

HIPÓTESIS DE MERCADO EFICIENTE, CAOS Y MERCADO DE CAPITALES

Andrés Fernández Díaz

Catedrático de la Universidad Complutense
Consejero Emérito del Tribunal de Cuentas

Pilar Grau Carles

Profesora Titular de la Universidad Rey
Juan Carlos

Contenido

Introducción. Chartismo y fundamentalismo. Mercados eficientes. Modelización de los mercados de capitales y caos. El mercado de capitales en España. Características de las series. Evidencias de no-normalidad en las cotizaciones: El test R/S. La dimensión de correlación. Los exponentes de Liapunov. Análisis espectral. Evidencias de no-linealidad en las cotizaciones: el test BDS. Conclusiones.

Contents

Introduction. Chart and fundamental analysis. Efficient markets. Modelization of the capital markets and chaos. The capital market in Spain. Time series characteristics. Evidence of non-normality in the market prices: R/S test. The correlation dimension. Lyapunov exponents. Spectral analysis. Evidence of nonlinearity in the market prices: BDS test. Conclusions.

Resumen

La complejidad constituye una de las propiedades características del comportamiento económico. El nuevo campo del conocimiento llamado Economía Dinámica Caótica surge precisamente con el objetivo de entender estructurar y explicar de una forma endógena tal complejidad. En este artículo empezamos con una reconsideración de la Hipótesis de los Mercados Eficientes, el análisis chartista y fundamentalista y la modelización de los mercados de capitales y el caos, principalmente analizamos el mercado de capitales desde el punto de vista de la complejidad y el caos haciendo referencia al comportamiento de la bolsa de Madrid en el período 1941-1998 para el Índice General y durante el periodo transcurrido 1987-1998 para el índice Ibex35. En el trabajo demostramos la necesidad de conocer con independencia de la regularidad, si las series temporales son estocásticas, o deterministas con una ley oculta. Este es el problema clave que tenemos que tomar en consideración.

Abstract

Complexity is one of the most important characteristic properties of the economic behaviour. The new field of knowledge called Chaotic Dynamics Economics born precisely with the objective of understanding, structuring and explaining in the endogenous way such complexity. In this paper we begin with a reappraisal of the Efficient Market Hypothesis, the fundamental and chart analysis and the modelization of the capital markets and chaos. Principally, we analyze the capital market from the point of view of complexity and chaos, by making reference to the behaviour of the Madrid stock exchange, in the period of 1941-1998 for the General Index, and during the period transpired between 1987-1998 for the daily Ibex35 index. In the work we show the need of knowing with independence of the irregularity, if the time series is stochastic or deterministic with a hidden explanation. That is the key problem to take into account.

Palabras clave: Complejidad, Caos, Hipótesis de Mercado Eficiente, análisis fundamental, análisis chartista, mercado de capitales, no normalidad, no linealidad, Bolsa de Madrid, Índice General, Ibex35.

Key words: Complexity, Chaos, Efficient Market Hypothesis, Fundamental Analysis, Chart Analysis, Capital Market, No-normality, nonlinearity, Madrid Stock Exchange: General Index, Ibex35 Index.

Introducción

El análisis de los mercados financieros y la evolución de los precios de los activos constituye un capítulo esencial en el ámbito de la Economía, y ello por diferentes razones. En primer lugar, y esto es fácil de entender, debido a la gran importancia de este segmento en el conjunto de los diferentes mercados que componen o integran la actividad económica. En segundo lugar por cuanto supone de reto en términos de capacidad explicativa y de predicción, dado que sistemáticamente se trata de encontrar los fundamentos y mecanismos que subyacen en las fluctuaciones de los precios, por una parte, y de intentar la predicción de los mismos por otra. En tercer lugar, y esto es especialmente relevante a nuestros efectos, porque los mercados financieros, en general, y los mercados de capitales, en particular, poseen unas características y aptitudes muy adecuadas para su estudio y tratamiento mediante series temporales como consecuencia de un mejor “aprovisionamiento” estadístico, lo que, a su turno, facilita y hace posible el análisis en el marco de referencia de la dinámica caótica. Evidentemente a un físico preocupado por la investigación sobre partículas fundamentales le parecerá despreciable una serie de 2.000 datos, pero a un economista, acostumbrado a hacer “milagros” con precarias “nubecillas” de puntos, este acervo estadístico le resultará más que suficiente, estimulante y de gran provecho.

Sin embargo, los estudios llevados a cabo por el mundo académico y los métodos utilizados por los analistas bursátiles para realizar sus inversiones no siguen siempre el mismo camino. La teoría más extendida dentro del mundo académico es la Hipótesis de los Mercados Eficientes (EMH), que propugna que los precios de los activos reflejan toda la información disponible. Sin embargo, dentro del mundo no académico no se presta demasiada atención a los resultados de los estudios sobre la eficiencia de mercado, y los analistas bursátiles desarrollan sus propias técnicas, pudiéndose agrupar, según el método que utilicen para tomar sus decisiones de inversión, en dos corrientes principales, el chartismo y el fundamentalismo.

Expondremos brevemente la posición de cada una de las posturas, para después desarrollar algunos modelos dinámicos que se basan en el comportamiento de los agentes que intervienen en el mercado. Posteriormente se hará una aplicación a la Bolsa de Madrid referida a un período del que hemos excluido los años más recientes para evitar distorsiones, dada la peculiar naturaleza de los acontecimientos económicos en esta última etapa.

Chartismo y fundamentalismo

El chartismo, llamado también análisis técnico, basa su estrategia de inversión en el comportamiento del mercado en sí mismo. Es decir, sus seguidores tratan de predecir la evolución de los precios basándose en su pasado. Los chartistas piensan que los cambios en la oferta y en la demanda pueden anticiparse observando los “charts” e identificando pautas en los movimientos de los precios de los activos.

El mundo académico en su mayoría, y debido principalmente a la falta de fundamento teórico de este tipo de análisis, no ha aceptado el método chartista para la predicción de los precios de los activos. Además, los tests sobre la eficiencia de mercado parecen negar la posibilidad de obtener beneficios basándose en la información pasada de los precios. Sin embargo, recientemente, han aparecido algunos trabajos¹ que intentan contrastar si las reglas de comercio técnicas pueden aportar beneficios.

A modo de ilustración expondremos aquí alguna de las reglas técnicas simples más estudiadas; la del oscilador de la media móvil y la regla de filtrado.

En la regla del oscilador de la media móvil, las señales de compra y venta se generan con dos medias móviles del índice, una a corto plazo y otra a largo plazo. La estrategia, en su forma más simple, consiste en comprar cuando la media móvil de periodo corto sube por encima de la de periodo largo y vender cuando cae por debajo. Esta regla se puede mejorar si se introduce una banda alrededor de la media móvil, con lo que se consiguen reducir las señales de compra o venta, debido a que la señal de compra aparece únicamente cuando la media móvil corta está por encima de la media móvil larga en una cantidad superior a la banda; es decir, no se producirá ninguna señal mientras el precio se encuentre dentro de la banda.

En la regla de filtrado se genera una señal de compra cuando el precio alcanza un nivel de resistencia. Este nivel de resistencia se define, en general, como el máximo local. Normalmente los agentes intentan vender en el precio más alto y, debido a la presión de venta, el precio se resistirá al alza; pero si el precio sube por encima del pico anterior, se habrá roto la resistencia y se producirá una señal de compra. O sea que se recomienda comprar cuando el precio sube un tanto por ciento por encima del último pico y vender cuando baja un tanto por ciento por debajo del último mínimo.

Los analistas fundamentales se basan en el valor real o intrínseco de una acción. En su forma más simple la estrategia del análisis fundamental consiste en que si el precio de la acción está por encima de su valor fundamental, venderán porque esperan que el precio va a bajar, mientras que, si por el contrario, el precio de la acción está por encima de su valor fundamental, comprarán.

El fundamentalismo considera que el valor intrínseco de una acción depende del potencial para la obtención de beneficios de la empresa. Este valor intrínseco se determina a través de un análisis cuidadoso de la situación de la empresa: por ejemplo, de su tasa de crecimiento y de la duración de dicha tasa; cuanto mayores sean ambos, mayor será el beneficio esperado y por tanto, mayor será el valor intrínseco. Otro factor del que dependen los beneficios es la expectativa de reparto de dividendos, determinando su mayor o menor cuantía la del valor fundamental. Dicho valor depende, asimismo, de otras variables, como el grado de riesgo y el nivel de tipos de interés de la economía, de forma que cuanto mayores sean estos, menor será el valor intrínseco del título. Del resultado del análisis, a partir de estas u otras variables, se obtiene una recomendación de compra o venta del valor analizado, que se basa en la diferencia entre el valor intrínseco y el de mercado.

Durante los últimos veinticinco años, en el mundo académico, el análisis fundamental ha permanecido prácticamente estancado. Recientemente, no obstante, y debido a las anomalías detectadas en el mercado que ponen en cuestión la hipótesis de los mercados eficientes, han aparecido trabajos que aportan ideas nuevas en la teoría fundamental. Destacaremos aquí dos de ellos: el de Ou y Penman (1989), que intenta explotar la información obtenida mediante el estudio del estado financiero de una empresa para predecir rentabilidades extraordinarias, y el de Fama y French (1993), que estudia el tamaño de la empresa y el ratio valor contable-valor de mercado de las acciones para explicar la rentabilidad media de los activos. Ambos trabajos han recibido importantes críticas en su punto más débil, consistente en la carencia de soporte conceptual para los resultados empíricos que sustentan las conclusiones, aunque es innegable que han abierto una vía para el resurgimiento del análisis fundamental.

A estos trabajos que acabamos de mencionar prodía añadirse la interesante investigación realizada posteriormente por Viñolas Serra (1996) en la que se pone de relieve el panorama de creciente complejidad con la que ha de enfrentarse en análisis

fundamental. Entre las tendencias o características que definen esa mayor complejidad destaca la progresiva globalización de los mercados financieros, la innovación financiera y profusión de nuevos productos y, finalmente, la revolución tecnológica en materia de información. Este nuevo marco de referencia, a su vez, da lugar, como señala Viñolas, a una modificación de los instrumentos estadísticos y matemáticos, desbordándose en cierta medida, y como consecuencia de ello, los límites tradicionales del análisis fundamental.

Mercados eficientes

En la teoría financiera se dice que un mercado es eficiente si refleja toda la información disponible, no pudiéndose seguir sobre esta base, una regla de comercio que proporcione sistemáticamente beneficios, desapareciendo la posible ventaja comparativa basada en la diferencia de información.

Según la hipótesis de mercado eficiente, los precios de las acciones reflejan tanto la información sobre aquellos hechos que han ocurrido, como sobre aquellos que el mercado espera que ocurran en el futuro. Dependiendo de como se defina el concepto de información que posean los agentes se pueden distinguir tres categorías de eficiencia de mercado; la forma débil, la forma semi-fuerte, y la forma fuerte.

Sea I la información que poseen los agentes y que ya está reflejada en los precios. Si I comprende los precios pasados de los activos, entonces los mercados serán eficientes en su forma débil. Es decir, toda la información contenida en los precios históricos está reflejada completamente en los precios presentes. Según esta hipótesis, no es posible predecir el precio futuro de un activo basándose en la evolución de los precios pasados.

Los mercados son eficientes en su forma semi-fuerte si I introduce toda la información disponible por el público, no pudiendo en este caso el inversor obtener beneficios sistemáticos basándose en información pública, ya que dicha información está reflejada en el precio

La forma más restrictiva es la forma fuerte en la que I incluye, además de la información pública, la no pública, de modo que no es posible la obtención de rendimientos extraordinarios basándose en la información que posean los agentes, sea esta pública o privada.

Por la propiedad de las esperanzas condicionadas, el cumplimiento de la eficiencia en la forma fuerte implica el cumplimiento en la forma semi-fuerte, y esta, a su vez, implica el de la eficiencia en la forma débil.

La versión de eficiencia débil se enfrenta a los principios del análisis técnico que, como hemos expuesto, utiliza la serie pasada de los precios de las acciones para elaborar reglas de compra o venta; mientras que la semi-fuerte y la fuerte van en contra de las bases del análisis fundamental, ya que todo lo que se puede saber en relación con el crecimiento esperado de los beneficios o con la evolución de la empresa ya está descontado en los precios.

La hipótesis de mercado eficiente es consistente con los procesos llamados “juego justo”. Un proceso de juego justo es aquel en el que no se puede obtener un beneficio extraordinario basándose en la información disponible por el inversor hasta ese momento. Sea I_t es el conjunto de información disponible para el inversor hasta el momento t ; si se cumple el modelo de juego justo, será imposible utilizar esta información para obtener rendimientos sistemáticos. Es decir r_t es un juego justo si:

$$E(r_{t+1} / I_t) = 0$$

por lo que no es posible predecir r_{t+1} a partir de I_t .

Vamos a exponer, brevemente los tests realizados para comprobar cada una de las versiones de eficiencia de mercado.

Antes de examinar los tests de la forma débil conviene destacar que la mayoría de ellos fue llevado a cabo antes del desarrollo de la teoría de la eficiencia de mercado, precisamente intentando comprobar que la utilización de la información contenida por los precios pasados no conducía a la obtención de beneficios. Más adelante se convirtieron en test sobre el modelo de camino aleatorio.

La hipótesis del camino aleatorio supone que los rendimientos sucesivos son independientes y que están idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo. Aunque en cierto modo esta hipótesis es una versión restringida de la eficiencia débil, el cumplimiento de la primera permite concluir la segunda.

Los primeros estudios intentan comprobar la existencia de relaciones lineales entre los cambios en los precios a lo largo del tiempo, sirviendo el coeficiente de correlación como técnica para llevar a cabo dicha comprobación. La mayoría de los estudios² obtienen un coeficiente de correlación serial estadísticamente igual a cero. Sin embargo, otros tipos de análisis se basan en la realización de tests para comprobar la relación entre precios pasados y futuros mediante la búsqueda de ciclos³, pareciendo existir una evidencia pequeña de ciclos mensuales y estacionales, que pueden ser causados por el cambio de la media de los rendimientos a lo largo del tiempo, pero que no es posible utilizar para obtener beneficios extraordinarios.

El último tipo de test sobre la forma débil es el basado en comprobar si alguna regla de compra es capaz de proporcionar beneficios sistemáticos. Una de las estrategias más estudiadas es la llamada regla de filtro⁴. Como ya explicamos, esta consiste en comprar cuando el precio del activo sube un porcentaje sobre el precio anterior más bajo y mantener hasta que baje otro porcentaje del anterior más alto. Los estudios consisten en comparar esta estrategia con la de comprar y mantener. A partir de los resultados, parece que en algún caso, a corto plazo, es posible la obtención de beneficios con la estrategia del filtro, aunque éstos serían pequeños y quedarían eliminados si se contabilizan los costes de transacción, funcionando mejor a largo plazo la estrategia de comprar y mantener.

Los tests de la forma semi-fuerte se han llevado a cabo comprobando la eficiencia respecto a distintos tipos de información. Por ejemplo, el "split" de acciones, los anuncios de aumento o reparto de dividendos, anuncios de compra o venta de grupos de acciones de otra empresa, etc. Los resultados de la mayoría de los estudios son similares, concluyendo que la información se incorpora rápidamente al precio, e incluso, gran parte del impacto sobre el precio tiene lugar antes de que se realice el anuncio público.

La comprobación de la teoría fuerte incluye dos tipos de tests: el primero tiene que ver con la forma en que la información no pública puede llevar a rendimientos extraordinarios, mientras que el segundo examina el éxito de los principales participantes en el mercado, mediante la utilización de la posible información pública y privada que posean. Ya que no es posible la identificación de la información no pública, los tests examinan el rendimiento obtenido por aquellos individuos o grupos que están en posición de poseer información no pública⁵. Los resultados parecen que no apoyan la forma fuerte de la eficiencia en los mercados financieros.

