Universidad Rey Juan Carlos

**Escuela Superior de Ciencias Experimentales y Tecnología**

**GRADO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y AUTOMÁTICA**

**Trabajo Fin de Grado**

# IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA DE ESTIMACIÓN DE ORIENTACIÓN BASADO EN SENSORES IMU SOBRE PLATAFORMA SOC-FPGA PARA EXOESQUELETOS DE REHABILITACIÓN

**Autor:** Diego Galindo Borrás

**Tutor:** Rubén Nieto Capuchino

Curso académico 2025/26

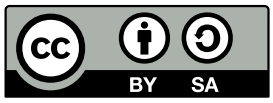
**Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática**

**Trabajo Fin de Grado**

El presente trabajo, titulado **IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA DE ESTIMACIÓN DE ORIENTACIÓN BASADO EN SENSORES IMU SOBRE PLATAFORMA SOC-FPGA PARA EXOESQUELETOS DE REHABILITACIÓN**, constituye la memoria correspondiente a la asignatura Trabajo de Fin de Grado que presenta **Diego Galindo Borrás** como parte de su formación para aspirar al Título de Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática. Este trabajo ha sido realizado en la **Escuela Superior de Ciencias Experimentales y Tecnología** de la Universidad Rey Juan Carlos en el **Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica** bajo la dirección de **Rubén Nieto Capuchino**.

Móstoles, a 10 de julio de 2026

© 2026 Diego Galindo Borrás
Algunos derechos reservados.
Este documento se distribuye bajo la licencia
“Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional” de Creative Commons,
disponible en
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es



**A todos los ilustres lectores de este documento...**

*"Nada tiene tanto poder para ampliar la mente como la capacidad de investigar de forma sistemática y real todo lo que es susceptible de observación en la vida."*
Marco Aurelio. Meditaciones

# Agradecimientos

*A todos los que la presente vieren y entendieren.*
Inicio de las Leyes Orgánicas. Juan Carlos I

Quiero expresar mi más sinceros agradecimientos a todas aquellas personas que han hecho posible que este proyecto salga a delante. Este trabajo es la síntesis de cinco años de esfuerzo y trabajo duro, siendo este así el punto y final de unas de las mejores etapas de mi vida.

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi tutor Rubén Nieto, por su paciencia, su dedicación, su orientación y por supuesto su apoyo constante durante todos estos meses. Desde el primer momento ha estado ayudándome y siempre a disposición para cualquier consulta.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todo el profesorado de esta universidad del grado de Ingeniería Electrónica Industrial y Automática por su dedicación, apoyo y compromiso con mi formación a lo largo de estos años. Gracias a su acompañamiento, conocimientos y ejemplo, no solo he adquirido aprendizajes académicos, sino también valores y herramientas que han contribuido a construir, poco a poco, la persona que soy hoy. Este trabajo es, en parte, reflejo de todo lo que me han enseñado.

Con una mención especial a la profesora y coordinadora de grado Susana Borromeo, quien ha sido una "madre" durante este periodo de mi vida.

Gracias, por supuesto, a mis compañeros y amigos de la carrera, por hacer de esta experiencia inolvidable. A todos aquellos que llegaron hasta el final y también a quienes, por distintos motivos, tomaron otros caminos durante el recorrido.

Finalmente, la parte más importante de todas, mi familia. Gracias por estar siempre a mi lado, por sostenerme en los momentos de duda y cansancio, y por creer en mí incluso cuando yo misma no lo hacía. Vuestro apoyo incondicional, vuestra paciencia y vuestro cariño han sido el pilar fundamental que me ha permitido llegar hasta aquí. Sin vosotros, este camino y este logro no habrían sido posibles.

Muchas gracias a todos y todas.

# Resumen

El presente Trabajo de Fin de Grado se enmarca dentro del proyecto NIMBLE orientado a la mejora de las terapias de rehabilitación de la marcha en pacientes con lesiones medulares incompletas mediante el uso de exoesqueletos de tren inferior. En este contexto, disponer de una estimación precisa y en tiempo real de la posición relativa de las partes del cuerpo en el espacio resulta esencial para el control y la monitorización del dispositivo, así como, la mejora de calidad de vida del paciente.

El objetivo de este trabajo es la implementación y validación de un sistema de estimación de orientación basado en sensores inerciales (IMUs) y en el filtro de procesamiento de datos Madgwick. El sistema se ha desarrollado sobre la plataforma SoC-FPGA Zybo Z7, basada en el dispositivo Xilinx ZYNQ-7000, empleando dos módulos PmodNAV, basados en el integrado LSM9DS1 como unidades de medida inercial. El diseño hardware se ha realizado en Vivado, reservando la lógica programable de la FPGA para la gestión de la comunicación SPI con los sensores y el manejo de interrupciones, mientras que el filtro Madgwick se ejecuta en lenguaje C sobre el procesador ARM Cortex-A9 mediante el entorno de Vitis IDE.

El filtro, configurado en su variante MARG (Magnetic, Angular Rate, and Gravity) a una frecuencia de muestreo de 10 Hz, proporciona la orientación de cada sensor en forma de cuaternión, garantizando la ausencia de singularidades de tipo Gimbal Lock y un coste computacional reducido que asegura su viabilidad en tiempo real. La validación del sistema se ha llevado a cabo calculando la diferencia angular entre dos IMUs y comparando tanto las señales brutas como los cuaterniones estimados frente al sistema comercial de referencia Technaid MCS. Los resultados muestran una elevada coherencia entre ambos sistemas, validando la arquitectura propuesta como una solución de bajo coste adecuada para su integración en exoesqueletos de rehabilitación del tren inferior.

**Palabras clave:** IMU, filtro de Madgwick, cuaterniones, FPGA, ZYNQ-7000, exoesqueleto, rehabilitación.

# Abstract

This final degree project is framed within the NIMBLE project of Universidad Rey Juan Carlos, aimed at improving gait rehabilitation therapies for patients with incomplete spinal cord injuries through the use of lower-limb exoskeletons. In this context, having an accurate, real-time estimation of the orientation of the body segments is essential for the control and monitoring of the device and for improving the patient's quality of life.

The goal of this work is the implementation and validation of an embedded orientation-estimation system based on inertial measurement units (IMUs) and on the Madgwick data-processing filter. The system has been developed on the Zybo Z7 SoC-FPGA platform, based on the Xilinx ZYNQ-7000 device, using two PmodNAV modules (based on the LSM9DS1 chip) as inertial measurement units. The hardware design has been carried out in Vivado, reserving the programmable logic of the FPGA for the management of the SPI communication with the sensors and the interrupt routing, while the Madgwick filter runs in C language on the ARM Cortex-A9 processor through the Vitis IDE environment.

The filter, configured in its MARG (Magnetic, Angular Rate, and Gravity) variant at a sampling frequency of 10 Hz, provides the orientation of each sensor as a quaternion, ensuring the absence of Gimbal Lock singularities and a reduced computational cost that guarantees its real-time feasibility. The validation of the system has been carried out by computing the angular difference between two IMUs and by comparing both the raw signals and the estimated quaternions against the commercial reference system Technaid MCS. The results show a high coherence between both systems, validating the proposed architecture as a low-cost solution suitable for its integration into lower-limb rehabilitation exoskeletons.

**Keywords:** IMU, Madgwick filter, quaternions, FPGA, ZYNQ-7000, exoskeleton, rehabilitation.

# Índice general

**Resumen** **vi**

**Abstract** **vii**

**Índice de figuras** **x**

**Índice de tablas** **xii**

**Lista de acrónimos** **xiii**

**1 Introducción** **1**

1.1 Contexto y Motivación . . . . . 1

**2 Objetivos** **4**

2.1 Metodología . . . . . 4

2.2 Estructura del plan de trabajo . . . . . 6

2.3 Estructura de la memoria . . . . . 6

**3 Estudio teórico** **8**

3.1 Exoesqueleto . . . . . 8

3.2 Inertial Measurement Unit (IMU) . . . . . 10

3.3 Ángulos de Euler . . . . . 12

3.4 Cuaterniones . . . . . 15

**4 Solución Técnica** **18**

4.1 Dispositivos SoC basados en FPGAs . . . . . 18

4.2 Introducción a la estimación de estados . . . . . 19

4.2.1 Familia de filtros de Kalman . . . . . 19

4.2.2 Filtro Madgwick . . . . . 24

4.3 Comparativa entre el filtro Kalman extendido y el filtro de Madgwick . . . . . 27

4.4 Justificación de la solución adoptada . . . . . 28
4.4.1 Selección de la plataforma . . . . . 28
4.4.2 Selección del entorno de desarrollo . . . . . 29
4.4.3 Selección del método de estimación . . . . . 29

**5 Resultados** **30**
5.1 Validación de la plataforma hardware . . . . . 30
5.2 Validación de las señales adquiridas . . . . . 34
5.3 Resultados de estimación de orientación . . . . . 36
5.3.1 Evolución de la orientación estimada . . . . . 36
5.3.2 Comparativa entre IMU0 e IMU1 . . . . . 37
5.3.3 Diferencia angular total entre las dos IMUs . . . . . 39
5.4 Comparativa con Technaid MCS . . . . . 40
5.4.1 Comparación de las señales brutas . . . . . 40
5.4.2 Comparación de las orientaciones estimadas mediante cuaterniones frente al sistema comercial Technaid MCS . . . . . 43
5.5 Discusión de resultados . . . . . 45
5.6 Presupuesto . . . . . 47
5.6.1 Mano de obra . . . . . 47
5.6.2 Software . . . . . 47
5.6.3 Hardware . . . . . 47
5.6.4 Coste total . . . . . 48

**6 Conclusiones y líneas futuras** **49**
6.1 Conclusiones . . . . . 49
6.2 Líneas futuras . . . . . 50

**Bibliografía** **52**

**Apéndice A Detalles de implementación del filtro de Madgwick** **56**

**Apéndice B Código fuente del proyecto** **62**

# Índice de figuras


1.1 Exoesqueleto robótico para la asistencia a la marcha. [1] . . . . . 2

1.2 Sistema Lokomat de rehabilitación de la marcha [2] . . . . . 2

2.1 Diagrama Gantt. . . . . 6

3.1 Exoesqueleto Exo-H3 [3]. . . . . 10

3.2 Estructura de un sensor IMU [4]. . . . . 11

3.3 Representación de los ángulos de Euler [5]. . . . . 13

3.4 Representación de la singularidad Gimbal Lock [6]. . . . . 14

3.5 Representación de la rotación de los cuaterniones. . . . . 15

4.1 Representación del filtro Kalman [7]. . . . . 22

4.2 Diagrama de funcionamiento del filtro de Kalman extendido (EKF). [8]. . . . . 24

4.3 Diagrama del filtro Madgwick [9]. . . . . 26

5.2 Distribución física de los recursos lógicos sobre la FPGA tras la implementación. 31

5.1 Diagrama de bloques del diseño hardware implementado en Vivado. . . . . 32

5.3 Señales brutas del acelerómetro (superior), giroscopio (centro) y magnetómetro (inferior) registradas durante el ensayo con el módulo PmodNAV. . . . . 35

5.4 Montaje experimental del ensayo de orientación relativa. Ambos sensores se conectan a los conectores Pmod de la placa Zybo Z7, y junto a ellos se fijaron los sensores del sistema de referencia Technaid MCS para la captura simultánea. . . 37

5.5 Evolución temporal de las componentes del cuaternión de orientación estimado por el filtro de Madgwick para ambas IMUs durante el mismo ensayo. . . . . 38

5.6 Diferencia angular total entre IMU1 e IMU0 a lo largo del ensayo. . . . . 39

5.7 Comparación del acelerómetro eje a eje entre el PmodNAV (línea sólida) y el sistema Technaid MCS (línea a trazos). Señales normalizadas en unidades de g . 41

5.8 Comparación del giroscopio eje a eje entre el PmodNAV (línea sólida) y el sistema Technaid MCS (línea a trazos). Velocidades angulares en rad/s . . . . . 41

5.9 Comparación del magnetómetro eje a eje entre el PmodNAV (línea sólida) y el sistema Technaid MCS (línea a trazos). Intensidad de campo magnético en $mu$T 42

5.10 Comparación de las cuatro componentes del cuaternión de orientación estimado por el PmodNAV con el filtro de Madgwick (sólido) frente al sistema comercial Technaid MCS (trazos). Segmento comparable de 1 068 muestras (106,8 s) a 10 Hz. 44

5.11 Error angular entre las dos tecnologias . . . . . 45

# Índice de tablas

4.1 Comparación entre el filtro de Kalman extendido y el filtro de Madgwick. . . . . 27

5.1 Recursos utilizados de la FPGA `7z010clg400-1` tras síntesis e implementación. 33

5.2 Parámetros de configuración del filtro de Madgwick implementado. . . . . 33

5.3 Tiempos de ejecución y frecuencias equivalentes medidos sobre el procesador ARM Cortex-A9. . . . . 34

5.4 Coeficientes de correlación de Pearson y RMSE entre el PmodNAV y el sistema Technaid MCS, eje a eje. . . . . 43

5.5 Métricas de concordancia entre la diferencia angular estimada por el sistema desarrollado y por el sistema Technaid MCS. . . . . 45

5.6 Presupuesto detallado del proyecto . . . . . 48

# Lista de acrónimos

| | |
|---|---|
| CdM | Centro de Masas. |
| EFK | Filtro de Kalman extendido. |
| FK | Filtro de Kalman. |
| FPGA | Field-Programmable Gate Array. |
| IMU | Inertial Measurement Unit. |
| MK | Filtro de Madgwick. |
| PL | Programmable Logic. |
| PS | Processing System. |
| SoC | System on Chip. |

# Capítulo 1

# Introducción

*Desocupado lector, sin juramento me podrás creer*
*que quisiera que este libro [...] fuera el más*
*hermoso, el más gallardo y más discreto que*
*pudiera imaginarse.*

Miguel de Cervantes, Don Quijote de la Mancha

## 1.1 Contexto y Motivación

En España en la actualidad, hay más de cuatro millones de personas que padecen algún tipo de discapacidad, es decir, aproximadamente un 10 % de la población, lo que resalta la necesidad imperativa de contar con servicios de atención re-habilitadora efectivos y accesibles [10]. En este contexto, la discapacidad no debe entenderse únicamente como una limitación, sino también como una oportunidad para desarrollar nuevas capacidades y estrategias de adaptación. En este sentido, cabe destacar iniciativas y testimonios que subrayan la capacidad de adaptación de las personas con discapacidad y la importancia de la rehabilitación en su calidad de vida [11].
Dentro de este grupo de población, las discapacidades de origen neuromotoras ocupan un lugar destacado. Se estima que más de 15 millones de personas, a nivel mundial, sufren lesiones medulares, en la mayoría de casos debidas a traumatismos [12]. La dificultad para caminar representa una de las principales afectaciones de las personas que sufren estas lesiones, y da lugar posteriormente a la aparición de afecciones médicas secundarias tales como dolor, disminución de la densidad ósea o afectaciones de órganos internos [13]. Es precisamente en este punto donde la rehabilitación adquiere un papel fundamental, y donde el desarrollo de nuevas tecnologías, como los exoesqueletos, se presentan como una nueva herramienta innovadora que tiene como finalidad mejorar la autonomía, la funcionalidad y la calidad de vida de aquellas personas que sufren algún tipo de discapacidad motora.

El principal potencial de los exoesqueletos radica en su capacidad para ofrecer rehabilitación personalizada, adaptándose a las necesidades y objetivos específicos de cada paciente, lo que representa un avance significativo respecto a los métodos tradicionales de fisioterapia. Además, más allá de los beneficios físicos, la integración de exoesqueletos en la fisioterapia también

tiene el potencial de ofrecer mejoras psicológicas significativas para los pacientes. La capacidad de pararse y caminar, incluso con asistencia, puede tener un impacto profundo en la autoestima, la independencia y la calidad de vida general [14]. Exoesqueletos como los “ReWalk” y “eLegs” (Figura 1.1) permiten mejorar la marcha de pacientes con alteraciones de la movilidad.

Figura 1.1: Exoesqueleto robótico para la asistencia a la marcha. [1]

La órtesis robótica Lokomat (Figura 1.2) ha demostrado una mejora en personas con trastornos de movilidad. Estos dispositivos para la rehabilitación, basan su funcionamiento en realizar una serie de movimientos definidos por fisioterapeutas, lo que proporciona a los médicos evaluar el avance y mejoría que los pacientes de una forma automática [15].

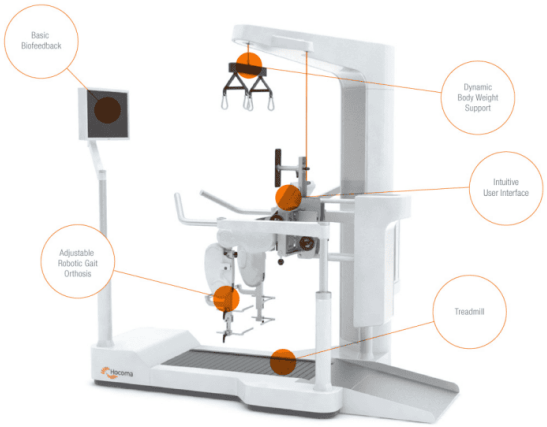



Figura 1.2: Sistema Lokomat de rehabilitación de la marcha [2]

En el campo de la robótica moderna, uno de los mayores desafíos es la emulación del movimiento humano, centrándonos especialmente en el ciclo de la marcha, que se describe como la sucesión de dos fases principales que se dan en la extremidad inferior derecha: la fase de apoyo y la fase oscilante. [16]. En el caso de los exoesqueletos bípedos para la rehabilitación del tren inferior, reproducir con precisión el patrón de marcha, es un proceso que involucra la coordinación entre cadera, rodilla y tobillo, ademas del mantenimiento del equilibrio durante el desplazamiento [17].

Para abordar este reto, los sistemas de control de exoesqueletos requieren de información precisa y en tiempo real sobre la postura y el movimiento del paciente. En este contexto aparecen dos vertientes para abordar el problema:

- **Sistemas basados en captura de movimientos ópticos**: Estos sistemas de rehabilitación emplean cámaras potentes y marcadores reflectantes que se colocan sobre los segmentos de interés del paciente para reconstruir su movimiento en tres dimensiones. Si bien ofrecen una elevada precisión y constituyen el estándar de referencia en biomecánica clínica, presentan limitaciones notorias para su huso en la rehabilitación. Destacando entre ellas su elevado coste económico, la necesidad de tener un entorno controlado con condiciones de iluminación específicas, la complejidad de la instalación/calibración y la restricción del paciente a un espacio físico reducido por el campo de visión de la cámara [18]. Dificultando así su integración en dispositivos portables como los exoesqueletos.
- **Sistemas basados en captura de movimiento con unidades de medición inercial (IMUs)**: Este enfoque para la rehabilitación con exoesqueletos ha ganado popularidad en los últimos años como método para estimar las métricas espacio-temporales, debido a que son sistemas fáciles de integrar y de bajo coste económico [19]. No obstante, la integración de IMUs en este tipo de aplicaciones no está exenta de desafíos técnicos. La acumulación de errores en la integración de señales, la sensibilidad a perturbaciones magnéticas y la necesidad de un filtro robusto son algunas de las problemáticas que han centrado la investigación para la implementación de sensores inerciales en exoesqueletos.

Junto a la elección del sistema de medida, resulta igualmente determinante la plataforma sobre la que se ejecuta el procesamiento de los datos. En aplicaciones de rehabilitación, la estimación de la orientación debe realizarse en tiempo real y sobre un dispositivo portable, requisitos difíciles de satisfacer con un ordenador convencional. Ante esta necesidad surgen diferentes alternativas, como las FPGAs, computadores de placa única (Raspberry Pi), microcontroladores (STM32), etc.

A la vista de las alternativas disponibles, el presente Trabajo de Fin de Grado se centra en el estudio, implementación y validación de un sistema de medición basado en IMUs sobre una plataforma SoC-FPGA, orientado a la rehabilitación de la marcha mediante exoesqueletos.

# Capítulo 2

# Objetivos

*No hay ningún viento favorable para el que no sabe*
*a qué puerto se dirige.*

Arthur Schopenhauer

El presente trabajo tiene como objetivo principal integrar y validar la aplicación del filtro de Madgwick para la estimación de ángulos en la aplicación del tren inferior enfocado para la rehabilitación con exoesqueletos en personas de movilidad reducida. Para ello, se plantea su implementación y validación sobre un sistema embebido basado en el SoC Zynq-7000 de la placa de desarrollo Zybo Z7, utilizada como dispositivo objetivo del trabajo. Con este propósito, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar la plataforma hardware en Vivado para la placa de desarrollo Zybo Z7 orientada a la ejecución de algoritmos de procesamiento de datos de sensores inerciales (IMU) en un sistema embebido.
- Implementar el filtro Madgwick en el procesador del SoC Zynq-7000, con el fin de posibilitar su integración y ejecución en la plataforma hardware previamente diseñada, con el objetivo de integrarlo en un sistema embebido aplicable a procesos de rehabilitación.
- Adquirir y procesar datos procedentes de sensores inerciales (IMUs) asociados al movimiento de pacientes con discapacidades motoras, empleando el filtro Madgwick para la estimación de la orientación.
- Analizar y validar los resultados obtenidos mediante un tratamiento de los datos procesados en MATLAB, evaluando la precisión y estabilidad de sistema propuesto.

## 2.1 Metodología

Para alcanzar los objetivos anteriores, se ha seguido una metodología estructurada en diferentes etapas, que abarcan desde la investigación y revisión de la información disponible acerca

del tema, seguido por la implementación del sistema hardware y software propuesto, hasta la validación e interpretación de los resultados obtenidos, las cuales se detallan a continuación.

El proyecto comenzó con una búsqueda minuciosa de literatura relacionada con el uso de sensores inerciales (IMUs), filtros de orientación (Filtro Madgwick y Filtro Kalman), y herramientas de diseño hardware y desarrollo software para sistemas embebido, concretamente Vivado y Vitis IDE. Realizar esta consulta de la literatura resultó esencial para asimilar tanto la base conceptual como el uso real de las herramientas y técnicas aplicadas en el proyecto. En este periodo se examinaron múltiples alternativas y planteamientos con los que hacer frente al reto que supone procesar los datos de las unidades de medición inercial (IMUs).

