu}$ y $\boxed{\int_x (\varphi + \psi) \; d\mu = \int_X \varphi \; d\mu + \int_X \psi \; d\mu}$

ii. $\boxed{\varphi \leq \psi \Longrightarrow \int_X \varphi \; d\mu \leq \int_X \psi \; d\mu}$

iii. Si $A \in \mathcal{M}$, $\boxed{\mu(A) = 0 \Longrightarrow \int_A \varphi \; d\mu = 0}$

iv. La siguiente función es una medida positiva:

$$\begin{aligned} \nu_\varphi : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \int_A \varphi \; d\mu \end{aligned}$$

Es decir, que se cumple que $\forall \{E_n\} \subset \mathcal{M}$ sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos:

$$\boxed{\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} \varphi \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \varphi \; d\mu}$$

Una vez definida la integral de Lebesgue sobre las funciones simples medibles no negativas vamos a extender esta definición para las funciones medibles no negativas. Para ello usaremos el teorema de aproximación por funciones simples. Para cada función medible no negativa f existe una sucesión creciente de funciones simples no negativas tal que su límite es f.

- **Integral de Lebesgue de funcione medibles no negativas**:
  Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible no negativa, definimos su integral de Lebesgue sobre X como:

$$\boxed{\int_X f \ d\mu := sup\left\{\int_X \varphi \ d\mu / \varphi \text{ simple medible con } 0 \leq \varphi \leq f\right\}}$$

  Si $A \in \mathcal{M}$, se define la integral de Lebesgue de f sobre A como:

$$\boxed{\int_A f \ d\mu := \int_X f \cdot \chi_A \ d\mu}$$

Igual que antes, veamos algunas propiedades fundamentales que derivan de estas definiciones:

- Sean $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles, $A, B \in \mathcal{M}$ conjuntos medibles y $\alpha \geq 0$:

i. $\boxed{f \leq g \Longrightarrow \int_X f \ d\mu \leq \int_X g \ d\mu}$

ii. $\boxed{A \leq B \Longrightarrow \int_A f \ d\mu \leq \int_B f \ d\mu}$

iii. $\boxed{\int_x (\alpha f) \ d\mu = \alpha \int_X f \ d\mu}$ (con $0 \cdot \infty = 0$)

iv. $\boxed{\int_x (f + g) \ d\mu = \int_X f \ d\mu + \int_X g \ d\mu}$

v. $\boxed{(f(x) = 0 \ \forall x \in A \quad \vee \quad \mu(A) = 0) \Longrightarrow \int_A f \ d\mu = 0}$

vi. $\boxed{\mu(A) = 0 \Longrightarrow \int_X f \ d\mu = \int_{X \setminus A} f \ d\mu}$

$*$ **Demostración**:

i. Sea $\{\varphi_f\} := \{\varphi : X \to [0, +\infty) \ / \ \varphi$ simple medible y $0 \leq \varphi \leq f\}$, es decir, el conjunto de funciones simples medibles no negativas que son menores o iguales que f $\forall x \in X$.

   Entonces, fácilmente se ve que $f \leq g \Rightarrow \{\varphi_f\} \subset \{\varphi_g\}$. Por lo que:

$$\int_X f \ d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \ d\mu \ / \ \varphi \in \{\varphi_f\} \right\} \leq$$
$$\leq \sup \left\{ \int_X \varphi \ d\mu \ / \ \varphi \in \{\varphi_g\} \right\} = \int_X g \ d\mu$$

ii. Como $f \cdot \chi_A \leq f \cdot \chi_B$, por ser $A \subset B$, entonces utilizando i. tenemos:

$$\int_A f \ d\mu = \int_X f \cdot \chi_A \ d\mu \leq \int_X f \cdot \chi_B \ d\mu = \int_B f \ d\mu$$

iii. Si $\alpha = 0$: $\int_X 0 \cdot f \ d\mu = 0 \int_X f \ d\mu$ es trivial.