La principal conclusión que se puede obtener de los estudios sobre la eficiencia en los mercados financieros es que la información pública se incorpora rápidamente a los precios, por lo que no es probable que puedan obtenerse rendimientos extraordinarios a partir de la misma. Una estrategia de compra debe basarse en la localización de activos con perspectivas de crecimiento mayores que los que espera el mercado. Es decir que la forma de alcanzar rendimientos superiores a los de los demás consiste en obtener información antes que el resto de los participantes en el mercado, o que éstos no tengan acceso a ella.

a) Teoría de las martingalas

Haremos una breve referencia al modelo de la martingala⁶, que es menos restrictivo que la hipótesis del camino aleatorio. En sentido amplio, un proceso estocástico es una martingala si su trayectoria no sigue ninguna tendencia ni periodicidad. Más formalmente, se dice que un proceso x_t con $t \in [0, \infty)$ es una martingala respecto a un conjunto de información I_t y respecto a la probabilidad P si para todo $t > 0$:

1. x_t es conocido para todo $t > 0$, lo que significa que x_t está incluido en el conjunto de información I_t .
2. Las predicciones incondicionales son finitas, es decir, $E|x_t| < \infty$.
3. $E_t[x_T] = x_t$ para todo $t < T$ con probabilidad 1*, que quiere decir que la mejor predicción de los valores futuros no observables es la última observación de x_t .

Es decir que un proceso de martingala está compuesto por variables cuyas variaciones futuras son completamente impredecibles dado el conjunto de información que se posee.

El proceso de martingala está relacionado con el de juego justo ya que si x_t es una martingala $x_{t+u} - x_t$ con $u > 0$ es un juego justo,

$$E_t[x_{t+u} - x_t] = E_t[x_{t+u}] - E_t[x_t] = x_t - x_t = 0$$

en otras palabras, la mejor predicción del cambio en x_t , para un intervalo arbitrario $u > 0$ es 0, lo que significa, que si el proceso sigue una trayectoria con algún tipo de tendencia reconocible, el proceso no es una martingala⁷.

Si consideramos que los precios de los activos no son completamente impredecibles, entonces no siguen un proceso de martingala, siendo posible, en general observar, en media, una tendencia creciente o decreciente. Un proceso que en media crece se llama submartingala y si por el contrario, en media decrece, entonces es una supermartingala. La importancia de los procesos de submartingala se deriva de que es posible transformarlos y convertirlos en martingalas. Existen dos métodos para lograrlo. El primero consiste en sustraer una tendencia esperada para conseguir que las desviaciones respecto a la

tendencia sean completamente impredecibles, de modo que, las variables transformadas seguirán una martingala. El segundo consiste en transformar la distribución de probabilidad de forma que la esperanza del proceso respecto a la nueva probabilidad satisfaga las condiciones de martingala.

Muchos de los tests empíricos del modelo de la martingala intentan probar que es imposible, conociendo los rendimientos pasados, obtener buenas predicciones de los rendimientos futuros⁸; sin embargo, recientemente se han desarrollado nuevas herramientas para contrastar la hipótesis de martingala basadas en el análisis espectral⁹, conduciendo la mayoría de los resultados a rechazar que la serie de precios se comporte como una martingala.

Conviene decir, antes de terminar de analizar la eficiencia de los mercados, que se han detectado importantes irregularidades en los mercados que contradicen la hipótesis de eficiencia de mercado y que se han dado en llamar anomalías. Las más relevantes son el denominado “efecto tamaño”¹⁰, por el cual las empresas pequeñas parece que proporcionan rendimientos superiores a las empresas grandes, el efecto enero, por el cual los rendimientos son superiores en el mes de enero¹¹, el efecto sobre-reacción por el que las cotizaciones reaccionan en exceso a la nueva información que llega al mercado¹² y el efecto cambio de mes, según el cual parece que las acciones generan rendimientos positivos el último día de cada mes y durante la primera quincena del siguiente.

Hasta el momento no se ha podido establecer una explicación económica completa sobre la existencia de estas y otras anomalías de mercado, lo que puede llevarnos a la conclusión de que no conocemos completamente el mecanismo de formación de precios en los mercados financieros.

Modelización de los mercados de capitales y caos.

En diferentes ocasiones hemos podido anticipar que las series temporales que reflejan los rendimientos de los activos presentan, en principio, un comportamiento y una presencia aleatoria. Pero también sabemos, por trabajos realizados con anterioridad, que la irregularidad y el desorden que exhiben dichas series puede esconder leyes y explicaciones deterministas que habría que intentar desentrañar.

Sobre esta base han surgido en los últimos años modelizaciones de los mercados financieros recogiendo el comportamiento de los agentes con el fin de explicar el mecanismo y las razones que dan lugar a las fluctuaciones en los precios, agrupando para ello a los inversores en diferentes tipos y modelizando la conducta de cada uno de ellos. De este modo se trata de explicar la evolución de los rendimientos que, en general, y como hemos dicho, se muestran erráticos, con periodos de alzas y bajas generalizadas.

Algunos intentos de modelización como los de Day y Huang (1990), De Grauwe et al. (1993), Fernández Díaz et al. (1994) y Grau (1997) distinguiendo entre dos tipos de inversores; los fundamentalistas y los chartistas o técnicos, consiguen obtener series de precios fluctuantes y comportamientos caóticos para ciertos valores de los parámetros del modelo.

En general, un inversor “fundamental” se fija en el valor intrínseco que debe tener el activo y compra cuando el precio está por debajo de dicho valor, porque espera que suba y vende cuando está por encima porque espera que baje. Sin embargo, un

inversor “técnico” se basa en la evolución pasada de los precios para decidir su estrategia; en términos simples, compra cuando observa que el precio sube y vende cuando observa que baja.

Para la elaboración del primero de los modelos que vamos a exponer, nos basaremos en el expuesto por Day y Huang (1990), Day y Huang (1993) y Grau (1997) donde se propone una función de exceso de demanda y un ajuste dinámico de los precios para dicha función.

a) Los inversores fundamentales.

Para su estrategia de inversión los fundamentalistas se basan en el valor intrínseco que llamaremos P^* . Si el precio en el momento t , que denominaremos P_t , está por debajo del valor fundamental, el inversor compra y si está por encima, vende.

Sea $f(P_t)$ una función que representa la posibilidad de obtener pérdidas cuando no se vende a tiempo y los precios son altos, o de no comprar a tiempo si los precios son bajos. Además supongamos que el inversor fija un precio máximo P_s y un precio mínimo P_i , de forma que si $P_t < P_i$ o $P_t > P_s$ el inversor está fuera del mercado.

Por otro lado, cuanto más cerca esté P_t de los precios máximo o mínimo mayor será la posibilidad de incurrir en pérdidas si no se compra o vende a tiempo. Sin embargo, si P_t está cerca del valor fundamental la posibilidad de pérdidas será pequeña. Esto quiere decir que $f(P_t)$ debe ser una función bimodal con modas P_i y P_s , no diferenciable y positiva. Debe cumplir, además:

$$\begin{aligned} f'(P_t) < 0 & \quad P_i < P_t < P^* \\ f'(P_t) = 0 & \quad P_t = P^* \\ f'(P_t) > 0 & \quad P^* < P_t < P_s \end{aligned}$$

Como los inversores basan sus transacciones en la diferencia entre el precio y el valor fundamental, podemos definir su función de exceso de demanda del siguiente modo:

$$D_{fd}(P_t) = \begin{cases} 0 & P_t > P_s \\ \alpha(P^* - P_t)f(P_t) & P_i < P_t < P_s \\ 0 & P_t < P_i \end{cases}$$

donde α mide la fuerza de la demanda de este tipo de inversores.

Esta función de exceso de demanda debe positiva cuando el precio es inferior al valor fundamental, debe ser negativa cuando el precio es superior al valor fundamental y debe ser igual a 0 cuando el precio está cerca del valor fundamental y cuando el precio del activo es superior al precio máximo o inferior al precio mínimo.

b) Los inversores técnicos.

Como ya hemos explicado este inversor utiliza una estrategia de compra basada en que es el mercado el que mejor información puede proporcionar sobre el comportamiento de los precios.

Day y Huang (1993) proponen una simple regla técnica: "comprar cuando el mercado que está subiendo y vender cuando el mercado está bajando". En este caso la función de exceso de demanda tendría la siguiente forma:

$$D_{ic}(P_t) = \beta(P_t - v)$$

en la que β es una constante positiva y v es un valor de referencia.

c) *El comportamiento del mercado.*

El exceso de demanda agregado será la suma de los excesos de demanda para los dos tipos de agentes que actúan en el mercado.

$$D_T(P_t) = D_{fd}(P_t) + D_{ic}(P_t)$$

La formación de los precios se realizará de la siguiente forma: si la demanda ha sido positiva, el precio subirá en un porcentaje que denominamos γ del exceso de demanda; pero, si por el contrario, la demanda ha sido negativa, el precio bajará en una proporción γ del exceso de demanda. La siguiente función resume este comportamiento:

$$P_{t+1} = P_t + \gamma D_T(P_t)$$

en la que γ es una constante positiva.

Es decir, el comportamiento del mercado depende de los coeficientes: α , que refleja la importancia relativa de los inversores fundamentales, β , que refleja la importancia de los inversores técnicos y γ que es un coeficiente de ajuste de los precios.

El modelo completo quedaría

$$P_{t+1} = P_t + \gamma D_T(P_t) = P_t + \gamma(D_{fd}(P_t) + D_{ic}(P_t)) = P_t + \gamma(\alpha(P^* - P_t)f(P_t) + \beta(P_t - v))$$

cuando $P_i < P_t < P_s$

y

$$P_{t+1} = P_t + \gamma D_T(P_t) = P_t + \gamma(D_{fd}(P_t) + D_{ic}(P_t)) = P_t + \gamma(\beta(P_t - v))$$

cuando $P_t > P_s$ y $P_t < P_i$

Para realizar un experimento numérico se ha elegido la siguiente función de probabilidad de incurrir en pérdidas por parte de un inversor fundamental:

$$f(P_t) = ((P_s - P_t)(P_t - P_i))^{-1}$$

que cumple las propiedades enunciadas con anterioridad, ya que la probabilidad de tener pérdidas es grande cuanto el precio se encuentra cerca de P_i o P_s siendo pequeña cuando el valor está cercano al valor fundamental.

Si fijamos $P_i=0$ y $P_s=2$, la función de demanda de los inversores fundamentales queda:

$$D_{fd}(P_t) = \alpha(P^* - P_t)(1/(2P_t - P_t^2)) \quad 0 < P_t < 2$$

La evolución de los precios utilizando esta función de demanda puede obtenerse mediante iteración gráfica para los distintos valores de los parámetros α , β y γ , cuando se fija $P^*=1$ como valor fundamental y se toma como valor de referencia de los analistas técnicos en $v=1$. La figura 1 muestra la solución de punto fijo, en la que el precio se estabiliza en el valor fundamental; en la figura 2 se puede observar la solución de ciclo dos y, por último, en la figura 3 aparece la solución caótica en la que los precios pueden tomar cualquier valor dentro del intervalo $(0,2)$ alternándose subidas con bajadas sucesivas.

La evolución de los precios, en este último caso, es errática y muestra fluctuaciones irregulares alrededor del valor fundamental, es decir, que se producen cambios aparentemente aleatorios de los precios con mercados bajistas y alcistas.

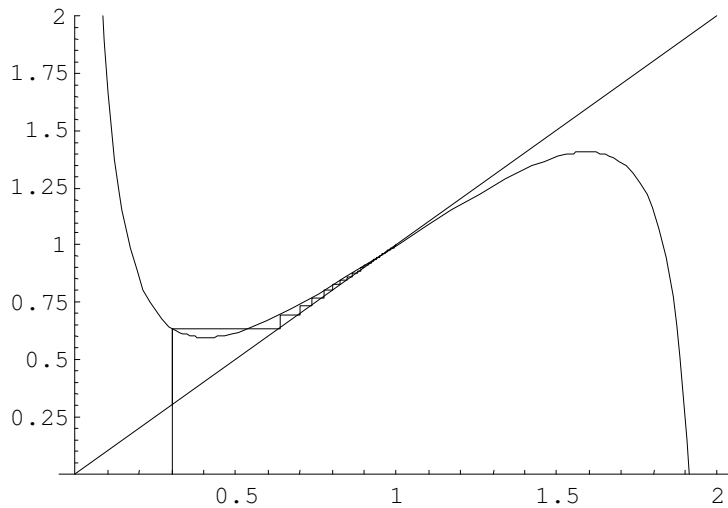


Figura 1: Evolución de los precios mediante iteración gráfica cuando los valores de los parámetros son $\alpha=0,4$ y $\beta=0,3$ y $\gamma=1$. Los precios tienden a un punto fijo que coincide con el valor fundamental.

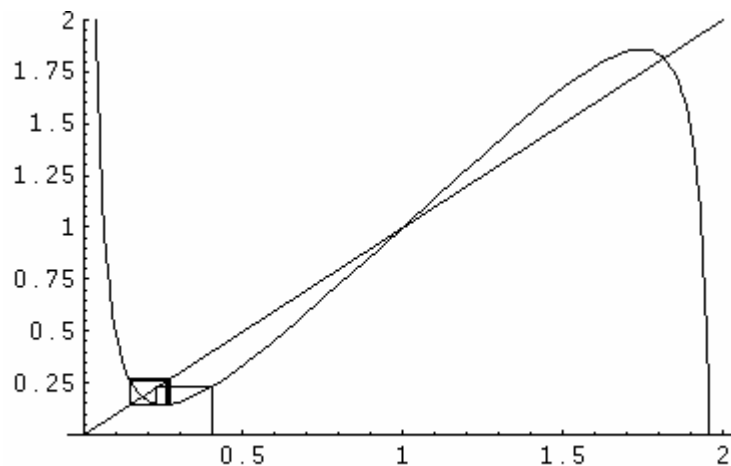


Figura 2: Evolución de los precios mediante iteración gráfica cuando los valores de los parámetros son $\alpha=0.2$ y $\beta=0.6$ y $\gamma=1$. Los precios quedan atrapados en un ciclo 2.

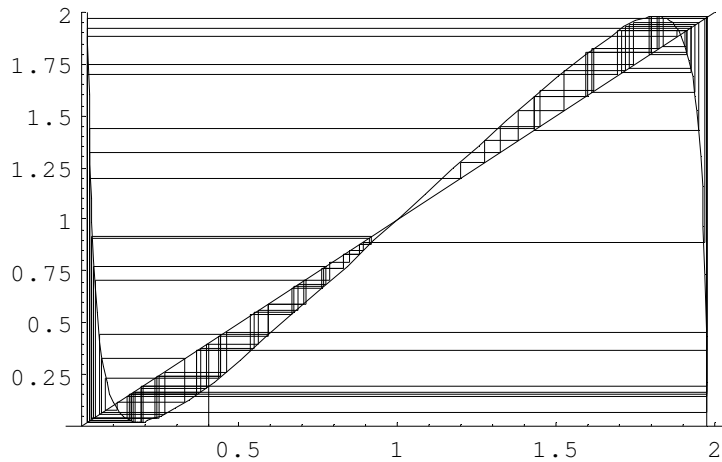


Figura 3: Evolución de los precios mediante iteración gráfica cuando los valores de los parámetros son $\alpha=0.1$ y $\beta=0.5$ y $\gamma=1$. Solución caótica.

La distribución de frecuencias de los precios tiene la forma que aparece en la figura 4. Se puede observar que los precios que aparecen más frecuentemente son los precios extremos P_i y P_s , y el valor fundamental P^* , aunque existen precios distribuidos a lo largo de todo el intervalo $[P_i, P_s]$. Esto permite intuir que la serie generada por el modelo es ergódica ya que todos los puntos del intervalo son visitados en alguna de las iteraciones. Es decir, que después de iterar la condición inicial P_0 se puede llegar a cualquier otro precio dentro del intervalo $[P_i, P_s]$. Este tipo de comportamiento y el histograma obtenido se mantienen, independientemente de las condiciones iniciales, para los valores de los parámetros elegidos, es decir, las frecuencias de los precios obtenidos convergen a funciones de densidad estables, pudiéndose afirmar que el sistema es ergódico.