Una vez obtenida la información necesaria para el desarrollo del proyecto, la segunda fase se centró en la implementación del sistema hardware propuesto. En primer lugar se dejo preestablecido el diseño hardware en el entorno de Vivado, configurando los componentes necesarios para la correcta comunicación con los sensores inerciales y la ejecución del sistema embebido sobre la placa de desarrollo Zybo Z7. Este diseño permitió establecer la base hardware sobre la que luego se integraría el algoritmo de procesamiento de datos.

La tercera fase tuvo el foco en el desarrollo del software propuesto en la plataforma de Vitis IDE, donde se implemento el filtro de orientación Madgwick. Este filtro fue seleccionado por su bajo coste computacional y su idoneidad para sistemas en tiempo real. Se implemento un código integra el Filtro Madgwick con los datos de acelerometro, giroscopio y magnetómetro, obtenidos por los sensores inerciales (Inertial Measurement Unit (IMU)), permitiendo realizar el calculo de los cuaterniones y posteriormente en un pos-procesado convertirlos a ángulos de Euler. Dicho proceso comprendió la validación de los resultados obtenidos, contrastándolos con un sistema comercial funcional.

Los cuaterniones obtenidos después del procesado del filtro Madgwick fueron recogidos y almacenados mediante un pequeño código en Python el cual se encargaba de comunicarse mediante el puerto UART con el sistema hardware, recibir los datos tratados por el filtro y guardarlos en local, para posteriormente poder analizarlos en MATLAB.

La cuarta fase del proyecto se baso en la realización de pruebas experimentales con las IMUs. Esta parte del proyecto tuvo como finalidad verificar el correcto funcionamiento del sistema hardware y software. Para ello los cuaterniones almacenados en la base de datos se trataban en MATLAB donde se observaba la correlación angular obtenida entre si de las diferentes IMUs del sistema.

Por último, se llevó a cabo una valoración de los resultados alcanzados en las distintas etapas del proyecto. Se estudiaron los puntos fuertes y las limitaciones de los métodos planteados, se plantearon posibles vías de mejora y se expusieron las conclusiones extraídas del trabajo. También se realizó una valoración sobre la exactitud del filtro de Madgwick implementado y la calidad de los datos obtenidos.

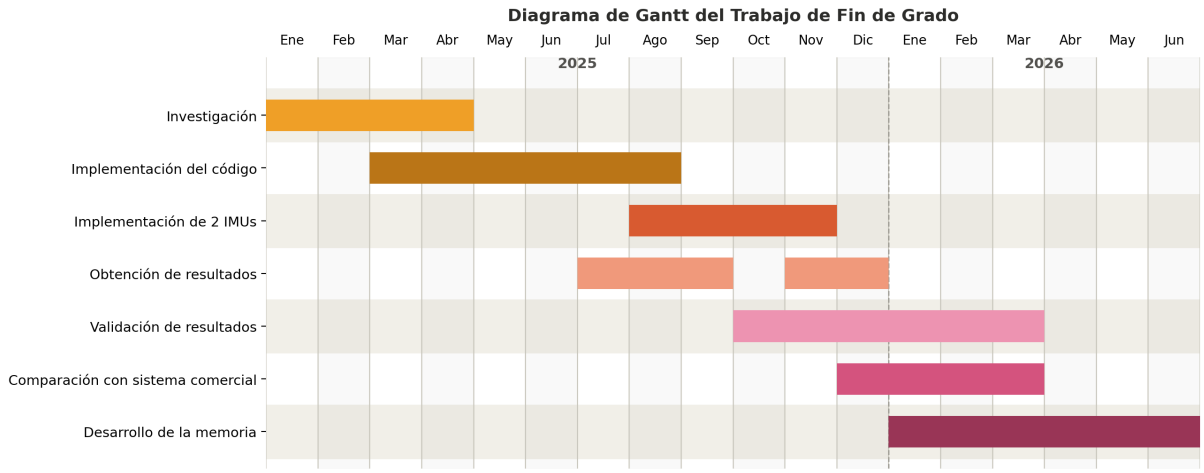



Figura 2.1: Diagrama Gantt.

## 2.2 Estructura del plan de trabajo

La Figura 2.1 muestra el diagrama de Gantt con la planificación temporal del proyecto, desatollada a lo lardo de aproximadamente dieciocho meses, desde enero de 2025 hasta junio de 2026. El trabajo se inició en una fase de investigación y revisión bibliográfica, que sirvió de base para realizar la implementación del código del sistema, abarcando tanto el diseño hardware en Vivado como el del filtro Madgwick en Vitis IDE. Una vez implementado tanto hardware como software obtuvieron resultados hasta validar el correcto funcionamiento del sistema con un sensor inercial. En este punto, se llevo a cabo la ampliación del sistema para opera con dos IMUs de forma simultanea, volviendo así a repetir la fase de obtención de datos y validación del funcionamiento de la aplicación desarrollada. La fase de validación de resultados se solapó parcialmente con la comparación frente al sistema comercial Technaid MCS, empleado como referencia para evaluar la calidad de las estimaciones obtenidas. Finalmente, la redacción de la memoria se llevó a cabo en los últimos meses del proyecto, recogiendo y documentando el trabajo realizado en las fases anteriores.

## 2.3 Estructura de la memoria

El resto del documento está organizado y estructurado de la siguiente manera:

- Capitulo 1: Introducción: En este capitulo inicial, se proporciona una idea general del contexto y la motivación del estudio.
- Capitulo 2: Objetivos: En este capitulo, se proporciona una descripción exhausta de los objetivos que se abordan a lo largo del proyecto, ademas de la metodología llevada acabo para realizar el presente proyecto y el plan de trabajo llevado a cabo para realizarlo.
- Capitulo 3: Estudio Teórico: Se centra en presentar los conceptos teóricos y clínicos previos relacionados con la rehabilitación con exoesqueletos, ademas de incluir aspectos técnicos relevantes para la integración de sensores inerciales en los exoesqueletos.

- Capitulo 4: Solución Técnica: Se detalla la metodología seguida en el estudio, abarcando la implementación de los filtros de Madgwick y Kalman y el resto de herramientas utilizadas en el proyecto, como los sistemas SoC-FPGA.

- Capitulo 5: Resultados: Este capítulo recoge las pruebas experimentales realizadas a lo largo del estudio, junto con los hallazgos derivados de ellas. Se incorporan tanto evaluaciones cuantitativas como cualitativas de los datos, acompañadas de representaciones visuales y tablas que facilitan la interpretación de los resultados. Asimismo, se detalla el coste asociado al desarrollo de la investigación realizada.

- Capitulo 6: En este capítulo final se exponen las principales conclusiones extraídas del trabajo, además de proponerse posibles líneas de investigación futuras a partir de los conclusiones alcanzadas.

# Capítulo 3

# Estudio teórico

*Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto y*
*pensar lo que nadie más ha pensado.*

Albert Szent-Györgyi

En este capítulo se van a desarrollar unos conceptos previos teóricos relevantes para la posterior comprensión del proyecto desarrollado. Dado que el presente trabajo se enmarca en el ámbito de la rehabilitación clínica mediante exoesqueletos, se establece primero el contexto tecnológico y clínico en el que se desarrolla, para después profundizar en los fundamentos matemáticos que sustentan la estimación de orientación.

En primer lugar se introducirá el conceptos de exoesqueleto, describiendo sus principales aplicaciones en el ámbito de la rehabilitación y los beneficios que aporta a pacientes con movilidad reducida. A continuación, se presentan las unidades de medida inercial (IMU), detallando el principio de funcionamiento de cada uno de los sensores que las componen acelerómetro, giroscopio y magnetómetro, así como las limitaciones individuales de cada uno de ellos, que justifican la necesidad de aplicar técnicas de fusión sensorial.

Por último, se introducirán las dos representaciones matemáticas de la orientación empleadas a lo largo del proyecto: los ángulos de Euler, junto con sus matrices de rotación asociadas y la problemática de las singularidades y los cuaterniones, alternativa que evita dichas singularidades y que constituye la base del algoritmo de estimación de orientación implementado en este trabajo.

## 3.1 Exoesqueleto

Los exoesqueletos son sistemas electromecánicos diseñados para proporcionar asistencia, rehabilitación o aumento de las funciones motoras de las extremidades humanas. Estos sistemas se acoplan a la estructura del cuerpo humano con la finalidad de incrementar la fuerza, la velocidad, la precisión y el rendimiento funcional de las extremidades, ya sea para compensar déficit motores, facilitar procesos de rehabilitación o potenciar las capacidades físicas del usuario [20].

En la actualidad, la aplicación de los exoesqueletos se ha visto inmersa en casi todos los campos de trabajo, como el militar, la salud, el ocio, entre otros, siendo la medicina uno de los más beneficiados, debido a que estas tendencias impulsan el desarrollo de herramientas especializadas que facilitan el trabajo del médico y la recuperación de los pacientes [21].
Centrando el foco en el ámbito clínico, la rehabilitación robótica surgió hace casi 30 años. El intenso desarrollo tecnológico de los dispositivos robóticos para el entrenamiento de la marcha se ha acelerado desde el desarrollo de Lokomat en 1994 [22], aportando soporte, mecánico, asistencia controlada al movimiento y repetitividad en los patrones de rehabilitación. Estos sistemas han facilitado la recuperación funcional de pacientes con alteraciones neuromotoras, pacientes que han sufrido lesiones de la médula espinal, accidentes cerebro-vasculares o trastornos neuromusculares. Al facilitar la ejecución de ejercicios terapéuticos de forma controlada.

Actualmente existe una gran variedad de exoesqueletos diseñados para distintas partes del cuerpo, tanto para el tren superior (hombros y brazos) como para el tren inferior (cadera, rodillas, tobillos, etc.). Este proyecto se centrará concretamente en los exoesqueletos del tren inferior.
Tras diversos estudios, se puede afirmar que la implementación de los exoesqueletos para la rehabilitación del tren inferior presenta diferentes beneficios. Destacando entre ellos los siguientes [23]:

- **Promoción de la Neuroplasticidad:** La rehabilitación robótica ofrece ejercicios intensivos, repetitivos y orientados a tareas que promueven la reorganización neuronal.
- **Reducción de la espasticidad:** La rehabilitación robótica de la marcha ha demostrado ser eficaz en la reducción de la espasticidad, uno de los síntomas más frecuentes tras una lesión medular o un accidente cerebrovascular.
- **Beneficios cardiovasculares:** El uso de exoesqueletos portátiles aumenta la frecuencia cardíaca y el consumo de oxígeno de forma significativa, siendo efectivo como ejercicio cardiovascular para pacientes con movilidad reducida.
- **Mejora del control postural y la coordinación:** A diferencia de los sistemas estacionarios, los exoesqueletos portátiles involucran la musculatura del tronco gracias a los movimientos de desplazamiento del peso necesarios para iniciar los pasos, mejorando el control postural y la coordinación motora.

Sin embargo para que estos beneficios puedan materializarse de forma efectiva en la práctica clínica, es necesario disponer de sistemas robóticos que sean capaces de reproducir con precisión los patrones de marcha, garanticen la seguridad del paciente y adaptarse a las necesidades individuales a lo largo del proceso de recuperación. Es precisamente en este punto donde la integración de sistemas de medición avanzados resulta fundamental para maximizar el potencial terapéutico de los exoesqueletos.

Dentro del proyecto NIMBLE, se ha desarrollado sistema robótico de rehabilitación para la marcha que integra tres componentes principales: un exoesqueleto de extremidades inferiores,

una plataforma móvil con soporte de peso corporal un robot de asistencia al Centro de Masas (CdM) accionado por cable. Esta configuración tiene como objetivo facilitar el control del equilibrio lateral y el desplazamiento natural del peso corporal, al tiempo que reduce el esfuerzo físico del usuario y las estrategias compensatorias [24]. El modelo utilizado fue el exoesqueleto Exo-H3 de la empresa Technaid.

Figura 3.1: Exoesqueleto Exo-H3 [3].

Centrado el foco en el exoesqueleto, este dispone de 6 grados de libertada en el plano sagital; uno para la cadera, la rodilla y el tobillo tanto en la pierna izquierda como en la pierna derecha. Presenta 16 sensores repartidos en toda la estructura que se encargan de recopilar los datos en tiempo real sobre los movimientos del usuario.

Los sensores integrados en el Exo-H3 son fundamentalmente sensores de fuerza y posición, orientados a controlar y monitorizar el movimiento de las articulaciones del tren inferior en el plano sagital. Sin embargo, el exoesqueleto no incorpora unidades de medida inerciales (IMUs), lo que hace que sea incapaz de proporcionar información a cerca de la cinemática del tronco, piernas, etc. Las IMUs pueden aportar datos complementarios sobre la orientación y la dinámica de diferentes puntos de interés; como la inclinación del tronco o las oscilaciones de la pelvis, que resultan relevantes para el análisis del equilibrio y la evaluación del proceso de rehabilitación. Siendo así necesario introducir el concepto de unidad de mediad inercial y describir su funcionamiento.

## 3.2 Inertial Measurement Unit (IMU)

Una Unidad de Medida Inercial (Inertial Measurement Unit, IMU) pueden describirse como un dispositivo electrónico diseñado para medir y estimar el movimiento, la orientación y la dinámica de un cuerpo en el espacio. Para ello integran de forma conjunta varios sensores inerciales. Principalmente, en las IMU encontramos 3 medidas inerciales diferentes recogidas por sensores

como el acelerómetro, el giroscopio y el magnetómetro, siendo este último un sensor que puede estar incorporado en la IMU o puede ser prescindible para ciertas aplicaciones. La combinación de estos tres sensores permite obtener información precisa sobre aceleraciones lineales, velocidades angulares y orientación absoluta respecto a un sistema de referencia [25].

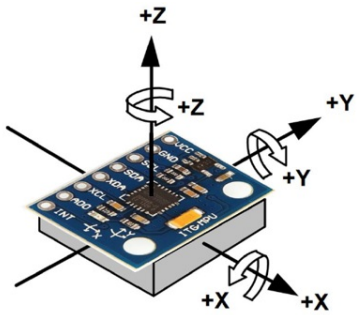



Figura 3.2: Estructura de un sensor IMU [4].

En la figura 3.2 se muestra la estructura general de un sensor IMU, así como la disposición de sus ejes de medida. A continuación, se describen de forma individual los principios de funcionamiento de cada uno de los sensores que la componen.

- El **Acelerómetro** es un sensor que permite conocer la aceleración lineal que se produce al realizar un movimiento, a lo largo del eje de referencia en el cual se está trabajando, devolviendo los valores en tres ejes perpendiculares (x,y,z) [26]. Además de la aceleración debida al movimiento, el acelerómetro mide también la aceleración gravitacional, lo que permite estimar la inclinación del sensor respecto al plano horizontal.

- El **Giroscopio** es un sensor el cual permite conocer como varía un ángulo en el tiempo, mientras este se encuentra rotando (velocidad angular), permitiendo así determinar la actitud del objeto móvil en el cual se encuentra montado obteniendo los datos entorno a tres ejes (roll, pitch y yaw) [26]. Sin embargo, el giroscopio presenta una limitación importante: la acumulación de errores por integración a lo largo del tiempo, fenómeno conocido como deriva o *drift*, que provoca una pérdida progresiva de precisión en la estimación de la orientación.

- El **Magnetómetro** es un sensor que se encarga de medir la intensidad y dirección del campo magnético terrestre en tres ejes. Proporcionando información relevante para corregir el *drift* o deriva de las medidas obtenidas del giroscopio y para proporcionar una referencia absoluta de orientación con respecto al norte magnético de la tierra. No obstante, el magnetómetro es sensible a perturbaciones magnéticas locales producidas por objetos metálicos o campos electromagnéticos, lo que puede afectar a la precisión de la medición.

En la actualidad, las IMU son sensores utilizados en diferentes aplicaciones como puede ser la navegación de vehículos, la navegación de robots, seguimiento de deportistas de alto rendimiento y, centrado el foco de interés, en procesos de rehabilitación con exoesqueletos. En el uso de exoesqueletos para la rehabilitación, los sensores inerciales (IMU) han adquirido una alta relevancia debido a su capacidad de proporcionar información objetiva y cuantitativa sobre el

movimiento humano. Permitiendo medir de manera precisa variables cinemáticas fundamentales durante la ejecución del movimiento.

Dado que cada sensor presenta limitaciones individuales, es necesario aplicar algoritmos de fusión sensorial que combinen las mediciones de los tres sensores para obtener una estimación de orientación precisa y robusta.

Ahora bien, los algoritmos de fusión sensorial no operan directamente sobre las magnitudes físicas proporcionadas por la IMU (aceleraciones lineales, velocidades angulares e intensidades de campo magnéticas), sino que combinan esta información para devolver como salida la orientación del sensor respecto a un sistema de referencia. Resulta por tanto importante, antes de hablar dichos algoritmos, en el Capítulo 4, establecer cómo se describe matemáticamente la orientación de un cuerpo en el espacio. Con este propósito, en los siguientes apartados se introducirán las dos formas de representar un cuerpo en el espacio, siendo estos: los ángulos de Euler, la formulación mas intuitiva y extendida, y los cuaterniones, la representación utilizada internamente por el filtro Madgwick debido a las limitaciones que, como se verá, presentan los primeros.

## 3.3 Ángulos de Euler

Dos observadores, cada uno provisto de un sistema tridimensional de ejes cartesianos, puede determinar exactamente la posición de un mismo punto en el espacio. Sin embargo es necesario que cada observador conozca no solo la posición del otro, sino también la orientación de su sistema de ejes con respecto al propio. Es esta ultima cuestión que se aborda, la que conduce a la introducción de los ángulos de Euler [27].

Los ángulos de Euler son tres ángulos que determinan de forma unívoca una orientación mediante rotaciones alrededor de ejes distintos. Como se muestra en la Fig. 3.3, la orientación del sistema de ejes móvil $(x'', y'', z'')$ se define con respecto al sistema de referencia fijo $(x', y', z')$ mediante una secuencia de rotaciones definidas por los ángulos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$.

Para definir de manera precisa la orientación del sistema de ejes móvil con respecto al sistema de referencia fijo, es necesario describir la secuencia de rotaciones elementales que dan lugar a dicha orientación. Una de las más empleadas es la rotación $z$, $y$, $x$ de manera sucesiva, cada una alrededor de un eje principal del sistema de referencia, las cuales se describen a continuación.

- Rotación alrededor del eje $z$ (yaw, $\alpha$): También denominado guiñada, describe el giro del cuerpo en el plano horizontal, es decir, el cambio de rumbo respecto a una dirección de referencia. En el contexto de la marcha humana, correspondería a la rotación del segmento corporal en el plano transversal.

- Rotación alrededor del eje $y$ (pitch, $\beta$): conocida como cabeceo, representa la inclinación del cuerpo hacia delante o hacia atrás. Es la rotación dominante en las articulaciones del tren inferior durante la marcha, al producirse la flexión y extensión de cadera, rodilla y tobillo en el plano sagital.

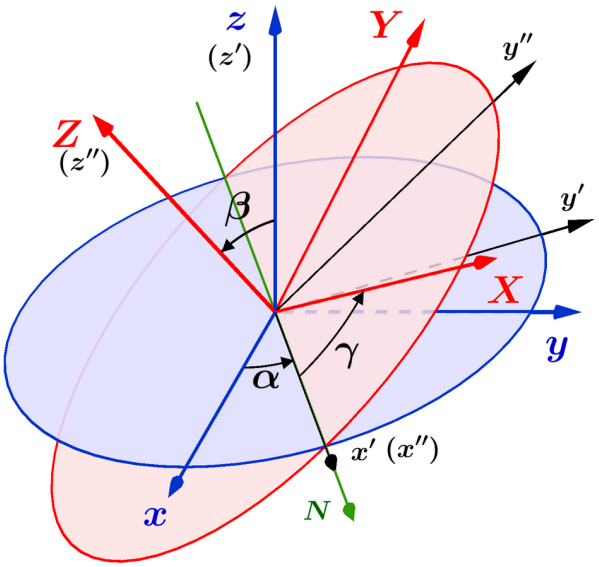



Figura 3.3: Representación de los ángulos de Euler [5].

- Rotación alrededor del eje $x$ (roll, $\gamma$): denominada alabeo, describe la inclinación lateral del cuerpo hacia uno u otro lado.

### Matrices de rotación

Para explicar la rotación de manera matemática correspondiente de los ángulos [27], se parte de la definición estándar de las rotaciones alrededor de los tres ejes principales. Una rotación de $\gamma$ radianes alrededor del eje $x$ se define como se muestra en la ecuación 3.1.

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

De forma análoga, una rotación de $\beta$ radianes alrededor del eje $y$ se define como se muestra en la ecuación 3.2

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Finalmente, una rotación de $\alpha$ radianes alrededor del eje $z$ se define como se muestra en la ecuación 3.3

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

donde los ángulos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ corresponden a los ángulos de Euler.

La matriz de rotación puede interpretarse como la composición de una secuencia de tres rotaciones elementales alrededor de los ejes principales del sistema de referencia $(x, y, z)$. Dado que la multiplicación de matrices no es conmutativa, el orden en el que se aplican las rotaciones afecta directamente al resultado final. En este proyecto como se ha definido anteriormente, primero se realiza la rotación alrededor del eje $z$, posteriormente alrededor del eje $y$ y, finalmente, alrededor del eje $x$. Así, la rotación total puede expresarse de forma compacta como se observa en el producto matricial de la ecuación 3.4 y 3.5

$$R = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_x(\gamma) \tag{3.4}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\sin\beta\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha & \sin\gamma\sin\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \cos\gamma\sin\beta\sin\alpha - \sin\gamma\cos\alpha \\ -\sin\beta & \sin\gamma\cos\beta & \cos\gamma\cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Entre las propiedades que tiene la matriz de rotación $R$, obtenida en la ecuación 3.5 está la que pertenece al grupo especial ortogonal $SO(3)$, lo que implica que cumple dos propiedades fundamentales [28] descritas en la ecuación 3.6:

$$R^T R = I \qquad \det(R) = +1 \tag{3.6}$$

La primera propiedad indica que la matriz es ortogonal, es decir, su transpuesta coincide con su inversa ($R^{-1} = R^T$). La segunda garantiza que se trata de una rotación propia, sin reflexión.