   Si $\alpha > 0$, entonces veamos que $\alpha\{\varphi_f\} = \{\varphi_{\alpha f}\}$:

   Sea $\varphi \in \{\varphi_f\}$ función simple medible no negativa, tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Entonces $\alpha\varphi$ es función simple medible no negativa tal que $0 \leq \alpha\varphi \leq \alpha f$.

   Sea $\varphi' \in \{\varphi_{\alpha f}\}$ función simple medible no negativa tal que $0 \leq \varphi \leq \alpha f$. Entonces $\frac{1}{\alpha}\varphi$ es función simple medible no negativa con $0 \leq \frac{1}{\alpha}\varphi \leq f$. Por lo que $\alpha\frac{1}{\alpha}\varphi = \varphi \in \alpha\{\varphi_f\}$.

   Como sabemos que para funciones medibles no negativas se cumple que si $\alpha > 0$, $\int_X \alpha\varphi \ d\mu = \alpha \int_X f \ d\mu$, y utilizando que si $C \subset [0, +\infty]$ entonces $\sup(\alpha C) = \alpha \ \sup(C)$, entonces:

$$\int_X \alpha f \ d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \ d\mu \ / \ \varphi \in \{\varphi_{\alpha f}\} \right\} =$$
$$= \sup \left\{ \alpha \int_X \varphi \ d\mu \ / \ \varphi \in \{\varphi_f\} \right\} = \alpha \int_X f \ d\mu$$

iv. Por el teorema de aproximación por funciones simples, sabemos que existen $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones simples medibles crecientes y no negativas tales que $\forall x \in X, \quad \varphi_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$ y $\psi_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} g(x)$. Por lo que $\forall x \in X, \quad (\varphi_n + \psi_n)(x) \underset{n}{\longrightarrow} (f+g)(x)$. En el siguiente capítulo veremos el teorema de convergencia monótona para funciones medibles no negativas, el cual no utiliza este resultado para su demostración. Este teorema de convergencia nos dice que si tenemos una sucesión creciente de funciones no negativas que tienden puntualmente a una función, el límite de la sucesión es integrable Lebesgue y que la integral de este límite coincide con el límite de las integrales. Por este teorema, y por la aditividad de integrales de funciones simples, entonces:

$$\int_X (f+g)\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n + \psi_n)\ d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n\ d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n\ d\mu = \int_X f\ d\mu + \int_X g\ d\mu$$

v. Tenemos que si $\forall x \in A,\ f(x) = 0$: $\int_A f\ d\mu = \int_X f\chi_A\ d\mu = \int_X 0\ d\mu = 0$

Por otro lado, $\mu(A) = 0$: $\forall \varphi : X \longrightarrow [0, +\infty]$ función simple medible, sabemos que $\int_A \varphi\ d\mu = 0$, por lo que $\int_A f\ d\mu = 0$

vi. Descomponemos f en $f = f \cdot \chi_A + f \cdot \chi_{X\setminus A}$ y tenemos que:

$$\int_X f\ d\mu \overset{\text{iv}}{=} \int_X f \cdot \chi_A\ d\mu + \int_X f \cdot \chi_{X\setminus A}\ d\mu =$$

$$= \int_A f\ d\mu + \int_{X\setminus A} f\ d\mu \overset{\text{v}}{=} \int_{X\setminus A} f\ d\mu$$

□

De estas dos últimas propiedades se deduce que los valores que toma una función en un conjunto de medida nula no varían el valor de la integral de la función. Es decir, que podríamos obviar los conjuntos de medida nula.

Se dice que una propiedad $P(\cdot)$ definida sobre los elementos de X se verifica en **casi todo punto** de $A \in \mathcal{M}$ (en **c.t.p** de A), si se cumple para todo A, excepto en un conjunto de medida nula. Es decir, si :

$N = \{x \in A\ /\ \neg P(x)\} \in \mathcal{M}$ y $\mu(N) = 0$

- Veamos algunas propiedades que surgen de esta definición:

- Si $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\ /\ f = g$ en c.t.p. $x \in X$: f medible $\Longleftrightarrow$ g medible
- Si $f_n, f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\ /\ \forall n \in \mathbb{N}$, f_n medibles y para c.t.p de X se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, entonces: f medible
- Si $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ medibles:

  $f(x) = g(x)$ en c.t.p $x \in X \Longrightarrow \int_X f\ d\mu = \int_X g\ d\mu$
- Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en c.t.p de $\mathbb{R}$, entonces: f es medible Lebesgue.