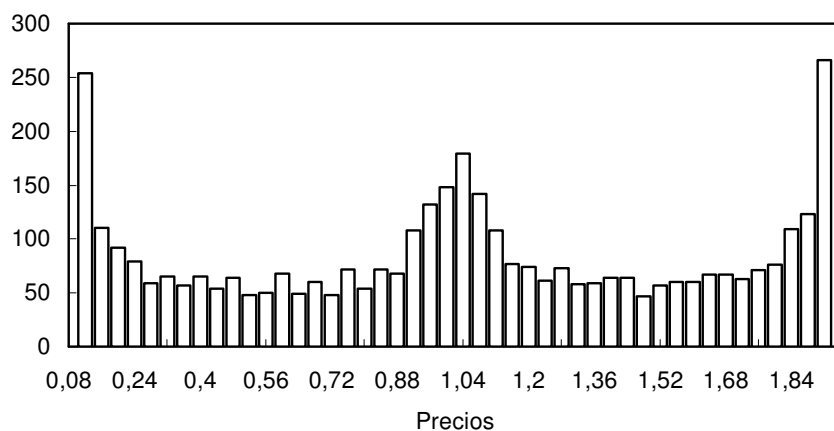


Figura 4: Distribución de los precios generados por el modelo cuando $\alpha=0.3$, $\beta=0.9$ y $\gamma=1$.

Con el modelo anterior es posible obtener un comportamiento aparentemente aleatorio de los precios que, sin embargo, se genera mediante un modelo determinista, siendo el comportamiento de los precios caótico. Si variamos el parámetro que mide la fuerza de cada uno de los agentes, podemos comprobar que si, únicamente varía α , el parámetro de los fundamentales, el resultado tiende al equilibrio en un punto fijo, mientras que si varía, el parámetro que mide la importancia relativa de los inversores técnicos, β , y el del mercado, γ , el resultado puede ser caótico. Las figuras 5 y 6 muestran los diagramas de bifurcación para β y γ . Dichos diagramas típicamente caóticos, apareciendo en ellos características fundamentales de los procesos caóticos, como son el doblado de periodo y las ventanas.

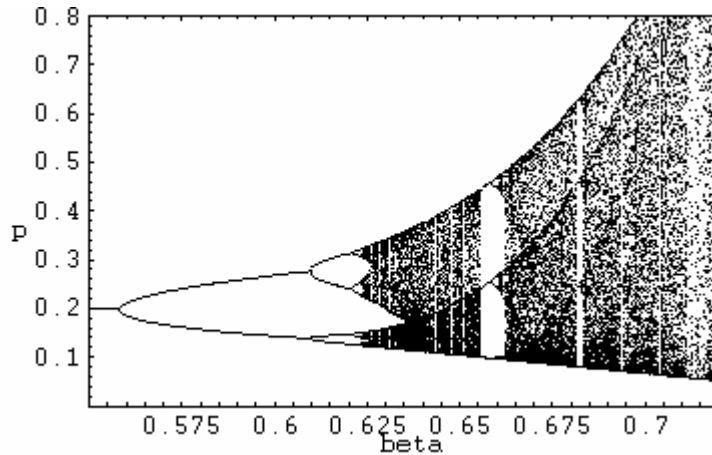


Figura 5 Diagrama de bifurcación cuando varía en parámetro β , $\alpha=0,2$ y $\gamma=1$.

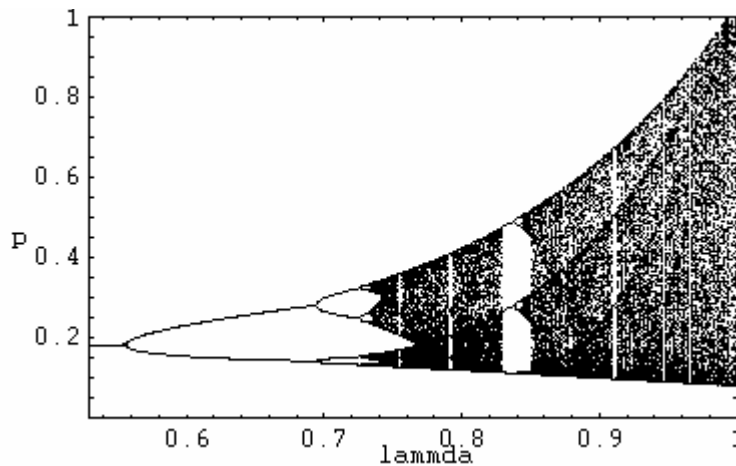


Figura 6: Diagrama de bifurcación cuando varía el parámetro γ mientras que $\alpha=0,3$ y $\beta=0,9$.

Proponemos, ampliando el modelo, la utilización de una regla técnica más compleja que tiene la ventaja de que el valor de referencia no está fijo sino que depende de la evolución pasada de los precios, dicha regla es la de la media móvil. En este caso

la señal de compra o venta se basa en una media móvil de los precios pasados de la forma:

$$ma_t = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} P_{t-i}$$

Es decir, se genera una señal de compra cuando el precio actual está por encima de la media móvil y una señal de venta si dicho precio está por debajo de la media móvil. Para el presente modelo fijamos $L=4$, por lo tanto, aparecerá una señal de compra si:

$$\frac{1}{4}(P_t + P_{t-1} + P_{t-2} + P_{t-3}) < P_t$$

y, si ocurre lo contrario, la señal será de venta.

Definimos la función de exceso de demanda del analista técnico como:

$$D_{ic}(P_t) = \beta \left(P_t - \left(\frac{1}{4}(P_t + P_{t-1} + P_{t-2} + P_{t-3}) \right) \right)$$

de forma que se producirá un exceso de demanda positivo cuando se haya generado una señal de compra y uno negativo cuando la señal haya sido de venta.

La simulación de este modelo incluyendo la regla de la media móvil será únicamente numérica ya que, al utilizar los precios de los tres últimos periodos, no es posible realizar una iteración gráfica. Los resultados permiten concluir que este modelo también es capaz de generar una amplia gama de comportamientos en los precios, tales como comportamientos estables, cíclicos, fluctuaciones alrededor del valor fundamental y situaciones en las que se producen amplias bajadas o subidas de los precios, dependiendo de los parámetros α , β y γ . La figura 7 muestra la distribución de frecuencias de los precios obtenidos mediante simulación del modelo. Como puede observarse, los precios toman cualquier valor dentro del intervalo siendo los más frecuentes los extremos. Como en el caso anterior, este resultado que se mantiene independientemente de las condiciones iniciales.

La obtención de una distribución de este tipo se debe principalmente a la interacción de los dos tipos de agentes. El mercado estaría en equilibrio si el precio actual del activo coincidiera con el valor fundamental. Si únicamente actuaran en el mercado los fundamentalistas, los precios convergerían a dicho equilibrio. Sin embargo la existencia de los inversores técnicos, impide la convergencia al valor fundamental. Por ejemplo, si la media móvil de los precios es inferior al precio actual, los agentes técnicos compran y generan un exceso de demanda positiva, de forma que los precios suben, pudiendo superar al valor fundamental, si esto ocurre, los inversores fundamentales comienzan a vender, de modo que el exceso de demanda pasa a ser negativo, y entonces el precio baja. Pero si, la media móvil de los últimos precios está por encima del precio actual los agentes técnicos comienzan a vender de forma que los precios bajan, pudiéndose situar por debajo del valor fundamental, por lo que, los inversores fundamentales comienzan a comprar, lo que hace que los precios vuelvan a subir.

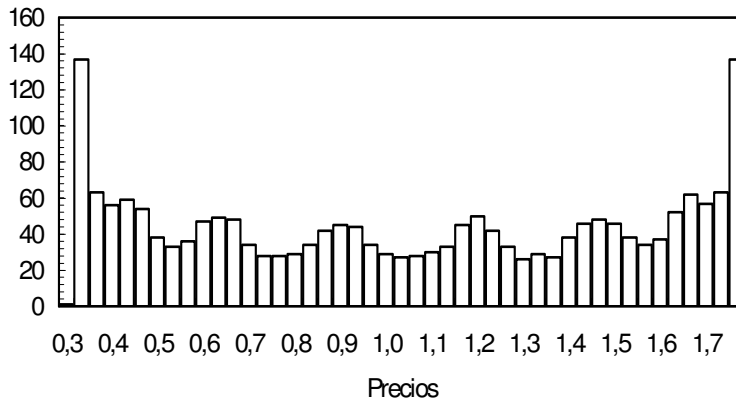


Figura 7: Distribución de los precios generados por el modelo cuando $\alpha=0,2$, $\beta=0,8$ y $\gamma=1$.

Las conclusiones de la simulación del modelo son:

- Si las condiciones iniciales son iguales al valor fundamental se obtiene un comportamiento estable de los precios, de forma que éstos permanecen iguales a dicho valor a lo largo del tiempo.
- Si los inversores fundamentales son los dominantes, se consigue también llegar al equilibrio, tendiendo éstos a su valor fundamental.
- Si los inversores técnicos se hacen relativamente importantes, se generan fluctuaciones irregulares de los precios, que podemos llamar caóticas, donde los precios varían de forma aparentemente aleatoria.
- Cuando los inversores técnicos se hacen dominantes en el mercado, se producen comportamientos explosivos de los precios, bajando éstos por debajo de P_i o subiendo por encima de P_s .
- En una primera aproximación, la aparición de ciclos inestables parece que podría permitir una posible predicción de los precios. Sin embargo, la existencia de ciclos irregulares en un modelo capaz de generar caos implica que aunque los precios parezcan seguir una pauta determinada, dicha pauta no se repite nunca exactamente igual, es decir, que la trayectoria de los precios parece que puede volver al mismo lugar, pero sin embargo, nunca lo hace exactamente.

La posibilidad de generación de series de precios aparentemente aleatorias mediante un modelo determinista apoya la idea de que los mercados de capitales son intrínsecamente complejos y que los shocks aleatorios no hacen sino añadir de forma exógena irregularidades al comportamiento de los precios en los mercados financieros.

Una de las principales limitaciones de esta modelización es que la evolución de los precios depende únicamente de las estrategias de compra o venta que siguen cada uno de los dos tipos de inversores. Se genera una dinámica compleja en los precios debido a que, en particular, los chartistas, con su estrategia, hacen que el precio se desvíe del valor de equilibrio o valor fundamental mientras que los fundamentalistas reaccionan ante las diferencias entre el precio existente en el mercado y el precio fundamental; sin embargo, se excluye la posibilidad de que haya individuos que cambien de estrategia o de que puedan entrar o salir del mercado.

Recientemente, Lux (1998) ha desarrollado un modelo que permite el cambio de estrategia de los agentes, la entrada y salida del mercado, así como el que puedan estar sujetos a un “contagio psicológico” que pueda hacer cambiar de opinión a los agentes,

pasando de una situación optimista a pesimista o viceversa, lo cual, como es obvio tiene especial relevancia en el comportamiento del inversor chartista. Expondremos las principales características y variables del modelo sin demostrar su obtención que desarrolla con detalle Lux en su trabajo.

Los tipos de agentes que actúan en el mercado siguen siendo dos: los chartistas que basan su estrategia en el comportamiento de sus competidores y en la evolución de los precios, y los fundamentalistas que comparan los precios con el valor fundamental, compran cuando los precios son inferiores a dicho valor y venden si son superiores.

Todo agente que está en el mercado compara los beneficios obtenidos por sus competidores con los suyos y cambia de estrategia hacia la que cree que proporciona mayores rendimientos. Así pues, se pueden producir cambios en las proporciones de agentes que siguen una u otra estrategia. Los agentes pueden abandonar el mercado, pero además también pueden entrar nuevos, suponiendo siempre que el número de agentes que actúan en el mercado es constante. Cualquier tipo de agente puede abandonar el mercado, pero los entrantes siempre seguirán una estrategia chartista, pudiendo cambiar de estrategia una vez dentro y seguir la fundamental.

El modelo admite cambios en el comportamiento de los agentes que pueden pasar del optimismo al pesimismo si este último fuera la opinión predominante o viceversa. A todos estos cambios se les asignan probabilidades.

Las variables relevantes son la evolución de los precios, modelizada mediante $p(t)$, la evolución de la proporción de chartistas entre todos los agentes que están en el mercado, $z(t)$, y el índice de opinión de los chartistas, $x(t)$, que puede variar entre -1 si todos los chartistas son pesimistas y 1 si todos son optimistas. El modelo está determinado por un sistema de ecuaciones diferenciales que determinan la evolución de las tres variables anteriores¹³.

El número de individuos que siguen cada una de las mismas estrategias viene determinado, por los cambios en las mismas, que pueden ser, cambio de chartista optimista a pesimista y viceversa, y cambio de estrategia chartista a fundamentalista y lo contrario y por último la entrada y salida de agentes del mercado. Veamos cuales son los parámetros necesarios para modelizar estos comportamientos:

- Para el cambio de chartista optimista a pesimista y viceversa:

Los parámetros α_1 y α_2 miden la influencia del índice de opinión en x y en p respectivamente. El parámetro ν_1 permite modelizar la escala de tiempo o velocidad en el proceso de contagio de opinión.

- Para el cambio entre chartistas y fundamentalistas y viceversa:

Este cambio se produce cuando alguno de los dos tipos de agentes observa que la estrategia del otro proporciona mayores rendimientos. Así que se fijarán en los dividendos nominales r y los reales R . Para calcular el paso de uno a otro utilizarán el precio fundamental, por lo que la relación entre ambas variables es $r/p_f = R$ donde p_f es el precio fundamental. Además α_3 es el parámetro que mide la intensidad de reacción ante las diferencias en los rendimientos, ν_2 es el parámetro que mide la escala de tiempo para dichas transiciones. Por último, las ganancias fundamentales se descontarán mediante un factor s que depende de la expectativa de rendimientos y del grado de aversión al riesgo.

- Para la entrada y salida del mercado:

Como ya hemos mencionado anteriormente, algunos agentes pueden salir del mercado, al tiempo que otros pueden entrar, pero estos nuevos entrantes lo hacen siguiendo la estrategia chartista. La probabilidad de salida de mercado desde cualquier estrategia viene determinada por a , y la fracción de nuevos entrantes entre los chartistas vendrá determinada por b . Es decir, que si n_c es el número de chartistas y N el número total de agentes, entonces $bn_c = aN$ ya que el número total de agentes permanece constante.

Un supuesto simplificador sobre las estrategias de los agentes del modelo supone que los chartistas que deseen recolocar sus carteras lo harán en una cantidad fija t_c , es decir que aquellos especuladores que perciben una situación alcista intentarán comprar t_c unidades del activo, mientras que si por el contrario, perciben una situación bajista, intentarán vender una cantidad t_c . El exceso de demanda generado por los chartistas será el número de chartistas optimistas por la cantidad fija t_c menos el número de chartistas pesimistas por dicha cantidad. Así pues, el número de agentes N que actúan en el mercado por t_c será la constante T_c .

La estrategia fundamental se basa en comprar cuando los precios están por debajo del valor fundamental y vender si están por encima, esto quiere decir que su exceso de demanda, depende de la diferencia entre el precio en el mercado y el valor fundamental. La constante γ mide la intensidad de la reacción de la respuesta ante dicha diferencia. El producto de dicha reacción de respuesta por el número de agentes que actúan en el mercado será la constante T_f .

Por último, en la modelización de la dinámica de los precios se aplica la hipótesis de que los precios reaccionan al exceso de demanda del mercado. El parámetro β mide la velocidad de ajuste de los precios a dicho exceso, es decir que $dp/dt = \beta(ED_c + ED_f)$, donde ED_c es el exceso de demanda generado por los chartistas y ED_f el generado por los fundamentalistas.