Sin embargo, una limitación importante de la representación mediante ángulos de Euler es la existencia de singularidades conocidas como *Gimbal Lock* [29], observado en la Figura 3.4. Este fenómeno ocurre cuando $\beta = \pm 90$ř, situación en la que dos de los tres ejes de rotación quedan alineados, provocando la pérdida de un grado de libertad. En estas condiciones, la matriz de rotación (3.5) deja de tener solución única, lo que puede causar comportamientos erráticos en sistemas de control o estimación de orientación.

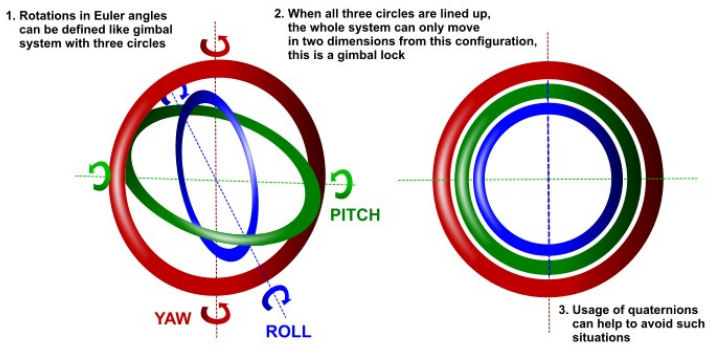



Figura 3.4: Representación de la singularidad Gimbal Lock [6].

Para evitar este problema, en muchas aplicaciones prácticas se recurre a representaciones alternativas de la orientación, como los **cuaterniones unitarios**, que no presentan singularidades y son computacionalmente más eficientes para la composición de rotaciones.

En el contexto de este TFG, la matriz de rotación $R$ permite transformar vectores entre el sistema de referencia fijo y el sistema móvil del sensor. Dado un vector $\mathbf{v}$ expresado en el marco global, su expresión en el marco del sensor viene dada por:

$$\mathbf{v}' = R \cdot \mathbf{v} \tag{3.7}$$

Esta transformación es especialmente relevante para la fusión de datos de sensores inerciales, donde es necesario proyectar las medidas del acelerómetro y el magnetómetro al marco de referencia adecuado antes de procesarlas. Precisamente por las limitaciones derivadas del *Gimbal Lock*, en este TFG se opta por el uso de cuaterniones para la representación de la orientación.

## 3.4 Cuaterniones

Un cuaternión es un número complejo de cuatro dimensiones que puede utilizarse para representar la orientación de un cuerpo rígido en el espacio tridimensional [30]. Dado un eje de rotación $\hat{r}$ y un ángulo $\theta$, el cuaternión de orientación ${}^{A}_{B}\hat{q}$ que describe la orientación del marco $B$ relativo al marco $A$ se define como se muestra en la ecuación 3.8:

$${}^{A}_{B}\hat{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & -r_x \sin\dfrac{\theta}{2} & -r_y \sin\dfrac{\theta}{2} & -r_z \sin\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

donde $r_x$, $r_y$ y $r_z$ son las componentes del vector unitario $\hat{r}$ en los ejes $x$, $y$ y $z$ respectivamente. Es convención que todo cuaternión que describe una orientación sea de longitud unitaria, es decir, $\|{}^{A}_{B}\hat{q}\| = 1$.

El conjugado del cuaternión, denotado por ${}^{A}_{B}\hat{q}^*$, permite intercambiar los marcos de referencia descritos por la orientación. Por ejemplo, ${}^{B}_{A}\hat{q}$ es el conjugado de ${}^{A}_{B}\hat{q}$ y describe la orientación del marco $A$ relativa al marco $B$ observado en la Figura 3.5 y definido en la ecuación 3.9:

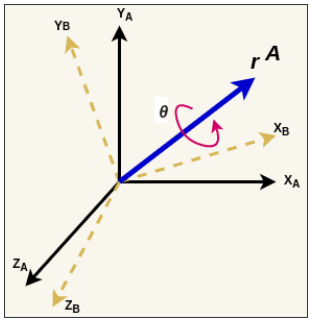



Figura 3.5: Representación de la rotación de los cuaterniones.
[31]

$${}^{A}_{B}\hat{q}^* = {}^{B}_{A}\hat{q} = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

En cuanto a las operaciones que se pueden realizar con cuaterniones cabe destacar el producto de cuaterniones, denotado por $\otimes$, permite definir orientaciones compuestas. Para dos cuaterniones $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, el producto se determina mediante la regla de Hamilton descrita en la ecuación 3.10:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 \\ a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 \\ a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2 \\ a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1 \end{bmatrix}^T \tag{3.10}$$

Es importante destacar que el producto de cuaterniones **no es conmutativo**, es decir, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.Esta propiedad no es una mera particularidad algebraica, sino que refleja la propia naturaleza de las rotaciones en el espacio tridimensional: aplicar dos rotaciones en orden distinto conduce, en general, a orientaciones finales diferentes, tal y como ocurría con el producto de matrices de rotación de la ecuación 3.4. En la práctica, esto obliga a respetar estrictamente el orden de los operandos en todas las operaciones con cuaterniones, como la rotación de vectores de la ecuación 3.11 o la propagación de la orientación a partir de las medidas del giroscopio en el filtro de Madgwick, donde intercambiar los factores del producto produciría una estimación de orientación errónea.

Otra de las operaciones que permiten realizar los cuaterniones es la rotación de un vector tridimensional, la cual se efectúa mediante la relación descrita en la ecuación 3.11:

$${}^{B}\mathbf{v} = {}^{A}_{B}\hat{q} \otimes {}^{A}\mathbf{v} \otimes {}^{A}_{B}\hat{q}^{*} \tag{3.11}$$

donde ${}^{A}\mathbf{v}$ y ${}^{B}\mathbf{v}$ son el mismo vector descrito en el marco $A$ y en el marco $B$ respectivamente, con un 0 insertado como primer elemento para convertirlos en vectores de 4 elementos.

La orientación descrita por ${}^{A}_{B}\hat{q}$ puede representarse como la matriz de rotación ${}^{A}_{B}R$ [29] definida en la ecuación 3.12:

$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 2q_1^2 - 1 + 2q_2^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) & 2(q_2q_4 - q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2q_1^2 - 1 + 2q_3^2 & 2(q_3q_4 + q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 + q_1q_3) & 2(q_3q_4 - q_1q_2) & 2q_1^2 - 1 + 2q_4^2 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

### Conversión a ángulos de Euler

Los ángulos de Euler $\psi$, $\theta$ y $\phi$ en la secuencia aeroespacial describen la orientación del marco $B$ respecto al marco $A$ mediante rotaciones secuenciales alrededor de los ejes $z$, $y$ y $x$ respectivamente [29]. Su relación con el cuaternión viene dada por las ecuaciones 3.13, 3.14, 3.15:

$$\psi = \text{atan2}(2q_2q_3 - 2q_1q_4,\ 2q_1^2 + 2q_2^2 - 1) \tag{3.13}$$

$$\theta = -\arcsin(2q_2q_4 + 2q_1q_3) \tag{3.14}$$

$$\phi = \text{atan2}(2q_3q_4 - 2q_1q_2,\ 2q_1^2 + 2q_4^2 - 1) \tag{3.15}$$

A diferencia de los ángulos de Euler, la representación mediante cuaterniones no presenta singularidades del tipo *Gimbal Lock*, lo que la convierte en la opción preferida para la estimación de orientación en tiempo real, como es el caso del filtro de Madgwick descrito en la siguiente sección [32].

En resumen, las operaciones y propiedades presentadas en este apartado, constituyen las herramientas de cálculo sobre las que se apoya el sistema desarrollado en el presente trabajo. El producto de los cuaterniones y la rotación de vectores son las operaciones básicas que emplea el filtro Madgwick para proporcionar la orientación a partir de las medidas físicas obtenidas de la IMU. Por otro lado, el conjugado permite calcular la orientación relativa entre dos sensores, operación con la que se obtiene la diferencia angular entre las dos IMUs. Y, finalmente, la conversión a ángulos de Euler se empleara en el post-procesado de los resultados, ya que, pese a sus limitaciones, estos ángulos siguen siendo la representación más interpretable para posteriores análisis.

# Capítulo 4

# Solución Técnica

*A fuerza de construir bien, se llega a buen arquitecto.*

Aristóteles

El capítulo se hablara de los dispositivos System on Chip (SoC) y de las Field-Programmable Gate Array (FPGA)s para el desarrollo del TFG. A continuación, se describirán los métodos de filtrado centrándose en el filtro Kalman y su versión extendida y en el filtro Madgwick. También se hará una comparación de ambos filtros y por ultimo se comentará la solución utilizada en este trabajo.

## 4.1 Dispositivos SoC basados en FPGAs

Para superar las limitaciones de flexibilidad de los SoCs tradicionales y aprovechar la capacidad de aceleración de hardware a medida, surgieron los dispositivos SoC basados en FPGA. Estos sistemas integran en un único circuito integrado la versatilidad de un procesador de propósito general con la capacidad de procesamiento paralelo masivo y reconfiguración de hardware inherente a las FPGAs.

Arquitectónicamente, un dispositivo SoC basado en FPGA se divide conceptualmente en dos grandes dominios interconectados [33]:

- **Sistema de Procesamiento (Processing System (PS)):** Constituye el núcleo central del dispositivo y está formado por uno o varios procesadores embebidos, tradicionalmente basados en arquitecturas ARM (desde sistemas mononúcleo hasta complejas arquitecturas heterogéneas MPSoC) [34]. El dominio PS se encarga de ejecutar el sistema operativo, gestionar las pilas de red, controlar las interfaces de comunicación estándar y ejecutar aplicaciones de control de alto nivel de manera secuencial.
- **Lógica Programable (Programmable Logic (PL)):** Está compuesta por el tejido FPGA tradicional, que incluye bloques lógicos configurables (CLBs), bloques de procesamiento digital de señales (DSP), memoria RAM en bloque (BRAM) y pines de entrada/salida

(I/O) configurables [35]. La PL permite la implementación de aceleradores hardware a medida para tareas computacionalmente intensivas, procesamiento de señales con temporización determinista o inferencia de inteligencia artificial.

El factor diferencial y crítico en estos dispositivos es la infraestructura de interconexión entre el PS y la PL. Lejos de utilizar buses externos lentos, la comunicación se realiza de forma interna mediante interfaces de alto rendimiento, bajo consumo y baja latencia, como el estándar *Advanced Microcontroller Bus Architecture* (AMBA) AXI. Esta estrecha integración permite un acceso coherente y compartido a la memoria, facilitando la partición eficiente de tareas (*hardware/software co-design*).

Familias de dispositivos como Zynq-7000 o Zynq UltraScale+ MPSoC, así como las más recientes arquitecturas adaptativas y procesadores con motores de IA (como la familia Versal), representan el estado del arte de esta tecnología. Su uso se ha vuelto fundamental en aplicaciones que requieren alta capacidad de cómputo en el borde (*Edge Computing*), bioingeniería y procesado de señal avanzado en tiempo real.

## 4.2 Introducción a la estimación de estados

En muchas de las aplicaciones utilizadas en ingeniería, es importante conocer el estado del sistema para analizarlo, controlarlo o monitorizarlo correctamente. Sin embargo, en muchas ocasiones este estado no es accesible de manera directa ni exacta. Las mediciones disponibles en muchas ocasiones están contaminadas por ruido, errores intrínsecos en los sensores y/o perturbaciones externas, lo que conlleva a malas mediciones o falta de información en las variables de interés.

Los métodos de estimación surgen como herramientas fundamentales ante estos escenarios. Estos, tienen como objetivo inferir a partir de mediciones defectuosas y proporcionar estimaciones lo más cercanas a las magnitudes relevantes de los estados del sistema. De este modo, permiten reconstruir información relevante para el sistema y mejorar la calidad de las mediciones.

La importancia de los métodos de estimación en ingeniería radica en su papel clave dentro de sistemas de control, navegación y monitorización. Aplicaciones como la robótica, los sistemas aeroespaciales, los vehículos autónomos, la instrumentación biomédica o los sistemas embebidos dependen de estimaciones fiables para funcionar correctamente. Un error en la estimación puede degradar el rendimiento del sistema o incluso comprometer su estabilidad y seguridad.

En este contexto, los métodos de estimación constituyen un elemento esencial para el diseño de sistemas robustos y eficientes, ya que permiten tomar decisiones informadas en presencia de incertidumbre y limitaciones inherentes a los sensores y al entorno.

### 4.2.1 Familia de filtros de Kalman

El Filtro de Kalman (FK), desarrollado por Rudolf E. Kalman en 1960, es un algoritmo de estimación recursiva que permite determinar el estado interno no observable de un sistema dinámico a partir de mediciones observables afectadas por ruido [36]. Su funcionamiento se basa

en en la combinación de un modelo matemático del sistema con las mediciones disponibles, ponderando la incertidumbre de ambos para obtener una estimación óptima del estado.

En el caso de sistemas lineales, el FK constituye un estimador lineal desde el punto de vista de mínimos cuadrados, y puede considerarse una extensión del observador de Luenberger, con la ventaja de que es capaz de operar en presencia de ruido blanco aditivo tanto en el modelo del sistema como en las mediciones [37].

### Filtro de Kalman lineal

El filtro de Kalman aborda el problema general de estimar el estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ de un proceso controlado en tiempo discreto que está gobernado por la ecuación lineal estocástica en diferencias 4.1.

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} + B\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \tag{4.1}$$

con una medición $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ observada en la ecuación 4.2:

$$\mathbf{z}_k = H\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \tag{4.2}$$

Las variables aleatorias $\mathbf{w}_k$ y $\mathbf{v}_k$ representan el ruido del proceso y el ruido de medición, respectivamente. Se asume que son independientes entre sí, ruido blanco, y con distribuciones de probabilidad normales como se aprecia en las ecuaciones 4.3 y 4.4.

$$p(\mathbf{w}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q), \tag{4.3}$$

$$p(\mathbf{v}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R). \tag{4.4}$$

En la práctica, las matrices de covarianza del ruido del proceso $Q$ y del ruido de medición $R$ pueden variar con cada paso de tiempo o con cada medición; sin embargo, para explicar el filtro kalman de manera didáctica, se van a considerarlas constantes [38].

La matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en la ecuación (4.1) relaciona el estado en el instante de tiempo anterior $k-1$ con el estado en el instante actual $k$, en ausencia de una función de entrada o de ruido del proceso. Por otro lado, la matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ relaciona la entrada de control opcional $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$ con el estado $\mathbf{x}$. Por último, la matriz $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ en la ecuación de medición (4.2) relaciona el estado con la medición $\mathbf{z}_k$.

El Filtro de Kalman (FK) opera en dos etapas principales [39]; por un lado, la etapa de predicción, en la que se estima el estado futuro del sistema y la covarianza asociada al error de estimación a partir del modelo dinámico, y la etapa de actualización, en la que dicha estimación se corrige utilizando las medidas disponibles. Durante esta segunda fase se actualizan tanto el valor estimado del estado como la covarianza del error. A continuación, se describen las ecuaciones correspondientes a cada una de estas etapas.

**Etapa de Predicción**

En primer lugar, el filtro calcula una estimación del estado en el instante actual a partir del estado estimado en la iteración anterior y de la entrada de control aplicada al sistema. Esta predicción viene dada por la ecuación (4.5):

$$\bar{x}_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t \tag{4.5}$$

A continuación, se estima la covarianza asociada al error de predicción considerando la dinámica del sistema y la incertidumbre introducida por el ruido del proceso. Esta actualización de la covarianza se calcula mediante la ecuación (4.6):

$$\bar{P}_t = A_t P_{t-1} A_t^T + R_t \tag{4.6}$$

**Etapa de Actualización**

Una vez disponible una nueva medida, se calcula la ganancia de Kalman, que determina el peso relativo que tendrán la predicción del modelo y la información proporcionada por los sensores. La ganancia se obtiene a partir de la ecuación (4.7):

$$K_t = \bar{P}_t C_t^T \left( C_t \bar{P}_t C_t^T + Q_t \right)^{-1} \tag{4.7}$$

A continuación, la estimación del estado se corrige empleando la diferencia entre la medida observada y la medida estimada por el modelo, denominada innovación o residuo. Esta corrección se realiza mediante la ecuación (4.8):

$$x_t = \bar{x}_t + K_t \left( z_t - C_t \bar{x}_t \right) \tag{4.8}$$

Finalmente, se actualiza la covarianza del error asociada al estado estimado utilizando la ecuación (4.9):

$$P_t = (I - K_t C_t) \bar{P}_t \tag{4.9}$$

Como resultado de este proceso, se obtiene una nueva estimación del estado, representada por $x_t$, junto con su correspondiente matriz de covarianza $P_t$. Ambos valores serán utilizados como punto de partida para la siguiente iteración del filtro.

La ganancia de Kalman $\mathbf{K_t}$, definida en la ecuación (4.7), determina el peso relativo que se otorga a la predicción del modelo y a las mediciones disponibles. Cuando las mediciones presentan una baja incertidumbre, el valor de $K_t$ aumenta y el filtro concede una mayor relevancia a la información proporcionada por los sensores. Por el contrario, cuando las observaciones son más ruidosas o menos fiables, el valor de $K_t$ disminuye y la estimación se apoya principalmente en la predicción obtenida mediante la ecuación (4.5). El funcionamiento cíclico completo del filtro, con sus etapas de predicción y actualización, se representa de forma esquemática en la Figura 4.1.

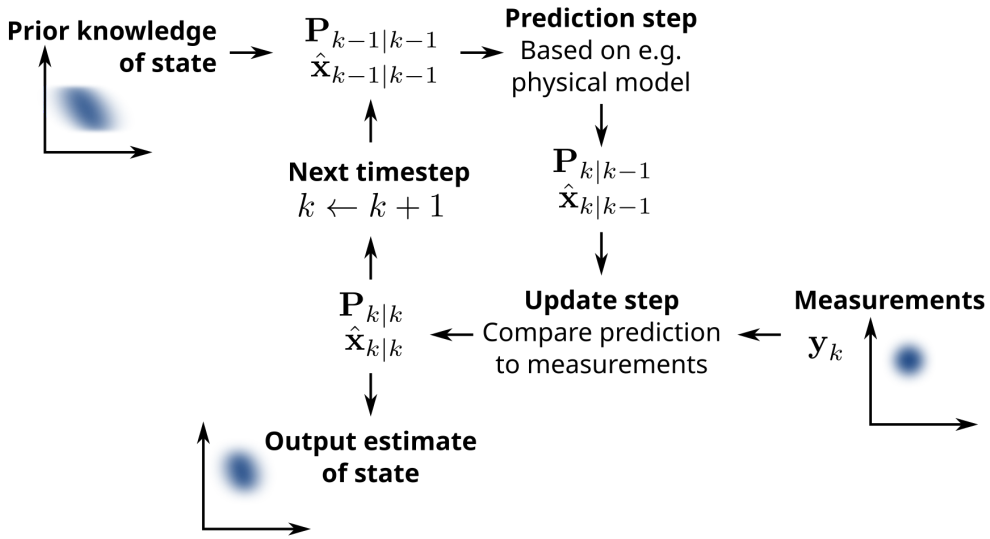



Figura 4.1: Representación del filtro Kalman [7].

### Filtro Kalman Extendido

A diferencia del filtro de Kalman lineal, el Filtro de Kalman extendido (EFK) permite estimar estados no observables en sistemas no lineales mediante la linealización local del modelo alrededor del punto de operación [40].

Al igual que el filtro de Kalman convencional, el EFK se compone de dos etapas principales: una etapa de predicción y una etapa de actualización. Durante la primera se calcula una estimación del estado futuro a partir del modelo dinámico del sistema, mientras que en la segunda dicha estimación se corrige empleando las mediciones disponibles. A continuación, se describen las ecuaciones utilizadas en cada una de estas fases [39].

#### Etapa de predicción

En primer lugar, se realiza la predicción del estado utilizando el modelo dinámico no lineal del sistema. Esta estimación se obtiene mediante la ecuación (4.10):

$$\bar{x}_t = g(u_t, x_{t-1}) \tag{4.10}$$

donde $x_{t-1}$ representa el estado estimado en el instante anterior, $u_t$ es el vector de control y $g(\cdot)$ es la función no lineal de transición de estados.

A continuación, se calcula la covarianza asociada al error de predicción mediante la ecuación (4.11):

$$\bar{P}_t = G_t P_{t-1} G_t^T + R_t \tag{4.11}$$

donde $P_{t-1}$ es la matriz de covarianza del estado estimado en la iteración anterior, $G_t$ es la matriz jacobiana del modelo dinámico evaluada en el punto de operación y $R_t$ representa la matriz de covarianza del ruido del proceso.

**Etapa de actualización**

Una vez disponible una nueva medida $z_t$, se calcula la ganancia de Kalman mediante la ecuación (4.12), la cual determina el peso relativo que se otorgará a la predicción del modelo y a la información proporcionada por los sensores:

$$K_t = \bar{P}_t H_t^T \left( H_t \bar{P}_t H_t^T + Q_t \right)^{-1} \tag{4.12}$$

donde $H_t$ es la matriz jacobiana del modelo de medida y $Q_t$ es la matriz de covarianza del ruido de medida.

Posteriormente, el estado se corrige incorporando la información aportada por la nueva observación. Esta actualización se realiza mediante la ecuación (4.13):

$$x_t = \bar{x}_t + K_t \left( z_t - h(\bar{x}_t) \right) \tag{4.13}$$

donde $h(\bar{x}_t)$ representa la función no lineal que relaciona el estado con las medidas del sistema.

Finalmente, se actualiza la covarianza del error asociada al estado estimado empleando la ecuación (4.14):

$$P_t = (I - K_t H_t) \bar{P}_t \tag{4.14}$$

donde $I$ es la matriz identidad. Como resultado de este proceso iterativo se obtiene una nueva estimación del estado $x_t$ junto con su correspondiente matriz de covarianza $P_t$, que servirán como punto de partida para la siguiente iteración.