5.2. Integral de Lebesgue de funciones medibles

Una vez definida la integral de Lebesgue para las funciones medibles no negativas, nos valdremos de que $f = f^+ - f^-$ donde f^+, f^- son dos funciones no negativas para definir la integral de Lebesgue para cualquier función medible.

Dada $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible, se dice que f es integrable Lebesgue sobre X respecto a la medida μ si las integrales de Lebesgue de f^+ y f^- son finitas.

$$\int_X f^+ \, d\mu < +\infty \quad \text{y} \quad \int_X f^- \, d\mu < +\infty$$

En el caso de que f sea integrable Lebesgue, se define su integral sobre X como:

$$\boxed{\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu}$$

Sea $A \in \mathcal{M}$, f es integrable Lebesgue sobre A respecto a μ si $f \cdot \chi_A$ es integrable Lebesgue sobre X y su integral es:

$$\boxed{\int_A f \, d\mu := \int_X f \cdot \chi_A \, d\mu}$$

Definimos el conjunto de funciones integrables Lebesgue sobre X respecto a una medida μ como:

$$\mathcal{L}^1(X, \mu) := \{f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ integrable Lebesgue sobre } X \text{ respecto de } \mu\}$$

Aunque si no hay lugar a confusión con la medida que se está usando se puede omitir esta: $\mathcal{L}^1(X)$.

Cuando alguna de las dos integrales de f^+ o de f^- sobre X sea finita mientras que la otra no, se puede definir la integral de f sobre X como $-\infty$ o $+\infty$ respectivamente, aunque no consideraremos que f sea integrable Lebesgue.

Algunas propiedades de las funciones integrables Lebesgue fáciles de demostrar son:

i. $f \in \mathcal{L}^1(X)$ y $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow f|_A \in \mathcal{L}^1(A)$

ii. $f \in \mathcal{L}^1(X) \Longrightarrow -\infty < f(x) < \infty$ para c.t.p de X

iii. $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ función medible con $f = 0$ en c.t.p de $A \in \mathcal{M}$ ó $\mu(A) = 0 \Longrightarrow f|_A \in \mathcal{L}^1(A)$ y $\int_A f\ d\mu = 0$

iv. $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles con $f = g$ en c.t.p. de X, entonces:

$$f|_A \in \mathcal{L}^1(X) \Longrightarrow g \in \mathcal{L}^1(X) \text{ y } \int_X f\ d\mu = \int_X g\ d\mu$$

v. $\mathcal{L}^1(X)$ es un espacio vectorial. Además, si $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(X)$ y:

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\ d\mu = \alpha \int_X f\ d\mu + \beta \int_X g\ d\mu$$

vi. $A, B \in \mathcal{M}$ con $A \cap B = \emptyset$ y $f|_A \in \mathcal{L}^1(A)$, $f|_B \in \mathcal{L}^1(B)$, entonces $f|_{A\cup B} \in \mathcal{L}^1(A \cup B)$ y:

$$\int_{A\cup B} f\ d\mu = \int_A f\ d\mu + \int_B f\ d\mu$$

vii. $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$ con $f(x) \leq g(x)$ en c.t.p de X, entonces:

$$\int_X f\ d\mu \leq \int_X g\ d\mu$$

viii. $f, g \in \mathcal{L}^1(X) \Longrightarrow \text{máx}\{f, g\}, \text{mín}\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(X)$

ix. $f \in \mathcal{L}^1(X)$ y $\forall A \in \mathcal{M}$, $\int_A f\ d\mu = 0 \Longrightarrow f = 0$ en c.t.p de X

- **Teorema de Caracterización de funciones integrables Lebesgue**:
  Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible, entonces son equivalentes:

  i. $f \in \mathcal{L}^1(X)$
  ii. $|f| \in \mathcal{L}^1(X)$
  iii. $\exists g \in \mathcal{L}^1(X)\ /\ g(x) \geq 0, |f(x)| \leq g(x)$ en c.t.p de X