El modelo viene descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\frac{dx}{dt} \approx \dot{x} = 2zv_1[\text{Tanh}(U_1) - x]\text{Cosh}(U_1) + (1-z)(1-x^2)v_2[\text{Sinh}(U_{2,1}) - \text{Sinh}(U_{2,2})]$$

$$\frac{dz}{dt} \approx \dot{z} = (1-z)z(1+x)v_2\text{Sinh}(U_{2,1}) + (1-z)z(1-x)v_2\text{Sinh}(U_{2,2}) + a(1-z)$$

$$\frac{dp}{dt} \approx \dot{p} = \beta(xzT_c + (1-z)(p_f - p)T_f)$$

con

$$U_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{\dot{p}}{v_1}$$

$$U_{2,1} = \alpha_3 \left(\frac{(r + \dot{p}/v_2)}{p} - R - s \left| \frac{(p_f - p)}{p} \right| \right)$$

$$U_{2,2} = \alpha_3 \left(R - \frac{(r + \dot{p}/v_2)}{p} - s \left| \frac{(p_f - p)}{p} \right| \right)$$

Los resultados de la simulación del modelo se muestran en la figura 8 y 9.

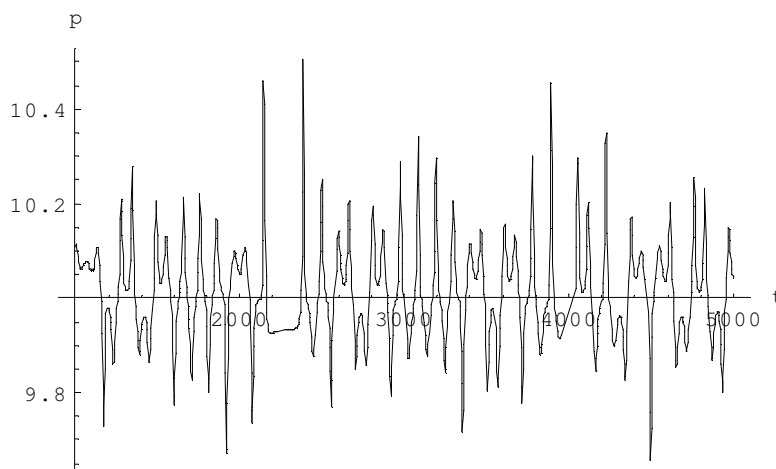


Figura.8: Evolución de los precios cuando se han fijado los parámetros en $v_1=0,5$, $v_2=0,75$, $\alpha_1=1,02$, $\alpha_2=0,25$, $\alpha_3=1,5$, $s=0,8$, $T_c=T_f=5$, $p_f=10$, $a=0,01$, $\beta=0,5$ $R=0,1$.

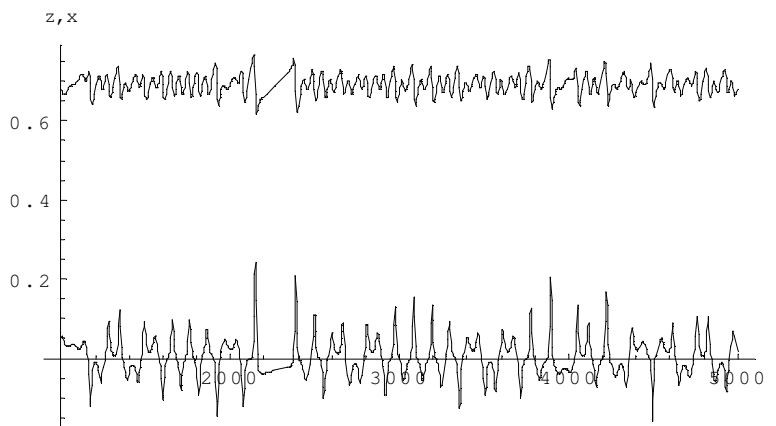


Figura 9: Evolución z y x cuando se han fijado los parámetros en $v_1=0,5$, $v_2=0,75$, $\alpha_1=1,02$, $\alpha_2=0,25$, $\alpha_3=1,5$, $s=0,8$, $T_c=T_f=5$, $p_f=10$, $a=0,01$, $\beta=0,5$ $R=0,1$.

La evolución de los precios parece bastante irregular y si observamos las sendas de recorrido de las variables x y z se puede comprobar que ambas se mueven de forma similar; es decir, por ejemplo, cuando los precios y la tasa de optimistas sube, z también

lo hace, debiéndose este hecho a que un movimiento ascendente de los precios implica ganancias. Esta es la razón por la que algunos fundamentalistas cambian de estrategia pasándose a la chartista; cuando se ha “contagiado” a un cierto número de agentes, se ralentiza el crecimiento de los precios y termina la ola de optimismo; la estrategia fundamental se hace ahora más atractiva, de modo que cuando estos fundamentalistas venden, inducen a un decrecimiento de los precios, lo que refuerza la tendencia a la baja. La dinámica del mercado bajista es similar, pero con el movimiento contrario de los precios.

La alternancia no periódica de mercados alcistas y bajistas queda reflejada en la figura 10 del espacio de fases del atractor donde quedan atrapados los valores de z , p y x .

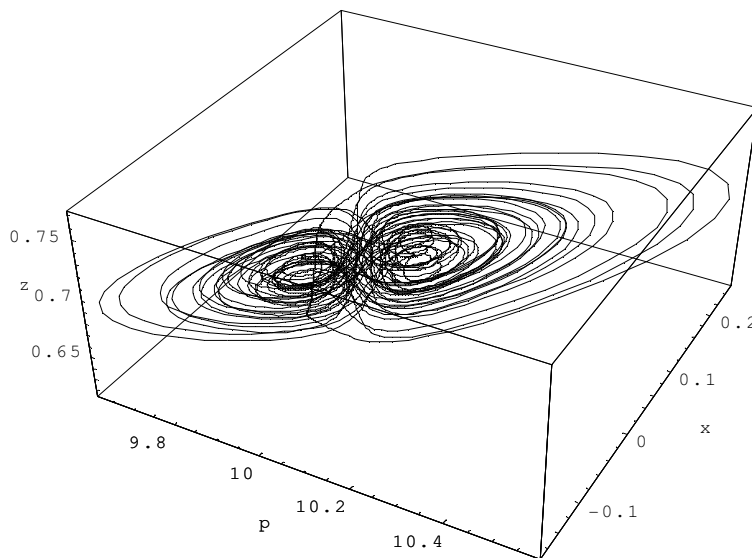


Figura 10: Atractor caótico en el espacio x, p, z .

Si observamos las propiedades estadísticas de la serie de rendimientos generada a partir de la simulación de este modelo, podemos comprobar que son similares a las de los datos empíricos de la bolsa, es decir, la serie simulada presenta una distribución centrada en el cero, simétrica, más apuntada y con las colas más anchas¹⁴ que la distribución normal. La tabla 1 y el gráfico del histograma nos resumen estos resultados.

Tabla 1: Resumen estadístico de los resultados obtenidos mediante simulación

	Rendimientos
Media	0,00034851
Varianza	0,00323315
Desviación típica	0,05686076
Coficiente de asimetría	-0,96149395
Curtosis	51,6703387

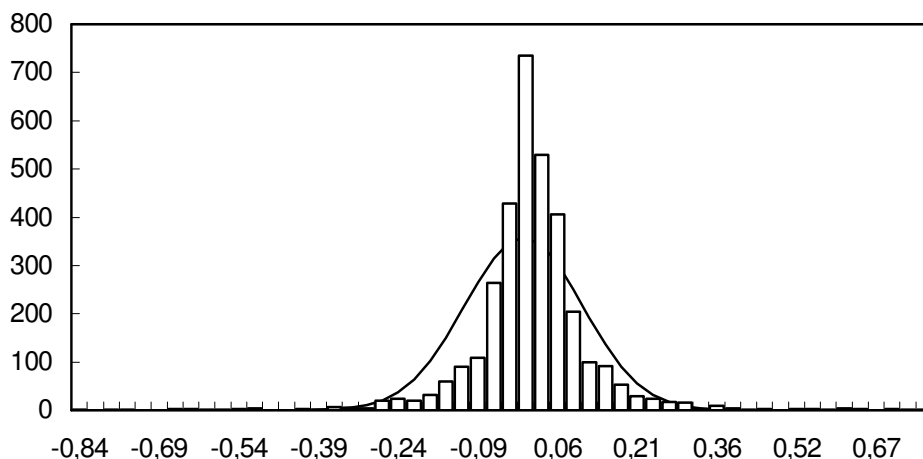


Figura 11: Histograma de los rendimientos de la serie obtenida mediante simulación.

Esta modelización permite, a partir del comportamiento de los agentes, las situaciones de contagio psicológico y las interacciones entre especuladores obtener una serie de rendimientos que presenta una apariencia similar a la de los datos reales, y cuyas propiedades estadísticas son semejantes a las de los datos empíricos.

El Mercado de capitales en España: características de las series

Para realizar el análisis empírico del mercado de capitales en España se utilizarán dos series distintas. La primera es la compuesta por los datos del Índice General de la Bolsa de Madrid (IGBM) mensuales, desde enero de 1941 hasta enero de 1998, lo que constituye una serie de 684 datos. La segunda es la compuesta por los datos diarios del IBEX35 desde enero de 1987 hasta marzo de 1998, es decir una serie compuesta por 2776 datos.

El estudio se realizará sobre los datos de rendimientos bursátiles, es decir, la tasa de variación de las cotizaciones, x_t , definida como:

$$x_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1})$$

donde p_t es el dato de la serie original y x_t el dato de la primera diferencia en logaritmos.

En las figuras 12 y 13 se muestra la evolución de los rendimientos tanto para la serie del IGBM como de IBEX35. Como puede observarse, ambas series tienen la apariencia de aleatorias.

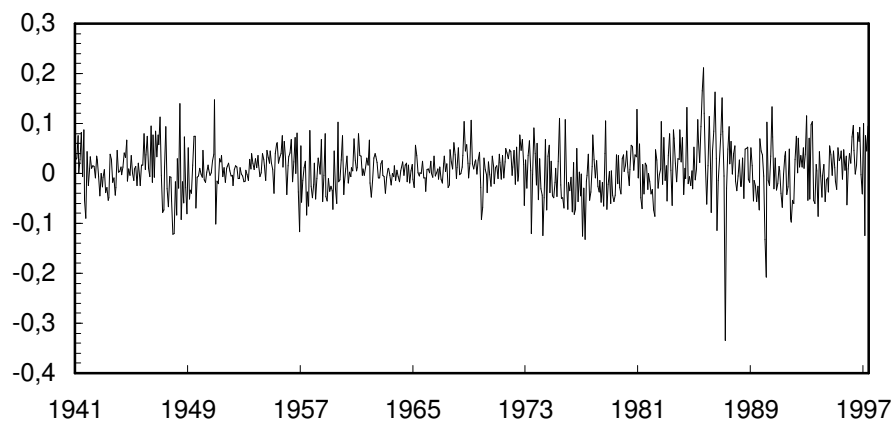


Figura 12: Serie de rendimientos del IGBM.

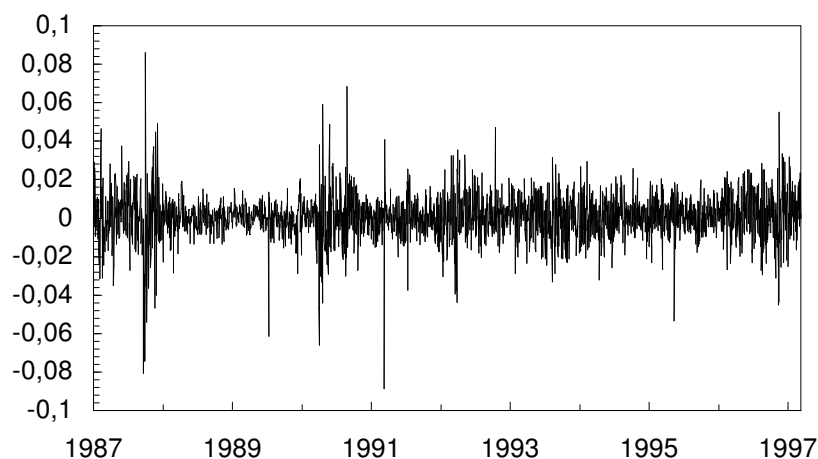


Figura 13: Serie de rendimientos del IBEX35.

Evidencias de no-normalidad en las cotizaciones: el test R/S

Es ampliamente reconocido en la literatura académica¹⁵ que las series de rendimientos bursátiles presentan una distribución de frecuencias leptocúrtica, con un coeficiente de asimetría negativo y unas colas más anchas que las de la distribución normal. En la tabla 2 aparece un resumen de las características estadísticas de ambas series.

Tabla 2: Resumen estadístico de la serie de rendimientos del IGBM y del IBEX35.

	IGBM	IBEX35
Nº de observaciones	683	2775
Media	0,00686106	0,000512
Varianza	0,00249581	0,00013389
Desviación típica	0,04995804	0,01157097
Coefficiente de asimetría	-0,3960068	-0,42579622
Curtosis	3,98514306	6,90400405

Además observando las figuras 14 y 15 que muestran la distribución de frecuencias de los datos de ambas series se pueden apreciar las diferencias respecto a la distribución normal, es decir, las colas más anchas y el apuntamiento¹⁶.

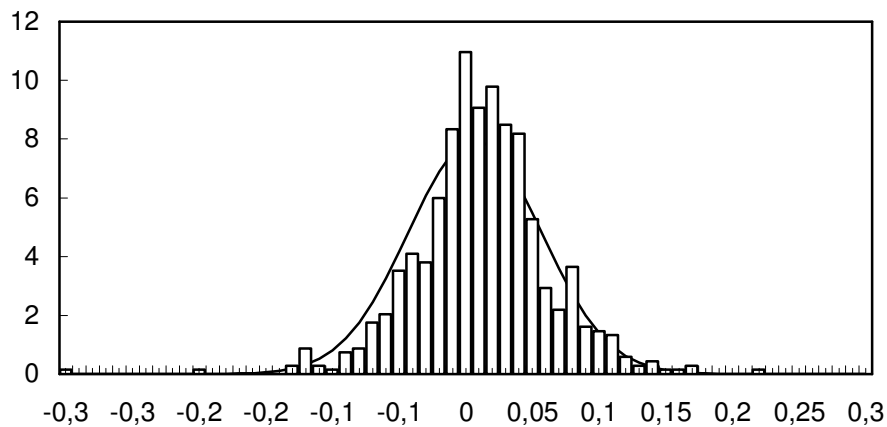


Figura 14: Distribución de frecuencias de la series de rendimientos del IGBM respecto a una distribución normal.

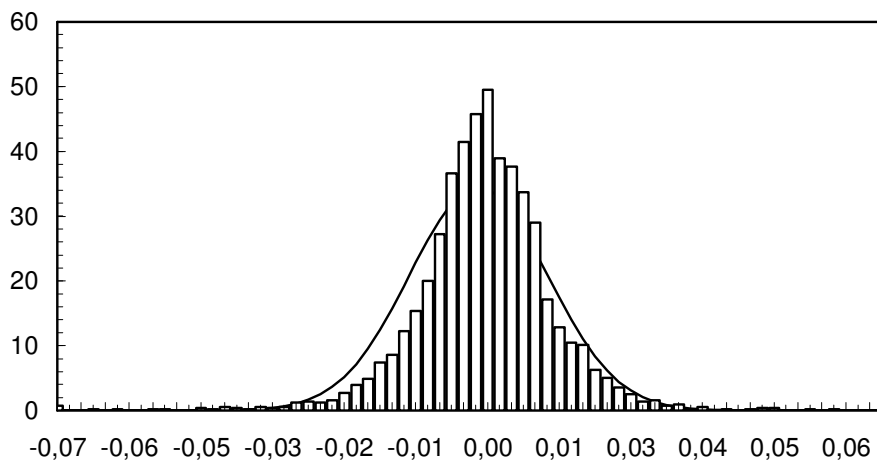


Figura 15: Distribución de frecuencias de la series de rendimientos del IBEX35 respecto a una distribución normal.