Como se ha comentado anteriormente, el EFK se utiliza en sistemas no lineales, permitiendo realizar estimaciones incluso cuando las relaciones entre las variables de estado y las medidas no pueden describirse mediante modelos lineales. Para ello, las funciones no lineales de transición y observación, representadas por las ecuaciones (4.10) y (4.13), se aproximan localmente mediante una expansión en serie de Taylor alrededor del punto de operación.

Esta aproximación proporciona una mayor flexibilidad que el filtro de Kalman lineal, permitiendo abordar una amplia variedad de problemas de estimación en ingeniería. Sin embargo, la necesidad de calcular las matrices jacobianas $G_t$ y $H_t$, así como de linealizar el sistema en cada iteración, incrementa la carga computacional del algoritmo. Por este motivo, el EFK puede resultar menos adecuado en aplicaciones con restricciones temporales estrictas o recursos de procesamiento limitados. La Figura 4.2 muestra de forma esquemática el funcionamiento general del filtro de Kalman extendido.

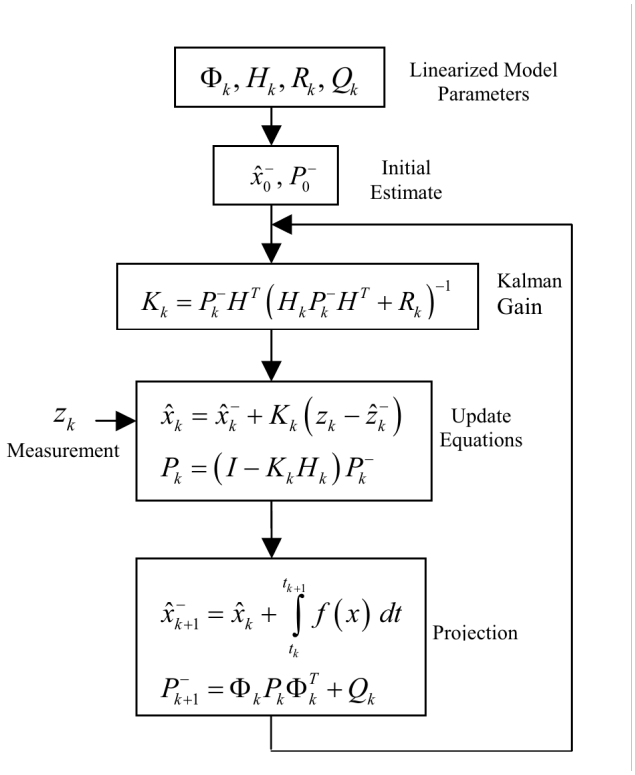



Figura 4.2: Diagrama de funcionamiento del filtro de Kalman extendido (EKF). [8].

### 4.2.2 Filtro Madgwick

El Filtro de Madgwick (MK) constituye una técnica iterativa que permite estimar la orientación en tres dimensiones de un objeto en movimiento, sirviéndose de la información proporcionada por sensores inerciales como giroscopios, acelerómetros y magnetómetros. Su propósito principal consiste en determinar la orientación del objeto en relación con un sistema de referencia fijo. A continuación, se describirán detalladamente los componentes y el funcionamiento del filtro de Madgwick implementado en el TFG, integrando conceptos previamente mencionados como los cuaterniones y la adquisición de datos [9].

El Filtro de Madgwick (MK) se sustenta en un modelo matemático que fusiona las velocidades angulares medidas por los giroscopios y las aceleraciones lineales captadas por los acelerómetros. Este filtro admite además la incorporación de datos de magnetómetros para mejorar la exactitud cuando existen campos magnéticos, aunque su uso no es obligatorio. La combinación de esta información permite calcular de manera eficiente la orientación del objeto en las tres dimensiones del espacio.

Como ya se comentó previamente, los cuaterniones constituyen una herramienta matemática que amplía los números complejos y permite representar rotaciones en el espacio tridimensional evitando las singularidades y ambigüedades propias de los ángulos de Euler. En el Capítulo 3 se señaló que un cuaternión puede representarse mediante la expresión $q = w + xi + yj + zk$, en la que $w$ corresponde a la parte escalar y $x$, $y$, $z$ conforman la parte vectorial.

Las lecturas de los giroscopios, acelerómetros y magnetómetros se integran para lograr una estimación más precisa de la orientación, de modo que cada sensor cumple una función concreta dentro del proceso:

- **Giroscopios:** sus datos se destinan a actualizar de forma continua el cuaternión de orientación a través de la integración de las tasas de cambio angular.
- **Acelerómetros:** se emplea para compensar los errores acumulados de los giroscopios, en particular la deriva a largo plazo.
- **Magnetómetros:** corrige la orientación tomando como referencia la dirección del campo magnético terrestre.

Al combinar estos datos se logra minimizar la deriva acumulativa de los giroscopios y mantener la orientación estimada alineada con la gravedad, lo que se traduce en una estimación más precisa y estable de forma sostenida en el tiempo.

El Filtro de Madgwick utiliza dos parámetros de control de ganancia conocidos como beta ($\beta$), con un papel específico en el ajuste del comportamiento del filtro [9].

Beta ($\beta$) se encarga de controlar la velocidad a la que el Filtro de Madgwick converge hacia la solución. Un valor alto de $\beta$ llevará a una convergencia más rápida, pero pudiendo introducir más ruido en la ecuación. Un valor mas bajo de $\beta$ llevaría al filtro a una convergencia más lenta, es decir, un mayor número de iteraciones, aunque su respuesta es más suave y es más robusta frente al ruido. Por lo común, el valor de `beta` se determina de forma empírica con el fin de ajustarlo a las particularidades del sistema y a las condiciones en las que este opera. En la implementación realizada, la variable global `beta` se ha inicializado a `0,5`.

Implementar el Filtro de Madgwick supone combinar los datos de los sensores inerciales para determinar el cuaternión de orientación. El algoritmo de Madgwick emplea diversas ecuaciones diferenciales que actualizan los cuaterniones según las tasas de variación angular y las aceleraciones captadas. Adicionalmente, en caso de utilizar magnetómetros, se integran datos del campo magnético para ajustar la orientación. De modo esquemático, se puede observar representado en la Figura 4.3.

A diferencia del filtro de Kalman extendido, el filtro de Madgwick no requiere el cálculo de matrices de covarianza ni la linealización del sistema mediante jacobianas. En su lugar, utiliza un algoritmo de optimización basado en gradiente descendente para corregir continuamente la orientación estimada a partir de la información proporcionada por los sensores.

La orientación se representa mediante cuaterniones, evitando los problemas de singularidad asociados a los ángulos de Euler y permitiendo realizar las operaciones matemáticas de forma eficiente. El estado de orientación puede expresarse mediante el cuaternión definido en la ecuación (4.15):

$$q = [q_0, q_1, q_2, q_3] \tag{4.15}$$

donde $q_0$ corresponde a la parte escalar y $q_1$, $q_2$ y $q_3$ representan las componentes vectoriales.

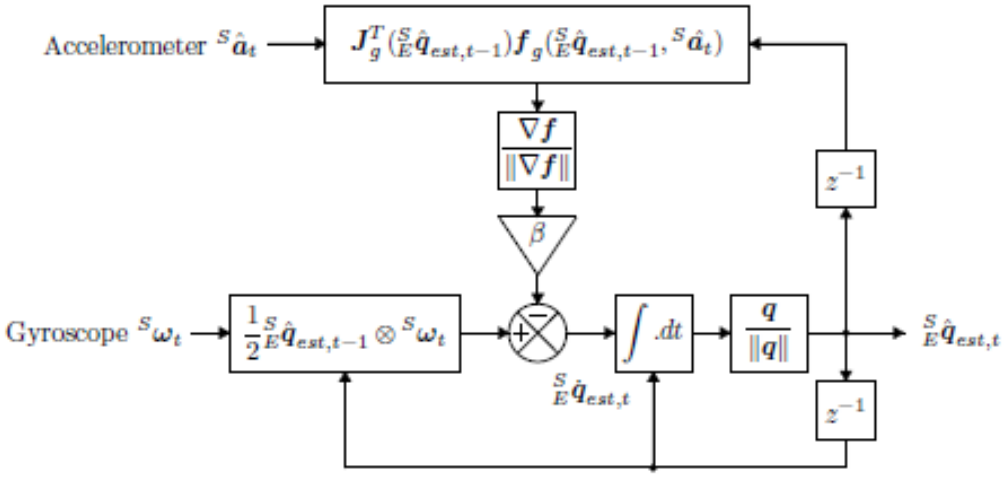



Figura 4.3: Diagrama del filtro Madgwick [9].

El funcionamiento del algoritmo puede dividirse en cuatro etapas principales. En primer lugar, se adquieren y normalizan las medidas procedentes del acelerómetro, giroscopio y del magnetómetro para eliminar diferencias de escala entre sensores. Posteriormente, se calcula el error entre la orientación estimada, representada por el cuaternión de la ecuación (4.15), y la orientación observada a partir de las medidas de los sensores.

A continuación, se aplica un algoritmo de gradiente descendente que determina una corrección de la orientación estimada. Esta corrección se combina con la información procedente del giroscopio, permitiendo compensar la deriva acumulada que aparece al integrar las velocidades angulares medidas.

Finalmente, el cuaternión se actualiza temporalmente mediante la ecuación (4.16):

$$q_{k+1} = q_k + \dot{q}_k \Delta t \tag{4.16}$$

donde $q_k$ representa la orientación estimada en el instante actual, $\dot{q}_k$ la derivada temporal del cuaternión y $\Delta t$ el periodo de muestreo [41]. Tras aplicar la ecuación (4.16), el cuaternión se normaliza para garantizar que continúe representando una rotación válida en el espacio tridimensional.

La Figura 4.3 muestra de forma esquemática el flujo de funcionamiento del filtro de Madgwick. Puede observarse cómo las medidas del giroscopio proporcionan la estimación inicial de la orientación, mientras que la información procedente del acelerómetro y del magnetómetro se emplea para corregir el error mediante el proceso de optimización basado en gradiente.

Una de las principales ventajas de este algoritmo es su reducido coste computacional en comparación con el filtro de Kalman extendido descrito anteriormente. Esto permite obtener estimaciones de orientación precisas manteniendo unos requisitos de cálculo moderados, lo que ha favorecido su adopción en sistemas embebidos, plataformas robóticas y dispositivos portátiles.

Aunque en este apartado se ha descrito el funcionamiento del filtro de Madgwick desde un punto de vista conceptual y su aplicación en la implementación desarrollada, en el Apéndice A se presenta una descripción más detallada de su formulación matemática.

## 4.3 Comparativa entre el filtro Kalman extendido y el filtro de Madgwick

Seguidamente, se describen algunas de las ventajas teóricas del Filtro de Madgwick en comparación con el Filtro de Kalman.

- **Sencillez y bajo coste computacional**: Una de las principales ventajas del filtro de Madgwick radica en su sencillez y eficiencia computacional frente al filtro de Kalman. El algoritmo de Madgwick está diseñado específicamente para aplicaciones de fusión sensorial en tiempo real, ya que presenta menores requisitos computacionales en comparación con el filtro de Kalman. Esto se debe a que el filtro Madgwick utiliza una serie de ecuaciones diferenciales directas y actualizaciones basadas en tasas de cambio angulares, evitando la complejidad y coste computacional de las derivadas parciales [42].
- **Implementación en cuaterniones**: El filtro de Madgwick incorpora los cuaterniones en su desarrollo matemático para representar la orientación, evitando así los problemas de singularidades y de Gimbal Lock asociados con los ángulos de Euler. Aunque el KF también puede utilizarlos para representar la orientación, su implementación es mas compleja debido a la necesidad de manejar las derivadas parciales de las funciones de estado [41].

Como se observa en la Tabla 4.1, ambos algoritmos permiten estimar la orientación a partir de medidas inerciales y dado que el objetivo de este trabajo es implementar un sistema de estimación de orientación sobre una plataforma embebida con recursos limitados, se selecciona el filtro de Madgwick por ofrecer un compromiso adecuado entre precisión y coste computacional.

Tabla 4.1: Comparación entre el filtro de Kalman extendido y el filtro de Madgwick.

| Característica | EKF | Madgwick |
|---|---|---|
| Modelado del sistema | Requiere modelo dinámico | No requiere modelo explícito |
| No linealidades | Mediante linealización | Tratadas mediante gradiente |
| Coste computacional | Alto | Bajo |
| Matrices de covarianza | Necesarias | No necesarias |
| Jacobianos | Necesarios | No necesarios |
| Implementación embebida | Más compleja | Más sencilla |
| Tiempo real | Más exigente | Más favorable |
| Orientación con IMU | Muy buena | Muy buena |

Considerando las características de ambos métodos, el filtro de Madgwick resulta más adecuado para los objetivos de este trabajo. Su menor coste computacional, unido a la ausencia

de operaciones matriciales complejas y a su optimización para plataformas embebidas, permite obtener estimaciones de orientación precisas manteniendo un uso reducido de los recursos de procesamiento. Esta combinación de eficiencia y simplicidad de implementación ha motivado su elección como algoritmo de estimación en este proyecto.

## 4.4 Justificación de la solución adoptada

En esta sección se justifican las decisiones de diseño tomadas para la implementación del sistema de estimación de orientación desarrollado en este proyecto. La solución adoptada combina una plataforma de desarrollo FPGA con sensores inerciales de bajo coste y un algoritmo de fusión sensorial eficiente, con el objetivo de obtener un sistema compacto, de bajo consumo y con capacidad de procesamiento en tiempo real.

### 4.4.1 Selección de la plataforma

La plataforma hardware del sistema está formada por la placa de desarrollo Zybo Z7 de Digilent, basada en el SoC Xilinx ZYNQ-7000, y por dos módulos inerciales PmodNAV, basados en el chip LSM9DS1 de STMicroelectronics.

La elección de la Zybo Z7 se justifica por las siguientes razones:

- **Arquitectura heterogénea:** la combinación del procesador ARM Cortex-A9 con la lógica programable FPGA permite ejecutar el software de control en el procesador mientras se gestiona la comunicación con los sensores a través del tejido
- **Conectores Pmod:** la Zybo Z7 dispone de múltiples conectores Pmod que permiten la conexión directa de los módulos PmodNAV mediante el protocolo SPI, sin necesidad de hardware adicional.
- **Escalabilidad:** la disponibilidad de dos conectores Pmod independientes (`jc` y `jd`) permite conectar dos IMUs simultáneamente, lo que posibilita el desarrollo con una y dos IMUs dentro del mismo proyecto.

En cuanto al sensor inercial, el módulo PmodNAV integra en un único dispositivo un giroscopio, un acelerómetro y un magnetómetros, Las razones de su elección son:

- **Integración MARG completa:** al disponer de los tres sensores necesarios para el filtro de Madgwick en su variante MARG, permite estimar la orientación completa.
- **Compatibilidad con la Zybo Z7:** el módulo PmodNAV está diseñado específicamente para conectarse a los conectores Pmod de las placas Digilent, y dispone de un driver oficial (`PmodNAV.h`) compatible con Vitis, lo que simplifica considerablemente el desarrollo software.
- **Bajo coste:** el módulo PmodNAV es un sensor de bajo coste ampliamente utilizado en aplicaciones de prototipado y educación, lo que lo convierte en una opción adecuada para validar el sistema antes de una posible migración a sensores de mayor precisión.

### 4.4.2 Selección del entorno de desarrollo

El diseño hardware del sistema se ha realizado con Vivado Design Suite de Xilinx, mientras que el software embebido se ha desarrollado con Vitis IDE. Esta combinación de herramientas se justifica por:

- **Flujo integrado:** Vivado y Vitis forman un flujo de diseño cohesionado para plataformas ZYNQ-7000, donde el diseño hardware generado en Vivado se exporta directamente como plataforma hardware a Vitis para el desarrollo del software embebido.
- **Diseño basado en IP:** Vivado permite ensamblar el sistema hardware mediante bloques IP prediseñados y verificados (AXI Interconnect, PmodNAV, reset, etc.), reduciendo el tiempo de desarrollo y aumentando la fiabilidad del diseño.
- **Soporte oficial:** ambas herramientas cuentan con soporte oficial de Xilinx para la placa Zybo Z7, con ejemplos de referencia y documentación exhaustiva.

### 4.4.3 Selección del método de estimación

El algoritmo de estimación de orientación seleccionado es el filtro de Madgwick implementado en lenguaje C. Esta elección se basa en las siguientes consideraciones:

- **Bajo coste computacional:** el filtro de Madgwick requiere 109 operaciones aritméticas escalares por actualización en su variante IMU, y 277 en su variante MARG, lo que lo hace especialmente adecuado para su ejecución en el procesador ARM Cortex-A9 en tiempo real.
- **Un único parámetro de ajuste:** a diferencia del filtro de Kalman extendido (EKF), analizado en anteriormente, requiere el ajuste de matrices de covarianza, el filtro de Madgwick se configura mediante un único parámetro $\beta$, lo que simplifica enormemente el proceso de puesta a punto.
- **Implementación en C:** la disponibilidad de una implementación de referencia optimizada en C por parte del propio autor del algoritmo ha permitido su integración directa en el entorno Vitis con mínimas modificaciones.

La combinación de estos elementos constituye una solución equilibrada entre coste, complejidad de desarrollo y rendimiento, adecuada para el objetivo de este proyecto: la estimación de orientación en tiempo real mediante fusión de sensores inerciales sobre una plataforma SoC.

# Capítulo 5

# Resultados

*El aprendizaje es experiencia. Todo lo demás es información.*

Albert Einstein

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo del proyecto. El objetivo principal ha sido diseñar e implementar un sistema embebido sobre una plataforma SoC-FPGA capaz de adquirir datos de sensores inerciales y estimar la orientación en tiempo real mediante el filtro de Madgwick. Para ello, se ha seguido el flujo de diseño hardware/software, empleando las herramientas Vivado y Vitis IDE sobre la placa de desarrollo Zybo Z7.

Los resultados se estructuran en los siguientes apartados: en primer lugar, se describe el modelo hardware implementado en la FPGA junto con los recursos lógicos consumidos; a continuación, se presentan los experimentos de validación realizados con las IMUs y los datos de orientación obtenidos tras aplicar el filtro de Madgwick.

Por ultimo, se realiza una comparación de la solución desarrollada para la adquisición de los datos de las IMUs con un sistema comercial como el de Technaid, comparando los resultados obtenidos en ambas aplicaciones al realizar los mismos patrones de movimientos con las diferentes IMUs con la finalidad de realizar una validación con un sistema funcional y aceptado en el ámbito de la rehabilitación.

## 5.1 Validación de la plataforma hardware

El diseño del hardware del sistema se ha realizado mediante el entorno de diseño basado en IP de Vivado Design Suite v2020.2, sobre el dispositivo ZYNQ-7000 `7z010clg400-1` presente en la placa Zybo Z7. La arquitectura de sisitema, representada en la Figura 5.1, integra los siguientes bloques IP interconectados mediante el bus estandar AXI4-Lite:

- **ZYNQ7 Processing System** (`processing_system7_0`): constituye el núcleo del sistema. Integra el procesador ARM Cortex-A9 junto con los periféricos y la interfaz de

memoria DDR3. Es el encargado de ejecutar el software embebido desarrollado en Vitis, incluyendo el filtro de Madgwick y la comunicación UART con el PC.

- **AXI Interconnect** (`ps7_0_axi_periph`): actúa como árbitro del bus AXI, gestionando las transacciones entre el procesador y los periféricos conectados. En este diseño gestiona cuatro maestros y cuatro esclavos, permitiendo el acceso simultáneo a los dos módulos PmodNAV.
- **PmodNAV_0** y **PmodNAV_1**: son los bloques IP del sensor inercial PmodNAV, instanciados dos veces para dar soporte a las dos IMUs conectadas simultáneamente a los conectores Pmod `jc` y `jd` de la placa. Cada instancia incorpora una interfaz AXI-Lite SPI para la comunicación con el chip LSM9DS1 y una interfaz AXI-Lite GPIO para la gestión del periférico.
- **Processor System Reset** (`rst_ps7_0_50M`): genera las señales de reset síncronas necesarias para el correcto arranque del sistema, garantizando que todos los periféricos se inicializan en un estado conocido.
- **Concat** (`xlconcat_0`): concatena las señales de interrupción procedentes de los dos módulos PmodNAV para agruparlas en el vector de interrupciones del procesador (`IRQ_F2P`).

Una vez completado el diseño, se ejecutaron los procesos de síntesis e implementación para el diseño en el dispositivo `7z010clg400-1`, obteniéndose los informes de utilización correspondientes. La Figura 5.2 muestra la distribución física de los recursos lógicos sobre la lógica programable tras la implementación, donde puede observarse que la lógica se concentra en la región central del dispositivo con una ocupación moderada.

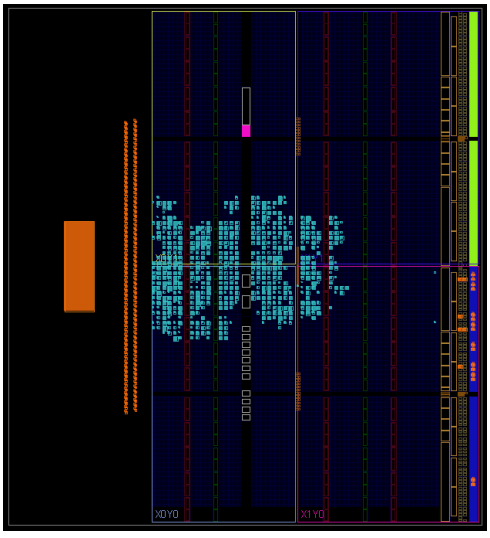



Figura 5.2: Distribución física de los recursos lógicos sobre la FPGA tras la implementación.

Los datos numéricos de utilización, comparando los resultados tras la síntesis y tras la implementación final con rutado completo, se recogen en la Tabla 5.1.