$*$ **Demostración**:

i. → ii. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X)$, entonces por $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}$, $f^- = \text{máx}\{-f, 0\}$ se tiene $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(X)$. Entonces $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}^1(X)$

ii. → iii. Es trivial, pues con $g = |f| \in \mathcal{L}^1(X)$ tenemos que $|f| \leq g$ y $g = |f| \geq 0$

iii. $\rightarrow$ **i.** Como f es medible, entonces f^+, f^- son funciones medibles no negativas. Si $N := \{x \in X \;/\; |f(x)| > g(x)\}$, tenemos que $\mu(N) = 0$. La siguiente función $\tilde{g} := |f|\chi_N + g\chi_{X\setminus N}$, es una función medible no negativa, y, como $\mu(N) = 0$ y $\forall x \in X \setminus N,\; \tilde{g}(x) = g(x)$, tenemos que $\int_X \tilde{g}\; d\mu = \int_X g\; d\mu$. Entonces por monotonía, como $f^+, f^- \leq f^+ + f^- = |f| \leq \tilde{g}$ tenemos $\int_X f^+\; d\mu,\; \int_X f^-\; d\mu \leq \int_X \tilde{g}\; d\mu < +\infty$. Por lo que $f \in \mathcal{L}^1(X)$.

□

Corolario : Sea $f \in \mathcal{L}^1(X)$, entonces:

$$\boxed{\left|\int_X f\; d\mu\right| \leq \int_X |f|\; d\mu = \int_X f^+\; d\mu + \int_X f^-\; d\mu}$$

En particular, si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible y acotada, entonces $\forall A \in \mathcal{M} \;/\; \mu(A) < +\infty,\; f \in \mathcal{L}^1(A)$ y se tiene:

$$\left|\int_X f\; d\mu\right| \leq \mu(A) \cdot \sup_A |f|$$

Y si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces: $\forall K \subset \mathbb{R}$ compacto, $\;f|_K \in \mathcal{L}^1(K)$.

6

Teoremas de Convergencia

Uno de los principales problemas que encontramos con la integral de Riemann era su mal comportamiento con los límites de sucesiones. Si teníamos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrables Riemann, se podía dar el caso de que el límite de la sucesión no fuese integrable Riemann. O incluso en el caso de que sí fuese integrable Riemann, podía ocurrir que el valor de la integral de ese límite no coincidiese con el valor del límite de las integrales de f_n.

Vamos a ver que la integral de Lebesgue soluciona, en gran parte, este problema, ya que bajo condiciones bastante generales, dada $\{f_n\}$ una sucesión cualquiera de funciones medibles, el límite de las integrales coincide con la integral del límite:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu} \tag{6.1}$$

Igual que en el capítulo anterior, a excepción de que se indique lo contrario, supondremos que estamos trabajando sobre $(X, \mathcal{M}, \mu)$, un espacio de medida completo.

Comenzaremos viendo un teorema de convergencia, en el cual la sucesión de funciones medibles es una sucesión creciente.

- **Teorema de Convergencia Monótona**: Sean $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones medibles tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ en c.t.p de X. Sea $f := \lim\limits_n f_n = \sup\limits_n f_n$ definida en c.t.p de X, entonces:

i. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \geq 0$, entonces: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu = \int_X f \; d\mu}$

ii. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{L}^1(X)$, entonces $f \in \mathcal{L}^1(X) \Longleftrightarrow \sup\limits_n \int_X f_n \; d\mu < +\infty$, y, en ese caso:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu = \int_X f \; d\mu}$$

$*$ **Demostración**:

Definimos $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n := \{x \in X \ / \ f_n(x) > f_{n+1}(x)\}$, sabemos que $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n \in \mathcal{M}$ y $\mu(L_n) = 0$, entonces $L := \bigcup_n L_n \in \mathcal{M}$ y $\mu(L) = 0$.Entonces $\forall x \in X \setminus L,\ \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, luego $\exists \lim\limits_n f_n(x) = \sup\limits_n f_n(x) \in [0, +\infty]$.