La Hipótesis de los Mercados Eficientes, en su versión de eficiencia débil, afirma que el precio de un activo refleja toda la información pública disponible, produciéndose cambios en los precios únicamente cuando aparece nueva información; en este caso, la serie de las cotizaciones se comporta como un movimiento Browniano ordinario, por lo que los rendimientos seguirán un camino aleatorio, pudiéndose afirmar, además, que los mercados no tienen memoria sobre lo que ha ocurrido en el pasado.

El análisis R/S y el R/S modificado sirven para contrastar la existencia de memoria en una serie temporal.

El análisis R/S tradicional permite contrastar la existencia de memoria en una serie temporal mediante el cálculo del exponente de Hurst. Dicho exponente puede estar sesgado si la serie temporal presenta dependencia lineal, por lo que se hace necesario reducir toda la posible dependencia lineal de la misma; una forma de conseguirlo consiste en utilizar la serie de residuos autorregresivos obtenidos al estimar el modelo mediante un análisis de series temporales siguiendo la metodología Box-Jenkins. La utilización de las series de residuos para el proceso $AR(1)$, identificado para la serie, no elimina toda la correlación serial que pueda existir en el proceso, aunque la reduce significativamente¹⁷.

A continuación, en las figuras 16 y 17 se ofrecen los resultados del análisis R/S tradicional para la serie original de rendimientos de ambos mercados. Como puede observarse se obtienen valores para el exponente de Hurst distintos de 0,5 en ambos casos. El valor del exponente de Hurst, H , es 0,6866 para el caso del IGBM y 0,5811 para el caso del IBEX 35.

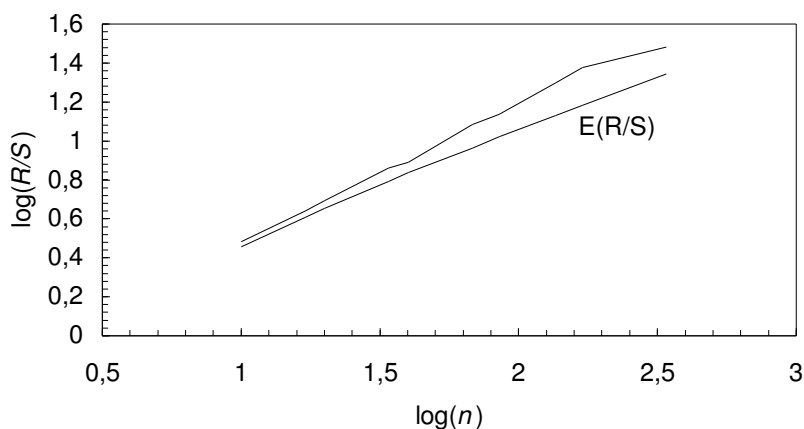


Figura 16: Análisis R/S del IGBM, $H=0,6866$

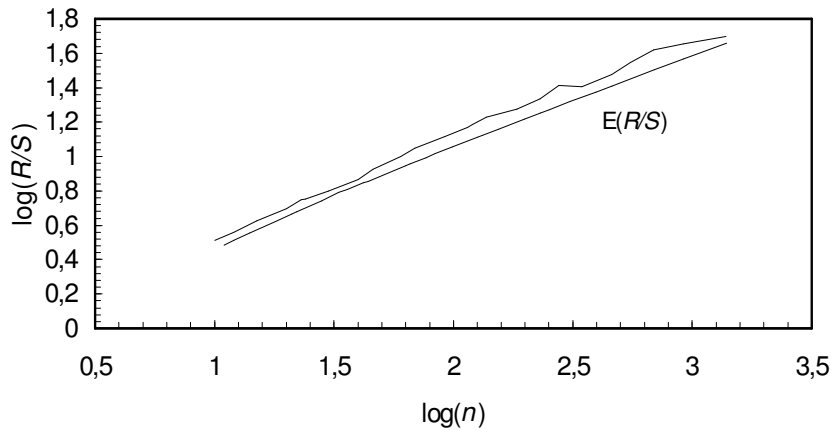


Figura 17: Análisis R/S de la serie del IBEX35, $H=0,5811$.

Los siguientes gráficos de las figuras 18 y 19 muestran los resultados del análisis R/S para la serie de residuos del modelo $AR(1)$ que se indentifica para los rendimientos tanto en el IGBM como en el IBEX35. En estos casos el exponente sigue siendo distinto de 0,5, aunque se reduce respecto al obtenido para la serie original. En las figuras aparece una segunda línea que muestra el valor esperado del $\log(R/S)$ para el caso de que los valores siguieran una distribución normal con media 0 y varianza 1. Como puede observarse los valores obtenidos se separan significativamente de los valores esperados cuando n se hace grande. Además si calculamos el valor esperado de H obtenemos 0,56.

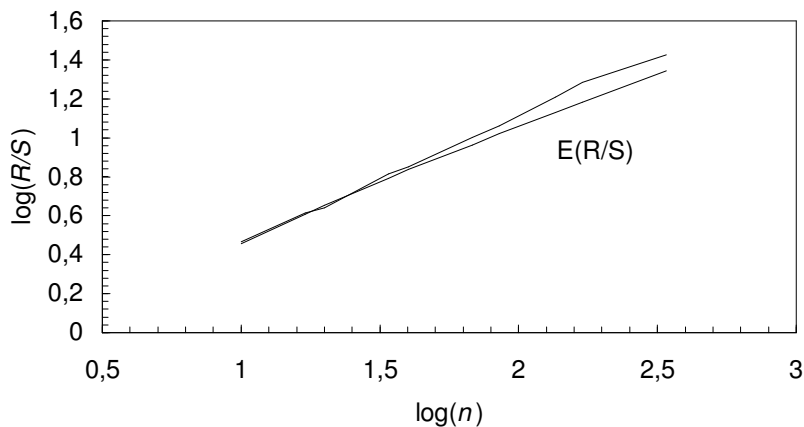


Figura 18: Análisis R/S de la serie de residuos del IGBM, $H=0,6455$.

Una conclusión similar puede obtenerse para el caso del IBEX35 donde es posible observar también una desviación sistemática sobre el valor esperado de H , que para el caso de datos que sigan una distribución normal es de $H=0,54$.

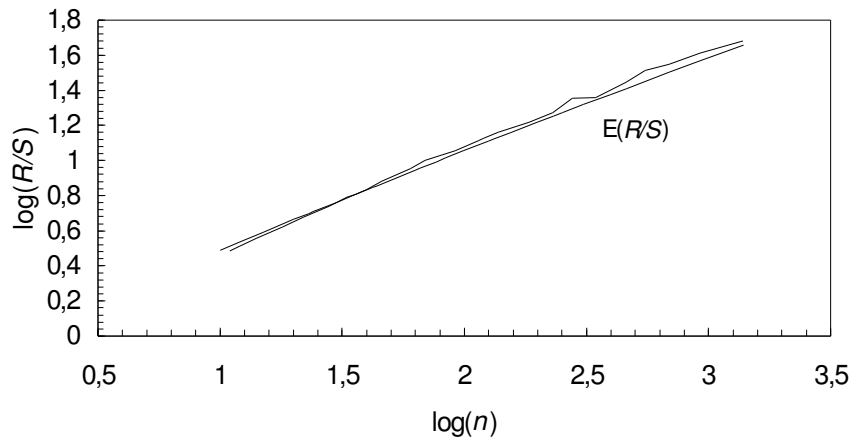


Figura 19: Análisis R/S de la serie de residuos del IBEX35, $H=0,5713$.

Como ya hemos dicho, cuando se analiza la serie de residuos, el exponente que se obtiene se reduce, debido a la existencia de correlación lineal en la serie. Sin embargo, si observamos ambas series en el mismo gráfico en las figuras 20 y 21 se puede comprobar que los cambios de tendencia, que tiene que ver con la existencia de ciclos, se producen en el mismo punto, es decir para el mismo valor de n .

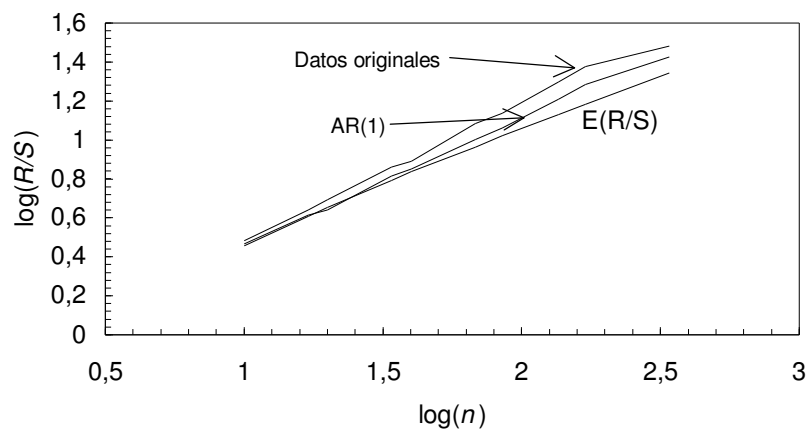


Figura 20: Comparación de los resultados del análisis R/S sobre la serie original y sobre la serie de residuos para el IGBM.

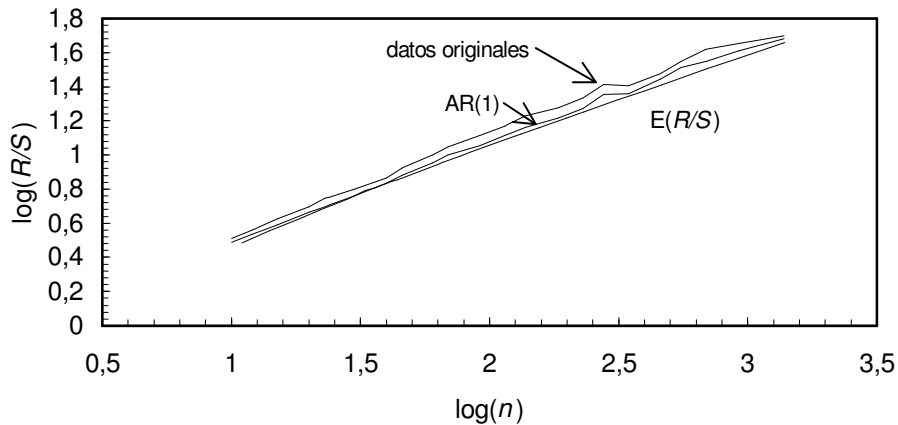


Figura 21: Comparación de los resultados del análisis R/S sobre la serie original y sobre la serie de residuos para el IBEX35.

El análisis R/S es capaz de detectar la existencia de ciclos y determinar la longitud media de los mismos incluso bajo la presencia de ruido en los datos. Para determinar la longitud de los mismos es aconsejable la utilización del estadístico V . La figura 22 muestra el resultado del estadístico para la serie del IGBM. Como puede verse en el gráfico el estadístico V cambia de tendencia para un valor de $n=170$, lo que corresponde a un periodo de 14,2 años.

En el caso de la serie del IBEX 35, según se muestra en la figura 23, el estadístico V fluctúa más observándose cambios de tendencia importantes para $n=251,2$ que corresponde aproximadamente a un año.

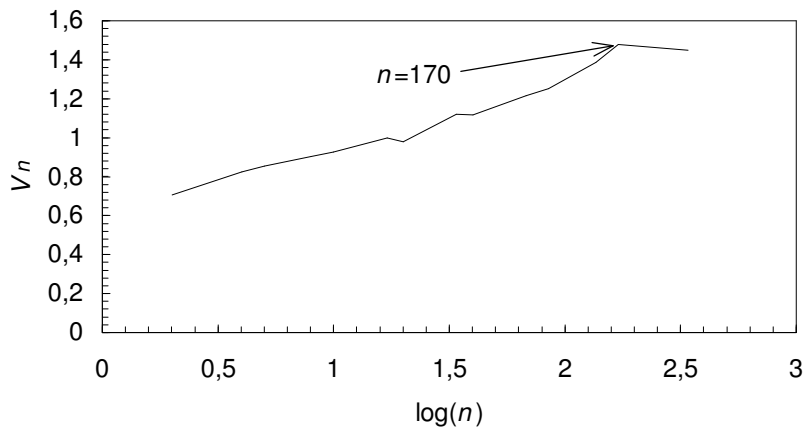


Figura 22: Estadístico V para la serie del IGBM.

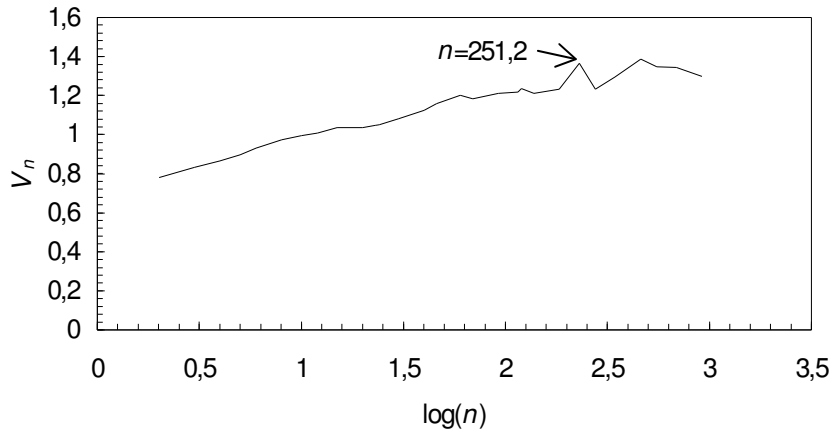


Figura 23: Estadístico V para la serie del IBEX 35.

El R/S modificado permite contrastar estadísticamente la hipótesis nula de no-existencia de memoria larga en una serie temporal.

A continuación aparecen los resultados del análisis R/S modificado, para la serie del IGBM completa, la del IBEX35 y para cuatro subperiodos de las mismas.

Tabla 3: Resultados del R/S modificado para el IGBM

SERIE	1941-1955	1956-1969	1970-1983	1984-1997
1,608	1,725	1,780**	1,812*	1,786**

* Rechazo al 5%

** Rechazo al 10%

Tabla 4: Resultados del R/S modificado para el IBEX35

SERIE	1987-1989	1990-1992	1993-1995	1995-1998
1,963*	1,532	1,353	1,805**	1,179

* Rechazo al 5%

** Rechazo al 10%

Como el intervalo de confianza al 5% es (0,890, 1,862), el test R/S modificado parece indicar que no existe memoria larga en la serie del IGBM, mientras que se rechaza la hipótesis nula sobre la no-existencia de memoria larga para la serie de IBEX 35. En cuanto a los subperiodos no se rechaza la hipótesis nula de no-memoria en ninguno de ellos¹⁸.

La dimensión de correlación

Un sistema caótico se caracteriza por tener una dimensión de correlación pequeña. A continuación, se ofrecen los resultados, resumidos en un gráfico, del cálculo de la función de correlación, así como de la pendiente instantánea del logaritmo de dicha función respecto al logaritmo de r que es la separación considerada. Según

demuestra Brook (1986)¹⁹, si la serie es caótica los resultados para las series originales y para las series de residuos, tanto para el IGBM como para el IBEX35 deben ser iguales. Las figuras 24 a 27 muestran el cálculo de la integral de correlación y de la pendiente instantánea para las series originales y de residuos de las series de rendimientos. La integral de correlación se ha calculado reconstruyendo el atractor mediante el método de retardo en el tiempo, para unas dimensiones de inserción que van de 2 a 16. Las líneas situadas en la parte superior indican una dimensión de inserción menor y dicha dimensión aumenta para las líneas más inferiores.