Los resultados de utilización ponen de manifiesto que el diseño implementado hace un uso muy moderado de los recursos lógicos disponibles en el dispositivo. Tras la implementación con

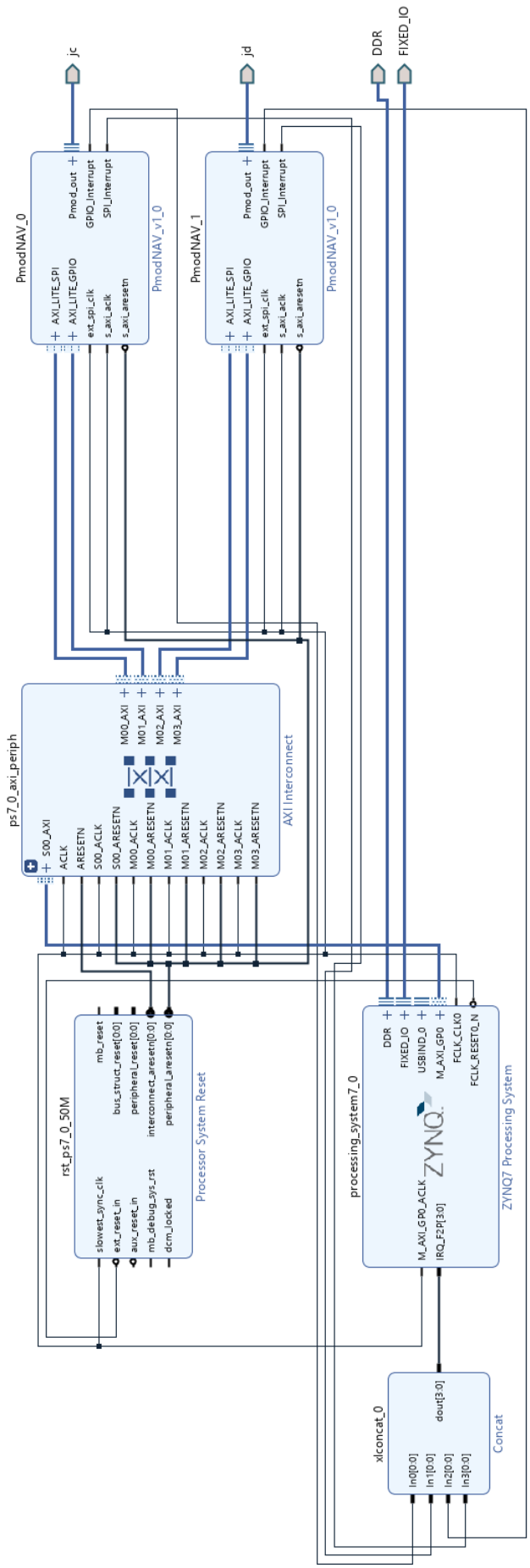



Figura 5.1: Diagrama de bloques del diseño hardware implementado en Vivado.

Tabla 5.1: Recursos utilizados de la FPGA `7z010clg400-1` tras síntesis e implementación.

| Recurso | Disponible | Síntesis | Util. (%) | Implementación | Util. (%) |
|---|---|---|---|---|---|
| **Slice LUTs** | **17 600** | **1 685** | **9,57** | **1 456** | **8,27** |
| LUT as Logic | 17 600 | 1 587 | 9,02 | 1 362 | 7,74 |
| LUT as Memory | 6 000 | 98 | 1,63 | 94 | 1,57 |
| **Slice Registers** | **35 200** | **2 251** | **6,39** | **2 054** | **5,84** |
| Flip Flops | 35 200 | 2 251 | 6,39 | 2 054 | 5,84 |
| **Block RAM Tile** | **60** | **0** | **0,00** | **0** | **0,00** |
| **DSPs** | **80** | **0** | **0,00** | **0** | **0,00** |

rutado completo, se emplean únicamente 1 456 LUTs (8,27 % del total) y 2 054 registros tipo Flip Flop (5,84 %), valores que se sitúan por debajo de los obtenidos en síntesis debido a las optimizaciones aplicadas por el motor de implementación de Vivado. Destaca la ausencia de bloques de memoria BRAM y bloques DSP, lo que es coherente con la naturaleza del diseño: toda la lógica aritmética del filtro de Madgwick reside en el procesador ARM, reservándose la parte programable de la FPGA exclusivamente para la gestión de la comunicación SPI con los sensores inerciales y el rutado de interrupciones mediante el bus AXI.

Una vez validado el diseño hardware descrito en el apartado anterior, el siguiente paso consistió en la ejecución del filtro de Madgwick sobre el procesador ARM Cortex-A9 de la Zybo Z7. El software embebido, desarrollado en Vitis IDE en lenguaje C, se encarga de inicializar los dos módulos PmodNAV, leer las medidas de acelerómetro, giroscopio y magnetómetro de cada sensor a través del bus SPI, y alimentar con ellas el algoritmo de fusión sensorial para obtener la estimación de orientación en forma de cuaternión.

El filtro fue configurado con los parámetros recogidos en la Tabla 5.2. La frecuencia de muestreo se fijó en 10 Hz (`sampleFreq = 10 Hz`). El parámetro de ganancia $\beta$ se estableció en 0,5, valor que controla el equilibrio entre la corrección proveniente del acelerómetro y el magnetómetro frente a la integración pura del giroscopio. Se empleó la variante MARG del filtro (`MadgwickAHRSupdate`), que incorpora las medidas del magnetómetro para corregir la estimación del ángulo yaw y proporcionar una referencia absoluta de orientación.

Tabla 5.2: Parámetros de configuración del filtro de Madgwick implementado.

| Parámetro | Valor | Descripción |
|---|---|---|
| `sampleFreq` | 10 Hz | Frecuencia de muestreo del filtro |
| $\beta$ | 0,5 | Ganancia de corrección acelerómetro/magnetómetro |
| Cuaternión inicial $q_0$ | [1, 0, 0, 0] | Cuaternión identidad (sin rotación inicial) |
| Variante | MARG | Con soporte de magnetómetro |
| Número de IMUs | 2 | PmodNAV conectadas a `jc` y `jd` |

Un aspecto fundamental para garantizar la aplicabilidad del sistema en procesos de rehabilitación con exoesqueletos es que el filtro sea capaz de ejecutarse en tiempo real, es decir, que el tiempo de cómputo de cada iteración sea significativamente inferior al período de muestreo establecido.

Tal y como se analiza en el Apéndice A, el filtro de Madgwick en su variante MARG requiere 277 operaciones aritméticas escalares por actualización. Esta característica, unida a la capacidad

de cómputo del procesador ARM Cortex-A9 a 650 MHz presente en el SoC ZYNQ-7000, garantiza un margen holgado entre el tiempo de ejecución del filtro y el período de muestreo de 100 ms. Esto implica que el procesador permanece disponible la mayor parte del ciclo para atender otras tareas, como la lectura de los sensores vía SPI, el envío de datos por UART al PC.

A modo de comparación, el Filtro de Kalman Extendido (EKF), alternativa considerada en el Capítulo 4, requiere la inversión de matrices de covarianza en cada iteración, operación cuyo coste computacional crece de forma cuadrática con el número de variables de estado y que puede comprometer la viabilidad en tiempo real sobre un procesador embebido de bajo coste. El filtro de Madgwick evita este problema al basarse en un descenso de gradiente de coste lineal, lo que lo convierte en la solución más adecuada para este tipo de plataformas.

Para verificar experimentalmente estas consideraciones, se instrumentó el software embebido con el temporizador global de 64 bits del SoC ZYNQ-7000 (`XTime_GetTime`), midiendo en cada iteración tanto el tiempo de cómputo del filtro de Madgwick (ejecutado dos veces, una por IMU) como el tiempo de ciclo completo del bucle principal, que comprende la lectura SPI de ambos sensores, la ejecución de los filtros, la transmisión UART y la espera hasta el siguiente instante de muestreo. Los resultados, obtenidos sobre 935 iteraciones consecutivas, se recogen en la Tabla 5.3. Puede observarse que el tiempo de ejecución de los filtros es varios órdenes de magnitud inferior al periodo de muestreo empleado, por lo que el procesador dispone de un amplio margen temporal para ejecutar la estimación de orientación en tiempo real. Asimismo, el tiempo del ciclo completo se mantiene prácticamente constante, lo que evidencia un comportamiento determinista del sistema. Un análisis más detallado de estos resultados se presenta en la Sección 5.5.

Tabla 5.3: Tiempos de ejecución y frecuencias equivalentes medidos sobre el procesador ARM Cortex-A9.

| **Etapa** | **Tiempo medio** | **Tiempo máximo** | **Frec. Promedio** |
|---|---|---|---|
| Filtro de Madgwick (×2) | 1.6 µs | 2.7 µs | 375 kHz |
| Ciclo de trabajo (SPI + filtros + UART) | 103.39 ms | 103.56 ms | 10.34 Hz |

## 5.2 Validación de las señales adquiridas

Previamente a la presentación de los resultados de orientación estimados por el filtro de Madgwick, resulta necesario analizar las señales en bruto proporcionadas por los tres sensores que componen el módulo PmodNAV: el acelerómetro, el giroscopio y el magnetómetro. Estas señales constituyen la entrada del algoritmo de fusión sensorial y su inspección permite comprender el comportamiento del sistema ante las distintas fases del experimento realizado.

Con este propósito, se diseño un ensayo estructurado en tres fases. La primera fase, se corresponde a un estado de reposo del sensor, situado en una superficie plana sin ser sometido a ningún movimiento, seguidamente, la segunda fase consistió en someter a la PmodNav a movimientos controlados de manera manual realizando traslaciones y rotaciones, por ultimo, en la tercera fase se volvió a colocar en un estado de reposo el sensor, en una posición aproximada

a la inicial. El objetivo de este ensayo es verificar que los sensores responden correctamente a los cambios de orientación realizados y que son capaces de recuperar unos valores estables una vez finalizado el movimiento.

En concreto, el comportamiento esperado es el siguiente: durante las fases de reposo, el acelerómetro debe registrar únicamente la proyección de la aceleración gravitacional, el giroscopio debe permanecer en valores nulos y el magnetómetro debe mostrar lecturas constantes del campo magnético del entorno; durante la fase de movimiento, los tres sensores deben reflejar de forma simultánea la dinámica aplicada, sin alcanzar la saturación de sus rangos de medida.

La Figura 5.3 muestra las medidas registradas por los tres sensores a lo largo de las 520 muestras capturadas aproximadamente durante el ensayo. El eje horizontal representa el índice de muestra, lo que corresponde a un total de aproximadamente 52 segundos de ensayo.

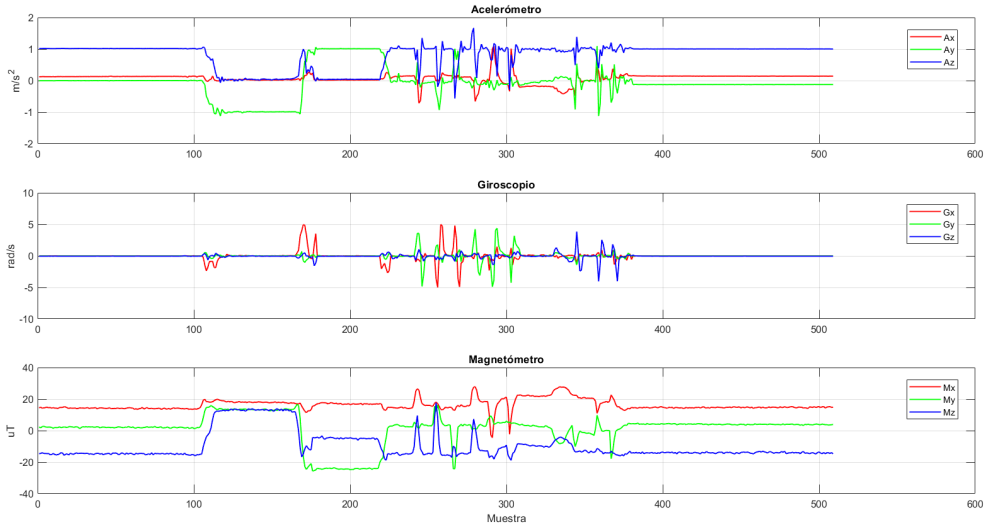



Figura 5.3: Señales brutas del acelerómetro (superior), giroscopio (centro) y magnetómetro (inferior) registradas durante el ensayo con el módulo PmodNAV.

Tal y como se esperaba en el diseño del experimento, pueden distinguirse tres fases claramente diferenciadas que permiten analizar el comportamiento del sistema en condiciones estáticas y dinámicas:

- **Fase de reposo inicial (muestras 0–100):** el sensor permanece estático sobre una superficie plana. En esta fase, el acelerómetro registra únicamente la aceleración gravitacional, con $A_z \approx 1\,\mathrm{m/s^2}$ y los componentes $A_x$ y $A_y$ próximos a cero, lo que indica que el eje Z del sensor se encuentra alineado con la vertical. El giroscopio permanece en reposo, con las tres componentes $G_x$, $G_y$ y $G_z$ nulas. El magnetómetro muestra valores estables correspondientes a la medida del campo magnético terrestre en el entorno de laboratorio ($M_x \approx 15\,\mu\mathrm{T}$, $M_y \approx 0\,\mu\mathrm{T}$, $M_z \approx -20\,\mu\mathrm{T}$).
- **Fase de movimiento activo (muestras 100–370):** el sensor es sometido a una secuencia de rotaciones y traslaciones manuales. Esta fase se caracteriza por variaciones bruscas y de gran amplitud en el acelerómetro, con las tres componentes $A_x$, $A_y$ y $A_z$ oscilando entre

$-1{,}5$ y $1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$, lo que refleja cambios de orientación que redistribuyen la proyección de la gravedad entre los tres ejes. El giroscopio registra velocidades angulares de hasta $\pm\,5\,\mathrm{rad/s}$ en los ejes X e Y, con $G_z$ próximo a cero durante la mayor parte del movimiento, lo que indica que las rotaciones se producen principalmente en los planos sagital y frontal. Por su parte, el magnetómetro experimenta variaciones notables en sus tres componentes, especialmente en $M_y$ y $M_z$, como consecuencia directa de los cambios de orientación del sensor respecto al campo magnético terrestre. Pueden apreciarse también picos puntuales, posiblemente provocados por perturbaciones magnéticas locales presentes en el entorno.

- **Fase de reposo final (muestras 370–520):** el sensor retorna a una posición de reposo. Las señales del acelerómetro y del giroscopio recuperan sus valores de referencia en reposo. El magnetómetro también converge a valores estables, confirmando que el sensor ha alcanzado una nueva posición estacionaria.

El comportamiento observado en las tres señales coincide con el esperado para un sensor inercial sometido a movimientos de orientación libre, verificándose las condiciones planteadas en el diseño del ensayo: lecturas estables y físicamente coherentes en ambas fases de reposo y una respuesta simultánea de los tres sensores durante la fase dinámica, Queda así validada la adquisición de datos, y las señales verificadas constituyen la entrada al filtro de Madgwick, cuyos resultados se presentan en el apartado siguiente.

## 5.3 Resultados de estimación de orientación

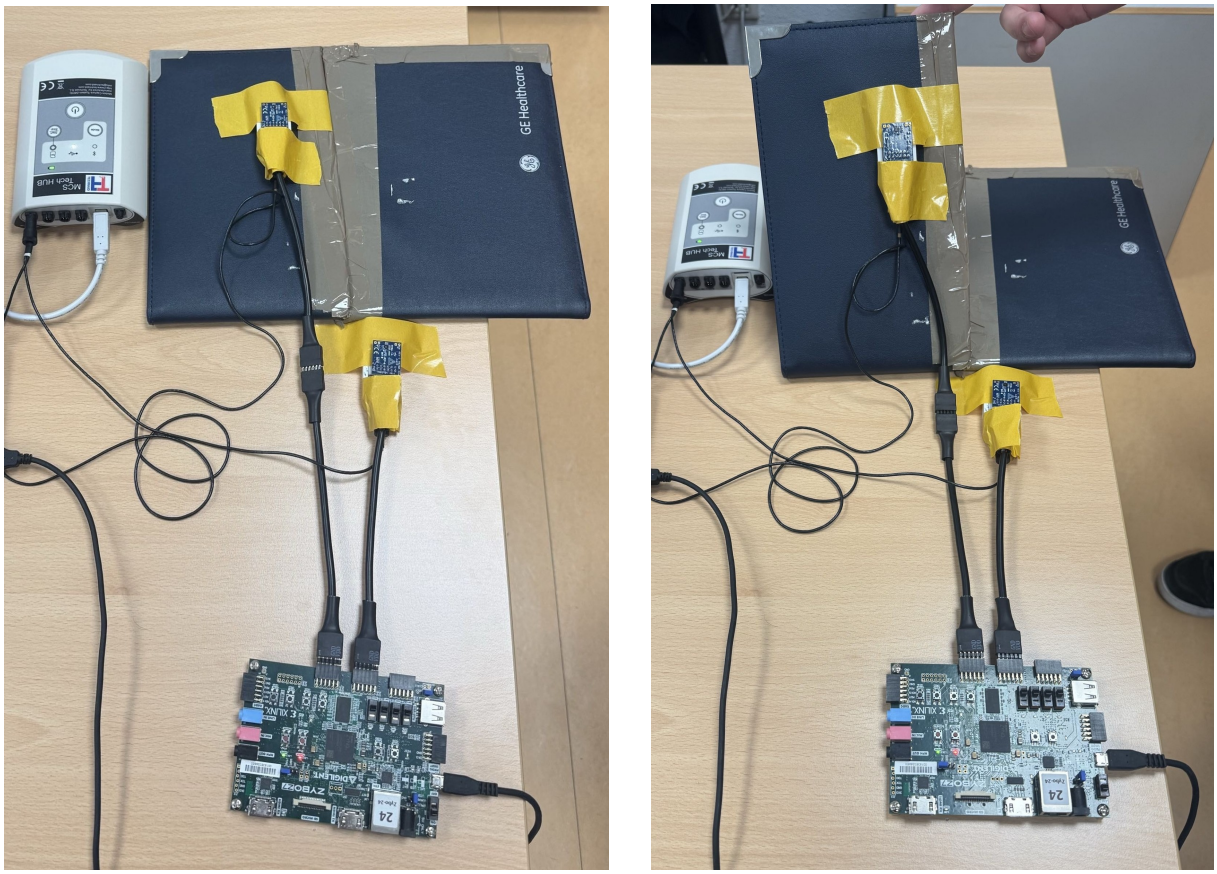
Una vez validada la correcta adquisición de los datos inerciales y la integración del filtro de Madgwick en el sistema embebido, el siguiente paso consiste en analizar la orientación estimada a partir de las medidas proporcionadas por ambas IMUs. Para ello, se estudia la evolución temporal de los cuaterniones y ángulos obtenidos durante los ensayos realizados, evaluando su coherencia con los movimientos aplicados y la capacidad del sistema para representar de forma estable y continua la orientación relativa entre los sensores.

### 5.3.1 Evolución de la orientación estimada

Para ello, se diseño el montaje mostrado en la Figura 5.4, donde las IMUs se fijaron sobre la tapa del soporte plegable cuya bisagra define un eje de rotación físico, emulando el comportamiento de una articulación. La IMU 1 permanece solidaria a la tapa fija, anclada sobre la mesa, mientras que la IMU 0 fijada a la tapa móvil, es la que se va a someter y registrar las rotaciones aplicadas al elevar y descender dicha tapa. Esta configuración tiene como objetivo reproducir el movimiento asociado a la articulación de la rodilla, donde un sensor permanece fijo a un segmento corporal (el muslo) y el otro registra el movimiento del segmento corporal adyacente (la tibia), siendo la diferencia angular entre ambos la magnitud clínica de interés.

Una de las decisiones claves de realizar este montaje experimental fue que el eje de giro definido por la bisagra permitía además contrastar los ángulos estimados con una referencia

externa, permitiendo así, durante el ensayo, medir de manera aproximada con un transportador de ángulos las posición de la tapa abatible frente la tapa fija.



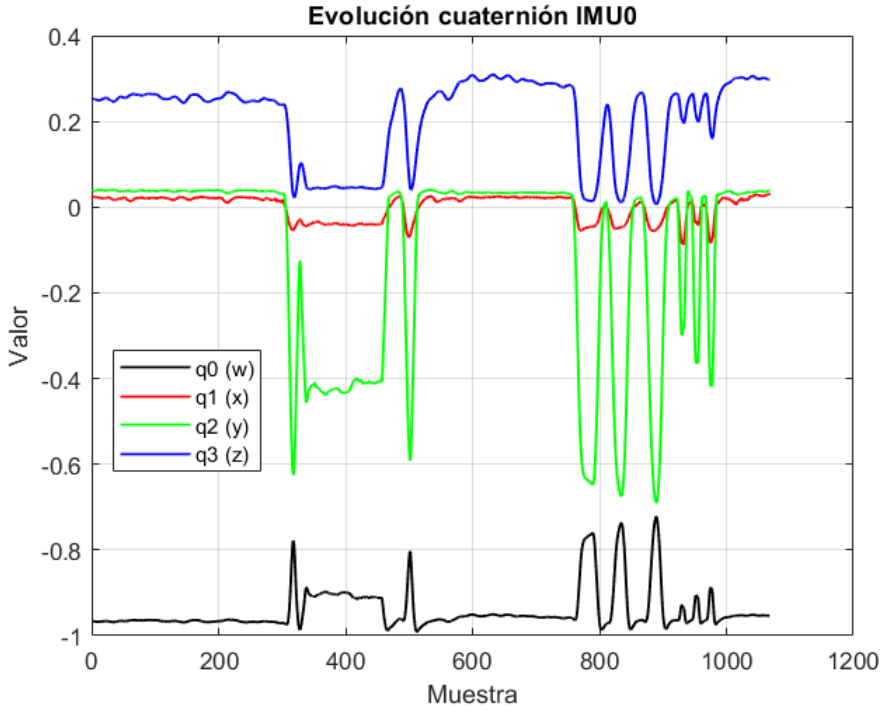

(a) Posición de reposo (tapas coplanarias). (b) Posición de flexión (tapa móvil elevada).