Como ni la medibilidad ni la integrabilidad ni el valor de la integral (en caso de que exista) varían si se altera el valor de la función en un conjunto de medida nula, podemos suponer $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ y f definida para todo X. Por lo que f es medible.

Veamos i. Como $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \leq f$, por monotonía tenemos que $\int_X f_n \; d\mu \leq \int_X f \; d\mu$ y, como $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \leq f_{n+1}$, entonces $\{\int_X f_n \; d\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente. Por tanto, existe el límite de la sucesión, y coincide con el supremo. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu \leq \int_X f \; d\mu \ .$$

Veamos ahora la otra desigualdad. Por el teorema de aproximación por funciones simples, $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos una sucesión de funciones simples medibles $\{\varphi_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall x \in X, \forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leq \varphi_{n,m}(x) \leq \varphi_{n,m+1}(x) \leq f_n(x)$ y $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \varphi_{n,m}(x) \underset{m}{\longrightarrow} f_n(x)$.

Si tomamos la sucesión $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\psi_n := \max\{\varphi_{1,n}, ..., \varphi_{n,n}\}$, esta sucesión es creciente y está igualmente formada por funciones simples medibles no negativas, de forma que, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ 0 \leq \psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ y $\psi_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$.

Entonces:

$$\int_X \psi_n \; d\mu \leq \int_X f_n \; d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Si conseguimos ver que $\int_X f\ d\mu \leq \lim\limits_n \int_X \psi_n\ d\mu$, entonces quedará demostrado.

Sea φ una función medible simple cualquiera con $0 \leq \varphi \leq f$. Veamos que $\int_X \varphi\ d\mu \leq \lim\limits_n \int_X \psi_n\ d\mu$ Si $\varphi = c \in [0, +\infty)$ constante, entonces si $c = 0$ es trivial. Si $c \in (0, +\infty)$, entonces fijemos $a \in (0, c)$. Como $\varphi \leq f = \sup\limits_n \psi_n$, tenemos que $\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq n_0$ $\psi_n(x) > a$. Sea $A_n := \{\psi_n > a\}$, entonces $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ sucesión de conjuntos medibles creciente con $X = \bigcup\limits_n A_n$. Por tanto, $\mu(A_n) \uparrow \mu(X)$.

Por otra parte, $a \cdot \chi_{A_n} \leq \psi_n$, luego $a \cdot \mu(A_n) \leq \int_X \psi_n\ d\mu$, de donde se deduce que $a\mu(X) \leq \lim\limits_n \int_X \psi_n\ d\mu$, entonces:

$$\int_X \varphi\ d\mu = c \cdot \mu(X) \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n\ d\mu\ .$$

En el caso general, si φ no es constante, entonces, como es simple, tenemos que $\varphi = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{E_i}$ con $c_i \in [0, +\infty)$ y $E_i \in \mathcal{M}$, $\forall i \in \{1, ..., p\}$ tal que $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y con $X = \bigcup\limits_{i=1}^p E_i$. Cada función $c_i \cdot \chi_{E_i}$ es constante en el conjunto E_i, por lo que aplicando el resultado anterior tenemos:

$$\int_X \varphi\ d\mu = \sum_{i=1}^p \int_X c_i \cdot \chi_{E_i}\ d\mu = \sum_{i=1}^p \int_{E_i} \varphi\ d\mu \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^p \lim_{n\to\infty} \int_{E_i} \psi_n\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^p \int_{E_i} \psi_n\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n\ d\mu$$

Por lo que, para cualquier función simple medible φ tal que $0 \leq \varphi \leq f$:

$$\int_X \varphi\ d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n\ d\mu \Longrightarrow \int_X f\ d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n\ d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu$$

Y entonces:

$$\boxed{\int_X f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu}$$

Para la segunda parte del teorema, si f_n no tienen por qué ser no negativas, entonces tomamos la sucesión $\{f_n - f_1\}_{n\in\mathbb{N}}$ que sí es no negativa creciente y que tiende a $f - f_1$. Por lo que aplicando **i.**:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f_n - f_1)\ d\mu = \int_X (f - f_1)\ d\mu$$

Entonces tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu - \int_X f_1\ d\mu = \int_X f\ d\mu - \int_X f_1\ d\mu \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu = \int_X f\ d\mu$$

En lo anterior hemos supuesto $\int_X f_1\ d\mu < +\infty$, pero el caso $\int_X f_1\ d\mu = +\infty$ es trivial.