Si se observan los gráficos de las pendientes instantáneas, se pueden distinguir dos tipos de comportamientos según la serie que se esté analizando. Para el caso de la serie de IBEX35 representado en las figuras 28 a 31 no se observa saturación de la pendiente a medida que aumenta la dimensión de inserción, por lo que, no se puede asegurar, en este caso, que la serie sea caótica. Sin embargo, para la serie del IGBM, representado en las figuras 24 a 27, puede verse una tendencia a la saturación de la pendiente para dimensiones de inserción altas alrededor del valor 6 o 7, pudiendo ser este comportamiento un indicador de la existencia de caos en la serie.

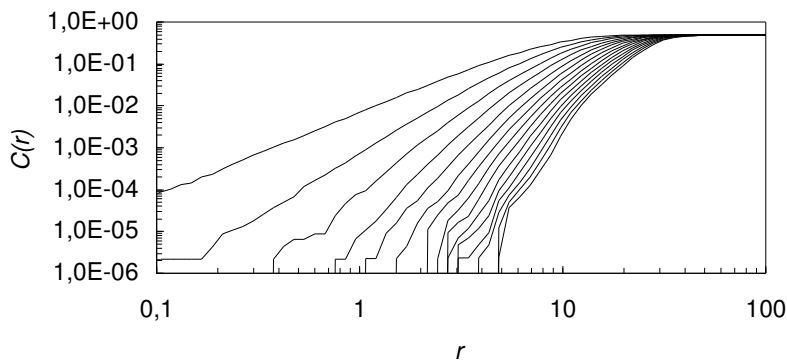


Figura 24: Integral de correlación para la serie del IGBM.

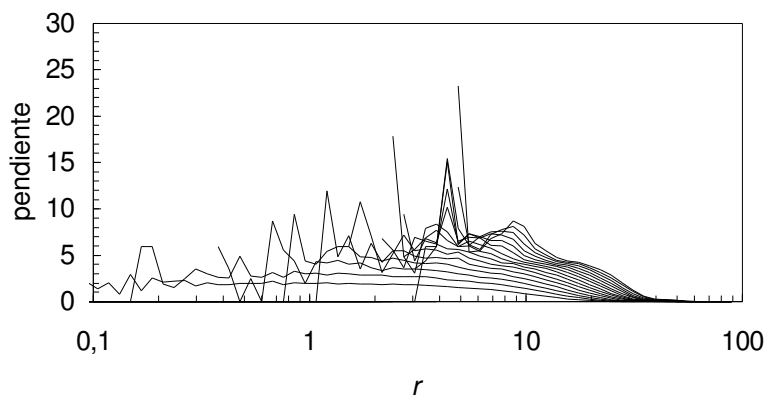


Figura 25: Pendiente de la integral de correlación para la serie del IGBM.

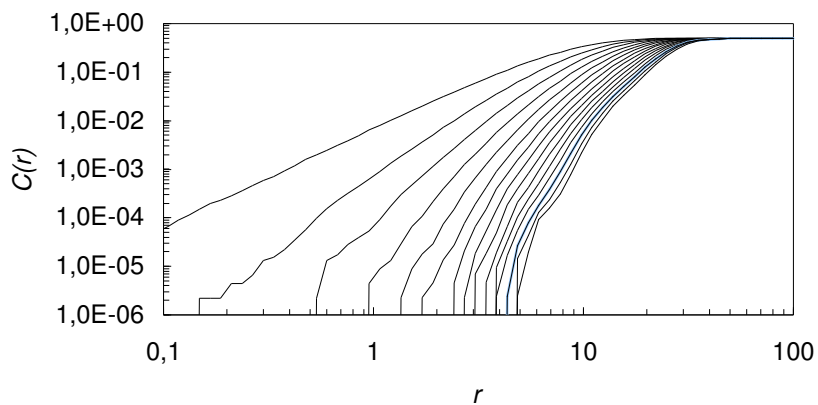


Figura 26: Integral de correlación para la serie de residuos del IGBM.

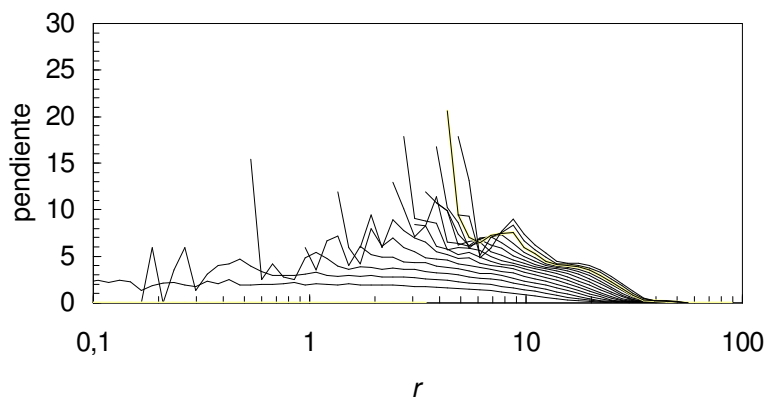


Figura 27: Pendiente instantánea de la integral de correlación para la serie de residuos del IGBM.

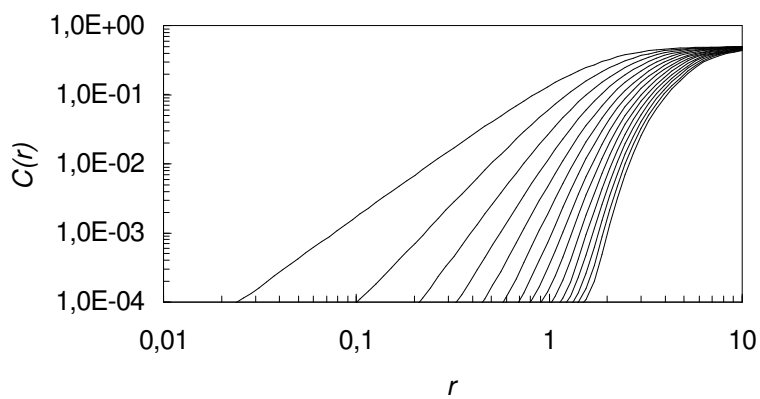


Figura 28 Integral de correlación para la serie del IBEX35.

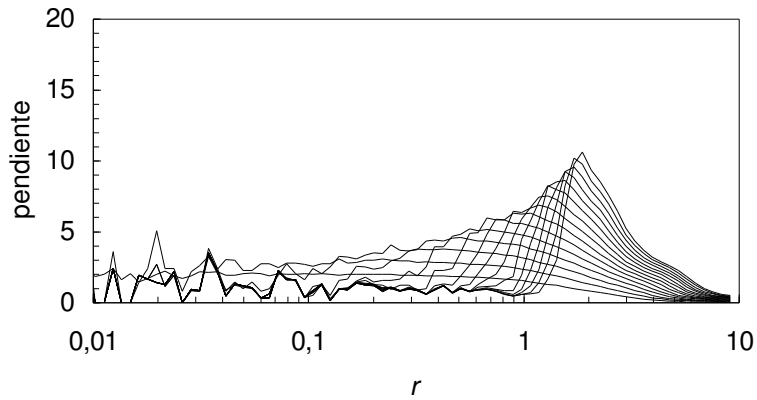


Figura 29: Pendiente de la integral de correlación para la serie del IBEX35.

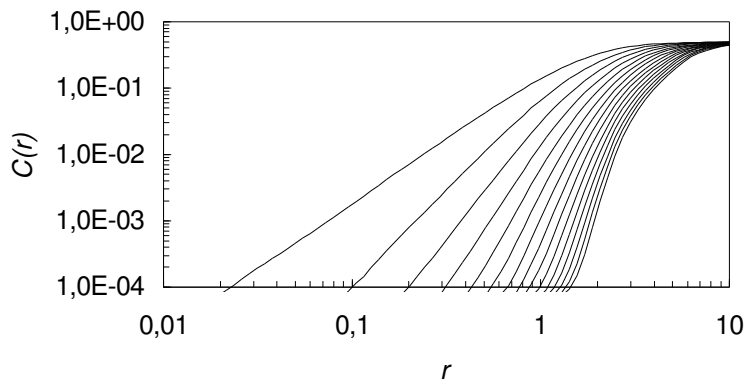


Figura 30: Integral de correlación para la serie de residuos del IBEX35.

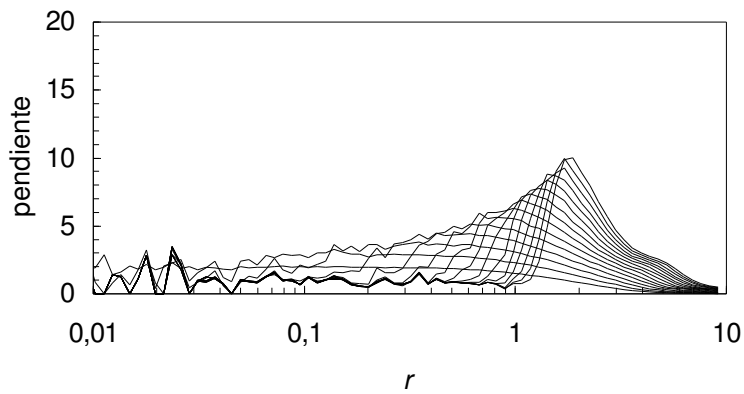


Figura 31: Pendiente de la integral de correlación para la serie de residuos del IBEX35.

La tabla 5 muestra los resultados de la estimación de la pendiente de la integral de correlación para la serie de IGBM en el intervalo de r entre 5 y 10 . En la tabla puede

verse que la pendiente es un valor aproximadamente 7 para la serie original y para la serie de residuos.

Tabla 5: Pendiente de la integral de correlación para la serie de IGBM

Dimension de inserción	9	10	11	12	13	14	15	16
Serie original	5,40	5,99	6,57	6,96	7,21	7,21	7,06	6,82
Serie de residuos	5,09	5,68	6,24	6,71	7,09	7,21	6,96	6,70

La tabla 6 muestra un cálculo similar para la serie del IBEX 35; para los valores de r entre 2 y 5 puede comprobarse que la pendiente no se estabiliza en ningún valor, y cuando mayor es la dimensión de inserción mayor es el valor de la pendiente, siendo, por ello, imposible concluir sobre la dimensión del atractor para esta serie.

Tabla 6 Pendiente de la integral de correlación para la serie de IBEX 35.

Dimension de inserción	9	10	11	12	13	14	15	16
Serie original	3,05	3,44	3,89	4,36	4,84	5,35	5,87	6,42
Serie de residuos	2,90	3,23	3,61	4,00	4,41	4,85	5,30	5,78

Los exponentes de Liapunov.

La existencia de un exponente de Liapunov positivo en un sistema dinámico permite caracterizarlo como caótico. El exponente mide la convergencia o divergencia de dos condiciones iniciales cercanas, por lo que con un exponente positivo, una pequeña perturbación en las condiciones iniciales crecerá exponencialmente.

El cálculo del mayor exponente de Liapunov lo vamos a llevar a cabo mediante dos métodos distintos, el algoritmo de Wolf y el método denominado NEGM, que es un método robusto que permite obtener el exponente para sistemas con ruido.

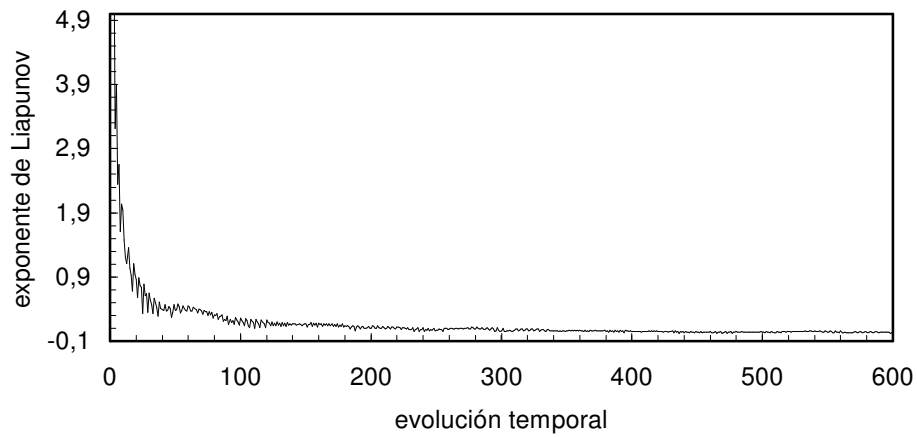


Figura 32: Exponente de Liapunov mediante el algoritmo de Wolf, para la serie del IGBM. El exponente converge a 0,02.

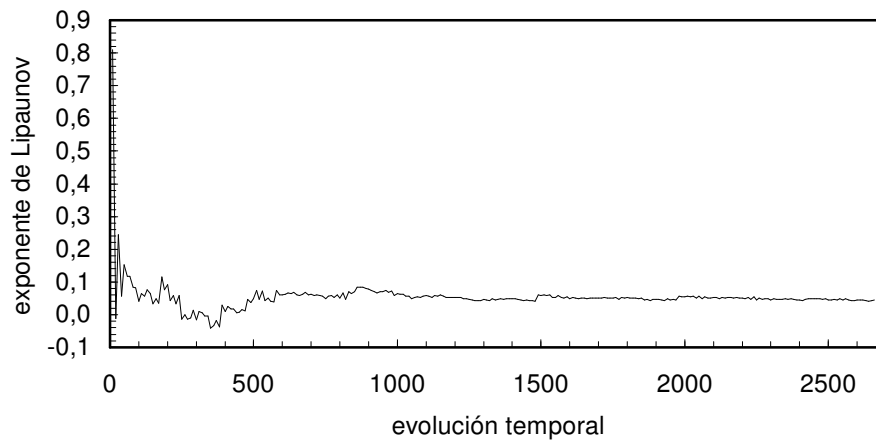


Figura 33: Exponente de Liapunov mediante el algoritmo de Wolf, para la serie del IGBM. El exponente converge a 0,04.

El método propuesto por Wolf, es sensible al ruido del sistema, por lo tanto, los resultados obtenidos mediante este método debe ser vistos con cautela. Los resultados obtenidos son un exponente de 0,02 para la serie del IGBM y de 0,04 para la serie del IBEX 35.

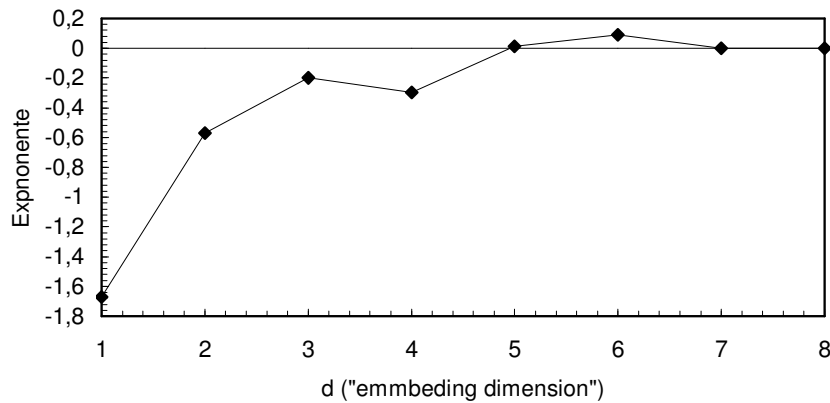


Figura 34: Exponente de Liapunov obtenido mediante el método NEGM, para la serie del IBEX 35. El exponente converge al valor $\lambda=0,01$.