Figura 5.4: Montaje experimental del ensayo de orientación relativa. Ambos sensores se conectan a los conectores Pmod de la placa Zybo Z7, y junto a ellos se fijaron los sensores del sistema de referencia Technaid MCS para la captura simultánea.

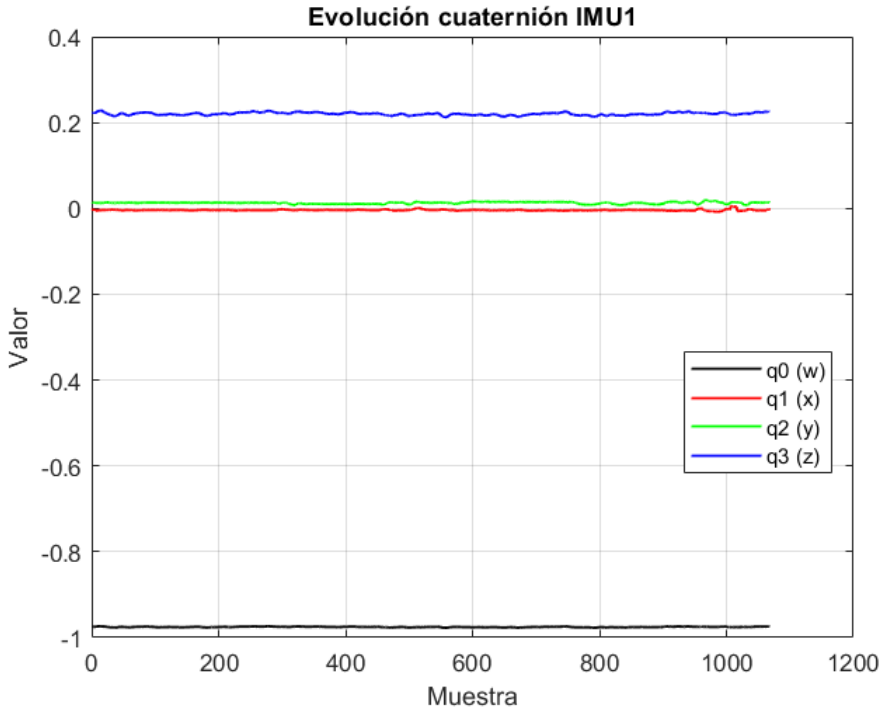
El comportamiento esperado del ensayo, de aproximadamente 110 segundos, es el siguiente: el cuaternión de la IMU 1 debe permanecer constante durante todo el ensayo, sin deriva apreciable; el de la IMU 0 debe reflejar las rotaciones aplicadas y la diferencia angular entre ambas debe partir de un valor residual próximo a cero en el reposo, alcanzar valores coherentes con los ángulos impuestos y verificados con el transportador durante el movimiento, y retornar a su valor de reposo al finalizar cada rotación.

### 5.3.2 Comparativa entre IMU0 e IMU1

Como verificación previa al análisis de la diferencia angular, la Figura 5.5 muestra la evolución temporal de las cuatro componentes del cuaternión estimado por el filtro de Madgwick para cada una de las dos IMUs durante el ensayo.




(a) IMU0 (móvil).




(b) IMU1 (estática).

Figura 5.5: Evolución temporal de las componentes del cuaternión de orientación estimado por el filtro de Madgwick para ambas IMUs durante el mismo ensayo.

Los resultados coinciden con el comportamiento esperado para la configuración del ensayo. La IMU1 (Figura 5.5b) mantiene sus cuatro componentes prácticamente constantes durante todo el registro, con $q_0 \approx -1$ y $q_3 \approx 0{,}22$ estables y $q_1$, $q_2$ próximos a cero, confirmando que el filtro

no introduce deriva apreciable en condiciones estáticas. Por el contrario, la IMU0 (figura 5.5a) registra variaciones pronunciadas durante el movimiento (muestras 250–1 000), especialmente en las componentes $q_0$ y $q_2$, retornando a valores estables en el reposo final. Confirmada la validez a nivel visual de ambas estimaciones individuales, el resultado principal del ensayo es la diferencia angular entre ellas, que se analiza a continuación.

### 5.3.3 Diferencia angular total entre las dos IMUs

La diferencia angular total entre ambas IMUs se calculó en cada instante de muestreo a partir del cuaternión relativo de acuerdo a la expresión 5.1.

$$\Delta\theta = 2 \cdot \arccos\left(|q_{\Delta,0}|\right) \tag{5.1}$$

donde $q_{\Delta,0}$ es la componente escalar del cuaternión relativo $\hat{q}_\Delta = \hat{q}^*_{\text{IMU0}} \otimes \hat{q}_{\text{IMU1}}$. La Figura 5.6 muestra la evolución de esta magnitud a lo largo del ensayo.

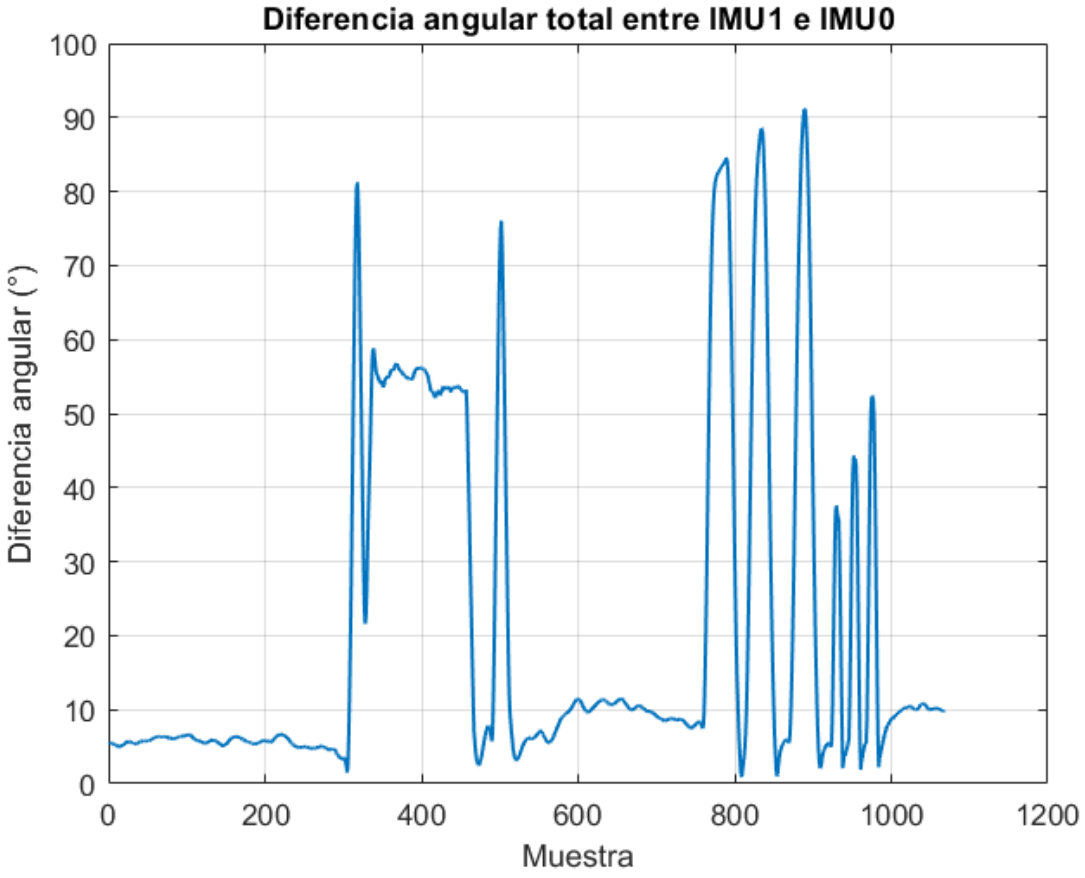



Figura 5.6: Diferencia angular total entre IMU1 e IMU0 a lo largo del ensayo.

Los resultados permiten distinguir los distintos estados del sistema:

- **Reposo inicial (muestras 0–250):** la diferencia angular se mantiene estable en torno a 5°–7°. Este valor residual no nulo refleja la diferencia de orientación estática entre las dos

IMUs debida a su distinta posición de montaje en los conectores `jc` y `jd` de la placa Zybo Z7, así como a las tolerancias de alineación mecánica entre ambos módulos PmodNAV. En ausencia de un proceso de calibración de offset entre sensores, este valor es el esperado y no compromete la validez del sistema.

- **Movimiento activo (muestras 250–1 000):** la diferencia angular experimenta variaciones de gran amplitud, con picos que alcanzan valores entre 50° y 90°, coincidiendo temporalmente con las fases de mayor actividad cinemática identificadas en las señales brutas. Entre los episodios de movimiento brusco, la diferencia angular desciende hacia valores de 5°–10°, reflejando que ambos filtros convergen a estimaciones coherentes durante las fases de movimiento más suave.
- **Reposo final (muestras 1 000–1 100):** la diferencia angular retorna a un valor estable en torno a 10°, ligeramente superior al reposo inicial, lo que indica que ambas IMUs han registrado la misma orientación final con una discrepancia pequeña y constante atribuible al offset estático de montaje.

Para verificar que los valores estimados se corresponden con los ángulos realmente aplicados, en determinados instantes del ensayo la tapa móvil se mantuvo en posiciones de apertura fijas, medidas de forma aproximada con un transportador de ángulos apoyado en el eje de la bisagra.

Las aperturas impuestas, de aproximadamente 45° y 90°, coincidieron con los valores de $\Delta\theta$ estimados por el sistema en dichos instantes con desviaciones del orden de $\pm 5°$, compatibles con la precisión del método de referencia manual y con el offset de montaje. Aunque no se trata de una verificación metrológica rigurosa, esta comprobación proporciona una evidencia física directa de que la diferencia angular estimada por el sistema se corresponde con el movimiento real.

## 5.4 Comparativa con Technaid MCS

Con el objetivo de validar la calidad de las medidas proporcionadas por el módulo PmodNAV frente a un sistema de referencia comercial, se realizó una captura simultánea de datos con ambos sistemas bajo las mismas condiciones de movimiento. El sistema de referencia empleado fue el Technaid Motion Capture System (MCS) [43], basado en sensores inerciales MEMS de grado industrial certificados para uso clínico. Ambos sistemas operaron a una frecuencia de muestreo de 10 Hz, y los datos de Technaid se seleccionaron a partir de la muestra de inicio del movimiento comparable, eliminando el segmento inicial de reposo sin correspondencia en la captura del PmodNAV.

### 5.4.1 Comparación de las señales brutas

Al tratarse de sensores de tecnología equivalente sometidos al mismo movimiento, el comportamiento esperado es de una elevada correlación entre las señales de ambos sistemas en los ejes que concentran la dinámica del ensayo, asumiendo ciertas diferencias y discrepancias de amplitud

derivadas de la desalineación angular del montaje entre cada pareja de sensores y del muestreo de cada equipo.

Las Figuras 5.7, 5.8, 5.9 muestran la comparación eje a eje de las tres magnitudes físicas, donde la línea sñolida corresponde al PmodNav y la línea a trazos al sistema Technaid MSC.

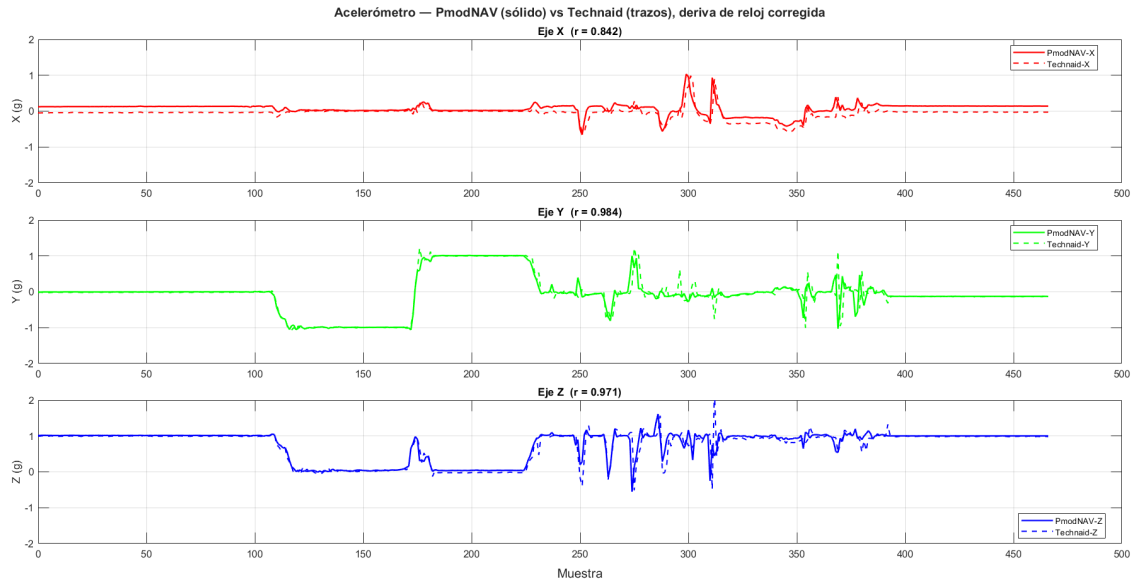



Figura 5.7: Comparación del acelerómetro eje a eje entre el PmodNAV (línea sólida) y el sistema Technaid MCS (línea a trazos). Señales normalizadas en unidades de g

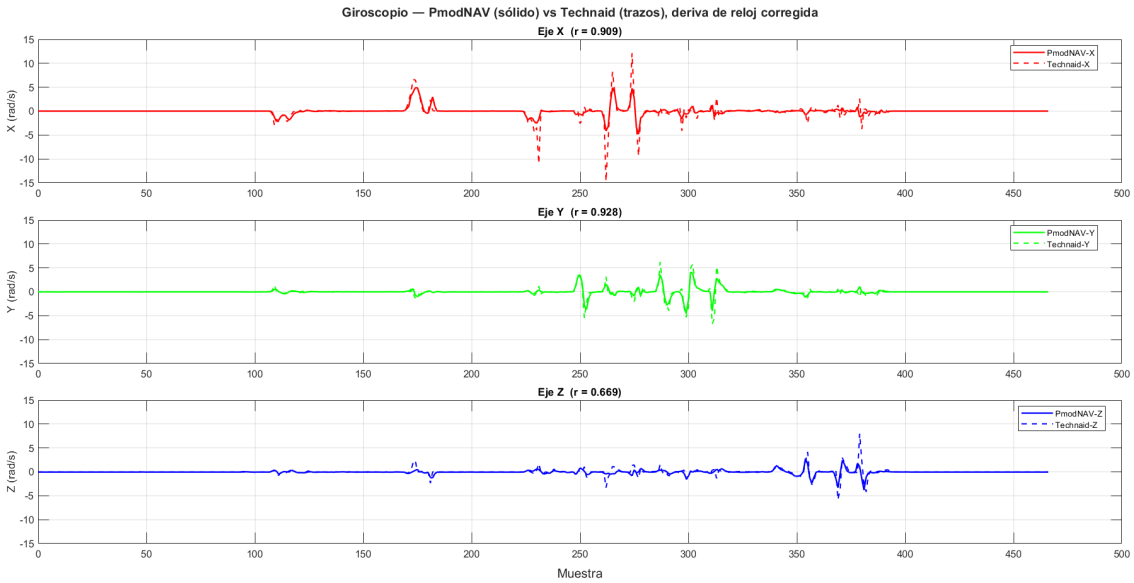



Figura 5.8: Comparación del giroscopio eje a eje entre el PmodNAV (línea sólida) y el sistema Technaid MCS (línea a trazos). Velocidades angulares en rad/s

Tras una primera evaluación visual, en las figuras se puede apreciar que los principales eventos del ensayo aparecen sincronizados en ambos sistemas para las tres magnitudes. En el acelerometro, el eje Z aparece próximo a 1 g en las fases de reposo y ambos sistemas registran señales similares durante el movimiento, respecto al eje X e Y registran unos valores prácticamente coincidentes. En el giroscopio, los picos de velocidad angular aparecen en los mismos

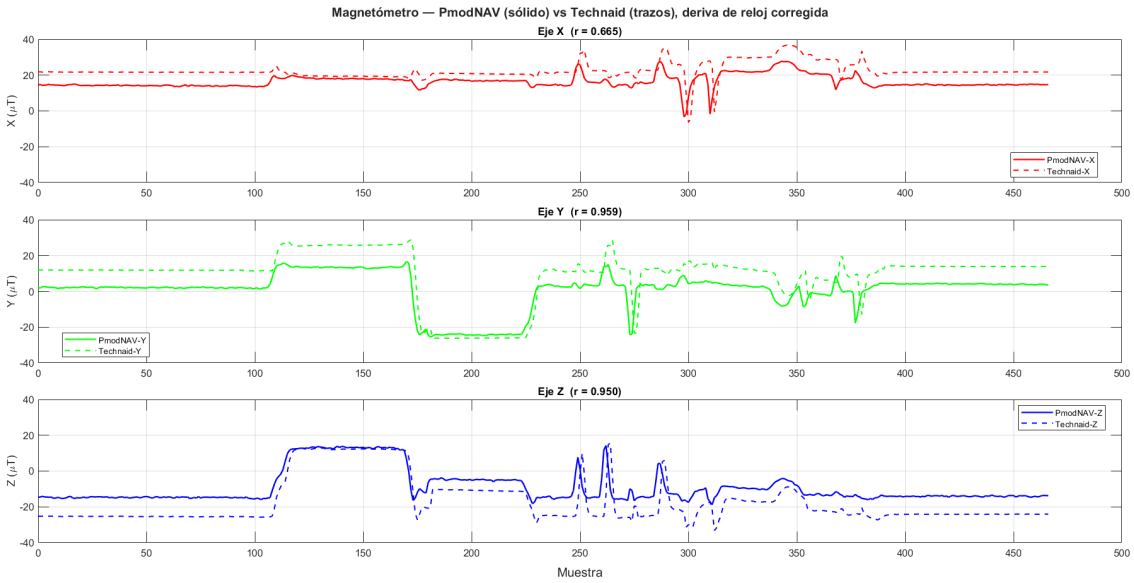



Figura 5.9: Comparación del magnetómetro eje a eje entre el PmodNAV (línea sólida) y el sistema Technaid MCS (línea a trazos). Intensidad de campo magnético en $mu$T

instantes en ambos sistemas y en algunos casos con diferente magnitudes, y en el magnetómetro las principales variaciones son simultaneas en los tres ejes, apreciándose diferencias de nivel más agudas en los ejes Y y Z.

Para cuantificar objetivamente el grado de similitud, se calcularon el coeficiente de correlación de Pearson (r) y el error cuadrático medio (RMSE) entre ambos sistemas, eje a eje, sobre el segmento alineado.
El coeficiente de Pearson, definido en la Ecuación 5.2, mide la similitud de forma entre las señales y es insensible a offsets y diferencias de escala, al operar sobre las desviaciones respecto a la media de cada señal:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} (y_k - \bar{y})^2}} \tag{5.2}$$

donde $x_k$ e $y_k$ son las muestras de la misma magnitud registradas por el PmodNAV y por el sistema Technaid respectivamente, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sus valores medios y $N$ el número de muestras del segmento comparable. Por su parte, el RMSE, definido en la Ecuación 5.3, cuantifica la discrepancia de amplitud absoluta entre ambas señales en las unidades físicas de cada sensor:

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (x_k - y_k)^2} \tag{5.3}$$

Ambas métricas son complementarias: la primera responde a si ambos sistemas registran la misma dinámica, mientras que la segunda indica con qué discrepancia absoluta lo hacen.

Los resultados se recogen en la Tabla 5.4: la correlación supera 0,9 en los ejes que concentran la dinámica del ensayo y alcanza 0,939 en la norma de la velocidad angular, mientras que los

valores más moderados se localizan en el eje X del magnetómetro y el eje Z del giroscopio. El análisis de estos resultados se desarrolla en la Sección 5.5.

Tabla 5.4: Coeficientes de correlación de Pearson y RMSE entre el PmodNAV y el sistema Technaid MCS, eje a eje.

| | **Correlación $r$** | | | **RMSE** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sensor** | **X** | **Y** | **Z** | **X** | **Y** | **Z** |
| Acelerómetro (g) | 0.842 | 0.984 | 0.971 | 0.166 | 0.191 | 0.190 |
| Giroscopio (rad/s) | 0.909 | 0.928 | 0.669 | 0.937 | 0.474 | 0.577 |
| Magnetómetro ($mu$T) | 0.665 | 0.959 | 0.950 | 7.184 | 10.093 | 9.773 |

### 5.4.2 Comparación de las orientaciones estimadas mediante cuaterniones frente al sistema comercial Technaid MCS

Una vez validadas las señales brutas de los sensores, el siguiente paso consiste en comparar directamente los cuaterniones de orientación estimados por el filtro de Madgwick implementado sobre la plataforma SoC ZYNQ-7000 con los cuaterniones calculados por el algoritmo propietario del sistema Technaid MCS. Esta comparación constituye la validación más relevante del sistema desarrollado, ya que confronta el resultado final del procesamiento de orientación de ambas plataformas bajo las mismas condiciones de movimiento.

La Figura 5.10 muestra la evolución temporal de las cuatro componentes del cuaternión de orientación $\hat{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ estimadas por ambos sistemas a lo largo de las 1 068 muestras del segmento comparable. La línea sólida corresponde al resultado del PmodNAV procesado con el filtro de Madgwick sobre el sistema embebido, y la línea a trazos a la adquisición del sistema Technaid MCS, cuyos cuaterniones se han extraído directamente del archivo de exportación `.capq` generado por el software MCS Studio.

De forma general tras una inspección visual, puede observarse que los principales cambios de orientación aparecen sincronizados en ambos sistemas. Las variaciones más significativas se producen en torno a las muestras 300–500 y 750–1000, intervalos en los que las cuatro componentes experimentan cambios simultáneos que son registrados en ambos sistemas.

La componente $q_2$ es la que presenta una mayor variación a lo largo del ensayo y, al mismo tiempo, una de las mayores similitudes entre ambos sistemas. Tanto las amplitudes como los instantes en los que se producen los máximos y mínimos coinciden razonablemente bien.