$\square$

De este teorema se deduce el siguiente corolario:

- **Corolario**: Sean $f_n, f : X \longrightarrow [0, +\infty](n \in \mathbb{N})$, entonces:

  i. $\boxed{\displaystyle\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\ d\mu}$

  ii. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\ d\mu < +\infty$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(X)$ y entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge en c.t.p de X.

  iii. La siguiente función es una medida positiva:

$$\begin{aligned} \nu_f : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \int_A f\ d\mu \end{aligned}$$

$*$ **Demostración**:

i. Aplicando el teorema de convergencia monótona sobre la sucesión $\left\{ \sum_{i=1}^{n} f_n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$

ii. Por i. tenemos que:

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\ d\mu < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(X) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < +\infty \text{ en c.t.p de } X$$

iii. Es claro salvo la aditividad numerable. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}\ /\ A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces, si definimos $f_n := f \cdot \chi_{A_n}$, $\sum_{i=1}^{\infty} f_n = f$ tenemos que:

$$\nu_f(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(A_n)$$

Otro resultado importante que nos ayudará a demostrar el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada es el lema de Fatou.

- **Lema de Fatou**: Sean $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty](n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones medibles. Entonces:

$$\boxed{\int_X \liminf_n f_n \; d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \; d\mu}$$

$*$ **Demostración**:

Definimos la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $g_n = \inf_n\{f_n, f_{n+1}, ...\}, \; \forall n \in \mathbb{N}$. Esta es una sucesión de funciones medibles no negativas creciente con $\lim_n g_n = \liminf_n f_n$ y, $\forall n \in \mathbb{N}, \; g_n \leq f_n$.

Entonces, por el teorema de convergencia monótona:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \; d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \; d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu$$

Por otra parte, como $g_n \leq f_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \; d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \; d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu$$

Por lo que:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu$$

$\square$

A continuación, veremos el resultado que resuelve el problema de la itegral de Riemann con los límites, el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada, el cual determina que, bajo unas condiciones muy generales, dada una sucesión de funciones, la integral del límite coincide con el límite de las integrales.

- **Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada**:

  Sean $f, f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \; (n \in \mathbb{N})$ y $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \; f_n$ medibles, $|f_n| \leq g$ en c.t.p de X, g integrable y $f = \lim_n f_n$ en c.t.p de X. Entonces $f \in \mathcal{L}^1(X)$ y :

$$\boxed{\int_X f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu}$$

$*$ **Demostración**:

Sea el conjunto Z formado por los puntos de X que no cumplen alguna de las propiedades de la hipótesis:

$$Z := \{x \in X\ /\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f_n| > g\})$$

Entoces, $Z \in \mathcal{M}$ y $\mu(Z) = 0$

Como únicamente no se cumplen en un conjunto de medida nula, al igual que en anteriores demostraciones, podemos suponer que todos los límites y desigualdades de la hipótesis son para todo X. De manera similar, como $g \in \mathcal{L}^1(X)$, se tiene que $g(x) < +\infty$ excepto en un conjunto de medida 0, por lo que también podemos suponer $g(x) < +\infty$, $\forall x \in X$.

Tenemos entonces que f es medible y que $|f| \leq g \in \mathcal{L}^1(X)$, luego:

$$\int_X |f|\ d\mu \leq \int_X g\ d\mu < +\infty \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1(X)$$

Consideramos la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $g_n = \sup_{k\geq n} |f_k - f|$. Esta es una sucesión decreciente de funciones medibles sobre X que converge puntualmente a 0 en X. Además, como $0 \leq g_n \leq |f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$, se tiene que $g_n \in \mathcal{L}^1(X)$.