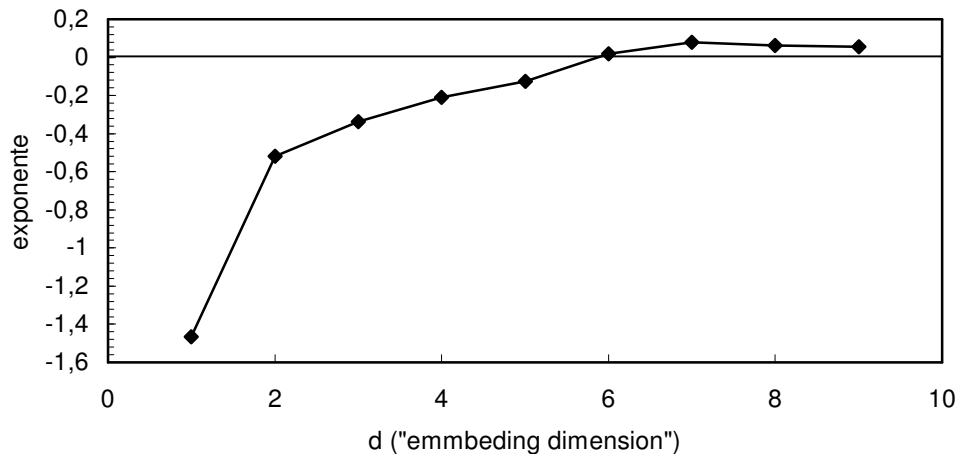


Figura 35: Exponente de Liapunov obtenido mediante el método NEGM, para la serie del IBEX 35. $\lambda=0,05$

La figura 34 muestra los exponentes estimados para cada dimensión de inserción siendo el criterio elegido para la elección del exponente el de la minimización del GCV (Generalized Cross Validation). El método NEGM es robusto ante ruido en el sistema observándose para el caso de IGBM la convergencia del exponente en un valor positivo cercano a 0,01; sin embargo, la inexistencia de datos tabulados para los valores obtenidos no permite contrastar la significatividad del mismo. En el caso del IBEX 35 la convergencia se observa alrededor de 0,5, como puede observarse en la figura 35.

Análisis espectral

El análisis espectral mediante la transformada de Fourier se utiliza, para el estudio de los sistemas dinámicos y proporciona información cualitativa y cuantitativa sobre el comportamiento del sistema.

Observando la estructura de la PSD es posible obtener conclusiones sobre la periodicidad o cuasiperiodicidad de un sistema. Vamos a calcular el espectro de potencia de las dos series de rendimientos que estamos estudiando buscando la posible periodicidad, o el comportamiento cíclico de las mismas.

La figura 36 corresponde al periodograma para la serie del IGBM. En el eje de abscisas se ha representado el periodo como el inverso de la frecuencia, por lo que las unidades de dicho eje son meses por ciclo, correspondiendo el valor más alto corresponde a $n=170,75$; por lo tanto hay un ciclo con una duración aproximada de 170 meses. Dicho ciclo coincide con el que se ha obtenido mediante el análisis *R/S* para la misma serie. El siguiente valor alto corresponde a un ciclo de 29,69 meses, el cual no aparece reflejado en el análisis *R/S*.

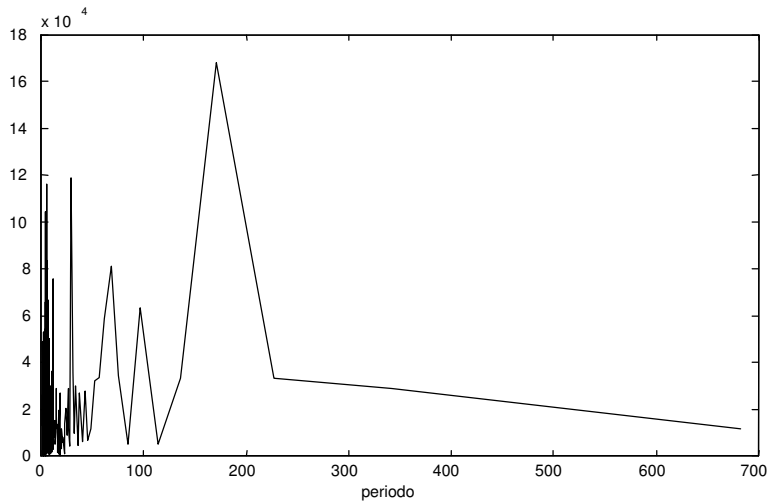


Figura 36: Periodograma para la serie del IGBM.

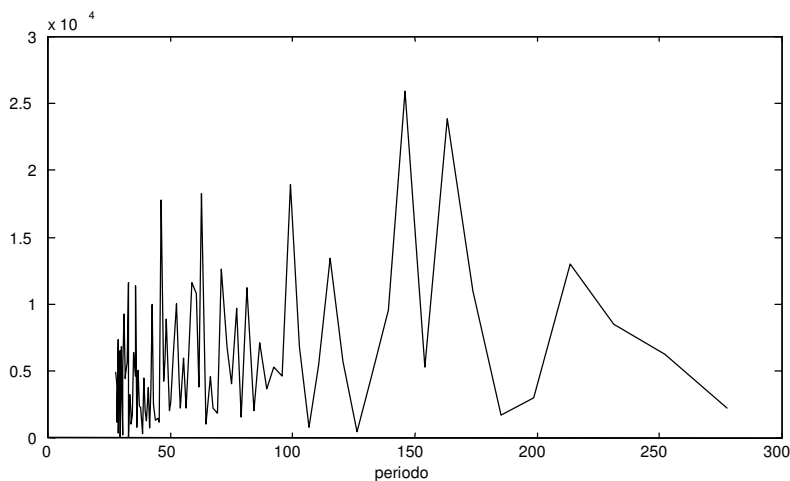


Figura 37: Periodograma para la serie del IBEX 35.

Veamos ahora el resultado para la serie del IBEX 35. Este periodograma es más errático que el de la figura 37 y no existe ningún valor elevado claramente diferenciado, siendo imposible, en este caso, distinguir la longitud de ciclo.

Para muchos sistemas caóticos, se ha observado que existe un ruido denominado $1/f^\alpha$. Este ruido se produce porque los componentes de baja frecuencia dominan sobre los de frecuencia alta, siguiendo una función exponencial. Este fenómeno aparece en las series correspondientes al cuadrado de los rendimientos de las acciones²⁰. Las figuras 38 y 39 representan los periodogramas en escala logarítmica para dichas series, y en ambos casos se observa una pendiente decreciente para dicho periodograma, lo que indica que las series no se comportan como ruido blanco.

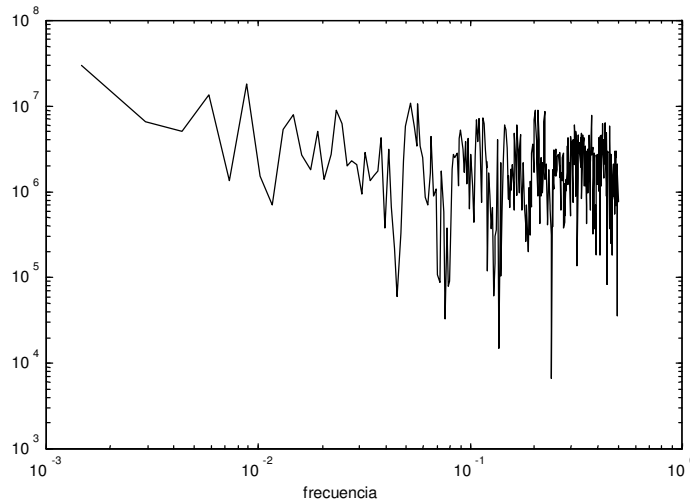


Figura 38: Periodograma en logaritmos para la serie del IGBM.

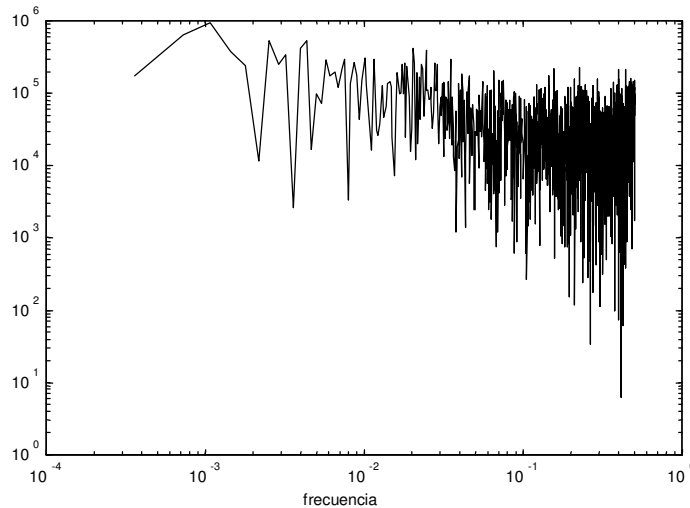


Figura 39: Periodograma en logaritmos para la serie del IBEX 35.

Evidencias de no linealidad en las cotizaciones: el test BDS.

a) Gráfico de recurrencia

Antes de comprobar los resultados del estadístico BDS vamos a observar el gráfico de recurrencia de las series, el cual sirve para detectar el cambio estructural en una serie temporal. Las figuras 40 y 41 muestran dichos gráficos para las series del índice general de la bolsa de Madrid y del IBEX 35, respectivamente.

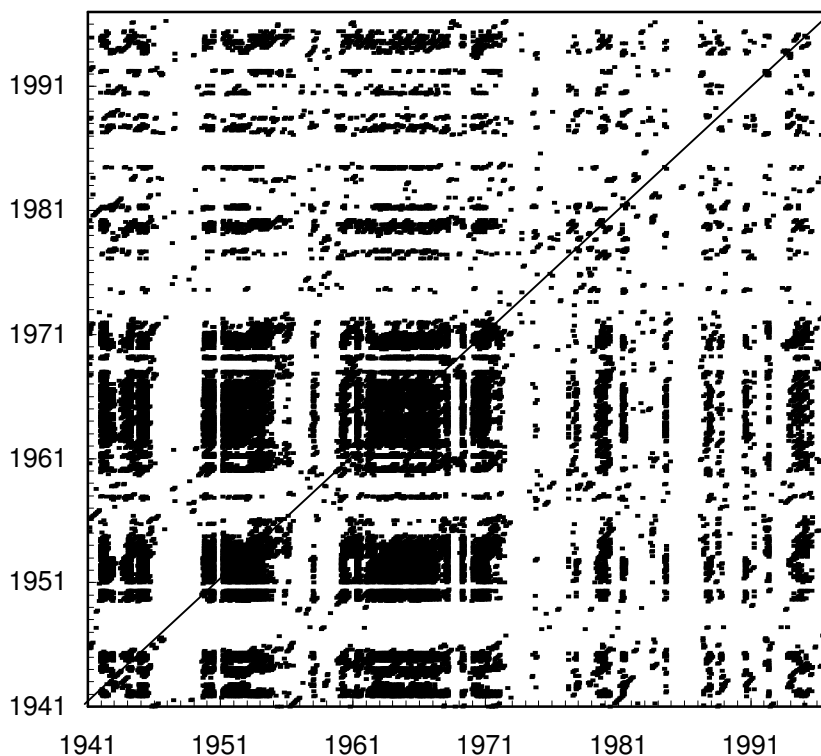


Figura 40: Gráfico de recurrencia para el índice general de la Bolsa de Madrid.

La existencia de zonas claras y oscuras en los gráficos de recurrencia permite suponer que existe una violación de la hipótesis de que la tasa de variación de las cotizaciones se comporte i.i.d.. Es posible, observando las figuras, detectar importantes cambios estructurales. Las zonas oscuras pueden indicar tanto periodos de escasa volatilidad, como periodos en los que hay una estructura no lineal mayor. Los cambios de zonas claras a oscuras sugieren un fuerte cambio de la dinámica del sistema.

En la figura 40 se pueden observar principalmente cuadrados más oscuros alrededor de la diagonal que corresponden a periodos de estabilidad. El primero va de 1949 a 1955 y corresponde a un momento en el que la economía española experimenta un fuerte crecimiento con gran estabilidad de precios. El segundo va de 1960 a 1973, fecha en la que comienza la crisis del petróleo, y con ella un periodo turbulento, que aparece en el gráfico de recurrencia como una zona en blanco alrededor de la diagonal.

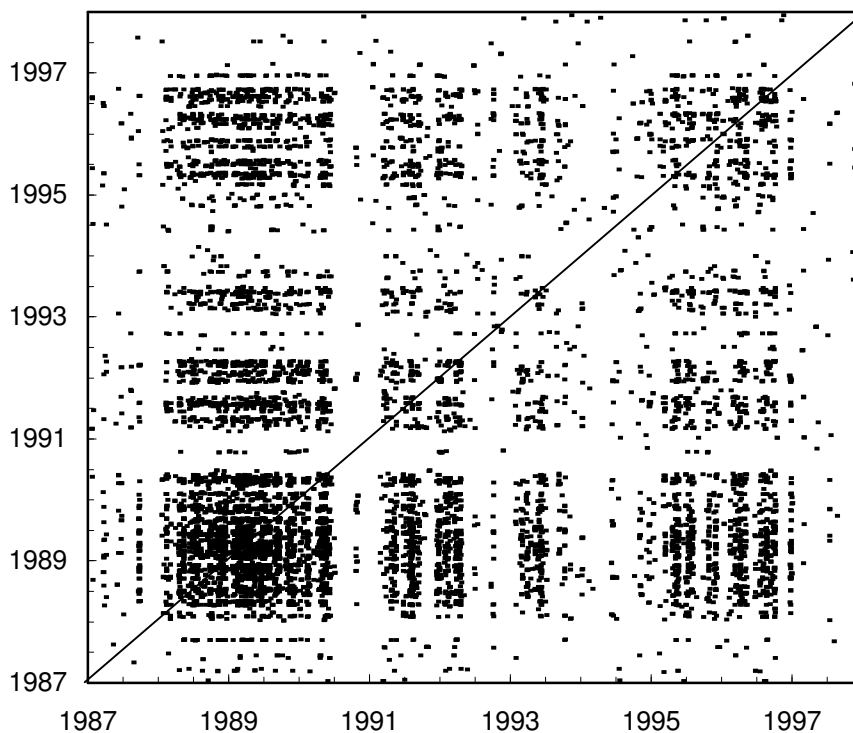


Figura 41: Gráfico de recurrencia del índice IBEX 35.

En la figura 41 puede apreciarse una clara zona blanca cerca del origen del gráfico de recurrencia, que corresponde a la crisis que en 1987 se produce en la bolsa de Nueva York y que se transmite a todas las bolsas europeas y entre ellas la de Madrid.

Entre 1988 y mediados de 1990 se advierte un cuadrado más oscuro alrededor de la diagonal, pero con zonas más claras dentro del mismo. Esto corresponde a un periodo con movimientos erráticos del índice. A mediados de 1990 comienza otra etapa de mayor volatilidad debida a la nueva crisis derivada de la guerra de Golfo.

b) El test BDS

A continuación se presentan los resultados de aplicar el estadístico BDS a las series originales de los dos índices de la bolsa. Se ha calculado el estadístico para las dimensiones de encajado $n=2, 3, 4$ y 5 y para valores de ϵ iguales a $0,25, 0,5, 1, 1,5$ y 2 desviaciones típicas de los datos. La tabla 7 muestra los resultados para la serie del índice general. Como puede observarse es posible, en todos los casos, rechazar la hipótesis de i.i.d..

Tabla 7: Estadístico BDS del índice general de la Bolsa de Madrid.

n	ϵ/σ				
	0,25	0,5	1	1,5	2
2	4,912072	4,679095	4,179432	4,146560	4,596683
3	9,061328	8,411166	7,646163	6,524433	5,969492
4	14,165879	13,136857	10,347323	7,900318	6,675770

5	18,690696	18,735172	13,363768	9,365620	7,422739
---	-----------	-----------	-----------	----------	----------

La tabla 8 muestra los resultados del estadístico BDS para la serie de datos originales del índice IBEX 35; en este caso también se rechaza la hipótesis de i.i.d..