Las componentes $q_0$ y $q_1$ muestran una evolución temporal similar, especialmente en las fases de reposo, donde ambas permanecen prácticamente constantes. Durante los movimientos más bruscos se observan diferencias de amplitud.

Por su parte, la componente $q_3$ presenta el mayor desacuerdo entre sistemas, apreciándose un desplazamiento de nivel y diferencias de amplitud más pronunciadas durante algunos intervalos del movimiento. Estas discrepancias pueden estar relacionadas con diferencias de orientación

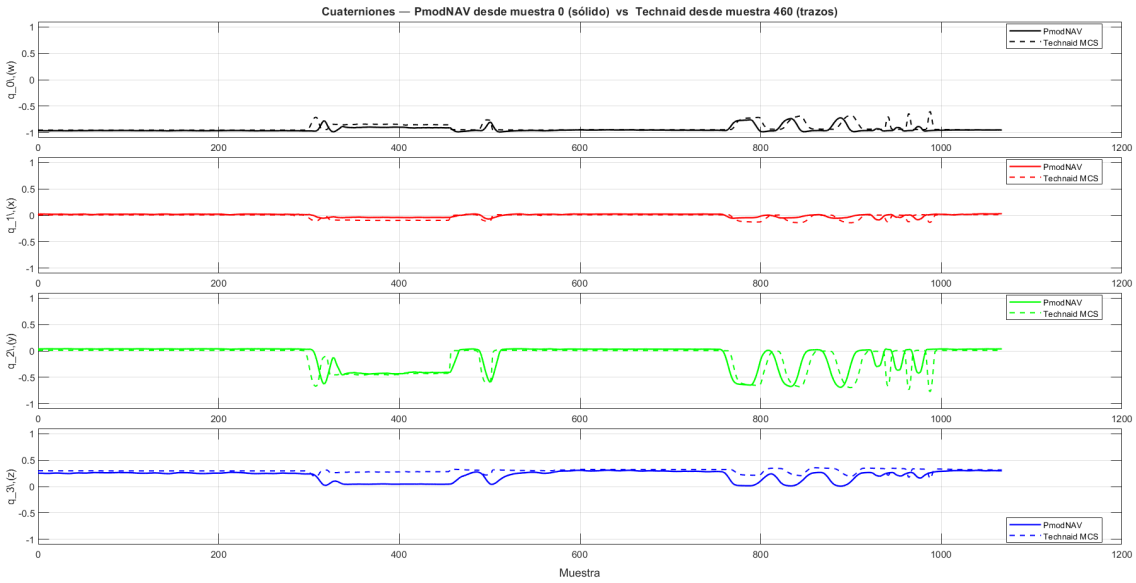



Figura 5.10: Comparación de las cuatro componentes del cuaternión de orientación estimado por el PmodNAV con el filtro de Madgwick (sólido) frente al sistema comercial Technaid MCS (trazos). Segmento comparable de 1 068 muestras (106,8 s) a 10 Hz.

inicial entre los sensores, errores de alineación durante el montaje o diferencias en los procedimientos internos de calibración de cada plataforma. No obstante, este aspecto no ha sido analizado específicamente en el presente trabajo, por lo que no es posible atribuir de forma concluyente dichas discrepancias a una causa concreta.

Con el fin de cuantificar la concordancia entre ambos sistemas mas allá de la inspección visual de las componentes, se ha comparado la diferencia angular $\Delta\theta(t)$ entre la IMU móvil y la IMU estática de cada sistema calculada mediante la Ecuación 5.1. Estas comprobaciones se realizan ya que en primer lugar, $\Delta\theta(t)$ es la magnitud físicamente interpretable del sistema y la de interés en la aplicación final, al corresponder con el angulo articular entre dos segmentos. En segundo lugar, la diferencia angular entre dos sensores solidarios a los mismos cuerpos rígidos es invariable frente a la orientación de montaje de cada sensor, mientras que los cuaterniones pueden diferir debido a el montaje de cada pareja de sensores (observable en la Figura 5.10).

Para cuantificar objetivamente el grado de similitud, se calcularon el coeficiente de correlación de Pearson (Ecuación 5.2), la diferencia media (media del valor absoluto de los valores diferentes entre ambos ensayos), el error cuadrático medio RMSE (Ecuación 5.3) entre ambos sistemas y la diferencia máxima, que identifica el peor caso puntual observado durante el ensayo.

La Figura 5.11 muestra la evolución de la diferencia angular estimada por cada sistema (panel superior) y la discrepancia instantánea entre ambas curvas (panel inferior). Los resultados numéricos se recogen en la Tabla 5.5.

Observando en ellas que, ambas curvas evolucionan de forma practicamente superpuestas a lo largo de todo el ensayo, con una correlación entre curvas de 0,991.

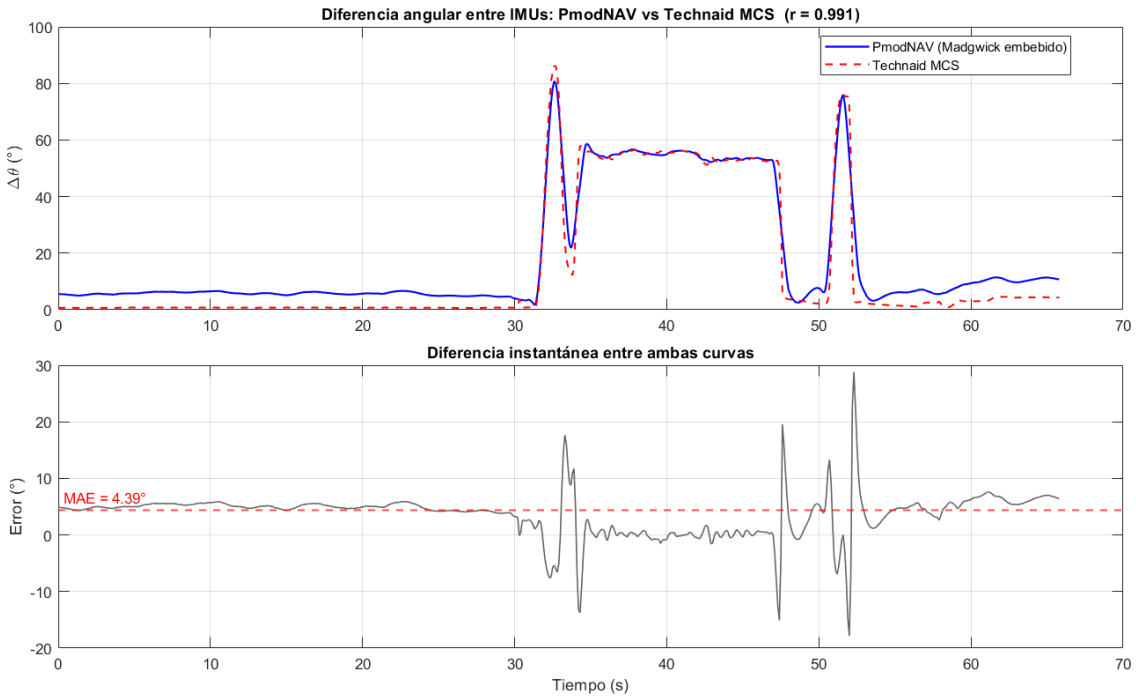



Figura 5.11: Error angular entre las dos tecnologias

Tabla 5.5: Métricas de concordancia entre la diferencia angular estimada por el sistema desarrollado y por el sistema Technaid MCS.

| **Condición** | **Dif. media (°)** | **Dif. RMS (°)** | **Dif. máxima (°)** |
|---|---|---|---|
| Ventana temporal completa | 4.39 | 5.36 | 28.83 |
| Ventana T >30s | 2.50 | 4.24 | 23.73 |
| Correlación entre curvas: $r = 0{,}991$ | | | |

Sobre la ventana temporal completa, la diferencia media entre ambas curvas es de 4,39°, con un error RMSE de 5.36° y un valor máximo puntual de 28,83°. Estos valores incluyendo el offset residual observado durante la fase inicial de reposo (entorno a 5°), pueden ser atribuibles a la desaliniación del montaje entre cada pareja de sensores y no al comportamiento dinámico de los filtros, siendo razonable analizar el comportamiento de los dos sistemas sin la fase de reposo. Descontando los primeros 30 s, la discrepancia dinámica media se reduce a 2,50°, con un error RMSE de 4.24° y un valor máximo puntual de 23,73°, localizados en los flancos de las rotaciones más rápidos. La interpretación de estos valores y sus implicaciones sobre la validez del sistema se desarrollan en la Sección 5.5.

## 5.5 Discusión de resultados

En esta sección se van a interpretar los resultados presentados a lo largo del capitulo, evaluando sus implicaciones sobre la validez del sistema desarrollado, así como sus limitaciones.

- **Hardware**: Respecto al hardware, la reducida ocupación de la lógica programable (8,27 % de las LUTs y 5,84 % de los registros, Tabla 5.1), junto con la ausencia de bloques BRAM y DSP, confirma la idoneidad del reparto hardware/software adoptado. De esta solución podemos sacar la conclusión de que la FPGA se reserva para la comunicación SPI en mayor medida y que toda la carga aritmética la soporta el procesador. Este amplio margen de recursos abiertos deja abierta la puerta a la incorporación de más sensores inerciales.

- **Frecuencia del filtro**: En cuanto a la frecuencia de muestreo, las mediciones de la Tabla 5.3 confirman cuantitativamente la viabilidad en tiempo real del sistema. El cómputo del filtro Madgwick requiere unicamente 1,6 $us$ de media por iteración, con un peor caso de 2,7 $us$, lo que equivale a una frecuencia de ejecución de 370 KHz. Estos resultados refuerzan la elección del filtro Madgwick frente al EFK analizado en el Capítulo cha:desarrollo, y evidencian que la frecuencia de operación del ciclo completo de 10 Hz es una elección de configuración y no una limitación de cómputo.

- **Señales brutas**: Respecto a la comparación de las señales brutas frente al sistema Technaid MSC (Tabla 5.4), la concordancia es alta (r >0,9) en los ejes Y y Z del acelerometro y del magnetómetro, y los ejes X e Y del giroscopio, asumiendo una adquisición de datos similares entre ambos sistemas. Las correlaciones más moderadas se localizan en los ejes de menor variación (el eje X del magnetómetro (r = 0.665) y en el eje Z del giroscopio (r = 0.669). En estos ejes la correlación puede ser menos representativas al calcularse sobre señales con baja relación señal-ruido. En cuanto al RMSE, los valores del acelerometro (inferiores a 0,2 g) y del giroscopio (0,5-0,9 rad/s) reflejan diferencias de amplitud moderadas atribuibles al muestro asíncrono o a la velocidad de adquisición de las señales, mientras que el magnetómetro (7-10 $mu$T) presentan variaciones mas significativas que podrían atribuirse principalmente al offset de calibración entre ambos dispositivos, sin afectar a la coincidencia de formas de las señales.

- **Orientación estimada**: Por lo que respecta a la comparación de las orientaciones estimadas, la elección de la diferencia angular $\Delta\theta$ como magnitud de comparación permitió evaluar directamente la variable de interés de la aplicación, eliminando las discrepancias asociadas a diferencias de montaje u orientación inicial de los sensores. Sobre esta magnitud, la correlación de 0,991 (Tabla 5.5) indica que ambos sistemas reproducen prácticamente la misma evolución temporal del movimiento. Además, al descontar el offset inicial de reposo, la diferencia media se reduce hasta 2,50° y el error RMS a 4,24°, valores reducidos teniendo en cuenta que se comparan dos sistemas independientes basados en sensores inerciales y algoritmos de fusión distintos. Las diferencias máximas aparecen asociadas a las transiciones más rápidas del movimiento, donde pequeños desfases temporales o discrepancias en la respuesta dinámica de los filtros pueden amplificarse.

Los resultados anteriores deben interpretarse considerando las limitaciones del procedimiento de validación empleado. Los ensayos se realizaron mediante movimientos manuales sobre un montaje experimental y sin una alineación mecánica precisa entre sensores, por lo que parte de las discrepancias observadas pueden atribuirse a diferencias de montaje y referencia entre ambos sistemas.

A pesar de estas limitaciones, los resultados obtenidos muestran una elevada concordancia con el sistema comercial Technaid MCS. La correlación de 0,991 obtenida para la diferencia angular y los reducidos errores medios observados respaldan la validez de la arquitectura propuesta para la estimación de orientación en tiempo real.

## 5.6 Presupuesto

Los costes asociados a la realización del Trabajo de Fin de Grado se han calculado estimando el coste de la mano de obra, del software y del hardware empleados durante su desarrollo. El proyecto se ha extendido a lo largo de unas 65 semanas (aprox. 15 meses).

### 5.6.1 Mano de obra

Estimando un salario bruto mensual de 2.889 € para un ingeniero junior y una jornada media de 173 h/mes, el coste de una hora de trabajo asciende a 16,70 €/h. Se han dedicado aproximadamente 65 semanas con una media de 10 horas semanales, lo que supone un total de 650 horas:

$$650 \text{ h} \times 16{,}70 \text{ €/h} = 10.855 \text{ €}$$

### 5.6.2 Software

Las herramientas software empleadas se encuentran disponibles mediante licencias académicas proporcionadas por la Universidad Rey Juan Carlos, por lo que no generan un coste directo asociado al proyecto.

- **Vivado y Vitis:** 0 €. Se utilizan mediante licencias institucionales.
- **MATLAB:** 0 €. Se utiliza mediante licencia campus.
- **Python y librerías:** software de código abierto, sin coste asociado.

### 5.6.3 Hardware

El coste del equipamiento se imputa considerando una vida útil de 5 años (60 meses) y un periodo de uso aproximado de 15 meses, salvo el material dedicado específicamente al proyecto, que se imputa al 100 %.

- **2 × Pmod NAV (Digilent):** módulo IMU de 9 ejes con barómetro, con un coste aproximado de 35 €/unidad. Al ser material específico del proyecto, se imputa íntegramente: $2 \times 35 = 70$ €.
- **Ordenador portátil MSI GF63 8RC:** coste de adquisición aproximado de 850 €, amortizado durante los 15 meses de uso: $850 \times (15/60) = 212{,}50$ €.
- **Placa Zybo Z7-10 (Xilinx Zynq XC7Z010):** coste de adquisición aproximado de 250 €, amortizado durante los 15 meses de uso: $250 \times (15/60) = 62{,}50$ €

### 5.6.4 Coste total

Una vez desglosados los costes de mano de obra, software y hardware en los apartados anteriores, la Tabla 5.6 recoge de forma detallada el presupuesto completo del proyecto, indicando para cada partida la unidad considerada, su precio unitario y el coste total estimado resultante. Como puede observarse, la mano de obra constituye la partida más significativa del presupuesto, por encima del coste del hardware empleado, cuyo importe es reducido gracias al carácter de bajo coste de los módulos PmodNAV y de la placa Zybo Z7. En cuanto al software, las herramientas Vivado, Vitis y MATLAB se han utilizado bajo licencia académica sin coste asociado para el desarrollo del proyecto, mientras que Python, al ser de código abierto, tampoco supone gasto alguno.

| **Concepto** | **Elemento** | **Unidad** | **Precio unitario** | **Coste (€)** |
|---|---|---|---|---|
| Mano de obra | Ingeniero junior | 650 (h) | 16,70 (€/h) | 10.855,00 |
| Software | Vivado y Vitis | 1 | 0.0 (€) | 0.0 |
| | MATLAB | 1 | 0.0 (€) | 0.0 |
| | Python | 1 | 0.0 (€) | 0.0 |
| Hardware | Pmod NAV | 2 | 35,00 (€) | 70,00 |
| | MSI GF63 8RC | 1 | 212,50 (€) | 212,50 |
| | Zybo Z7-10 | 1 | 62,50 (€) | 62,50 |
| | | | **Coste Total Estimado** | **11.200,50** |

Tabla 5.6: Presupuesto detallado del proyecto

# Capítulo 6

# Conclusiones y líneas futuras

*El propósito de la ciencia no es abrir la puerta a una sabiduría infinita, sino poner un límite al error infinito.*

Bertolt Brecht

## 6.1 Conclusiones

A lo largo de este Trabajo de Fin de Grado se ha diseñado, implementado y validado un sistema embebido para la estimación de orientación basado en sensores inerciales y en el filtro de Madgwick, utilizando como plataforma hardware la tarjeta SoC-FPGA Zybo Z7. Los resultados obtenidos demuestran la viabilidad de la solución propuesta para la adquisición y procesamiento de datos inerciales en tiempo real, así como para la estimación fiable de la orientación mediante técnicas de fusión sensorial. A partir del trabajo desarrollado y de los resultados experimentales presentados, pueden extraerse las siguientes conclusiones, directamente relacionadas con los objetivos definidos en el Capítulo 1.

- **Implementación de la plataforma Hardware.** Se ha implementado en Vivado una arquitectura hardware sobre el dispositivo ZYNQ-7000 capaz de gestionar de forma simultanea dos módulos PmodNAV a través del bus AXI y del protocolo SPI. Consiguiendo una utilización moderada de los recursos lógicos de la FPGA (8,27 % de las LUTs y 5,84 % de los registros tras la implementación), sin necesidad de utilizar no los BRAM ni DSP, lo que sustenta que la solución es ligera y deja un amplio margen para futuras ampliaciones del sistema.
- **Implementación del filtro Madgwick.** El filtro se ha integrado con éxito en el lenguaje C sobre el procesador ARM Cortex-A9 mediante Vitis IDE, en su variante MARG con soporte del magnetómetro. El reparto de tareas adoptado en el procesador ha resultado eficiente y ha garantizado establecer unos tiempos de respuesta deseados los cuales rondan los 10 Hz.

- **Adquisición y estimación de orientación.** El sistema es capaz de adquirir las medidas de acelerómetro, giroscopio y magnetómetro y estimar de forma continua y estable la orientación de cada sensor en forma de cuaternión, manteniendo en todo momento la propiedad de unitariedad y evitando las singularidades de tipo Gimbla Lock asociadas a los ángulos de Euler.

- **Validación de los resultados.** El cálculo de la diferencia angular entre las dos IMUs y su descomposición en ángulos de Euler ha permitido reproducir de forma coherente una situación análoga a la de un exoesqueleto real, en la que un sensor permanece solidario a un segmento fijo y el otro registra el movimiento del segmento adyacente. Asimismo, la comparación de las señales brutas y de los cuaterniones frente al sistema comercial Technaid MCS muestra una coherencia entre ambas plataformas, atribuyéndose las diferencias observadas principalmente a la distinta orientación de montaje de los sensores y a sus cadenas de acondicionamiento de señal, y no a limitaciones intrínsecas del módulo PmodNAV.

En conjunto, los resultados validan la arquitectura propuesta y confirman que un sistema de bajo coste basado en sensores PmodNAV y en el filtro de Madgwick, implementado sobre una plataforma SoC-FPGA, constituye una solución adecuada para la estimación de orientación en tiempo real, sentando las bases para su integración futura en sistemas más complejos.

## 6.2 Líneas futuras

A partir del trabajo desarrollado, se identifican diversas líneas de mejora y ampliación que permitirían incrementar las prestaciones y la aplicabilidad clínica del sistema:

- **Validación con movimientos biomecánicos reales.** La validación realizada en este trabajo se ha basado en movimientos controlados aplicados manualmente sobre los sensores. Una línea natural de continuación consiste en validar el sistema con patrones de movimiento biomecánicos reales, colocando las IMUs sobre los segmentos corporales de un sujeto durante la ejecución del ciclo de la marcha. Esto permitiría contrastar las estimaciones de orientación en condiciones de uso equivalentes a las de una sesión de rehabilitación, evaluar la respuesta del sistema ante la dinámica propia del movimiento humano e integrar la solución sobre un exoesqueleto de tren inferior para su validación en un entorno clínico.

- **Aceleración hardware del algoritmo de estimación.** La implementación actual ejecuta el filtro de Madgwick por completo en software sobre el procesador ARM Cortex-A9. Una posible mejora consiste en implementar el algoritmo, total o parcialmente, directamente sobre la lógica programable de la FPGA, aprovechando su capacidad de procesamiento en paralelo. De este modo, la estimación de orientación se realizaría en hardware, descargando al procesador y abriendo la puerta a un sistema con mayor rendimiento y capacidad de ampliación.

- **Procesamiento de orientación a bordo.** Incorporar la conversión a ángulos de Euler y el análisis de la diferencia angular directamente en el sistema embebido, evitando la dependencia del post-procesado en MATLAB y posibilitando un control en bucle cerrado en tiempo real.

En conjunto, estas líneas de trabajo apuntan hacia la consolidación del sistema como una solución de bajo coste, precisa y escalable para la estimación de orientación en tiempo real. Su desarrollo permitiría dar continuidad al presente Trabajo de Fin de Grado y avanzar hacia la integración definitiva del sistema en la plataforma de rehabilitación del proyecto NIMBLE, acercando la tecnología desarrollada a su aplicación real en el ámbito clínico.

# Bibliografía


[1] Espina Bífida. Exoesqueleto. https://www.espina-bifida.org/exoesqueleto/, 2013. Actualizado en 2019.

[2] Movard. Lokomat®. https://www.movard.es/productos/lokomat/, 2026.

[3] Technaid S.L. Exoesqueleto robótico Exo-H3. https://www.technaid.com/es/productos/robotic-exoskeleton-exo-h3/, 2024. Consultado el 22 de abril de 2025.

[4] Naylamp Mechatronics. Tutorial mpu6050, acelerómetro y giroscopio, 2025. Disponible en: https://naylampmechatronics.com/blog/45_tutorial-mpu6050-acelerometro-y-giroscopio.html.

[5] Martín A. Pucheta, Claudio J. Paz, and Maira E. Pereyra. Representaciones cinemáticas de orientación y ecuaciones de estimación, 2014. Disponible en: https://amcaonline.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/4828/4758.

[6] USC CTIN583. Imagen de referencia. https://ctin583.usc.edu/sp24/Homework/hw06/cita, 2024. Consultado el 22 de abril de 2025.