La sucesión $\{g_1 - g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es entonces una sucesión creciente de funciones no negativas integrables Lebesgue y se tiene que $\lim_n (g_1 - g_n) = g_1$.

Aplicamos el teorema de convergencia monótona a esta sucesión

$$\int_X g_1\ d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} (g_1 - g_p)\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (g_1 - g_n)\ d\mu = \int_X g_1\ d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\ d\mu$$

y obtenemos que $\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\ d\mu = 0$.

Por último, como

$$\left|\int_X f_n\ d\mu - \int_X f\ d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f)\ d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f|\ d\mu \leq \int_X g_n\ d\mu$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_X f_n \; d\mu - \int_X f \; d\mu\right| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X f_n \; d\mu = \int_X f \; d\mu \; .$$

□

6.1. Relación entre la Integral de Riemann y la Integral de Lebesgue

En este apartado veremos la potente relación que hay entre ambas integrales y cómo la de Lebesgue generaliza a la de Riemann.

- Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo n-dimensional, y sea $f : R \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}(R)$ una función integrable Riemann. Entonces $f \in \mathcal{L}^1(R, m)$ integrable Lebesge y:

$$\boxed{\int_R f(x) \; dx = \int_R f \; dm}$$

$*$ **Demostración**:

Como R es un rectángulo n-dimensional, $R \in \mathcal{L}$ es un conjunto medible.

Además, como $f \in \mathcal{R}(R)$ integrable Riemann, entonces es acotada y el conjunto de puntos donde f es discontinua tiene medida 0. Por lo que $\exists Z \subset R \; / \; m(Z) = 0$ y $f|_{Z^c}$ es continua.

Veamos que entonces f es medible. Sea $G \subset \mathbb{R}$ abierto.

$$f^{-1}(G) = (f^{-1}(G) \cap Z) \cup (f^{-1}(G) \cap Z^c)$$

Como $f^{-1}(G) \cap Z \subset Z \overset{m(Z)=0}{\Longrightarrow} f^{-1}(G) \cap Z \in \mathcal{L}$. Y como $f|_{Z^c}$ continua y G abierto, entonces $f^{-1}(G)$ es abierto, y por tanto $f^{-1}(G) \cap Z^c \in \mathcal{L}$. Como para cualquier G abierto $f^{-1}(G) \in \mathcal{L}$, entonces f medible.

Además, f es acotada, por lo que $\exists M \geq 0 \; / \; \forall x \in R, \; |f(x)| \leq M$. Es decir, $|f| \leq M \cdot \chi_R$. Utilizando propiedades de la integral de Lebesgue para funciones medibles no negativas:

$$\int_R |f| \; dm \leq \int_R M \cdot \chi_R \; dm = M \cdot m(R) < +\infty$$

Si f fuese no negativa, entonces sea $P \in \mathcal{P}(R)$ una partición del rectángulo n-dimensional R, y sean $S \subset P$ los subrectángulos de la partición. Definimos las siguientes funciones:

$$\varphi_P := \sum_{S \subset P} M_S(f) \cdot \chi_S(x) \qquad \text{con} \;\; M_S(f) = \sup\{f(x) \;/\; x \in S\}$$

$$\psi_P := \sum_{S \subset P} m_S(f) \cdot \chi_S(x) \qquad \text{con} \;\; m_S(f) = \text{ínf}\{f(x) \;/\; x \in S\}$$

Estas funciones son funciones simples medibles no negativas tales que $\forall x \in R,\; 0 \leq \psi_P(x) \leq f(x) \leq \varphi_P(x)$. Por lo que:

$$L(f,P) = \sum_{S \subset P} m_S(f) \cdot m(S) = \int_R \psi_P \; dm \leq \int_R f \; dm =$$

$$= \int_R f \; dm \leq \int_R \varphi_P \; dm = \sum_{S \subset P} M_S(f) \cdot m(S) = U(f,P) \; .$$