Tabla 8: Estadístico BDS del índice IBEX35.

n	ϵ/σ				
	0,25	0,5	1	1,5	2
2	12,573671	12,520200	12,719602	12,653465	12,363093
3	17,614444	16,743386	15,894578	15,493890	15,114442
4	24,211377	22,237512	19,567826	18,102005	17,077431
5	32,632139	28,461264	22,685854	19,800750	18,156778

El estadístico BDS se debe utilizar sobre una serie preblanqueada, ya que si existiera cualquier dependencia lineal daría lugar a que se rechazara la hipótesis de i.d.d. de la serie. Para evitar esto tomamos la serie de residuos obtenida de un $AR(1)$. En las tablas 9 y 10 se exponen los resultados del estadístico BDS para las series de residuos de ambas series.

Tabla 9: Estadístico BDS para la serie de residuos del índice general de la Bolsa de Madrid.

n	ϵ/σ				
	0,25	0,5	1	1,5	2
2	5,932831	5,241889	4,751098	4,363223	4,579983
3	8,713754	9,103272	7,862320	6,676767	5,997725
4	12,548709	13,262099	10,646878	8,135002	6,735245
5	12,559323	19,006827	13,771196	9,704767	7,558944

Tabla 10: Estadístico BDS para la serie de residuos del IBEX 35.

n	ϵ/σ				
	0,25	0,5	1	1,5	2
2	11,717455	11,573978	11,814386	11,699844	11,529127
3	17,214237	16,524083	15,587245	14,993810	14,845600
4	24,416966	22,434185	19,625659	17,830568	16,982351
5	34,267818	28,933195	23,159665	19,750812	18,154198

Los resultados de ambas tablas permiten rechazar la hipótesis de i.i.d. en las series y rechazar la teoría de que las variaciones de los precios se comportan como variables i.i.d.

Como ya se ha expuesto, el rechazo de la hipótesis no implica que la serie sea caótica. Sin embargo, si se ha limpiado la serie de toda dependencia lineal, el estadístico

BDS muestra que hay evidencias de no linealidad en la serie de rendimientos de las acciones.

Conclusiones

Vamos a finalizar con unas consideraciones que se refieren tan sólo a la parte empírica de este trabajo, pues la general y teórica que la precede no necesita de mayores precisiones. Dicho lo cual puede afirmarse en términos generales, y con todas las matizaciones realizadas, que la aplicación de los distintos tests a las series temporales de la Bolsa de Madrid correspondientes al período analizado arroja una información adicional a la que podría obtenerse con los procedimientos tradicionales, permitiendo extraer, muy sintéticamente, las conclusiones siguientes:

a/ De la aplicación del análisis R/S a la serie original de los rendimientos de ambos mercados, se deducen valores del exponente de Hurst distintos de 0,5, lo que permite afirmar que ambas series presentan persistencia.

b/ Para la serie del Índice General se observa una tendencia a la saturación de la pendiente para dimensiones de inserción altas alrededor del valor 7, pudiendo ello constituir un indicador de la existencia de caos en la serie. En el caso del IBEX35 no se observa saturación de la pendiente a medida que aumenta la dimensión de inserción, por lo que no puede asegurarse que la serie sea caótica.

c/ El cálculo del mayor exponente de Liapunov mediante el algoritmo de Wolf nos ofrece resultados positivos, tanto para el Índice General, como para el IBEX35.

d/ La aplicación del método NEGM, que es más robusto ante el ruido, permite, asimismo, observar la convergencia del exponente de Liapunov en sendos valores positivos.

e/ La aplicación del análisis espectral mediante la transformada de Fourier proporciona información sobre el comportamiento cíclico del sistema, pudiendo observar que el ciclo de 170 meses obtenido para la serie del Índice General coincide con el que se obtiene mediante el análisis R/S. Los resultados no son tan claros para la serie del IBEX35, al ser más errático el periodograma.

f/ La utilización de los gráficos de recurrencia permite rechazar la hipótesis de que la tasa de variación de las cotizaciones se comporta i.i.d., siendo posible detectar importantes cambios estructurales a lo largo de la época estudiada.

g/ El estadístico BDS muestra, asimismo, que hay evidencia de no-linealidad en la serie de rendimientos de las acciones.

-
- ¹ Brock, W., Lakonishok, J. y LeBaron, B. (1992), Levich, R. M., Thomas, R. L. (1993) y LeBaron, B. (1991)
- ² En Granger, C. W. (1975) se puede encontrar un resumen de los resultados de algunos trabajos sobre el coeficiente de correlación para las series bursátiles.
- ³ Granger, C. W. y Morgesten, O. (1970).
- ⁴ Fama, E. y Blume M. (1966), Jensen, M. y Benington, G. (1970).
- ⁵ Citaremos aquí dos de los estudios más relevantes: Dimson, E. y Marsh, P. (1984) y Elton, E., Gruber, M. y Grossman, S (1986).
- ⁶ El primero que estudia la relación entre la eficiencia de mercado y la martingala es Samuelson en 1965
- * $E_t[x_T] = E[x_T/I_t]$ con $t < T$, es decir el valor x_T de x_t utilizando la información disponible hasta t .
- ⁷ Para un estudio amplio y riguroso de las martingalas como uno de los instrumentos de la teoría moderna de las finanzas recomendamos dos obras excelentes de nivel medio y medio alto, respectivamente: Roger Patrick (1991) págs 184-200 y Neftci, Salik N (1996), págs 101-126.
- ⁸ Admitir que los precios siguen un camino aleatorio en sentido estricto es más restrictivo que asegurar que siguen una martingala, ya que ésta elimina cualquier dependencia de la variación de los precios con la información disponible en t mientras que el camino aleatorio elimina la dependencia con momentos condicionales superiores.
- ⁹ Durlauf, S. N. (1991) y Fong, W. M. y Ouliaris, S. (1995)
- ¹⁰ Banz R. W. (1981), Roll, R. (1981)
- ¹¹ Thaler, R. H. (1987), Clark, R. Y Ziemba, W. T. (1987)
- ¹² Bondt y Thaler, R. H. (1985) y Bondt y Thaler, R. H. (1987)
- ¹³ Como ya hemos dicho, la deducción de las tres ecuaciones diferenciales que componen el sistema puede consultarse en Lux (1998).
- ¹⁴ Más adelante se ofrece un estudio detallado de las características estadísticas de los datos empíricos del índice de la Bolsa de Madrid y del IBEX 35.
- ¹⁵ Fama (1965), Sharpe (1970) y otros.
- ¹⁶ En la literatura académica sobre la evolución temporal de los rendimientos de los activos se acepta también que la desviación típica aumenta con la agregación temporal, mientras que la curtosis disminuye (en esta caso la serie mensual tiene una desviación típica mayor y una curtosis menor).
- ¹⁷ Brock et al. (1991)
- ¹⁸ El intervalo de confianza al 10% de significatividad es (0,861 1,747) por lo que a este nivel no rechazaría la hipótesis nula de no-memoria larga en algunos de los subintervalos.
- ¹⁹ El teorema dice lo siguiente: Sea x_t una serie temporal de datos deterministas y caóticos, si se adapta la serie a un modelo AR (p) con p y se obtiene la serie de residuos ε_t ; entonces, en general la dimensión de correlación y el exponente de Liapunov dominante de x_t y ε_t son iguales.
- ²⁰ Brock, W. A. (1991), pag 188

BIBLIOGRAFÍA

- Anis, A. A. y Lloyd, E. H. (1986): *The Expected Value of the Adjusted Rescaled Hurst Range of Independent Normal Summands*. *Biometrika* 1. 111-116.
- Assaf, D. y Gadbois, S. (1992): *Definitions of Chaos*. *American Mathematical Monthly*. 99. 865.
- Banks, J., Brooks, G., Davis, G. y Stacy, P. (1992): *On Devaney's Definition of Chaos*. *American Mathematical Monthly*. 99. 332-334.
- Banz, R. W. (1981): *The Relationship Between Return and Market Value of Common Stock*. *Journal of Financial Economics*. 9. 3-18.
- Barnett, W. A., Gallant, A. R., Hininch, M. J., Jungeilges, J. A., Kaplan, D. T. y Jensen, M. J. (1997): *A single-blind controlled competition among tests for nonlinearity an chaos*. *Journal of Econometrics*, 82. 157-192.
- Barnett, W. A., Gallant, A. R., Hininch, M. J., Jungeilges, J. A., Kaplan, D. T. y Jensen, M. J. (1995): *Robustness of nonlinearity and chaos tests to measurement error, inference method, and sample size*. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 27. 301-320.
- Bondt, y Thaler, R.H. (1985): *Does the Market Overreact?* *Journal of Finance*. XL. 3. 793-808.
- Bondt, y Thaler, R. H. (1987): *Further Evidence on Investor Overreaction and Stock Market Seasonality*. *Journal of Finance*. XLII. 3. 557-581.
- Brock, W. A., Dechert, W. Y Scheinkman, J. (1987): "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", Working Paper, University of Wisconsin at Madison, University of Houston and University of Chicago.
- Brock, W. A., Hsieh, D. A. y LeBaron, B. (1991): "Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence". MIT Press, Cambridge, MA.
- Brock, W. A., Lakonishhok, J. Y LeBaron, B. (1992): *Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns*. *Journal of Finance*. 5. 1731-1766.
- Clark, R. y Ziemba, W. T. (1987): *Playing the Turn-of-the-Year Effect with Index Futures Operations Research*. 35. 24-45.
- Day, R. H. y Huang, W. (1990): *Bulls, Bears and Market Sheep*. *Journal of Economic Behavior and Organization*. 16. 37-83.

Day, R. H. y Huang, W. (1993): "Chaotically Switching Bear and Bull Markets" en *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*. Day, R. H y Chen, P. (eds.) Oxford University Press.

De Grauwe, P, Dewachater y Embrechts, M., (1993): "Exchange Rate Theory: Chaotic Models of Foreign Exchange Markets." Oxford. Blakwell Publ.

Devaney, R. L. (1984): "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems". Addison Wesley.

Dimson, E. y Marsh, P. (1984): *An Analysis of Brokers' and Analysts' Unpublished Forecasts of UK Stocks Returns*. *The Journal of Finance*, 39. 5. 1257-1292.

Durlauf, S. N. (1991) : *Spectral Based Testing of the Martingale Hypothesis*. *Journal of Econometrics*, 50, 355-376.

Elton, E. Gruber, M. y Grossman, S. (1986): *Discreet Expectational Data and Portfolio Performance*. *Journal of Finance*, XXXI. 3. 699-712.

Fama, E. F. y Blume, M. (1966): *Filter Rules and Stock Market Trading*. *Journal of Business*, 39. 226-241.

Fama, E. F. y French, K. R. (1993): *Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds*. *Journal of Financial Economics*. 33. 3-56.

Feder, J. (1988): "Fractals". Plenum Press.

Fernández Díaz, A. (1994): "La Economía de la Complejidad", McGraw- Hill., Madrid.

Fernández Díaz, A.(1996): "New Frontiers in Market Analysis: Chaos and Capital Markets", en 19th EFFAS CONGRESS, Instituto Español de Analistas Financieros, Madrid.

Fernández Díaz, A. (2000): "Dinámica Caótica en Economía", McGraw-Hill, Madrid

Fernández Díaz, A. (2001): "Entre el ruido blanco y el ruido negro: Nuevos enfoques en el análisis de los Mercados Financieros", en Toma de decisiones en ambientes profesionales (Coordinado por P. García Barreno, S. Ríos García y J. Girón González), Instituto de España, Madrid.

Fernández Díaz, A., Grau-Carles, P. y Escot Mangas, L. (2002): "Nonlinearities in the Exchange Rates Returns and Volatility", *Physica A*, 316, Elsevier.

Fernández Díaz, A., Alonso González, A. y Grau Carles, P. (1994): *Caos y mercado de capitales: una introducción*. *Cuadernos de Economía Aplicada*, nº 22. Centro de Estudios Ramón Areces.

Fong, W. M. y Ouliaris, S. (1995): "Spectral Tests of the Martingale Hypothesis for Exchange Rates". *Journal of Applied Econometrics*. 10. 255-271.

Gencay, Ramazan and W. D. Dechert (1992): *An algorithm for the n Liapunov exponents of an n -dimensional unknown dynamical system*, *Physica D*, 59, 142-157.

Granger, C. W. (1975): *A Survey of Empirical Studies on Capital Markets* en Elton y Gruber, *International Capital Markets*. North-Holland.

Granger, C. W. y Morgenstern, O. (1970): "Predictability of Stock Market Prices", Heath.

Grassberger, P. y Proccacia, I. (1983): *Characterization of Strange Attractors*. *Physical Review Letters*, 50, 5, 346-394.

Grau Carles, P.(1997). "Mercados de capitales y caos: un modelo simple" *Anuario Jurídico y Económico Esculariense*, XXX, 840-890.

Hurst, H. E. (1950): *Long Term Storage Capacity Of Reservoirs Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 2447. 770-808.

Jensen, M y Bennington, G. (1970): *Random Walks and Technical Theories: Some Additional Evidence*. *Journal of Finance*, XXV, 1. 469-482.

Kaplan, J. L. Y Yorke, J. A. (1979): "Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations" en Peitgen, H.-O. Y Walter, H. O. (eds.) *Functional Difference Equations and Approximation of Fixed Points*. Springer-Verlag. Heidelberg.

Kuan, Chung-Ming and Tung Liu (1995): *Forecasting exchange rates using feedforward and recurrent networks*. *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 10, 347-364.

LeBaron, B. (1991): "Technical Trading Rules and Regime Shifts in Foreign Exchange" Working Paper 9118. University of Wisconsin-Madison.

Levich, R. M. y Thomas, R. L. (1993): *The Significance of Technical Trading-rule Profits in the Foreign Exchange Market: A Bootstrap Approach*. *Journal of International Money and Finance*. 12. 451-474.

Lo, A. W. (1991): *Long-term memory in stock market prices* *Econometrica*. 59. 1279-1312.

Lux, T. (1995): *Herd Behavior, Bubbles and Crashes* *Economic Journal*, 105, 881-886.

Lux, T. (1998): *The Socio-economics Dynamics of speculative Markets: interacting agents, chaos, and the fat tails of return distributions*. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 33, 143-165.

Mandelbrot , B. B. y Van Ness, J. W. (1968): *Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications*. *SIAM Review*. 10. 4. 422-437.

McCaffrey, D. F., Ellner, S. Gallant, A. R. Y MacCaffrey, D. (1992): *Estimating the Liapunov Exponent of a chaotic system with nonparametric regression. Journal of the American Statistical Association* 87,682-695.

Medio, A (1992): "Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics", Cambridge University Press.

Oppenheim, A. W. Y Schafeer, R. W. (1989): "Discrete -time signal processing", Prentice-Hall.

Ou, J. A. y Penman, S. H. (1989): *Financial Statement Analysis and the Prediction of Stock Returns Journal of Accounting and Economics*. 295-329.

Packard, N.H., Chutchfield, J. P., Farmer, J. D. Y Shaw, R. S. (1980): "Geometry of Time Series". *Physical Review Letters*. 45. 9.712-716.

Peters. E. E. (1994): "Fractal Market Analysis". John Wiley & Sons.

Press, W. P., Flannery, B. P., Teukolski, S. A. Y Vetterling, W. T. (1986): "Numerical Recipes: The Art Of Scientific Computing". Cambridge University Press.

Puu, T. (1993): "Nonlinear Economic Dynamics". Springer Verlag.

Roll, R. (1983): *On Computing Mean Returns and the Small Firm Effect Journal of Finance*, 36, 879-888.

Samuelson, P. A. (1965): *Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly Industrial Management Review*. 6. 41-49.

Thaler, R. H. (1987): *Anomalies: The January Effect, Journal of Economic Perspectives*. 1. 1. 179-201.

Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. Y Vastano, J. A. (1985): *Determining Liapunov Exponents from a Time Series. Physica* 16D. .