[7] Wikipedia contributors. Kalman filter, 2024. Wikipedia, The Free Encyclopedia. Versión revisada (oldid=1230233207).

[8] Xiaoping Yun, C. Aparicio, E.R. Bachmann, and R.B. McGhee. Implementation and experimental results of a quaternion-based kalman filter for human body motion tracking. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 317–322, 2005.

[9] Sebastian O. H. Madgwick. An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays. Internal report, University of Bristol, April 2010. Report x-io and University of Bristol (UK).

[10] Encuesta de discapacidad, autonomía personal y situaciones de dependencia. población residente en centros (edad centros):. marzo 2023, Disponible en:https://www.ine.es/prensa/edad_2020_p.pdf.

[11] HERNÁNDEZ N. Un ápice de esperanza para los pacientes con lesión medular en forma de terapia. *En: Diario Dicen*, 13 junio 2022, Disponible en: https://www.enfermeria21.com/diario-dicen/esperanza-pacientes-con-lesion-medular/.

[12] Organización Mundial de la Salud. Lesión de la médula espinal, April 2024. Nota descriptiva.

[13] J. Ramos-Rojas et al. Diseño conceptual de un robot de rehabilitación de la marcha pseudoestacionario. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 21(4):351–361, 2024.

[14] Wilo P. Díaz-Grefa, Gladis V. Portilla-Paguay, Cristian L. Ortiz-Cartagena, and Carmen K. Roman-Huera. Integración de exoesqueletos en la recuperación de pacientes con discapacidades motoras: hacia una nueva era en fisioterapia. *Journal of Economic and Social Science Research*, 4(1):77–98, 2024.

[15] Jonatan Rivera Robles et al. Exoesqueletos de rehabilitación: una revisión sistemática de literatura. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, 45(2):78–99, 2024.

[16] Jacquelin Perry and Judith M. Burnfield. *Gait Analysis: Normal and Pathological Function.* SLACK Incorporated, Thorofare, NJ, 2 edition, 2010.

[17] Montserrat Martínez Portillo. Exoesqueletos robóticos para rehabilitación: desarrollo, aplicaciones clínicas y perspectivas. *Repositorio Académico Ibero Puebla*, 2023. [en línea]. Disponible en: `https://hdl.handle.net/20.500.11777/6240`.

[18] Alessandro Ricca, Claudia Mazza, and Aurelio Cappozzo. Vision-based motion capture for the gait analysis of neurodegenerative diseases: A review. *Gait & Posture*, 111:1–12, May 2024.

[19] Jesús De Miguel-Fernández, Miguel Salazar-Del Rio, Marta Rey-Prieto, Cristina Bayón, Lluis Guirao-Cano, Josep M. Font-Llagunes, and Joan Lobo-Prat. Inertial sensors for gait monitoring and design of adaptive controllers for exoskeletons after stroke: a feasibility study. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 11:1208561, August 2023.

[20] R. Lopez, J. Torres, S. Salazar, and R. Lozano. Desarrollo de un exoesqueleto para rehabilitación de tobillo y rodilla. *Revista Mexicana de Ingenierá Biomédica*, 35(1):13–28, 2014. [en línea]. Disponible en: `http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0188-95322014000100004&lng=es&nrm=iso`.

[21] Manuel Alejandro Chavez Cardona, Felipe Rodriguez Spitia, and Asfur Baradica Lopez. Exoesqueletos para potenciar las capacidades humanas y apoyar la rehabilitación. *Revista Ingeniería Biomédica*, 4(7):63–73, 2010. [en línea]. Disponible en: `http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1909-97622010000100008&lng=en&nrm=iso`.

[22] Lingjie Zhang, Fabin Lin, Lei Sun, and Chunmei Chen. Comparison of efficacy of lokomat and wearable exoskeleton-assisted gait training in people with spinal cord injury: A systematic review and network meta-analysis. *Frontiers in Neurology*, 13:772660, 2022. [en línea]. Disponible en: `https://www.frontiersin.org/journals/neurology/articles/10.3389/fneur.2022.772660/full`.

[23] ABLE Human Motion. Beneficios de la rehabilitación robótica. https://www.ablehumanmotion.com/beneficios-de-la-rehabilitacion-robotica/, 2024. Consultado el 22 de abril de 2025.

[24] Jaime Ramos Rojas, Juan Carballeira, José Luis Pulloquinga, Juan Alejandro Castaño, Pedro Rafael Fernández, Julio Salvador Lora Millán, and Antonio José del Ama. Diseño e integración del sistema robótico ambulatorio Nimble para entrenamiento de marcha. *Simposios del Comité Español de Automática (CEA)*, 1(1), May 2025. Simposio CEA de Robótica, Bioingeniería, Visión Artificial y Automática Marina 2025.

[25] Nuno Ferrete Ribeiro and Cristina P. Santos. Inertial measurement units: A brief state of the art on gait analysis. In *Proceedings of the IEEE*, 2017. Disponible en: https://ieeexplore.ieee.org/document/7889458.

[26] David Fernando Pozo Espín. Diseño y construcción de una plataforma didáctica para medir ángulos de inclinación usando sensores inerciales como acelerómetro y giroscopio. Informe técnico / proyecto de fin de carrera, Escuela Politécnica Nacional, 2010. Disponible en: https://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/1794/1/CD-2772.pdf.

[27] Thomas Blesgen. On rotation deformation zones for finite-strain cosserat plasticity, 2015. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Thomas-Blesgen/publication/276852668_On_rotation_deformation_zones_for_finite-strain_Cosserat_plasticity/links/55fbe44808ae07629e07c60c/On-rotation-deformation-zones-for-finite-strain-Cosserat-plasticity.pdf.

[28] Richard M. Murray, Zexiang Li, and S. Shankar Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, 1994.

[29] James Diebel. *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors*. 2006.

[30] Jack B. Kuipers. *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality*. Princeton University Press, 1999.

[31] Aditya M. Deshpande. Quaternion rotation. https://adipandas.github.io/posts/2020/01/quaternion-rotation/, enero 2020. Blog personal, consultado en 2025.

[32] Sebastian O.H. Madgwick. An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays. Technical report, University of Bristol, abril 2010. Informe técnico, x-io Technologies and University of Bristol.

[33] Daniel Nenni. System on chip (soc) wiki. https://semiwiki.com/wikis/industry-wikis/system-on-chip-soc-wiki/, 2025. Publicado 16 Jul 2025; consultado 30 Ene 2026.

[34] G. Martin and H. Chang. System-on-chip design. In *ASICON 2001. 2001 4th International Conference on ASIC Proceedings (Cat. No.01TH8549)*, pages 12–17, 2001.

[35] Steve Furber. System-on-chip design. https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/0910/SysOnChip/socdam-notes1011.pdf, 2010. Lecture notes, Department of Computer Science.

[36] Urrea C. and Agramonte R. Kalman filter: Historical overview and review of its use in robotics 60 years after its creation. *Journal of Sensors*, September 2021, Disponible en: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1155/2021/9674015.

[37] LOTOTSKY S. A fresh look at the kalman filter. *SIAM Review*, 2015, Disponible en: https://dornsife.usc.edu/sergey-lototsky/wp-content/uploads/sites/211/2023/06/kalman-siam.pdf.

[38] Welch G. and Bishop G. An introduction to the kalman filter. *An Introduction to the Kalman Filter, Technical Report TR 95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill*, Jul., Disponible en: https://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf 2006.

[39] Bueno Lara A. Apéndice b: El filtro de kalman. *Mapeo de la vía del sistema digestivo por localización híbrida de una cápsula endoscópica microrobótica : Apéndice B: El filtro de Kalman*, 2020, Disponible en: https://ereding.etsi.us.es/bibing/proyectos/use/abreproy/11611/ 2020.

[40] Martín A. Pucheta, Claudio J. Paz, and Maira E. Pereyra. Representaciones cinemáticas de orientación y ecuaciones de estimación, 2014. Disponible en: https://amcaonline.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/4828/4758.

[41] Mario Garcia. Madgwick orientation filter. https://ahrs.readthedocs.io/en/latest/filters/madgwick.html, 2024. AHRS Documentation. Accedido: 8 de julio de 2026.

[42] David Segarra, Jessica Caballeros, Wilbert Aguilar, Albert SamÃ  MonsonÃs, and Daniel RodrÃguez-MartÃn. *Orientation Estimation Using Filter-Based Inertial Data Fusion for Posture Recognition*, pages 220–233. 01 2019.

[43] Technaid S.L. Sistema de captura de movimiento Tech-MCS. https://www.technaid.com/es/productos/motion-capture-system/, 2026. Consultado el 8 de julio de 2026.

# Apéndice A

# Detalles de implementación del filtro de Madgwick

Para abordar el Filtro de Madgwick se utilizó la implementación en C contenida en el archivo `MadgwickAHRS.c`. El filtro está compuesto por dos funciones principales: `MadgwickAHRSupdate()`, que contiene la implementación completa del filtro con soporte para magnetómetro, cuya función es averiguar la posición angular de un objeto dentro de un espacio 3D en movimiento. Esta función establece los parámetros iniciales del filtro, entre ellos el periodo de muestreo (`sampleFreq = 10 Hz`), el cuaternión de referencia y la ganancia beta ($\beta$).

A partir de las tasas de cambio angular del giroscopio, el filtro calcula la derivada del cuaternión y subsana el error de orientación tomando como base los datos del acelerómetro y del magnetómetro. Seguidamente, actualiza el cuaternión mediante la integración de dicha derivada y la aplicación de las correcciones oportunas, para terminar con una normalización que preserva su magnitud. La estructura de datos `MadgwickFilt` almacena el estado del filtro ($q_0$, $q_1$, $q_2$, $q_3$), y se inicializa mediante la función `Madgwick_INIT()` antes de la primera llamada al algoritmo de actualización.

A continuación, se examina con detalle el funcionamiento del Filtro de Madgwick y la base matemática utilizadas en el proceso, que puede desglosarse en distintas fases.

- **1. Inicialización**

  El proceso arranca con la inicialización de los parámetros fundamentales mediante la función `Madgwick_INIT()`. Se establece el período de muestreo (1/`sampleFreq`), el cuaternión de referencia y la ganancia beta ($\beta$). El cuaternión inicial se fija al cuaternión identidad, que corresponde a la ausencia de rotación:

  $$q_0 = [1,\ 0,\ 0,\ 0] \tag{A.1}$$

  Esto equivale a decir que, en el instante inicial, el sistema de referencia del sensor coincide con el sistema de referencia global. El parámetro beta y zeta debe ser un valor positivo; en la implementación realizada se emplea `beta = 0.5f` como valor operativo.

- **2.Normalización de las lecturas del acelerómetro y del magnetómetro**

  Primeramente, las lecturas del acelerómetro y del magnetómetro se normalizan para prevenir cualquier error ocasionado por la magnitud variable de los datos. Dicha normalización es fundamental, puesto que asegura una comparación correcta entre las mediciones y la orientación estimada, eliminando las diferencias de escala y permitiendo una fusión de datos exacta.

  La normalización de un vector **a** (acelerómetro) y un vector **m** (magnetómetro)e efectúa dividiendo cada componente del vector entre su norma:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \tag{A.2}$$

$$\hat{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{m}}{\|\mathbf{m}\|} \tag{A.3}$$

  Donde $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{m}\|$ denotan la magnitud de los vectores acelerómetro y magnetómetro, respectivamente, determinada como:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{A.4}$$

$$\|\mathbf{m}\| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \tag{A.5}$$

  En la implementación en C, esta normalización se realiza mediante la función `invSqrt(x)`, que calcula de forma eficiente el recíproco de la raíz cuadrada usando técnicas de manipulación de bits. Cada componente del vector se multiplica por este recíproco, obteniendo el vector unitario. Si las medidas del acelerómetro son todas nulas ($a_x = a_y = a_z = 0$), el bloque de corrección se omite completamente para evitar divisiones por cero y resultados NaN.

- **3. Obtención del vector de campo magnético**

  Con las mediciones del magnetómetro ya normalizadas, el siguiente paso consiste en hallar el vector de referencia del campo magnético, para lo cual se combinan el cuaternión actual y esas mediciones. La importancia de este vector radica en que sitúa la dirección del campo magnético dentro del marco terrestre, requisito indispensable para lograr una estimación fiable de la orientación.

  El vector del campo magnético **h** se calcula como:

$$\mathbf{h} = q \otimes (0,\ m_x,\ m_y,\ m_z) \otimes q^* \tag{A.6}$$

  Donde, $q$ representa el cuaternión vigente, $\otimes$ hace referencia al producto de cuaterniones, $(0, m_x, m_y, m_z)$ constituye el cuaternión que representa el vector normalizado del magnetómetro y $q^*$ es el conjugado de $q$.

Gracias a esta operación, las lecturas del magnetómetro dejan de estar referidas al propio sensor y quedan expresadas en el sistema global, tomando como base la orientación que en ese instante tiene el sensor, codificada en el cuaternión $q$.

Tras ello, se separa el vector **b** encargado de describir cómo queda proyectado el campo magnético dentro del marco global. En la implementación, esto se corresponde con las variables `_2bx` y `_2bz`, que contienen respectivamente la componente horizontal y vertical del campo de referencia:

$$\mathbf{b} = \big(0,\ \|h_{x,y}\|,\ 0,\ h_z\big) \tag{A.7}$$

Siendo $\|h_{x,y}\|$ la magnitud del vector **h** sobre los ejes $x$ e $y$, y $h_z$ es la componente del eje $z$.

- **4. Cálculo de las variables auxiliares del cuaternión**

  Antes de evaluar el gradiente, el algoritmo precomputa una serie de variables auxiliares que combinan los componentes del cuaternión actual para evitar operaciones repetidas. Estas variables incluyen los productos cruzados de los componentes del cuaternión ($q_0q_1$, $q_0q_2$, $q_1q_2$, etc.) y sus cuadrados ($q_0^2$, $q_1^2$, $q_2^2$, $q_3^2$), así como versiones escaladas por 2 de los componentes y versiones escaladas del campo magnético:

$$_2q_0 = 2q_0, \quad _2q_1 = 2q_1, \quad _2q_2 = 2q_2, \quad _2q_3 = 2q_3 \tag{A.8}$$

$$q_0^2, \quad q_1^2, \quad q_2^2, \quad q_3^2 \tag{A.9}$$

  Esta precomputación es una optimización para reducir la carga computacional en los microprocesadores embebidos, evitando multiplicaciones redundantes durante el cálculo del paso de gradiente. Esta técnica es característica del diseño orientado a sistemas de bajo coste, como los microcontroladores STM32 o similares donde se suele desplegar este tipo de filtros.

- **5. Estimación del error de orientación**

  Se entiende por error de orientación la diferencia existente entre la orientación estimada mediante el cuaternión y la que registran los sensores inerciales (acelerómetro y magnetómetro). El vector de error **f** se define como una función objetivo cuya minimización hace que la orientación estimada sea coherente con las medidas de los sensores. En la versión completa con magnetómetro, este vector tiene seis componentes:

$$f_1 = 2(q_1q_3 - q_0q_2) - a_x \tag{A.10}$$

$$f_2 = 2(q_0q_1 + q_2q_3) - a_y \tag{A.11}$$

$$f_3 = 2\big(\tfrac{1}{2} - q_1^2 - q_2^2\big) - a_z \tag{A.12}$$

Los tres primeros términos cuantifica el desajuste entre la gravedad detectada por el acelerómetro y la que se deduce del cuaternión. Los tres términos restantes, cuando se emplea magnetómetro, comparan el valor del campo magnético medido con el estimado.

- **6. Cálculo del gradiente descendente (paso de corrección)**

  Se determina el gradiente de la función de error en relación con el cuaternión, el cual indica la forma en que se altera el error al variar los componentes de dicho cuaternión. El paso de corrección $(s_0, s_1, s_2, s_3)$ equivale al producto del Jacobiano traspuesto por la función de error. Para la versión IMU sin magnetómetro (`MadgwickAHRSupdateIMU`), las expresiones simplificadas son:

$$s_0 = _4q_0 \cdot q_2^2 + _2q_2 \cdot a_x + _4q_0 \cdot q_1^2 - _2q_1 \cdot a_y \tag{A.13}$$

$$s_1 = _4q_1 \cdot q_3^2 - _2q_3 \cdot a_x + 4q_0^2 q_1 - _2q_0 \cdot a_y - _4q_1 + _8q_1 \cdot q_1^2 + _8q_1 \cdot q_2^2 + _4q_1 \cdot a_z \tag{A.14}$$

$$s_2 = 4q_0^2 q_2 + _2q_0 \cdot a_x + _4q_2 \cdot q_3^2 - _2q_3 \cdot a_y - _4q_2 + _8q_2 \cdot q_1^2 + _8q_2 \cdot q_2^2 + _4q_2 \cdot a_z \tag{A.15}$$

$$s_3 = 4q_1^2 q_3 - _2q_1 \cdot a_x + 4q_2^2 q_3 - _2q_2 \cdot a_y \tag{A.16}$$

  Una vez calculado, el gradiente se normaliza para que su magnitud sea constante:

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}, \quad \text{donde } \|\mathbf{s}\| = \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \tag{A.17}$$

- **7. Cálculo de la tasa de cambio del cuaternión desde el giroscopio**

  La relación cinemática del cuaternión establece que la derivada temporal del cuaternión de orientación puede obtenerse a partir del cuaternión actual y el vector de velocidad angular del giroscopio $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ en rad/s. Para empezar, se establece el cuaternión del giroscopio:

$$q_\omega = (0,\ \omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z) \tag{A.18}$$

  La derivada temporal del cuaternión de orientación se calcula como:

$$\dot{q} = \tfrac{1}{2}\, q \otimes q_\omega \tag{A.19}$$

  Expandiendo el producto de cuaterniones:

$$\dot{q}_1 = \tfrac{1}{2}(-q_1\omega_x - q_2\omega_y - q_3\omega_z) \tag{A.20}$$

$$\dot{q}_2 = \tfrac{1}{2}(\ \ q_0\omega_x + q_2\omega_z - q_3\omega_y) \tag{A.21}$$

$$\dot{q}_3 = \tfrac{1}{2}(\ \ q_0\omega_y - q_1\omega_z + q_3\omega_x) \tag{A.22}$$

$$\dot{q}_4 = \tfrac{1}{2}(\ \ q_0\omega_z + q_1\omega_y - q_2\omega_x) \tag{A.23}$$

Sin ninguna corrección adicional, integrar esta derivada produciría una deriva acumulativa en la estimación de la orientación, razón por la cual el paso siguiente aplica la corrección calculada en la fase anterior.

- **8. Aplicación del paso de corrección y fusión**

  La corrección al cuaternión se aplica ponderando el gradiente normalizado por el factor de ganancia $\beta$. La derivada corregida del cuaternión se obtiene restando esta contribución del gradiente a la derivada calculada a partir del giroscopio:

$$\dot{q}_{\text{corr}} = \dot{q}_{\text{gyro}} - \beta \cdot \hat{\mathbf{s}} \tag{A.24}$$

  De forma expandida para cada componente:

$$\dot{q}_1 \mathrel{-}= \beta \cdot s_0 \tag{A.25}$$
$$\dot{q}_2 \mathrel{-}= \beta \cdot s_1 \tag{A.26}$$
$$\dot{q}_3 \mathrel{-}= \beta \cdot s_2 \tag{A.27}$$
$$\dot{q}_4 \mathrel{-}= \beta \cdot s_3 \tag{A.28}$$

  Un valor de $\beta$ elevado dará más peso a la corrección procedente de acelerómetro y magnetómetro, mientras que un valor bajo confiará más en la integración pura del giroscopio, reduciendo la sensibilidad al ruido de los sensores de referencia.

- **9. Cálculo integral y normalización del cuaternión**

  Como paso final, se integra la tasa de cambio previamente calculada para renovar el cuaternión y, acto seguido, se normaliza el resultado con objeto de que su magnitud no se aleje de la unidad. La actualización se realiza mediante el método de integración de Euler de primer orden, utilizando el período de muestreo (1/`sampleFreq`):

$$q = q + \dot{q} \cdot \frac{1}{\texttt{sampleFreq}} \tag{A.29}$$

  De forma expandida:

$$q_0 \mathrel{+}= \dot{q}_1 \cdot \frac{1}{\texttt{sampleFreq}} \tag{A.30}$$
$$q_1 \mathrel{+}= \dot{q}_2 \cdot \frac{1}{\texttt{sampleFreq}} \tag{A.31}$$
$$q_2 \mathrel{+}= \dot{q}_3 \cdot \frac{1}{\texttt{sampleFreq}} \tag{A.32}$$
$$q_3 \mathrel{+}= \dot{q}_4 \cdot \frac{1}{\texttt{sampleFreq}} \tag{A.33}$$

  Después de actualizar el cuaternión, se normaliza mediante la función `invSqrt()`:

$$\hat{q} = \frac{q}{\|q\|}, \quad \text{donde } \|q\| = \frac{1}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \tag{A.34}$$

La normalización es crucial para asegurar que el cuaternión siga siendo una representación válida de la orientación en el espacio tridimensional, evitando que los errores numéricos acumulativos afecten la precisión de la estimación. Una vez calculado el cuaternión normalizado, sus componentes se almacenan de vuelta en la estructura `MadgwickFilt` (`f->q0`, `f->q1`, `f->q2`, `f->q3`), quedando disponibles para la siguiente iteración del filtro y para el posterior cálculo de los ángulos de Euler (*roll*, *pitch*, *yaw*).

Esto equivale a decir que, en el instante inicial, el sistema de referencia del sensor coincide con el sistema de referencia global. El parámetro beta debe ser un valor positivo; en la implementación analizada se emplea `beta = 0.5f` como valor operativo.

# Apéndice B

# Código fuente del proyecto

Con el fin de favorecer la reproducibilidad del trabajo y facilitar su consulta, todo el código desarrollado en este proyecto, incluyendo el diseño hardware realizado en Vivado, el software en Vitis IDE con la implementación del filtro de Madgwick y los scripts de adquisición y análisis de datos, se encuentra disponible públicamente en el siguiente repositorio de GitHub: `https://github.com/rubennc91/TFG_DiegoGalindo_2025`.

Universidad
Rey Juan Carlos