Luego

$$\int_R f(x) \; dx = \sup_P \; L(f,P) \leq \int_R f \; dm \leq \text{ínf}_P \; U(f,P) = \int_R f(x) dx$$

y, por lo tanto

$$\int_R f \; dm = \int_R f(x) \; dx \; .$$

Si f no fuese no negativa, la podemos representar como $f = f^+ - f^-$, ambas funciones medibles no negativas. Por lo que:

$$\int_R f(x) \; dx = \int_R f^+(x) \; dx - \int_R f^-(x) \; dx = \int_R f^+ \; dm - \int_R f^- \; dm = \int_R f \; dm$$

□

Con esto se demuestra que la integral de Lebesgue es una generalización de la de Riemann, pues toda función integrable Riemann lo es Lebesgue y coinciden los valores de sus integrales. Sin embargo, el recíproco no es correcto, existen funciones integrables Lebesgue que no son integrables Riemann. Por ejemplo, la función de Dirichlet, la cuál vimos en el capítulo de limitaciones de la integral Riemann, no era una función integrable Riemann, sin embargo sí que es integrable Lebesgue. La función de Dirichlet restringida es la función característica del conjunto de racionales $\chi_{\mathbb{Q}}$. Como es discontinua en un conjunto de medida no nula, entonces no es integrable Riemann, sin embargo, es una función simple medible, por lo que es integrable Lebesgue, y:

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} \, dm = 1 \cdot m(\mathbb{Q}) + 0 \cdot m(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0 \ .$$

7
Conclusión

A lo largo del trabajo hemos desarrollado tanto la teoría de integración de Riemann como la de Lebesgue, haciendo hincapié en las limitaciones que presentaba la primera y cómo esta segunda resolvía estas deficiencias.

Se ha presentado y desarrollado la teoría de integración de Riemann sobre $\mathbb{R}^n$, destacando sus limitaciones, y exponiendo resultados importantes sobre esta teoría. Hemos estudiado las deficiencias de la integral Riemann, las cuales motivaron el desarrollo de nuevas teorías de integración. Además, sobre la integral de Riemann es importante destacar el teorema de Lebesgue, el cual determina que cualquier función f definida en un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$ y acotada es integrable Riemann si y solo si el conjunto de puntos de R en los cuales la función no es continua tiene medida nula. Este resultado consigue relacionar estrechamente la teoría de integración de Riemann con la teoría de la medida, la cual es el fundamento en el cual se basa la teoría de integración de Lebesgue.

Posteriormente, se ha desarrollado la teoría de la medida y la integral de Lebesgue, destacando cómo resuelve esta integral las limitaciones de la primera. Cabe recalcar el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada, el cual determina que dada una sucesión monótona de funciones integrables Lebesgue, el límite de la sucesión es una función integrable Lebesgue y que la integral de este límite coincide con el límite de las integrales.

Por último, hemos comprobado que la integral de Lebesgue constituye una generalización de la integral de Riemann, es decir, que toda función integrable Riemann lo es Lebesgue, y que en ese caso el valor de ambas integrales coincide.

Es por ello que la obra de Lebesgue constituyó un gran avance para la teoría de la integración, pues, al suponer una generalización de la integral de Riemann, permitió mantener intactos los cálculos de estas integrales, pero de la misma forma consiguió ampliar el conjunto de funciones que son integrables a la vez que resolvió las limitaciones que presentaba la integral de Riemann.

Bibliografía

[1] Luis Bernal González. "Series de funciones e integral de Lebesgue". 2015.

[2] Sandra Jiménez Almarcha. "Integrales de Riemann y Lebesgue". enero de 2021.

[3] Walter Rudin. *Real and complex analysis / Walter Rudin*. 3.ª ed. Vol. 1974. 1974. 1 de ene. de 1974, págs. 1-99. URL: `http://library.um.ac.id/free-contents/downloadpdf.php/buku/real-and-complex-analysis-walter-rudin-13366.pdf`.

[4] Alberto Ruiz-Arteaga González. "Las integrales de Riemann, Lebesgue y Riemann generalizada". Sep. de 2019.

[5] Michael Spivak. *Cálculo en variedades*. Reverte, 1 de ene. de 1970.